ОТЗЫВ
официального оппонента доктора физико-математических наук Исаева Алексея Петровича о диссертации Константина Романовича Алешкина
"Специальная Кэлерова геометрия и теории Ландау - Гинзбурга",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Диссертация Константина Романовича Алешкина посвящена важным вопросам теоретической физики, связанным с нерешенными задачами современной математики. Известно, что теория релятивистских (супер)струн рассматривается как наиболее перспективная основа для построения объединенной теории квантовой гравитации и стандартной модели. Один из подходов в теории струн исходит из интепретации трехмерных кэлеровых многообразий Калаби - Яу как пространств скрытых параметров, откуда необходимо вытекают вопросы о геометрии как самих многообразий Калаби - Яу, так и пространств их модулей. Несмотря на пристальный интерес в течение последних двадцати пяти лет как физиков-теоретиков, так и математического сообщества, многие вопросы остаются открытыми. В частности, чисто математическая задача вычисления кэлерова потенциала на пространстве модулей многообразий Калаби - Яу того или иного типа до сих пор была решена лишь для ограниченного класса многообразий. В диссертации представлен новый метод вычислений таких кэлеровых потенциалов для широкого класса гиперповерхностей во взвешенных проективных пространствах. Этот новый метод предполагает выражение кэлеровых потенциалов в самых естественных локальных координатах, выражающихся через периоды многообразий Калаби - Яу. В этом случае оказывается возможным выразить кэлеров потенциал в терминах осциллирующих интегралов на специальных трубчатых окрестностях в пространстве $\mathbb{C}^5$, универсальном пространстве для взвешенных проективных пространств, снабженного дополнительными структурами. Представленный в диссертации новый метод основан на самых современных достижениях "математической" части изучения зеркальной симметрии, связанных с привлечением моделей Ландау - Гинзбурга, исследованием наперстков Лефшеца и т.п. Полученные при этом в Главе 2 конкретные результаты — явные формулы для кэлерова потенциала — имеют огромное значение как в исследованиях по теориям суперструн, так и в чисто математическом контексте. Кроме того, предложенный новый метод вычислений явно может быть продолжен на более широкий класс многообразий Калаби - Яу, на что указывают дальнейшие результаты Главы 3. Из всего сказанного выше следует, что тема диссертации К.Р. Алешкина несомненно является интересной и актуальной.

Текст диссертации на 152 страницах состоит из Введения, трех глав и списка публикаций, составленного из публикаций самого автора по теме диссертации, а также литературы, необходимой для ее чтения.

Начальный раздел диссертационной работы, озаглавленный как **Введение**, дает короткую перспективу главных задач диссертации и представляет основные результаты.

Первая глава работы посвящена введению в круг проблем компактификации в теории струн и по сути является вводной. Задача этой главы состоит в построении моста между физическими аспектами теории струн и геометрией многообразий Калаби-Яу, а также подготовка необходимого языка для второй главы. В разделе 1.1 предложен обзор основных идей суперструнных компактификаций, а затем намечены пути, которым следует диссертационная работа. Раздел 1.2 посвящён описанию теории суперструн в плоском десятимерном пространстве-времени. В первой части теория струн строится с помощью конформной теории поля на мировом листе в формализме Невьё-Шварца-Рамона. Во второй части раздела описывается подход пространства-времени к описанию безмассового сектора теории как десятимерной теории IIA или IIB супергравитации. В разделе 1.3 описывается компактификация суперструны на шестимерное многообразие с точки зрения низко энергетической теории безмассового сектора состояний струны. Используя обобщение редукции Калузы-Клейна низко энергетическая четырёхмерная теория оказывается теорией супергравитации, константы связи которой определяются компактифицирующим многообразием. В разделе 1.4 описаны основные свойства многообразий Калаби - Яу и связи геометрии Калаби - Яу с четырёхмерной теорией супергравитации. После изучения когомологий многообразий Калаби-Яу раздел завершается конкретным описанием частиц четырёхмерной супергравитации в терминах когомологий компактифицирующего многообразия.

Следующая, **Вторая**, глава диссертации несет в себе бо́льшую часть новых результатов, представленных в диссертационной работе. Раздел 2.1 посвящён описанию специальной Кэлеровой геометрии. Раздел 2.2 посвяшён описанию $N = (2,2)$ суперсимметричных моделей Ландау-Гинзбурга. Раздел 2.3 содержит основную часть результатов автора. Здесь формулируется метод вычисления специальной геометрии на пространстве комплексных деформаций многообразия Калаби-Яу на хорошо изученном примере зеркальной квинтики в проективном пространстве в подразделе 2.3.1. Основным средством вычисления периодов в данной работе являются осциллирующие интегралы; осциллирующие интегралы вычисляются с помощью рекуррентного использования формулы Стокса. Вблизи особенности автор рассматривает соответствующее кольцо Милнора, и если в этом кольце выбрать базис, то осциллирующий интеграл любой формы равен линейной комбинации интегралов от базисных форм с коэффициентами, которые можно найти рекуррентно по степени (как полинома) коэффициентов дифференциальной формы. Ключевой шаг в рассуждении – введение матрицы вещественной структуры M, не зависящей от явного выбора циклов (пока они остаются целочисленными или даже вещественными) и удовлетворяющей свойству $M\bar{M} = 1$. Пользуясь этим, автором получена основная формула для вычисления специальной геометрии, которая применяется во всех примерах, рассматриваемых в диссертации. Окончательный ответ для Кэлерова потенциала специальной метрики на пространстве модулей комплексных структур зеркальной квинтики, разумеется, совпадает с выражением, полученным в классической работе Канделаса с соавторами, с которой начиналось исследование зеркальной симметрии. В разделе 2.3.2 вычисляется специальная Кэлерова геометрия на 101-мерном пространстве модулей комплексных структур самой квинтики. В отличие от предыдущих методов вычисления специальной геометрии, общая идея вычисления остаётся той же, но инвариантное кольцо Милнора в случае квинтики значительно больше. В итоге Кэлеров потенциал специальной метрики на 101-одномерном пространстве модулей квинтики в окрестности орбифолдной точки выражается явной формулой. В следующем подразделе 2.3.3 вычисляется специальная Кэлерова геометрия на пространствах модулей гиперповерхностей типа Ферма. Такие гиперповерхности являются естественными обобщениями квинтики и задаются взвешенными однородными уравнениями, множество нулей которых корректно определено во взвешенном проективном пространстве, и поэтому представленные в диссертации результаты применимы именно к случаю гиперповерхности во взвешенном проективном пространстве, что обобщает классический случай квинтики. Гиперповерхности Ферма зачастую оказываются особыми из-за особенностей взвешенных проективных пространств, однако такие особенности не оказывают влияния на модули комплексной структуры. В размерности 3 имеется 97 различных семейств гиперповерхностей Ферма. Для вычисления специальной геометрии рассматривается полиномиальная деформация гиперповерхности Ферма общего вида. Основным отличием от случая квинтики является то, что некоторые деформации комплексной структуры нельзя представить полиномиальной деформацией, однако непосредственное применение метода, предложенного автором, позволяет вычислить специальную геометрию на подпространстве комплексных модулей. В разделе 2.3.4 представлен наиболее общий случай вычисления специальной геометрии. Рассматриваемые многообразия Калаби-Яу также задаются гиперповерхностями во взвешенных проективных пространствах, но уравнение имеет гораздо более общий вид. Гиперповерхности Ферма, рассматриваемые в предыдущем разделе, являются частным случаем обратимых особенностей с диагональной матрицей M. Обратимые особенности обладают большой группой фазовой симметрии и, в частности, являются взвешенными однородными. Для этого случай оказывается, что специальная Кэлерова геометрия для любой обратимой особенности вокруг орбифолдной точки выражается через простой степенной ряд от параметров деформации с коэффициентами, записывающимися с помощью обратной матрицы M_{ij}^{-1}; трансцендентные коэффициенты вещественной структуры выражаются через гамма-функции с аргументами, включающими ту же самую матрицу M_{ij}^{-1}. Вторая глава завершается заключением, в котором обсуждаются применения полученных результатов и направления для дальнейшего развития.

Третья глава посвящена связи специальной геометрии с Линейными Калибровочными Сигма Моделями (ЛКСМ) и зеркальной симметрии и основана на результатах автора. В этой главе используется конструкция Батырева зеркальной симметрии для построения специальных ЛКСМ, чьи сферические статсуммы совпадают с экспонентами Кэлеровых потенциалов специальной геометрии для примеров, рассмотренных во второй главе. Автор вычисляет статсуммы этих ЛКСМ на сфере с круглой метрикой, используя локализационную формулу Бенини в определённой фазе. Представленные вычисления находятся в согласии с гипотезой о статсуммах двумерных ЛКСМ, высказанной Джокерсом. В разделе 3.1 приводятся необходимые факты из двумерных ЛКСМ и зеркальной симметрии. В частности, в подразделе 3.1.1 объясняется локализационная формула для статсуммы на круглой сфере, а в разделе 3.1.2

описывается ряд построений из торической геометрии и конструкция Батырева, основанная на дуальных многогранниках. В разделе 3.2 приведены вычисления автора для случаев квинтики и гиперповерхностей Ферма в подразделе 3.2.1. Основная идея состоит в том, чтобы проинтепретировать мономы, определяющие гиперповерхность, как целочисленные точки многогранника, определяющего объемлющее взвешенное проективное пространство. Эти точки можно использовать для построения веера, определяющего зеркально двойственное многообразие. Более точно, зеркально двойственным к гиперповерхности Ферма является гиперповерхность Калаби-Яу, лежащая в торическом многообразии, построенном по вееру, связанному с v_{ij}. Такой веер (или торическое многообразие) определяет двумерную ЛКСМ с зарядами, которые выражают линейные соотношения между векторами веера. Удобно выбрать нецелочисленный базис в линейных соотношениях, который отвечает нецелочисленным "зарядам". При этом статсумма теории на сфере задаётся многомерным контурным интегралом, зависящим от параметров Файе-Илиопулоса и тэта-углов в ЛКСМ. Наконец, этот интеграл вычисляется в подходящей области значений параметров Файе-Илиопулоса или же в фазе Ландау-Гинзбурга. Полученный результат совпадает с экспонентой Кэлерова потенциала специальной геометрии для поверхностей Ферма с точностью до множителя при замене координат (зеркальном отображении). Третья глава завершается заключением, в котором подытоживаются результаты главы, а также предлагаются направления для дальнейшей работы.

Диссертация К.Р. Алешкина является научным исследованием высокого уровня, вызывающим интерес у специалистов как в области теоретическое и математической физики, так и в алгебраической геометрии кэлеровых многообразий Калаби - Яу. При этом поставленные задачи были полностью решены.

Необходимо отметить, что рецензируемая диссертационная работа являет пример сбаласированного исследования, где четкие теоретические методы и идеи дополняются сложными конкретными вычислениями, что показывает высокую теоретическую подготовку диссертанта и его умение производить технически сложные выкладки.

В качестве критического замечания необходимо указать на то, что структура текста диссертации не очень продумана, если Первая и Третья главы занимают всего около двадцати страниц, то Вторая глава вчетверо длиннее. Другое замечание, возникшее при чтении, связано с многократным использованием английских слов и выражений, записанных русскими буквами. Например, "бэкграунд" (причем в двух смыслах), "сеттинг", "каплинг теории материи к гравитации", "суперпуанкаре", "префактор", "полу - БПС - браны" и особенно – "орбифолдинг" в качестве названия процесса. При этом многие выражения имеют давние и принятые (в том числе в классических учебниках) русские эквиваленты: например, выражение "Пуанкаре дуальное" никак не может быть допущено в связи с принятым "двойственное по Пуанкаре" (и конечно не стоило засорять русский текст "политопами" при имеющихся уже давным-давно "многогранниках"). Некоторые имена (например, Вайценбёк и Нийенхойс) даны в американизированном звучании, что также обращает на себя внимание. Текст диссертации изобилует опечатками (например, на стр. 7, 12, 14, 16, 21, 27, 28, 32, 39, 41, 45, 50, 51, 53, 55, 58, 62, 63, 65, 66, 69, 72, 76, 77, 78, 79, 90, 101, 109, 110, 129, 131, 138, 142, 143), кроме того невозможно пересчитать случаи пропущенных знаков пунктуации и стилистических ошибок. При этом необходимо заметить, что содержательная часть, то есть физика и математика, в работе представлены четко и ясно: единственное замечание касается стр. 39, где по ходу вычислений утверждается, что у трехмерного многообразия с метрикой Калаби - Яу все $h^{p,0}$ кроме крайних должны быть нулевыми, что имеет место только в односвязном случае и не имеет места для абелевых многообразий.

Однако высказанные замечания не меняют высокой положительной оценки научных результатов, представленных в диссертации.

Все результаты диссертации являются новыми, оригинальными, своевременно опубликованными в пяти статьях в физических журналах, входящих в список ВАК. Эти результаты неоднократно докладывались на научных семинарах, представительных международных конференциях и рабочих совещаниях, хорошо известны специалистам. Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Значительный объём выполненных автором исследований по актуальной и важной теме позволяет рассматривать представленную работу, как несомненно удовлетворяющую всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, и автора этой работы, Константина Романовича Алешкина, как заслуживающего присвоения ему искомой учёной степени по специальности 01.04.02.

Официальный оппонент,
заместитель директора ЛТФ ОИЯИ,
доктор физико-математических наук, профессор

Исаев Алексей Петрович

03 июня 2019 г.

isaevap@theor.jinr.ru; +7(496)2163024
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный Институт Ядерных Исследований (Дубна),
141980, Жолио - Кюри, 6, г. Дубна, Московская область

Подпись А.П. Исаева удостоверяю.
Учёный секретарь ЛТФ ОИЯИ А.В. Андреев

Объединенный институт ядерных исследований