В диссертационный совет Д 002.207.01
на базе Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт
теоретической физики им. Л.Д. Ландау
Российской академии наук

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Марихина Владимира Георгиевича "**Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем**", представленную на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика.

Диссертационная работа Марихина Владимира Георгиевича посвящена созданию, развитию и применению современных математических методов исследования интегрируемых систем классической и квантовой механики. Исследование интегрируемых систем было начато в классических работах Эйлера, Лагранжа, Абеля, Якоби и других великих математиков. В XX веке в также уже ставших классическими работах Лакса, Гарднера, Захарова, Фаддеева, Новикова, Дубровина, Шабата, Соколова и многих других исследования интегрируемых систем привело к созданию новых разделов математики в которых естественным образом объединились алгебраическая геометрия, функциональный анализ, теория функций, теория групп и алгебр Ли в том числе и квантовых групп. Тем не менее, для ряда известных интегрируемых систем существующие методы исследований либо не применимы, либо дают ответ лишь на достаточно узкий круг вопросов.

Поэтому объявленная автором цель диссертационной работы: развитие методов построения, представления и классификации интегрируемых систем, их интеграция с известными методами исследований, а также создание соответствующего математического инструментария, несомненно, является актуальной проблемой современной теории интегрируемых систем. Решение данной проблемы позволит, в частности, существенно расширить круг задач, в которых можно провести наиболее полное исследование математических свойств той или иной интегрируемой системы. Таким образом, в работе В.Г. Марихина используется синтез традиционных методов исследования, таких как метод разделения переменных, приведение уравнения Гамильтона-Якоби к квадратурам, представление Лакса, преобразования Бэклунда, метод одевания, тест Пенлеве, теория дифференциальных операторов и т.д., и новых оригинальных методов таких, как приведение коммутирующих гамильтонианов к квазиштеккелеву виду, что существенно упрощает интегрирование системы, метод получения алгебраических кривых соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов, метод “частичного разделения переменных» и пр. Выбранные для апробации разработанных автором методов системы с двумя и тремя степенями свободы весьма интересны не только с математической, но и с физической точки зрения.

Диссертация В.Г. Марихина изложена на 220 страницах и состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы из 167 наименований.

Перейдем к изложению содержания диссертации. В первой главе вводится одно из основных для данной работы понятие канонической пары квазиштеккелевых гамильтонианов. Далее доказывается ключевая теорема о том, что любая пара коммутирующих (в смысле канонической скобки Пуассона) гамильтонианов, квадратичных по импульсам, может быть приведена к паре коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов с помощью точечного и канонического преобразований. Получены необходимые и достаточные условия коммутирования канонических квазиштеккелевых гамильтонианов. Для каждой такой пары использован универсальный метод получения алгебраической кривой, для чего автор применяет оригинальный метод, использующий резольвенты Лагранжа. Одним из наиболее значимых результатов автора является получение функции Гамильтона Якоби в переменных координаты-значения гамильтонианов на поверхности уровня. Можно сказать, что переменные в полученной функции разделены лишь “частично”. Отметим, что стандартный метод исследования, в котором с помощью замены переменных гамильтонианы приводятся к форме Штеккеля, но при этом вместо канонической скобки Пуассона возникает ее деформация, ориентируется больше на изучение и классификацию именно этих деформаций скобок Пуассона, а не самих гамильтонианов.

В качестве примеров квазиштеккелевых гамильтонианов, связанных с классическими волчками Клебша, Шоттки, Манакова, Стеклова и волчком Ковалевской с гиростатом, для которых вычислены соответствующие алгебраические кривые. Отдельно рассмотрен случай движения заряженной частицы в электромагнитном поле. В этом примере проведена полная классификация соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов с двумя степенями свободы. Далее вводится понятие квазиштеккелевого гамильтониана для интегрируемых систем с тремя степенями свободы. Результат полной классификации подобных коммутирующих друг с другом гамильтонианов приводит лишь к одному семейству таких гамильтонианов, которое зависит от полинома третьей степени, природа которого, на мой взгляд, пока еще недостаточно раскрыта.

Вторая глава посвящена изучению квантовых интегрируемых систем с коммутирующими квазиштеккелевыми гамильтонианами. Получен и доказан аналог вышеуказанной ключевой теоремы для квантового случая и, тем самым, получены необходимые и достаточные условия коммутирования квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов, т.е. вычислены соответствующие квантовые поправки к классическим условиям. Особое место в квантовом случае занимает класс квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному уравнению Шредингера с дополнительным интегралом, квадратичным по операторам импульса. Построено несколько примеров двумерных уравнений Шредингера с ненулевым магнитным полем которые интегрируемы в терминах вырожденных функций Гойна. Эти системы относятся к так называемому классу “квазиточно решаемых” задач, так как определение дискретного спектра и волновых функций этих уравнений сводится к решению одного алгебраического уравнения.

В третьей главе изучаются пары коммутирующих дифференциальных операторов, т.е. интегрируемые квантовые системы. В данной главе эти операторы получены простой подстановкой генераторов соответствующих алгебр Ли в дифференциальном представлении в известные гамильтонианы классических интегрируемых волчков и последующем вычислением необходимых квантовых поправок. Квантовые аналоги волчка Адлера-ван Мёрбеке и волчка Соколова на алгебре so(4) получены впервые. На примере этих и других известных квантовых волчков обсуждается необходимое условие интегрируемости пары коммутирующих дифференциальных операторов определенного вида как факторизация полинома от двух переменных, определяемого коэффициентами при старших производных пары операторов.

В четвертой главе развивается метод канонических преобразований Бэклунда для некоторых лагранжевых систем, что позволяет переформулировать этот метод как требование инвариантности вариации действия при применении данного преобразования Бэклунда. Получены производящие функции такого преобразования для ряда примеров, таких как дивергентные системы, уравнение Ландау Лифшица, уравнения КдФ, уравнения Кричевера-Новикова и других систем. Впервые получено преобразование Бэклунда для уравнения Цицейки, содержащее только неизвестные функции и их производные по координатам. Доказано, что комбинация преобразований Бэклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера приводит к построению треугольной решетки этих преобразований. Кроме этого, изучены преобразования Бэклунда интегрируемых случаев системы Дэви-Стюартсона. Построена трехмерная октаэдрическая решетка преобразований Бэклунда для этой системы в виде уравнений Хироты. Одно из этих уравнений совпадает с дискретным уравнением Хироты.

В пятой главе обсуждается некоторое обобщение класса моделей, явно решаемых с помощью метода одевания Дарбу (Мутара) и применимость традиционного метода одевания к линейному двумерному дифференциальному оператору, в том числе и к операторам с постоянными коэффициентами. В качестве основного примера получены и исследованы новые квантовые интегрируемые операторы типа оператора Шредингера с линейными слагаемыми отвечающими, например, наложению магнитного поля.

Шестая глава диссертации посвящена изучению рациональных решений системы Леви, т.е. ряда динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера. Для этих решений выведены уравнения, описывающие динамику полюсов, и изучены преобразования Бэклунда, связывающее различные решения. Доказано, что динамика только положительных или только отрицательных зарядов (вычетов) описывается уравнением Калоджеро-Мозера. Построено представление кулоновского газа для уравнений Пенлеве PII-PIV и уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений Пенлеве PV-PVI. В рамках гамильтонового формализма также введено спиновое представление для уравнений Пенлеве.

В седьмой главе приведена полная классификация скалярных эволюционных уравнений с квадратичной нелинейностью в рамках формализма пар Лакса в представлении Фурье. Доказано, что для систем с дисперсией данный метод позволяет найти все известные модели и новых примеров нет. При отсутствии дисперсии данный метод позволяет найти ряд новых моделей. Осуждается обобщение этого метода на двумерный и дискретный случаи. В качестве примера рассматривается динамика уровней спектра квантовой системы при добавлении примеси, т.е. одно из уравнений Калоджеро, когда общая задача Коши сводится к решению алгебраического уравнения.

Достоверность результатов работы основывается на строгих математических доказательствах. Результаты работы полностью воспроизводятся и находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Замечания по диссертации сводятся к двум методическим моментам: Первые четыре главы выглядят оторванными от остальных глав, которые носят более прикладной и технический характер. Однако на самом деле это не так, как как, например, в разделе 6.2 де-факто так же используется преобразование Бэклунда. Такой стиль изложения, вкупе с некоторыми мелкими неточностями и опечатками, приводит к некоторым затруднениям при восприятии материала диссертации как единого целого. Было бы хорошо использовать более структурированное изложение материала, особенно в четвертой главе, в виде последовательности теорем, лемм, следствий, доказательств, примеров и, конечно, ссылок на них при дальнейшем изложении.

Второе замечание касается недостаточно полного изложения исторической и методической части работы, а также к использованию терминологии, принятой только в этой области исследования. В результате, например, не всегда понятно, какие результаты получены автором впервые, а какие были известны. Хотелось бы, чтобы автор более смело отстаивал свой приоритет.

Указанные замечания не снижают общего достоинства диссертации и не влияют на положительную оценку диссертационной работы, которая в целом оставляет весьма хорошее впечатление и новыми содержательными идеями, и полученными на их основе результатами.

Диссертация Марихина Владимира Георгиевича полностью удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика, и, вне всякого сомнения, автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором впервые, своевременно опубликованы в журналах с высоким импакт-фактором, обсуждались на престижных российских и международных конференциях и получили высокую оценку специалистов. Автореферат правильно передает содержание диссертации.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры вычислительной
физики физического факультета СПбГУ

03.05.2017

Андрей Владимирович Цыганов

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
Почтовый адрес: 199034, г. Санкт-Петербург,
Университетская набережная, д. 7/9,
Тел. +7 (812) 428 – 43 - 43
Эл.почта: a.tsyganov@spbu.ru
Сайт: http://spbu.ru

ЛИЧНУЮ ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
НАЧАЛЬНИК ОТДЕЛА КАДРОВ №3
Н.И. МАШТЕПА 03.05.2017

Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей