ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Марихина Владимира Георгиевича "Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем", представленную на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Диссертация В.Г.Марихина посвящена изучению классических и квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов, их связям с классическими волчками и задачей описания коммутирующих квадратичных по импульсам гамильтонианов, развитию теории преобразований Беклунда и ряду других важных проблем теории интегрируемых систем и математической физики.

Актуальность темы. Теория интегрируемых систем является важным и динамично развивающимся разделом современной математической физики, имеющим приложения в различных областях. Квазиштеккелевы гамильтонианы несомненно представляют собой интересный, актуальный и важный объект исследования в теории интегрируемых систем. Объекты, аналогичные квазиштеккелевым гамильтонианам, появлялись в литературе ранее, в частности, в работе Е.В.Ферапонтова и А.П.Форди, а также Х.М.Яхьи, их изучение представляет большой интерес. Отметим, что объекты, сходные с квазиштеккелевыми гамильтонианами с тремя степенями свободы, которые частично исследованы в данной диссертации, ранее вообще не изучались. Что касается квантовых аналогов квазиштеккелевых систем, то эта тема не получила должного освещения в литературе, в отличие от квантовых штеккелевых гамильтонианов, которые изучались, в частности, в работе М.Блазака, А.Сергеева и др. Проблема интегрируемых случаев двумерного уравнения Шредингера в электромагнитном поле изучается довольно давно, однако до сих пор до конца не изучена и требует дальнейших исследований. Наличие преобразований Беклунда (ПБ) характеризует интегрируемые системы и позволяет «размножать» решения системы, начиная с любого ее решения. Методы одевания и разделения переменных являются чрезвычайно эффективными для исследования интегрируемых систем. Уравнения Пенлеве ($PI - PVI$) в настоящее время привлекают пристальное внимание благодаря их важной роли в различных областях физики и математики. Метод представления дифференциальных нелинейных уравнений в пространстве Фурье чрезвычайно эффективен при классификации различных типов динамических интегрируемых систем. Развитие этих методов и подходов и создание на их основе новых методов исследования уравнений математической физики является чрезвычайно важным.

Методы исследования. В диссертационной работе В.Г.Марихина использованы такие методы, как тест Пенлеве, который является часто применяемым способом проверки интегрируемости системы, а также чрезвычайно эффективным методом, позволяющим избавиться от неинтегрируемых случаев; представление Лакса, которое является основным методом для построения интегрируемых систем и высших симметрий для них; метод одевания, который использовался для построения новых систем, начиная с систем с разделенными переменными и др. Эти методы исследования являются классическими в теории интегрируемых систем. Некоторые методы, используемые в диссертации, введены автором – приведение квадратичных коммутирующих гамильтонианов к квазиштеккелеву виду, благодаря чему значительно упрощается исследование системы; метод получения алгебраических кривых соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов; метод «частичного разделения переменных»; а также использование пары Лакса в Фурье-пространстве для динамических систем с квадратичной нелинейностью.

Структура диссертации и основные результаты. Диссертация состоит из Введения, семи глав, Заключения и Списка литературы, содержащего 167 наименований. Общий объем диссертации составляет 220 страниц.

В первой главе введено понятие канонической формы квазиштеккелевого гамильтониана. Установлена связь между квазиштеккелевыми гамильтонианами и парами коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, а также с классическими интегрируемыми волчками. Выведен универсальный метод получения алгебраической кривой, получена функция Гамильтона–Якоби, зависящая от координат и значений гамильтонианов на поверхности уровня. Данное преобразование позволяет получить метод «частичного» разделения переменных. Определено понятие квазиштеккелевого гамильтониана в трехмерном случае. Показано, что эти гамильтонианы зависят от полинома третьей степени. В случае, когда этот полином — константа, приводится точное решение этого примера в квадратурах.

Во второй главе рассматриваются квантовые квазиштеккелевые гамильтонианы. Получены необходимые и достаточные условия коммутирования квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов. В отличие от классического случая, в квантовом случае в одном из двух этих условий появляются квантовые поправки. Особое место в квантовом случае занимает класс квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному уравнению Шредингера с дополнительным интегралом, квадратичным по операторам импульса. В результате полной классификации получено «общее» решение, а также 5 изолированных решений пар квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов. При переходе к классическому пределу остается «общее» решение и 3 изолированных. Получены два новых примера уравнения Шредингера с ненулевым магнитным полем, относящиеся к классу «квазиточно решаемых» задач. Эти примеры проинтегрированы в терминах функций Гойна. Условие полиномиальности таких функций Гойна полностью определяет дискретный спектр и волновые функции соответствующей квантовомеханической задачи.

В третьей главе рассмотрены пары коммутирующих дифференциальных операторов, связанные с квантовыми аналогами интегрируемых волчков, таких как волчки Клебша, Ковалевской, случай Горячева–Чаплыгина на алгебре $e(3)$, волчки Шоттки–Манакова, Стеклова, М.Адлера–ван Мербеке, Соколова на алгебре $so(4)$. Квантование последних двух волчков является новым. Генераторы соответствующих алгебр представлены в виде дифференциальных операторов первого порядка – аналогов координат Дарбу. Получено необходимое условие интегрируемости пары коммутирующих дифференциальных операторов определенного вида как факторизация полинома от x, y определяемого коэффициентами при старших производных операторов.

В четвертой главе исследуется метод получения преобразования Беклунда лагранжевых систем, связанный с инвариантностью вариации действия до и после применения преобразования Беклунда. Получены производящие функции канонического преобразования Беклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера, а также типа уравнения КдФ, Кричевера–Новикова и других. Впервые получено преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, содержащее только решения уравнения Цицейки и их производные по координатам. Комбинация преобразований Беклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера приводит к построению треугольной решетки этих преобразований. Изучены все преобразования Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви–Стюартсона. Для этих систем построена трехмерная октаэдрическая решетка преобразований Беклунда в виде уравнений Хироты. Одно из этих уравнений совпадает со знаменитым чисто дискретным уравнением Хироты.

В пятой главе исследуется одевание гамильтониана, в котором переменные изначально разделены, что приводит к интегрируемому гамильтониану, в котором разделения переменных уже нет. Метод применен для операторов типа операторов Шредингера с магнитным полем.

В шестой главе рассматриваются рациональные решения ряда динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера, в частности, системы Леви. Получены уравнения динамики полюсов и преобразования Беклунда для этих решений. Показано, что возможна редукция этих решений в рациональные решения уравнения Пенлеве PIV, причем уравнения динамики полюсов переходят в стационарные уравнения для двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале. Соответствующие кулоновские системы получены для уравнений Пенлеве $PII - PIV$. Выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений $PV - PVI$. С помощью гамильтонового формализма построено спиновое представление для уравнений Пенлеве.

В седьмой главе рассматривается классификация скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в представлении Фурье. Коммутирование пары Лакса приводит к двум функциональным уравнениям. Показано, что новых систем с квадратичной нелинейностью и дисперсией нет.

Получены новые бездисперсионные системы данного класса.

Решение простой квантово-механической задачи приводит к алгебраическому решению задачи Коши одного из многочастичных уравнений Калоджеро.

Оценка новизны и достоверности. По моему мнению, полученные результаты являются новыми и представляют несомненный научный интерес. Основные результаты получены с использованием традиционных методов теории интегрируемых систем.

Степень обоснованности научных положений. Основные научные положения, содержащиеся в диссертационной работе, снабжены доказательствами и в достаточной мере отражены в 21 опубликованной работе из Перечня ВАК. Все эти статьи также входят в международные базы данных Web of Science, Scopus.

Замечания. Существенных замечаний нет, но отмечу, что в тексте диссертации имеются неточности, касающиеся истории некоторых задач и состояния их решения. В частности, это касается теории коммутирующих дифференциальных операторов. На стр. 8 сообщается, что (цитирую) "Коммутативные кольца дифференциальных операторов играют важную роль в математической физике. В случае одной переменной задача их описания была поставлена и решена в работах Шура [136] и Берчнелла–Чонди [25]". Во-первых, возникла эта задача раньше, в частности, работа Шура была явно мотивирована замечательными результатами Валленберга, первыми нетривиальными результатами в этой задаче. Во-вторых, в указанных работах Берчнелла–Чонди задача о коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторах была решена только для операторов взаимно простых порядков, причем не эффективно. В общем случае классификация, а именно описание отвечающих таким операторам алгебро-геометрических данных, была получена И.М.Кричевером. Эта классификация неэффективна, она не позволяет получить явный вид коммутирующих операторов для неособых спектральных кривых нетривиального рода, но в некоторых случаях И.М.Кричевером, С.П.Новиковым, О.И.Моховым, А.Е.Мироновым, В.С.Оганесяном и другими авторами были разработаны эффективные методы построения таких коммутирующих операторов с неособыми спектральными кривыми нетривиального рода. В общем случае эффективное решение этой задачи остается одной из интереснейших нерешенных проблем, требующих дальнейших исследований. Так что неправильно задачу о коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторах объявлять решенной. На стр. 9 написано, что уравнения Пенлеве известны еще с конца прошлого века, это было бы не так уж и давно. Эти замечания не влияют на общую положительную оценку результатов, полученных в диссертации.

Таким образом, в диссертации решены актуальные проблемы и получены новые важные результаты.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации своевременно опубликованы.

Считаю, что диссертационная работа полностью отвечает критериям Положения о порядке присуждения ученых степеней, а ее автор Марихин Владимир Георгиевич заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент
профессор
кафедры высшей геометрии и топологии
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук
e-mail: mokhov@mi.ras.ru

Мохов Олег Иванович
18 мая 2017

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»
119991 ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии
Тел./факс +7(495) 939 3798

Подпись О.И.Мохова заверяю
И.о. декана механико-математического факультета
МГУ им. М.В.Ломоносова, профессор

В.Н. Чубариков