“УТВЕРЖДАЮ”

и.о. директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук

доктор физ.-мат. наук И.Х. Мусин

“31” марта 2017 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Марихина Владимира Георгиевича

Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем,

представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по
специальности 01.01.03 --- математическая физика.

Диссертационная работа В.Г. Марихина посвящена исследованию проблем теории интегрируемых систем. Основное внимание уделено разработке подходов к таким объектам, как классические и квантовые квазиштеккелевы гамильтонианы и канонические преобразования Беклунда. Также изучаются такие важные темы, как представления интегрируемых квантовых волчков в виде дифференциальных операторов; одевание систем с разделенными переменными в двумерном случае; построение двумерных уравнений типа уравнения Шредингера; представление кулоновского газа для рациональных решений нелинейных систем, в том числе системы Леви и уравнения Пенлеве PII-PIV; классификация скалярных интегрируемых уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в Фурье пространстве.

Актуальность темы. Теория интегрируемых систем является важным и динамично развивающимся разделом современной математической физики, имеющим приложения в различных областях. Квазиштеккелевы гамильтонианы представляют собой важный объект исследования, поскольку обобщают штеккелевы системы на случай ненулевого магнитного поля. Объекты, аналогичные квазиштеккелевым гамильтонианам, появлялись в литературе ранее, в частности, в работе Е.В. Ферапонтова и А.П. Форди, а также Х.М. Яхьи. Отметим, что объекты, сходные с квазиштеккелевыми гамильтонианами с тремя степенями свободы, которые построены в данной работе, не были известны. Что касается квантовых аналогов квазиштеккелевых систем, то эта тема не получила должного освещения в литературе. Проблема интегрируемых случаев двумерного уравнения Шредингера в электромагнитном поле имеет довольно большую историю, а также исследуется и в настоящее время.

Коммутативные кольца дифференциальных операторов также играют важную роль в математической физике. В случае одной независимой переменной задача их описания была поставлена и решена в работах И. Шура и Д.Л. Бёрчнелла — Т.В. Чонди. Алгоритм проверки необходимых условий интегрируемости был разработан А.Б. Шабатом и др.

Преобразования Беклунда (ПБ) являются критерием интегрируемости системы и позволяют «размножать» решения системы, начиная с любого ее решения. Методы одевания и разделения переменных являются чрезвычайно эффективными для исследования интегрируемых систем.

Уравнения Пенлеве PI-PVI, известные еще с начала прошлого века, традиционно привлекают пристальное внимание благодаря их широкому применению в различных областях физики и математики.

Метод представления дифференциальных нелинейных уравнений в пространстве Фурье чрезвычайно эффективен при классификации различных типов динамических интегрируемых систем.

Методы исследования. В диссертационной работе В.Г. Марихина использованы такие методы, как тест Пенлеве, который является часто применяемым способом проверки интегрируемости системы, а также чрезвычайно эффективным методом, позволяющим избавиться от неинтегрируемых случаев; метод одевания, который использовался для построения новых систем, начиная с систем с разделенными переменными и др. Некоторые методы, используемые в диссертации, введены автором: метод получения алгебраических кривых соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов; метод "частичного разделения переменных"; а также использование пары Лакса в Фурье-пространстве для динамических систем с квадратичной нелинейностью.

Структура диссертации и основные результаты. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы, содержащего 167 наименований. Общий объем диссертации составляет 220 страниц.

В первой главе рассматриваются гамильтоновы системы с двумя и тремя степенями свободы. Определены пары канонических квазиштеккелевых гамильтонианов. Доказана теорема о том, что любая пара коммутирующих (в смысле канонической скобки Пуассона) гамильтонианов, квадратичных по импульсам, может быть приведена к паре канонических коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов с помощью точечного и канонического преобразований. Получены необходимые и достаточные условия коммутирования квазиштеккелевых гамильтонианов. Для каждой пары таких гамильтонианов выведен универсальный метод получения алгебраической кривой, получена функция Гамильтона-Якоби в переменных координаты - значения гамильтонианов на поверхности уровня. Для вывода этого метода используется техника резольвент Лагранжа, которая позволяет записать решение для четырех переменных (координат и импульсов) в виде функций от трех переменных. Данное преобразование позволяет получить метод «частичного» разделения переменных.

Рассмотрены примеры квазиштеккелевых гамильтонианов, связанных с классическими волчками Клебша, Шоттки-Манакова, Стеклова и волчком Ковалевской с гиростатом, вычислены соответствующие алгебраические кривые. Отдельно рассмотрен случай движения заряженной частицы в электромагнитном поле, где получена полная классификация соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов. Определено понятие квазиштеккелевого гамильтониана в 3-х компонентном случае, где также получена полная классификация. Показано, что в этом случае условия инволюции всех трех гамильтонианов приводит лишь к одному набору 3-х мерных коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов, зависящих от полинома третьей степени. В случае, когда этот полином является константой, приводится точное решение этого примера в квадратурах.

Во второй главе рассматриваются пары квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов. Получен и доказан квантовый аналог вышеуказанной теоремы. Также получены необходимые и достаточные условия коммутирования квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов. Очень важное место в квантовом случае занимает класс квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному уравнению Шредингера с магнитным полем с дополнительным интегралом, квадратичным по операторам импульса. Получен общий вид точечного обратимого преобразования к квазиштеккелевым гамильтонианам, зависящего от 3-х параметров, которые связаны одним алгебраическим соотношением. Показано, что в случае уравнения Шредингера можно провести полную классификацию соответствующих пар квазиштекккелевых гамильтонианов. В результате получено «общее» решение, а также 5 изолированных решений. При переходе к классическому пределу остается «общее» решение и 3 изолированных. Получены два новых, а, вероятно, и первых примера уравнения Шредингера с ненулевым магнитным полем, относящихся к классу «почти точно решаемых» задач. Эти примеры проинтегрированы в терминах функций Гойна. Определение дискретного спектра и волновых функций сведено к решению алгебраических уравнений.

В третьей главе рассмотрены пары коммутирующих дифференциальных операторов. Приведены квантовые аналоги интегрируемых волчков таких, как волчки Клебша, Ковалевской, случай Горячева-Чаплыгина на алгебре e(3), волчки Шоттки-Манакова, Стеклова, М. Адлера-ван Мёрбеке, Соколова на алгебре so(4). Квантование последних двух волчков является новым. В результате квантования добавляются соответствующие квантовые поправки в гамильтониан и дополнительный интеграл этих волчков. Показано, что в ряде случаев можно к квадратичной части волчка добавить некоторую линейную часть. Генераторы соответствующих алгебр представлены в виде дифференциальных операторов первого порядка - аналогов координат Дарбу. При подстановке дифференциального представления этих генераторов в гамильтониан и в соответствующий дополнительный интеграл этих волчков получается пара коммутирующих дифференциальных операторов. Получены уравнения для спектров ряда волчков с использованием их дифференциального представления. Получено необходимое условие интегрируемости пары коммутирующих дифференциальных операторов определенного вида как требование факторизации полинома от двух переменных, определяемого коэффициентами при старших производных операторов.

В четвертой главе развит метод получения преобразования Беклунда лагранжевых систем, заключающийся в инвариантности вариации действия до и после применения преобразования Беклунда. Сначала рассмотрены системы типа нелинейного уравнения Шредингера. Получено их преобразование к гамильтоновой форме с канонической скобкой Пуассона. В этом и других случаях получена производящая функция канонического преобразования, не меняющего вариацию гамильтонианов при применении преобразования Беклунда, что эквивалентно сохранению вариации действия. Получены производящие функции для ряда примеров таких, как дивергентные системы, уравнение Ландау-Лифшица, уравнения КдФ, уравнения Кричевера-Новикова и других систем. Впервые получено преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, зависящее только от неизвестной функции и ее производных по координатам. Построена треугольная решетка преобразований Беклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера.

Изучены преобразования Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви-Стюартсона. Построена трехмерная октаэдрическая решетка этих преобразований в виде уравнений Хироты.

В пятой главе одевание применяется к оператору, в котором переменные разделены. В результате получается интегрируемый оператор, в котором разделения переменных уже нет. Метод применен к одной известной задаче, решение которой было ранее получено путем цепочки нетривиальных манипуляций. Применение метода одевания (точнее раздевания гамильтониана, в котором нет разделения переменных до гамильтониана, где это разделение появляется) в этом случае, позволяет легко найти ответ. Метод применен для построения двумерных операторов типа операторов Шредингера с магнитным полем.

В шестой главе рассматриваются рациональные решения ряда динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера, в частности, системы Леви. Получены уравнения динамики полюсов и преобразования Беклунда для этих решений. Оказывается, что динамика только положительных или только отрицательных зарядов описывается системой Калоджеро-Мозера. Показано, что возможна редукция этих решений в рациональные решения уравнения Пенлеве PIV, причем уравнения динамики полюсов переходят в стационарные уравнения для двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале. Соответствующие кулоновские системы получены для уравнений Пенлеве PII-PIV. Выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений PV-PVI. С помощью гамильтонова формализма построено спиновое представление для уравнений Пенлеве.

В седьмой главе рассматривается классификация скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в представлении Фурье. Такой подход приводит к двум функциональным уравнениям. Решение первого из них определяет возможный вид квадратичной нелинейности. Если при этом удается решить и второе уравнение, получаются все системы такого класса с дисперсией. Оказывается, что новых скалярных динамических систем с дисперсией и квадратичной нелинейностью нет. Получены новые бездисперсионные уравнения. В конце этой главы исследуется динамика уровней энергии при добавлении примеси в любую квантовую систему. Показано, что эта динамика подчиняется одному из многочастичных "gold-fish" уравнений Калоджеро, что позволяет получить алгебраическое решение задачи Коши этого уравнения.

Оценка новизны и достоверности. Все полученные результаты являются новыми и представляют несомненный научный интерес, своевременно опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в международные базы данных Web of Science, Scopus и в перечень ВАК. При получении этих результатов использовались известные методы теории интегрируемых систем, а также оригинальные методы автора, основанные на применении этих методов. Наиболее важные из полученных результатов снабжены полными доказательствами. Особенно стоит выделить открытые автором случаи «квазиточно решаемых» двумерных операторов Шредингера с магнитным полем.

Замечания. В Главе 6 автор использует преобразования Беклунда для уравнений Пенлеве, не указывая, зачем это нужно. Вообще, часть Главы 6, посвященная трансцендентам Пенлеве, изложена не слишком последовательно. Как обычно, следует отметить наличие ряда опечаток и небольших неточностей. Эти замечания нисколько не снижают общее высокое научное содержание диссертации, а также важность полученных результатов.

В диссертации изучен и решен целый ряд важных проблем теории интегрируемых систем. Диссертация является законченным научным исследованием в этой области. Результаты диссертации могут быть применены в научных учреждениях, занимающихся подобными задачами. К их числу относятся Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова и другие.

Автореферат отражает содержание диссертации правильно и полно. Работа удовлетворяет требованиям ВАК к диссертациям на соискание степени доктора наук по специальности 01.01.03 - математическая физика, а ее автор заслуживает искомой степени.

Отзыв заслушан и обсужден на заседании Отдела математической физики 30 марта 2017 года.

Отзыв составил
Ведущий научный сотрудник
ИМВЦ УНЦ РАН
доктор физ.-мат. наук, профессор — Жибер А.В.

Главный научный сотрудник
ИМВЦ УНЦ РАН
Зав. Отделом математической физики
доктор физ.-мат. наук, профессор — Хабибуллин И.Т.

Подписи А.В. Жибера и И.Т. Хабибуллина заверяю
Ученый секретарь ИМВЦ УНЦ РАН
к.ф.-м.н — Шайгарданов Ю.З.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМВЦ УНЦ РАН)

450008, г. Уфа, ул.Чернышевского, 112

Тел.:+7 (347) 272-59-36, +7(347) 273-33-42, Факс: + (347) 272-59-36

E-mail: im@matem.anrb.ru