ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу
Марихина Владимира Георгиевича "Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем", представленную на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности
01.01.03 – математическая физика

Диссертация посвящена исследованию проблем теории интегрируемых систем. Основное внимание уделено исследованию квазиштеккелевых гамильтонианов, их квантовых аналогов, коммутирующих дифференциальных операторов второго порядка (по двум переменным), связанных и с квантовыми волчками, преобразованию Беклунда и исследованию динамики полюсов рациональных решений системы Леви.

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. В главе 1 рассматриваются квазиштеккелевы гамильтонианы, введенные автором. Доказана теорема о возможности преобразования пары коммутирующих квадратичных по импульсам гамильтонианов с двумя степенями свободы к паре квазиштеккелевых гамильтонианов с помощью точечного и канонического преобразования (теорема 1.2). Получен метод «частичного» разделения переменных. Установлена связь между квазиштеккелевыми гамильтонианами и классическими волчками, такими как волчок Клебша, Шоттки–Манакова, Стеклова и волчок Ковалевской с гиростатом. Проведена классификация трехкомпонентных квазиштеккелевых гамильтонианов.

В главе 2 рассматривается квантовый аналог квазиштеккелевых гамильтонианов. Доказано, что пара коммутирующих дифференциальных операторов по двум переменным с помощью замены координат и калибровочного преобразования может быть приведена к некоторому каноническому виду. С помощью развитых в этой главе методов, получены два новых интегрируемых примера уравнения Шредингера с ненулевым магнитным полем. Эти примеры проинтегрированы в терминах вырождений функций Гойна. Волновые функции и спектр определяются решением алгебраических уравнений, эквивалентных условиям полиномиальности соответствующих функций Гойна.

В главе 3 рассмотрены пары коммутирующих дифференциальных операторов. Приведены квантовые аналоги интегрируемых волчков, таких как волчки Клебша, Ковалевской, случай Горячева–Чаплыгина на алгебре $e(3)$, волчки Шоттки–Манакова, Стеклова, М. Адлера–ван Мёрбеке, Соколова на алгебре $so(4)$. Квантование, по крайней мере последних двух волчков, является новым. Получено необходимое условие интегрируемости пары коммутирующих дифференциальных операторов определенного вида посредством факторизации двумерного полинома, который определяется главной частью соответствующего дифференциального оператора.

В главе 4 развит метод преобразования Беклунда лагранжевых систем, при котором вариация действия инвариантна. Сначала рассмотрены так называемые $u-v$ системы типа нелинейного уравнения Шредингера. Получено их преобразование к гамильтоновой форме с канонической скобкой Пуассона. В этом и других случаях получена производящая функция канонического преобразования, не меняющего вариацию гамильтонианов при применении преобразования Беклунда. Получены производящие функции для ряда примеров таких, как дивергентные системы, уравнение Ландау–Лифшица, уравнения КдФ, уравнения Кричевера–Новикова и других систем. Впервые получено преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, содержащее только функции и их производные по координатам. Показано, что совместное использование обычных и релятивистских преобразований Беклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера позволяет построить треугольную решетку этих преобразований. Исследованы все преобразования Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви–Стюартсона. Построена трехмерная октаэдрическая решетка преобразований Беклунда этой системы в виде уравнений Хироты.

Глава 5 посвящена методу одевания. Этот метод применяется к операторам второго порядка с изначально разделенными переменными, что приводит к получению интегрируемых операторов типа Шредингера, в которых разделения переменных уже нет.

В главе 6 рассматриваются рациональные решения системы Леви. Получены уравнения динамики полюсов и преобразования Беклунда для этих решений. Продемонстрировано, что возможна редукция этих решений в рациональные решения уравнения Пенлеве PIV, причем уравнения динамики полюсов переходят в стационарные уравнения для двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале. Соответствующие кулоновские системы получены для уравнений Пенлеве $PII-PIV$. Выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений $PV-PVI$. С помощью гамильтонового формализма построено спиновое представление для уравнений Пенлеве.

В главе 7 рассматривается классификация скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в представлении Фурье. Показано, что новых уравнений с дисперсией среди систем этого класса нет. В то же время получены новые бездисперсионные системы с квадратичной нелинейностью. В конце главы исследуется динамика уровней энергии при добавлении примеси в любую квантовую систему. Показано, что эта динамика подчиняется одному из многочастичных, так называемых "gold-fish" уравнений Калоджеро. Изучение этой простой квантовомеханической задачи позволяет решить общую задачу Коши для данного уравнения чисто алгебраически.

Основные результаты диссертации являются новыми и представляют собой важный вклад в теорию интегрируемых систем. Работа выполнена на высоком научном уровне. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Считаю, что диссертация отвечает критериям положения ВАК о порядке присуждения учёных степеней, а её автор Марихин Владимир Георгиевич заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент,
ведущий научный сотрудник, Миронов Андрей Евгеньевич
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН 29 мая 2017

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
630090 г. Новосибирск, пр. акад. Коптюга 4,
Тел. +7 (383) 333-27-93,
e-mail: mironov@math.nsc.ru

Подпись А.Е.Миронова удостоверяю:
Ученый секретарь ИМ СО РАН
к.ф.-м.н. И.Е.Светов