Учреждение Российской академии наук
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

На правах рукописи

Берштейн Михаил Александрович

Кольцо когомологий и корреляционные функции в двумерной Лиувиллевской гравитации

01.01.03 Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черноголовка 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Фейгин Борис Львович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Кричевер Игорь Моисеевич
	доктор физико-математических наук Хорошкин Сергей Михайлович
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 30 июня 2011 г. в 11 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН по адресу: 142432, Московская обл., Ногинский р-н, г. Черноголовка, Институт физики твердого тела РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Автореферат разослан ____ мая 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Гриневич П. Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена изучению некоторых математических вопросов, возникающих в конформной теории поля. Обсуждаются вопросы, связанные с двумя конкретными теориями: двумерной минимальной Лиувиллевской гравитацией и парафермионной теорией Лиувилля.

Двумерная квантовая гравитация была введена в работе Полякова [1], в которой было показано, что при квантовании струны в размерности пространства-времени $\neq 26$ метрика на поверхности становится динамической вследствие конформной аномалии. Эта теория называется теорией Лиувилля. Под Лиувиллевской гравитацией понимается теория, функционал действия в которой является суммой действий трех теорий: материальной конформной теории поля, теории Лиувилля и духов, так что суммарный центральный заряд всех трех теорий равен нулю [2]. Минимальной Лиувиллевской гравитацией называется теория, конформной теорией материи в которой является минимальная модель [3]. За последние 10 лет был достигнут большой прогресс в минимальной Лиувиллевской гравитации. Например, для простейших операторов были найдены трех и четырехточечные корреляционные функции и операторная алгебра [4, 5].

Известно, что в случае минимальной гравитации есть дополнительные физические состояния. Их можно найти используя метод БРСТ квантования. Оказывается, что существует бесконечно много дополнительных физических состояний, с любыми духовыми числами [6]. Представляет интерес изучение этих состояний, в частности, вычисление их операторной алгебры.

С точки зрения теории представлений пространство состояний в Лиувиллевской гравитации является тензорным произведением представлений алгебры Вирасоро с двойственными значениями центрального заряда c и $26-c$ умноженное на представление духов. Двойственность между соответствующими категориями представлений впервые была отмечена в работе Фейгина и Фукса[7]. В работах Архипова [8] и Сергеля [9] она была доказана немного в другом контексте, см также [10] и [11]. Однако, для вычисления корреляторов в Лиувиллевской гравитации нужна дополнительная информация об этой двойственности, а именно двойственность между модулярными функторами.

Другой важной задачей является задача сравнения результатов, полученных в Лиувиллевской гравитации с результатами других подходов — матричными моделями и топологической гравитацией. Относительно давним наблюдением является совпадение гравитационных размерностей [14]. В недавней работе Белавина и Замолодчикова 2008 года [15] было предложено гипотетическое соответствие между операторами в Лиувиллевской гравитации и матричных моделях. Однако точка в этом вопросе еще не поставлена.

Представляют интерес обобщения теории Лиувилля: Z_N парафермионные теории Лиувилля предложенные Фатеевым и Замолодчиковым[16]. В случае $N = 1$ эта теория совпадает с обычной теорией Лиувилля. В случае $N = 2$ это теория является суперсимметричным аналогом теории Лиувилля. В обеих этих теориях известна трехточечная функция см. [12] для Лиувиллевского случая и [13] для супер аналога. Интересно найти обобщение этой формулы на теории с более общей парафермионной симметрией.

Цель работы. Целью настоящей работы является изучение минимальной Лиувиллевской гравитации. Более конкретно: нахождение дополнительных физических операторов, вычисление операторной алгебры, корреляционных функций. Сравнение результатов, полученных при этом подходе, с результатами в других подходах в двумерной квантовой гравитации: матричными моделями и топологической гравитацией. Обобщение результатов теории Лиувилля на парафермионную теорию Лиувилля.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Найдена размерность пространства физических состояний (БРСТ когомологий) в минимальной Лиувиллевской гравитации M(2,3). Изучена структура алгебры на этих когомологиях. Описано действие когомологий алгебры Вирасоро на БРСТ когомологиях.

2. Введен функтор двойственности на категории представлений конечномерных алгебр Ли. Построено невырожденное спаривание между гомологиями двойственных объектов, согласованное с действием алгебры когомологий. Эта теория обобщена на случай бесконечномерных положительно градуированных алгебр. Для алгебр, обладающих полубесконечной структурой, доказано аналогичное утверждение о

двойственности между обычными гомологиями и полубесконечными гомологиями.

3. Найдены многоточечные корреляционные функции в парафермионной конформной теории поля, содержащие три поля порядка и несколько полей из парафермионной алгебры.

Методы исследования. В работе используются различные методы теории представлений, гомологической алгебры и комбинаторики. Для нахождения физических состояний используются БРСТ когомологии. Когомологии вычисляются при помощи БГГ резольвент, состоящих из модулей Верма. Также применяются стандартные алгебраические аргументы, связанные с введением фильтрации и переходом к присоединенному градуированному пространству.

Научная и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут иметь применения в теории представлений и конформной теории поля.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались: на международной конференции «Second International Conference on String Field Theory and Related Aspects», Москва 2009, на международной конференции «Conformal Field Theory, Integrable Models and Liouville Gravity», Черноголовка 2009 г., на международной конференции «Representation Theory and Quantization», Цюрих 2010 г., а также на научных семинарах в МГУ им. Ломоносова и ИТФ им. Ландау.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в трех статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

Содержание работы

Во введении дается обзор результатов, связанных с темой диссертации, а также формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе изучается минимальная Лиувиллевская гравитация M(2,3). Это простейший пример минимальной Лиувиллевской гравитации, можно сказать, что это теория чистой гравитации, так как материальный сектор в этом случае тривиален.

В параграфе 1.1 определяется пространство состояний этой теории, вводится (b,c) система духов, определяется БРСТ оператор Q, $Q^2=0$. Когомологии этого оператора называются физическими состояниями теории. Эти когомологии бывают двух видов: относительные H^{rel} и абсолютные H^{abs}, им посвящены параграфы 1.2 и 1.3 соответственно. В нашей теории вычисляются когомологии от неприводимых модулей $\mathcal{L}_\Delta$ алгебры Вирасоро со старшим весом Δ и центральным зарядом $c=26$.

Ответ для размерностей относительных когомологий был получен Лианом и Цукерманом [6]. Оказывается, что $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)\neq 0$ только при Δ, принадлежащих некоторому счетному множеству размерностей E (мы обозначаем эти размерности $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots$). Для $\Delta\in E$ размерности когомологий также найдены Лианом и Цукерманом. Эти результаты кратко описаны в пункте 1.2.1. В пункте 1.2.2 приведен рекурсивный алгоритм нахождения представителей этих классов когомологий.

В пункте 1.2.3 рассмотрены два оператора

$$X=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nc_{-n}c_n,\qquad X_+=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^3c_{-n}c_n,$$

где c_i — антикоммутирующие духи из (b,c) системы. Эти операторы коммутируют с дифференциалом Q и поэтому действуют на когомологиях. В приведенной ниже теореме доказывается важное свойство этого действия.

Теорема (1.2.1). *Классы когомологий*

$$O_{a_n},\qquad XO_{a_n},\ X^2O_{a_n},\ldots X^nO_{a_n},\qquad X_+O_{a_n},\ X_+^2O_{a_n},\ldots X_+^{n-1}O_{a_n}$$

образуют базис в пространстве когомологий $H^{\mathrm{rel}}_{\bullet}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Через O_{a_n} в этой теореме обозначается класс когомологий $H^{\mathrm{rel}}_{\bullet}(\mathcal{L}_{a_n})$ с наименьшей градуировкой (духовым числом). Эту теорему можно проиллюстрировать следующим образом:

$$
\begin{tikzcd}
 & XO_{a_n} \arrow[r, "X"] & X^2O_{a_n} \arrow[r, "X"] & \dots \arrow[r, "X"] & X^{n-1}O_{a_n} \arrow[dr, "X"] & \\
O_{a_n} \arrow[ur, "X"] \arrow[dr, "X_+"'] & & & & & X^nO_{a_n} \\
 & X_+O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & X_+^2O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & X_+^{n-1}O_{a_n} \arrow[ur, "X_+"'] &
\end{tikzcd}
$$

$-n+1, \qquad -n+3, \qquad -n+5, \qquad \dots \qquad n-1, \qquad n+1.$

Параграф 1.3 посвящен изучению абсолютных БРСТ когомологий. Лиан и Цукерман доказали, что когомологии $H^{\mathrm{abs}}_{\bullet}(\mathcal{L}_\Delta)$ нетривиальны если, и только если, $\Delta \in E$. Мы уточним этот результат:

Теорема (1.3.1)**.**

$$
\dim H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n+1,\ -n+3, \dots,\ n-1, \\ 1, & k = -n+4,\ -n+6, \dots,\ n+2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}
$$

при $n > 0$*. В случае* $n = 0$

$$
\dim H_k^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1} + \delta_{k,2}.
$$

Здесь через $\delta_{i,j}$ обозначена дельта функция Кронекера. Эта теорема доказывается с помощью длинной точной последовательности, связывающей относительные и абсолютные когомологии. Дифференциал этой последовательности совпадает с действием оператора X на пространстве относительных когомологий. Это действие вычисляется с помощью теоремы 1.2.1.

Также в параграфе 1.3 вводится оператор

$$
Y = \frac{1}{12} \sum_{i+j+k=0} (i-j)(j-k)(k-i) c_i c_j c_k,
$$

действующий на пространстве абсолютных когомологий. С его помощью удается изучить структуру операторной алгебры на пространстве абсолютных когомологий. На алгебру налагаются довольно сильные ограничения, вытекающие из правил отбора в теории Лиувилля и связи умножения в алгебре с действием операторов X_+ и Y.

В параграфе 1.4 приводятся некоторые явные формулы для представителей БРСТ когомологий неприводимых модулей алгебры Вирасоро при c=26, полученные при помощи процедуры из пункта 1.2.2.

Во второй главе изучаются гомологии и полубесконечные гомологии алгебр Ли. Из общей, теории развитой, в этой главе вытекает теорема 1.3.1.

В параграфе 2.1 приведены определения и основные свойства гомологий алгебр Ли.

В параграфе 2.2 определяется функтор двойственности D. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, K — ограниченный комплекс конечнопорожденных $\mathfrak{g}$ модулей. Введем функтор $D_{\mathfrak{g}}(K) = \mathsf{Hom}(K, U)^{\mathrm{op}}$, где верхний индекс ор означает замену правого действия алгебры $\mathfrak{g}$ на левое, $U = U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Идея этого определения, в общем, стандартная и полностью аналогична определению функтора двойственности в теории D-модулей или в теории представлений p-адических редуктивных групп. В параграфе 2.2. доказаны стандартные свойства этого функтора.

Предложение (2.2.1)**.** *Пусть V — конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $D_{\mathfrak{g}}(V) = V^* \otimes \mathcal{K}^*[n]$.*

Здесь использованы обозначения $\dim \mathfrak{g} = n$ и $\mathcal{K} = \Lambda^n \mathfrak{g}$. Это свойство, в частности, означает, что образ конечномерного представления под действием функтора сосредоточен только в одной градуировке. Свойства такого типа иногда называют чистотой, в теории D-модулей аналогичным свойством обладают голономные D-модули.

Предложение (2.2.2)**.** *Пусть K — ограниченный комплекс конечно порожденных $\mathfrak{g}$ модулей. Тогда существует невырожденное спаривание*

$$(-,-)\colon H_i(\mathfrak{g}, K) \otimes H_{-i}(\mathfrak{g}, D_{\mathfrak{g}}(K)) \to \mathbb{C}.$$

Это спаривание согласовано с действием $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$,Это спаривание согласовано с действием $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$, т.е.

$$(wa, b) + (a, wb) = 0,$$

где $w \in H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$, $a \in H_i(\mathfrak{g}, K)$, $b \in H_{-i+k}(\mathfrak{g}, D(K))$.

В этом предложении в качестве градуировки $H_i(\mathfrak{g}, -)$ берется сумма градуировки комплекса $\mathcal{K}$ и гомологической градуировки (поэтому она может быть и отрицательной). Обобщением этого предложения является

Предложение (2.2.3)**.** *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ коразмерности d, V — конечномерное представление. Тогда существует невырожденное спаривание*

$$(-,-)\colon H_i(\mathfrak{h},V)\otimes H_{-i-d}(\mathfrak{h},D_{\mathfrak{g}}(V)\otimes M)\to\mathbb{C}[d],$$

где $M=\Lambda^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Это спаривание согласовано с действием $H^\bullet(\mathfrak{h},\mathbb{C})$.

Целью параграфа 2.3 является обобщение результатов предыдущего параграфа на случай бесконечномерных алгебр Ли. Для этого на алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и ее представления V налагаются следующие два условия.

(*1) Алгебра $\mathfrak{g}$ является положительно градуированной, более точно $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathfrak{g}_i$, где $\dim\mathfrak{g}_i<\infty$. Под представлениями понимаются градуированные конечно порожденные представления.

(*2) Для любой подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ конечной коразмерности $\dim H_q(\mathfrak{h},V)<\infty$, $\forall q$.

Представления V, удовлетворяющие (*2), имеют свободную резольвенту, конечно порожденную в каждом члене. Алгебры $\mathfrak{g}$, удовлетворяющие условию (*1) являются проективными пределами нильпотентных, поэтому дуализирующий модуль $K=\mathbb{C}$. В условиях (*1) и (*2) верен естественный аналог предложения 2.2.1:

Теорема (2.3.1)**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ и модуль V удовлетворяет условиям (*1) и (*2). Тогда комплекс $D_{\mathfrak{g}}(V)$ — ацикличен.*

Неформально можно думать, что гомологии $D_{\mathfrak{g}}(V)$ равны V^* и сосредоточены в градуировке $\dim\mathfrak{g}$, то есть на бесконечности. Относительный вариант двойственности (предложение 2.2.3) также переносится на бесконечномерный случай:

Теорема (2.3.2)**.** *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию (*1), $\mathfrak{h}$ – градуированная подалгебра конечной коразмерности d, V — $\mathfrak{g}$-модуль, удовлетворяющий (*2). Тогда существует невырожденное спаривание*

$$(-,-)\colon H_i(\mathfrak{h},V)\otimes H_{-i-d}(\mathfrak{h},D_{\mathfrak{g}}(V)\otimes M)\to\mathbb{C}[d],$$

где $M=\Lambda^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Это спаривание согласовано с действием $H^\bullet(\mathfrak{h},\mathbb{C})$.

В параграфе 2.4 обсуждаются примеры, иллюстрирующие предыдущие теоремы. Пусть $\mathfrak{q}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{g}=\mathfrak{q}[t^{-1}]t^{-1}$, V — интегрируемый модуль над аффинной алгеброй Каца–Муди $\widehat{q}=q[t,t^{-1}]+\mathbb{C}K$. Тогда $\mathfrak{g}$, V — удовлетворяют условиям (*1) и (*2).

По аналогии можно рассмотреть случай алгебры Вирасоро Vir. Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{Vir}_{<0}$, $V = \mathbb{C}$ — ее тривиальное представление. В этом случае условия (*1) и (*2) также выполняются.

Кроме того, приводится пример, показывающий, что условие (*2) является необходимым для теоремы 2.3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – свободная алгебра Ли с двумя образующими x, y градуировки 1, $V = \mathbb{C}$. Тогда у модуля $\mathbb{C}$ есть удобная резольвента, состоящая из двух членов: $0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow U \xleftarrow{(x,y)} U \oplus U$. Если с ее помощью вычислить функтор $D_{\mathfrak{g}}$, то получится комплекс $U \xrightarrow{(x,y)} U \oplus U$, который не является ацикличным, а имеет бесконечномерные первые гомологии. Теорема 2.3.2 в этом случае также не выполняется.

В параграфе 2.5 обсуждается двойственность между полубесконечными и обычными гомологиями. Пусть $\mathfrak{g}$ имеет полубесконечную структуру (см. [17]). Это означает, что $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}$, где $\dim \mathfrak{g}_i < \infty$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_{\geq 0} = \bigoplus\limits_{i\geq 0} \mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus\limits_{i<0} \mathfrak{g}_i$. Кроме того, задан $\gamma\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ – 1-коцикл алгебры $\mathfrak{g}$, такой, что когомологический дифференциал $\delta(\gamma)$ равняется «критическому» 2-коциклу алгебры $\mathfrak{g}$ и $\gamma(\mathfrak{g}_i) = 0$ при $i \neq 0$.

В этих предположениях можно определить полубесконечные когомологии, которые, неформально говоря, являются гомологиями относительно $\mathfrak{n}$ и когомологиями относительно $\mathfrak{b}$. Для случая алгебры Вирасоро полубесконечные когомологии совпадают с БРСТ когомологиями, обсуждавшимися в главе 1.

Для построения функтора двойственности используется полурегулярный бимодуль S [9, 11], который является полубесконечным аналогом универсальной обертывающей алгебры U и двойственного пространства U^*.

Сам функтор двойственности удобно определить в два этапа. Пусть V — $\mathfrak{g}$ модуль, тогда $T(V) = S \otimes V$. Например, пусть V — модуль Верма, т.е. $\mathfrak{g}$ модуль, индуцированный с одномерного представления алгебры $\mathfrak{b}$. Тогда $T(V)$ — модуль двойственный к модулю Верма. Положим $D(V) = T(V)^{\circledast\mathrm{op}}$, где $\circledast$ означает взятие градуированно двойственного пространства, op означает замену правого действия на левое. Тогда функтор D переводит модули Верма в модули Верма с двойственным старшим весом. Следующая теорема устанавливает двойственность для гомологий.

Теорема (2.5.1)**.** *Существует невырожденное спаривание*

$$(-,-) : H_i(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, K) \otimes H^{\infty/2-i}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, D(K)) \to \mathbb{C}.$$

Это спаривание согласованно с действием $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \mathbb{C})$.

Параграф 2.6 посвящен гомологиям алгебры Вирасоро. Мы приводим результаты Гельфанда–Фукса [18] и предъявляем явные формулы для представителей классов гомологий алгебры Вирасоро.

Основной целью параграфа 2.7 является доказательство теоремы 1.3.1. Эта теорема говорит о полубесконечных когомологиях неприводимых представлений алгебры Вирасоро.

Для этого рассматривается комплекс A, состоящий из модулей Верма над алгеброй Вирасоро с центральным зарядом 26:

$$V_{a_0} \to V_{a_1} \oplus V_{b_1} \to V_{a_2} \oplus V_{b_2} \to V_{a_3} \oplus V_{b_3} \to \dots$$

В этой формуле через V_{a_i} и V_{b_i} обозначены модули Верма над алгеброй Вирасоро с центральным зарядом 26 и старшим весом a_i и b_i соответственно. Числа a_i, b_i — это в точности те, которые упоминались в главе 1.

С одной стороны, комплекс A совпадает с $D(\mathbb{C})$. Поэтому по теореме 2.5.1 относительные полубесконечные когомологии с коэффициентами в A являются свободным модулем над алгеброй $H^{\bullet}(\mathrm{Vir}, \langle L_0, c\rangle, \mathbb{C})$. С другой стороны, обрезания этого комплекса являются резольвентами неприводимых модулей L_{a_i}, L_{b_i} алгебры Вирасоро. Из этого и следует, что полубесконечные когомологии $H^{\infty/2}(\mathrm{Vir}, \langle L_0, c\rangle, L_{a_k})$ и $H^{\infty/2}(\mathrm{Vir}, \langle L_0, c\rangle, L_{b_k})$ являются циклическими модулями над $H^{\bullet}(\mathrm{Vir}, \langle L_0, c\rangle, \mathbb{C})$. По сути, это и есть утверждение теоремы 1.3.1.

Третья глава посвящена сравнению результатов различных подходов к двумерной гравитации. В параграфе 3.1 даются основные определения. В пункте 3.1.1 приводятся основные формулы Лиувиллевской гравитации. Действие в этой теории имеет вид

$$S = S_{\mathrm{MM}} + S_{\mathrm{L}} + S_{\mathrm{Ghost}},$$

где S_{MM} — это действие минимальной конформной теории поля, S_{L} — Лиувиллевское действие и S_{Ghost} — стандартное действие духов. В диссертации обсуждается случай минимальной Лиувиллевской гравитации $M(2, 2p+1)$. В этой теории есть p физических полей O_k, $0 \le k \le p-1$, составленных из примарных полей в материальной конформной теории поля и Лиувиллевской теории. Их корреляционные функции удобно организовать в производящую функцию

$$F^{\mathrm{LG}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \sum_{k_1,k_2,\ldots} \langle O_{k_1}...O_{k_n}\rangle \frac{\lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k_n}}{|\mathrm{Aut}(k_1,\ldots,k_n)|}.$$

Эта функция разлагается по родам $F^{\mathrm{LG}} = F_0^{\mathrm{LG}} + F_1^{\mathrm{LG}} + \ldots$, где F_g^{LG} — производящая функция корреляторов рода g. В пункте 3.1.1 объясняется, что вклад рода ноль должен иметь вид

$$F_0^{\mathrm{LG}} = \mu^{\frac{2p+3}{2}} h\left(\frac{t_1}{\mu^{3/2}}, \frac{t_2}{\mu^2}, \ldots, \frac{t_{p-1}}{\mu^{(p+1)/2}}\right).$$

Из определения функции F^{LG} следует, что формально h определена своим разложением в степенной ряд. В следующих двух пунктах обсуждается одноматричная модель, которая должна соответствовать Лиувиллевской гравитации, и струнное уравнение, которое возникает в двойном скейлинговом пределе в окрестности критической точки. Через $F(t_0,\ldots,t_k)$ обозначим лидирующий сингулярный член свободной энергии около p-критической точки. Тогда если определить u по формуле

$$u(t_0,t_1,\ldots,t_{p-1},\varepsilon) = \partial^2 F(t_0,t_1,\ldots,t_{p-1},\varepsilon)/\partial t_{p-1}^2,$$

то u должно удовлетворять струнному уравнению. Для того чтобы F соответствовало F^{LG} необходимо, что бы u_0 имело вид

$$u_0(\mu,t_1,t_2,\ldots,t_{p-1}) = \mu^{1/2} h\left(\frac{t_1}{\mu^{3/2}}, \frac{t_2}{\mu^2}, \ldots, \frac{t_{p-1}}{\mu^{(p+1)/2}}\right),$$

где функция h определена формально своим разложением в степенной ряд, u_0 это вклад рода 0 в разложение функции u:

$$u(t,\varepsilon) = u_0 + u_1\varepsilon^2 + u_2\varepsilon^4 + \ldots$$

В начале параграфа 3.2 мы приводим Виттеновское определение производящей функции в топологической гравитации. Известно, что она тоже является решением струнного уравнения. Основной вопрос — как связаны это решение и решение, которое должно соответствовать Лиувиллевской гравитации. Разбирается простейший пример Лиувиллевской гравитации $(2,5)$. В этом примере $\tilde{u}_0$ из топологической гравитации равна

$$\tilde{u}_0 = \sum_{k_3} \frac{(3k_3)!}{(2k_3+1)!k_3!} \frac{\tilde{t}_0^{2k_3+1}}{(1-\tilde{t}_1)^{3k_3+1}} = \frac{x}{\mu} + \frac{x^3}{\mu^4} + 3\frac{x^5}{\mu^7} + \cdots$$

В то время как u_0, соответствующая Лиувиллевской гравитации, имеет вид

$$u_0 = \mu^{1/2} g\left(\frac{x}{\mu^{3/2}}\right) = \mu^{1/2} - \frac{x}{2\mu} - \frac{3x^2}{8\mu^{5/2}} + \cdots$$

Они не совпадают, но являются разложениями в ряд двух разных корней струнного уравнения $u^3 - \mu u + x = 0$ в точке $x = 0$, т.е. связаны нетривиальным аналитическим продолжением. Объясняется, что при этом аналитическом продолжении не только $\tilde{u}_0$ перейдет в u_0, но и все $\tilde{u}$ перейдет u, поэтому уравнения топологической рекурсии, тавтологически выполненные для функции $\tilde{u}$, выполняются и для u.

Для большего p ситуация становится еще сложнее, так как получаются разложения корней струнного уравнения в разных точках в пространстве с координатами $t_0, t_1, ..., t_{p-1}$.

В параграфе 3.3 объясняется, как получить выражения для u_k через u_0 и ее производные по x.

Глава 4 посвящена вычислению корреляционных функций в парафермионной конформной теории поля [16]. В параграфе 4.1 размещены необходимые предварительные сведения. Также сформулирована задача вычисления корреляционной функции от трех полей порядка $\sigma_{k_1}(x_1, \bar{x}_1), \sigma_{k_2}(x_2, \bar{x}_2), \sigma_{k_3}(x_3, \bar{x}_3)$, n операторов парафермионной алгебры $\Psi(z)\bar{\Psi}(\bar{z})$

$$\mathfrak{G}_m^{(N|\,k_1,k_2,k_3)}(x_1, x_2, x_3|t_1, \dots, t_n) = \\ = \langle \sigma_{k_1}(x_1, \bar{x}_1)\sigma_{k_2}(x_2, \bar{x}_2)\sigma_{k_3}(x_3, \bar{x}_3)\Psi(t_1)\bar{\Psi}(\bar{t}_1)\dots\Psi(t_n)\bar{\Psi}(\bar{t}_n)\rangle.$$

Удобно записать $n = mN - k$. Из структуры операторного произведения следует, что корреляционная функция не равна нулю только в одном из следующих случаев:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2k, \quad 0 \le k_j \le k \le N,$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = N + 2k, \quad 0 \le k \le k_j \le N.$$

Эти случаи аналогичны, и дальше в диссертации в основном рассматривается первый из них. В параграфе 4.1 показывается, что корреляционная функция должна иметь вид

$$\mathfrak{G}_m^{(N|\,k_1,k_2,k_3)}(x_1, x_2, x_3|t_1, \dots, t_n) = \frac{\Xi(k_1,k_2,k_3)\,|\mathbf{P}_m^{(N|\,k_1,k_2,k_3)}(x_1, x_2, x_3|t_1, \dots, t_n)|^2}{|x_{12}|^{2\delta_{12}}|x_{13}|^{2\delta_{13}}|x_{23}|^{2\delta_{23}}\prod\limits_{i,j}|t_i - x_j|^{\frac{2k_j}{N}}\prod\limits_{i<j}|t_{ij}|^{\frac{4}{N}}},$$

где $x_{ij} = x_i - x_j$, $t_{ij} = t_i - t_j$, δ_{ij} — некоторые фиксированные рациональные числа, $\Xi(k_1, k_2, k_3)$ — некоторый численный множитель. Функция $\mathbf{P}_m^{(N|\,k_1,k_2,k_3)}(x_i|t_j)$, определенная в предыдущей формуле, является многочленом, симметричным по $t_1, \dots, t_n$. В параграфе 4.1 показано, что этот многочлен должен удовлетворять следующим свойствам :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\lambda x_i|\lambda t_j) = \lambda^{m(m-1)N}\mathbf{P}(x_i|t_j),\\
&\mathbf{P}\left(x_i^{-1}\middle|t_j^{-1}\right) = \prod_{j=1}^{3} x_j^{-(m-1)k_j}\prod_{q=1}^{n} t_q^{-2(m-1)}\mathbf{P}(x_i|t_j),\\
&\mathbf{P}(x_i+\lambda|t_j+\lambda) = \mathbf{P}(x_i|t_j), \qquad\qquad (4.17)\\
&\mathbf{P}(x_1,x_2,x_3|\underbrace{x,\dots x}_{N+1},t_1,\dots t_{n-N-1}) = 0,\\
&\mathbf{P}(x_1,x_2,x_3|\underbrace{x_j,\dots x_j}_{N+1-k_j},t_1,\dots t_{n+k_j-N-1}) = 0 \quad \text{при } j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

В параграфе 4.2 доказывается теорема.

Теорема (4.2.1)**.** *Существует и единственный с точностью до умножения на константу многочлен* $\mathbf{P}_m^{(N|\,k_1,k_2,k_3)}(x_1,x_2,x_3|t_1,\dots,t_n)$*, удовлетворяющий свойствам (4.17).*

Существование такого многочлена доказывается явной конструкцией. Единственность доказывается при помощи предложенной в [19] комбинаторной фильтрации на пространстве многочленов.

В параграфе 4.3 объясняется, как многочлен, построенный в теореме 4.2.1, применяется для нахождения трехточечной корреляционной функции в парафермионной теории Лиувилля.

Цитированная литература

[1] A. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings.* Phys.Lett. B103, (1981), 207.

[2] J. Distler, H. Kawai, *Conformal field theory and 2-D quantum gravity or who's afraid of Joseph Liouville?* Nucl. Phys. **B321**, (1989), 509,

F. David, *Conformal field theories coupled to 2-D gravity in the conformal gauge.* Mod. Phys. Lett. **A3**, (1988), 1651.

[3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333–380.

[4] Ал. Б. Замолодчиков, *Трехточечная функция минимальной лиувиллевской гравитации* ТМФ **142 2** (2005) 183 hep-th/0505063v1.

[5] А. А. Белавин, Ал. Б. Замолодчиков, *Интегралы по пространству модулей, кольцо дискретных состояний и четырехточечная функция в минимальной лиувиллевской гравитации*, ТМФ **147:3** (2006) 339 hep-th/0510214.

[6] B. Lian, G. Zuckerman, *New Selection Rules And Physical States in 2D Gravity.* Phys. Lett. **B254**, (1991), 417.

[7] B. Feigin, D. Fuchs, *Verma modules over the Virasoro algebra.* Lectures Notes in Math. **1060** Springer, Berlin, (1984) 230-245.

[8] S. M. Arkhipov, *Semi-infinite cohomology of associative algebras and bar duality*, Internat. Math. Res. Notices, **17**, (1997), 833–863.

[9] W. Soergel *Character formulas for tilting modules over Kac-Moody algebras*, Represent. Theory **2** (1998), 432-448.

[10] L. Positselski *Homological Algebra of Semimodules and Semicontramodules* Monografie Matematyczne, vol.70, Birkhauser Basel, (2010).

[11] K. Iohara, Y. Koga, *Representation theory of the Virasoro algebra*, Springer Monographs in Mathematics, London: Springer-Verlag London Ltd (2011).

[12] H. Dorn and H. J. Otto, *On correlation functions for noncritical strings with $c \le 1$ $d \ge 1$*, *Phys. Lett.* **B291** (1992) 39–43, hep-th/9206053.

H. Dorn and H. J. Otto, *Two and three point functions in Liouville theory*, *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 375–388, hep-th/9403141.

A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 577–605, hep-th/9506136.

[13] R. C. Rashkov and M. Stanishkov, *Three-point correlation functions in $N=1$ Super Lioville Theory*, *Phys. Lett.* **B380** (1996) 49–58, hep-th/9602148.

R. H. Poghosian, *Structure constants in the $N = 1$ super-Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B496** (1997) 451–464, hep-th/9607120.

[14] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov *Fractal structure of 2d quantum gravity* Modern Physics Letters **A 3, 8** (1988) 819-826.

[15] A. A. Belavin, A. B. Zamolodchikov, *On correlation numbers in 2D minimal gravity and matrix models*, Jour. Phys. A42 (2009) 304004; arxiv:0811.0450. .

[16] А.Б. Замолодчиков, В.А. Фатеев, *Нелокальные (парафермионные) токи в двумерной квантовой теории поля и самодуальные критические точки в Z_N-симметричных статистических системах*, ЖЭТФ, **89 (2)**, (1985) 380-399.

[17] A. A. Voronov *Semi-infinite homological algebra.* Invent. Math. **113**, (1993) 103-146.

[18] И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, *Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности*, Функц. анализ и его прил., **2:4** (1968), 92–93.

[19] А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин, *Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта*, Функц. анализ и его прил. **28 1** (1994) 68–90, arXiv:hep-th/9308079v1.

Работы автора по теме диссертации

[1] О.В. Алексеев, М.А. Берштейн, *Кольцо физических состояний в M(2,3) минимальной лиувиллевской гравитации*, ТМФ, **164(1)**, (2010) 119-140 arXiv:0906.1377v2.

[2] A. Belavin, M. Bershtein, G. Tarnopolsky, *A remark on the three approaches to 2D Quantum gravity*, Письма в ЖЭТФ, **93 (2)**, (2011) 51-55 arXiv:1010.2222v3.

[3] M. A. Bershtein, V. A. Fateev, A. V. Litvinov, *Selberg integrals and three-point correlation function in parafermionic Liouville field theory*, Nuclear Physics **B 84** (2011) 413–459, arXiv:1011.4090v2.