«УТВЕРЖДАЮ»

Директор Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН
профессор, член-корр. РАН

В.В. Лебедев

08.12.2016

В Ы П И С К А

Из протокола заседания сектора Математической физики
Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН
от 9 декабря 2016 г.

(заключение о диссертации В.Г. Марихина "Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем")

СЛУШАЛИ: доклад В.Г. Марихина о диссертации "Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем", представляемой на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

ПОСТАНОВИЛИ: принять следующее заключение о диссертации В.Г. Марихина.

Диссертационная работа В.Г. Марихина посвящена исследованию двух- и трех-компонентных квазиштеккелевых гамильтонианов, в классическом и квантовом случаях, развитию метода получения преобразований Беклунда, основанного на инвариантности вариации действия, применению метода одевания к системам с разделенными переменными, представлению кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве PII–PIV, классификации скалярных динамических систем с квадратичной нелинейностью в представлении Фурье. В диссертации рассмотрен широкий круг задач, связанных с ее тематикой, получен целый ряд новых важных результатов.

В первой главе рассматриваются системы с двумя и тремя степенями свободы. Введено понятие квазиштеккелевого гамильтониана. Доказана теорема о том, что любая пара коммутирующих (в смысле канонической скобки Пуассона) гамильтонианов, квадратичных по импульсам, может быть приведена к паре коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов композицией точечного и канонического преобразований в том случае, если точечное преобразование, зависящее от коэффициентов при старших членах по импульсам первоначальных гамильтонианов, невырождено. Получены необходимые и достаточные условия коммутирования квазиштеккелевых гамильтонианов. Для каждого случая выведен универсальный метод получения алгебраической кривой, не использующий представления Лакса, получена функция Гамильтона–Якоби в переменных координаты–значения гамильтонианов на поверхности уровня. Для вывода этого метода используется техника резольвент Лагранжа, которая позволяет записать решение для четырех переменных (координат и импульсов) в виде функций от трех переменных. Данное преобразование позволяет получить метод "частичного" разделения переменных. Рассмотрены примеры квазиштеккелевых гамильтонианов, связанных с классическими волчками Клебша, Шоттки–Манакова, Стеклова и волчком Ковалевской с гиростатом, вычислены соответствующие алгебраические кривые. Отдельно рассмотрен случай движения заряженной частицы в электромагнитном поле. В этом примере проведена полная классификация соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов. Определено понятие квазиштеккелевого гамильтониана в 3-мерном случае. Показано, что в этом случае условия инволюции всех трех гамильтонианов приводят лишь к одному случаю 3-мерных коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов, зависящих от полинома третьей степени, с точностью до коэффициентов этого полинома. В случае, когда этот полином — константа, приводится точное решение этого примера в квадратурах.

Во второй главе классический случай квазиштеккелевых гамильтонианов обобщен на квантовый. Получен и доказан аналог вышеуказанной теоремы для квантового случая, причем гамильтониан и дополнительный интеграл в оригинальных переменных и соответствующая пара квазиштеккелевых гамильтонианов имеют эрмитов вид. Также получены необходимые и достаточные условия коммутирования квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов. В отличие от классического случая, в квантовом случае в одном из двух этих условий появляются квантовые поправки. Особое место в квантовом случае занимает класс квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному уравнению Шрединера с дополнительным интегралом, квадратичным по операторам импульса. Получен общий вид точечного обратимого преобразования к квазиштеккелевым гамильтонианам, зависящего от трёх параметров, связанных одним алгебраическим соотношением. Показано, что в случае уравнения Шредингера одна из определяющих функций $S(x)$ всегда является полиномом 2-ой степени. Этот факт позволяет провести полную классификацию соответствующих пар квазиштекккелевых гамильтонианов в этом классе. Как результат, получено "общее" решение, а также 5 изолированных решений. При переходе к классическому пределу остается "общее" решение и 3 изолированных. Отмечено, что при произвольных параметрах точечного преобразования к уравнению Шредингера не удается получить новые уравнения из-за недостатка вычислительной мощности. Произведена редукция параметров. Получены как известные, так и неизвестные примеры уравнения Шредингера с электромагнитным полем. Получены два новых примера уравнения Шредингера с ненулевым магнитным полем, относящиеся к классу "почти точно решаемых" задач. Эти примеры проинтегрированы в терминах функций Гойна. Определение дискретного спектра и волновых функций сведено к решению алгебраического уравнения, которое может быть проделано численно, что и означает термин "почти точно решаемые" задачи.

В третьей главе рассмотрены пары коммутирующих дифференциальных операторов. Приведены квантовые аналоги интегрируемых волчков, таких, как волчки Клебша, Ковалевской, случай Горячева–Чаплыгина на алгебре $e(3)$, волчки Шоттки–Манакова, Стеклова, М. Адлера–ван Мёрбеке, Соколова на алгебре $so(4)$. Квантование по крайней мере последних двух волчков является новым. В результате квантования, добавляются соответствующие квантовые поправки в гамильтониан и дополнительный интеграл этих волчков. Показано, что в ряде случаев можно к квадратичной части волчка добавить некоторую линейную часть. Генераторы соответствующих алгебр представлены в виде дифференциальных операторов первого порядка — аналогов координат Дарбу. При подстановке дифференциального представления этих генераторов в гамильтониан и в соответствующий дополнительный интеграл этих волчков, получается пара коммутирующих дифференциальных операторов. Получены уравнения для спектров ряда волчков используя их дифференциальное представление. Получено необходимое условие интегрируемости пары коммутирующих дифференциальных операторов определенного вида, как факторизация полинома от x, y определяемого коэффициентами при старших производных операторов.

В четвертой главе исследуется метод получения преобразования Беклунда лагранжевых систем, заключающийся в инвариантности вариации действия до и после применения преобразования Беклунда. Сначала рассмотрены так называемые $u - v$ системы типа нелинейного уравнения Шредингера. Получено их преобразование к гамильтоновой форме с канонической скобкой Пуассона. В этом и других случаях получена производящая функция канонического преобразования, не меняющего вариацию гамильтонианов при применении преобразования Беклунда, что эквивалентно сохранению вариации действия. Получены производящие функции для ряда примеров таких, как дивергентные системы, уравнение Ландау–Лифшица, уравнения КдФ, уравнения Кричевера–Новикова и др. систем. Интересно, что такие уравнения как КдФ и уравнение Кричевера–Новикова удалось записать в лагранжевом виде. Впервые получено преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, содержащее только полевые переменные и их производные по координатам. Композиция преобразований Беклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера, порождает треугольную решетку. Изучены все преобразования Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви–Стюартсона. Комбинируя эти преобразования и используя преобразования Миуры, переводящие 2-мерную цепочку Тоды в 2-мерную цепочку Вольтерры и далее в 2-мерную цепочку Гейзенберга, удается построить трехмерную октаэдрическую решетку преобразований Беклунда в виде уравнений Хироты. Одно из этих уравнений совпадает со знаменитым чисто дискретным уравнением Хироты.

В пятой главе исследуется синтез метода одевания и разделения переменных в двумерном случае, а именно: одевание гамильтониана, в котором переменные изначально разделены, приводит к интегрируемому гамильтониану, в котором разделения переменных уже нет. Метод применен к одной известной задаче, решение которой было ранее получено путем цепочки нетривиальных манипуляций. Применение метода одевания (точнее раздевания гамильтониана, в котором нет разделения переменных до гамильтониана, где это разделение появляется) в этом случае, позволяет легко найти ответ. Подход обобщен до общего случая квадратичных по операторам импульсов гамильтониана. Метод применен для операторов типа операторов Шредингера с магнитным полем, где получен общий ответ.

В шестой главе рассматриваются рациональные решения ряда динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера, в частности, системы Леви. Получены уравнения динамики полюсов и преобразования Беклунда для этих решений. Показано, что возможна редукция этих решений в рациональные решения уравнения Пенлеве IV, причем уравнения динамики полюсов переходят в стационарные уравнения для двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале. Соответствующие кулоновские системы получены для уравнений Пенлеве $PII - -PIV$. Выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений $PV - -PVI$. С помощью гамильтоновского формализма построено спиновое представление для уравнений Пенлеве.

В седьмой главе рассматривается классификация скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в Фурье-пространстве. Такой подход приводит к необходимости исследования функциональных уравнений, что позволяет получить замкнутый ответ. Классификация разделяется на два этапа — сначала определяется класс бездисперсионных уравнений, а затем класс систем с дисперсией получен как подкласс "бездисперсионного" класса. Функциональные уравнения сводятся к дифференциальным, анализ решений которых приводит к полному ответу. В результате, в дисперсионном подклассе получены такие известные системы как КдВ, уравнение промежуточной воды (ILW), системы Камасса–Холма и система Дегаспериса. Анализ показывает, что других систем в подклассе дисперсионных систем нет. Что касается бездисперсионного класса, то среди его представителей есть новые системы.

В конце этой главы исследуется динамика уровней энергии при добавлении примеси в любую квантовую систему. Показано, что эта динамика подчиняется одному из многочастичных "gold-fish" уравнений Калоджеро. Изучение этой простой квантовомеханической задачи позволяет решить общую задачу Коши для данного уравнения Калоджеро чисто алгебраически.

Основные результаты, представленные в диссертации, получены впервые. Диссертация имеет существенную теоретическую ценность. Развитые в работе методы могут быть использованы для решения широкого круга задач в теории интегрируемых уравнений. В диссертации получены и проинтегрированы новые примеры "почти точно решаемых" двумерного уравнения Шредингера с магнитным полем, получены производящие функции канонических преобразований Беклунда для ряда систем. Получены новое преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, представление кулоновского газа для уравнений Пенлеве PII–PIV, новые бездисперсионные уравнения с квадратичной нелинейностью. Задача Коши для одного многочастичного уравнения Калоджеро проинтегрирована алгебраически.

Данные результаты существенно обогащают теорию интегрируемых систем.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

[1] Адлер В.Э., Марихин В.Г., Шабат А.Б. Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов // Теор. Мат. Физ. — 2012. — Т. 172, № 3. — С. 355–374.

[2] Адлер В.Э., Марихин В.Г., Шабат А.Б. Лагранжевы цепочки и канонические преобразования Беклунда // Теор. Мат. Физ. — 2001. — Т. 129, № 2. — С. 163–183.

[3] Марихин В.Г. Гамильтонова теория интегрируемых обобщений нелинейного уравнения Шредингера // Письма в ЖЭТФ. — 1997. — Т. 66, № 11. — С. 673–678.

[4] Марихин В.Г. Действие как инвариант преобразований Беклунда лагранжевых систем // Теор. Мат. Физ. — 2015. — Т. 184, № 1. — С. 71-78.

[5] Марихин В.Г. Динамика электронных уровней в присутствии примеси и модель Руйзенарса-Шнайдера // Письма в ЖЭТФ. — 2003. — Т. 77, № 1. — С. 48–50.

[6] Marikhin V.G. Integrable systems with quadratic nonlinearity in Fourier space // Phys. Lett. — 2003. — Vol. A310. — Pp. 60–66.

[7] Марихин В.Г. Квазиштеккелевы системы и двумерные уравнения Шредингера в электромагнитном поле // Теор. Мат. Физ. — 2013. — Т. 177, № 1. — С. 83–92.

[8] Марихин В.Г. Метод одевания и разделение переменных. Двумерный случай // Теор. Мат. Физ. — 2009. — Т. 161, № 3. — С. 327-331.

[9] Марихин В.Г. О двумерном уравнении Шредингера в магнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом движения // Письма в ЖЭТФ. — 2011. — Т. 94, № 3. — С. 262–266.

[10] Марихин В.Г. О классическом движении заряженной частицы в электромагнитном поле в двумерии с дополнительным квадратичным интегралом движения // Письма в ЖЭТФ. — 2013. — Т. 97, № 1. — С. 491–495.

[11] Марихин В.Г. О некоторых решениях двумерных уравнений типа Шредингера в магнитном поле // Теор. Мат. Физ. — 2011. — Т. 168, № 2. — С. 219–226.

[12] Marikhin V.G. On three-dimensional quasi-Stackel Hamiltonians // J. Phys. — 2014. — Vol. A47. — P. 175201.

[13] Марихин В.Г. Представление кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве // Теор. Мат. Физ. — 2001. — Т. 127, №2. — С. 284–303.

[14] Марихин В.Г. Трехмерная решетка преобразований Бэклунда интегрируемых случаев системы Дэви - Стюартсона // Теор. Мат. Физ. — 2016. — Т. 189, № 3. — С.361-369.

[15] Marikhin V.G. Two new integrable cases of two-dimensional quantum mechanics with a magnetic field // Письма в ЖЭТФ. — 2016. — Т. 103, № 7. — С.552-556.

[16] Марихин В.Г., Шабат А.Б. Интегрируемые решетки // Теор. Мат. Физ. — 1999. — Т. 118, № 2. — С. 217–228.

[17] Марихин В.Г., Шабат А.Б., Бойти М., Пемпинелли Ф. Автомодельные решения типа нелинейного уравнения Шредингера // ЖЭТФ. — 2000. — Т. 117, № 3. — С. 634–643.

[18] Марихин В.Г., Соколов В.В. О квазиштеккелевых гамильтонианах // Успехи мат. наук. — 2005. — Т.60, № 5. — С. 175-176.

[19] Марихин В.Г., Соколов В.В. Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам // Теор. Мат. Физ. — 2006. — Т. 149, №2. — С. 147–160.

[20] Marikhin V.G., Sokolov V.V. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve // Regul. Chaotic Dyn. — 2005. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 59–70.

[21] Marikhin V.G., Sokolov V.V. Transformation of a pair of commuting Hamiltonians quadratic in momenta to a canonical form and on a partial real separation of variables for the Clebsch top // Regul. Chaotic Dyn. — 2010. — Vol. 15, no. 6. — Pp. 652–658.

Опубликованные по теме диссертации работы в достаточной мере отражают её содержание. Уровень и объём проведенного исследования, актуальность и новизна полученных результатов свидетельствуют о том, что диссертация В.Г. Марихина "Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК России к докторским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

На основании вышеизложенного сектор Математической физики Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН рекомендует диссертацию В.Г. Марихина "Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем" к публичной защите по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Заведующий сектором
математической физики
ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН
с.н.с, д.ф.-м.н. В.Э. Адлер

9 декабря 2016 г.