

На правах рукописи

БУРМИСТРОВ Игорь Сергеевич

**Влияние электрон-электронного взаимодействия на транспорт в
низкоразмерных электронных системах и наноструктурах**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
С. Н. Артёменко,

доктор физико-математических наук
В. Ю. Качоровский,

доктор физико-математических наук
А. М. Финкельштейн.

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Физический институт им. П. Н. Лебедева
Российской академии наук.

Защита состоится 28 июня 2012 г. в 11 час. 30 мин. на заседании диссертационного
совета Д.002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук по ад-
ресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1-А,
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Рос-
сийской академии наук.

Автореферат разослан _____ мая 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

П. Г. Гриневич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время имеется большой экспериментальный и теоретический интерес к электронному транспорту в низкоразмерных системах (двумерный электронный газ, квантовые проволоки, поверхность трехмерных топологических изоляторов, графен, металлические одноэлектронные транзисторы) и наноструктурах (квантовые точечные контакты, квантовые точки, углеродные нанотрубки, молекулярные одноэлектронные транзисторы). Во всех перечисленных системах электрон-электронное взаимодействие оказывает существенное влияние на электронный транспорт. Межэлектронное взаимодействие ответственно за явление дробного квантового эффекта Холла, определяет температурную зависимость ширины переходов между плато в холловской проводимости для целочисленного квантового эффекта Холла, приводит к переходу металл-изолятор в двумерных неупорядоченных электронных системах и к переходу сверхпроводник-изолятор в тонких неупорядоченных пленках, а также ведёт к появлению на поверхности трёхмерного топологического изолятора критического металлического состояния, в котором проводимость при нуле температур остаётся конечной. Оно же ответственно за нелинейную при малых напряжениях вольт-амперную характеристику в квантовых проволоках и углеродных нанотрубках, кулоновскую блокаду электронного транспорта в одноэлектронных транзисторах и квантовых точках, и явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости в квантовых точках из почти ферромагнитных материалов. Существенную роль межэлектронное взаимодействие играет и в неравновесном электронном транспорте, приводя к возможности релаксации неравновесной функции распределения.

Несмотря на то, что влияние электрон-электронного взаимодействия на электронный транспорт в низкоразмерных системах и наноструктурах интенсивно исследуется с 70-х годов прошлого века, существует большой круг задач, нерешённых до настоящего времени. Это связано как со сложностью теоретического учёта влияния электрон-электронного взаимодействия на транспорт, так и с появлением новых объектов для экспериментальных и теоретических исследований.

Цель работы. Настоящая диссертационная работа преследует следующие цели: 1) построение теоретического описания влияния спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе; 2) исследование влияния электрон-электронного взаимодействия на целочисленный квантовый эффект Холла в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе в сильном магнитном поле, полностью поляризующем электронный спин; 3) построение теории макроскопического зарядового квантования в одноэлектронном транзисторе; 4) исследование влияния сильных спиновых корреляций, связанных с явлением мезоскопической стоунеровской неустойчивости, на термодинамические и транспортные свойства электронов в квантовых точках.

При всём разнообразии, рассмотренных в диссертационной работе задач, все они связаны между собой тем, что на физику явлений в рассматриваемых электронных системах оказывает сильное влияние электрон-электронное взаимодействие. Именно оно приводит к тем физическим явлениям, которые исследуются в диссертации.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, сводятся к следующему:

1. Построена теория электронного транспорта в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы, не предполагающая равенство амплитуд взаимодействия между электронами с разными проекциями спина и изоспина. Показано, что рассмотренный ранее случай, когда амплитуды взаимодействия совпадают, является неустойчивым относительно малых нарушений этого условия.
2. Построена теория транспорта в двумерной взаимодействующей двухдолинной неупорядоченной электронной системе в присутствии междолинного и зеемановского расщеплений. Объяснена экспериментально наблюдаемая эволюция температурной зависимости сопротивления от металлического типа к диэлектрическому типу при увеличении параллельного магнитного поля. Предсказана возможность существования двух максимумов в температурной зависимости сопротивления вблизи перехода металл-изолятор.
3. Построена теория транспорта для двумерной взаимодействующей неупорядоченной электронной системы в структурах с двойной квантовой ямой и общими рассеивателями. Объяснено наблюдаемое в эксперименте слабое изменение температурной зависимости сопротивления и времени сбоя фазы при сильном уменьшении концентрации электронов в одной из квантовых ям.
4. В двухпетлевом приближении исследован переход металл-изолятор в системе взаимодействующих электронов с полностью поляризованными спинами. Показано, что в случае размерности пространства $d = 2$ переход металл-изолятор отсутствует.
5. Для случая спин-поляризованных электронов построена теория целочисленного квантового эффекта Холла с учетом электрон-электронного взаимодействия. Проведённые аналитические вычисления подтверждают тот факт, что а) наличие межэлектронного взаимодействия не меняет хорошо известное для модели невзаимодействующих электронов объяснение целочисленного квантования холловской проводимости, б) переход между плато в случае короткодействующего электрон-электронного взаимодействия попадает в тот же класс универсальности, что и модель невзаимодействующих электронов, тогда как в случае кулоновского взаимодействия этот квантовый фазовый переход находится в новом классе универсальности по сравнению с моделью невзаимодействующих электронов.

6. С помощью подхода нелинейной сигма-модели исследована температурная зависимость времени сбоя фазы в критической области перехода между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в спин-поляризованной электронной неупорядоченной системе с короткодействующим межэлектронным взаимодействием. Показано, что критический индекс, характеризующий степенную зависимость времени сбоя фазы от температуры в критической области перехода между плато, определяется значением аномальной размерности амплитуды электрон-электронного взаимодействия в критической точке, соответствующей невзаимодействующим электронам.
7. Для двумерной неупорядоченной электронной системы с кулоновским взаимодействием в перпендикулярном магнитном поле, полностью поляризующем спин электрона, построена теория квантовых холловских осцилляций магнетосопротивления и теплоёмкости в магнитном поле, связанных с наличием делокализованных состояний. Показано, что при низких температурах зависимость амплитуды квантовых холловских осцилляций от температуры отличается от температурной зависимости амплитуды осцилляций Шубникова-де Гааза.
8. Для решения проблемы кулоновской блокады в одноэлектронном транзисторе предложена и исследована новая физическая величина, определяющая затворную ёмкость одноэлектронного транзистора, которая отличается от геометрической ёмкости затвора из-за перенормировок, связанных с наличием кулоновского взаимодействия. Показано, что диаграмма двухпараметрического потока (в координатах: перенормированные кондактанс и затворная ёмкость) имеет топологию аналогичную диаграмме потока (в координатах: продольная и холловская проводимости) для целочисленного квантового эффекта Холла. Предсказано целочисленное квантование заряда, соответствующего (перенормированной) затворной ёмкости, при нулевой температуре.
9. В рамках нульмерного приближения (модель универсального гамильтониана) для квантовой точки с прямым и ферромагнитным обменным взаимодействиями аналитически решена задача об одновременном учете в спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний зарядовых и спиновых корреляций, зеemannовского расщепления и флуктуаций одночастичных уровней энергии. Вблизи порога стоунеровской неустойчивости найден широкий интервал температур, в котором явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости проявляется в законе Кюри для спиновой восприимчивости с квадратом эффективного спина, логарифмически зависящем от температуры, и в дополнительном немонотонном поведении туннельной плотности состояний как функции энергии.

Научная новизна и достоверность. Все результаты диссертационной работы получены впервые, её выводы обоснованы надёжностью применявшихся аналитических

методов, согласием с теоретическими результатами, полученными в других работах, и согласием с данными физических и численных экспериментов, выполненных другими авторами.

Научная и практическая ценность. Развитые в диссертационной работе методы могут быть использованы для описания широкого круга явлений в электронном транспорте в низкоразмерных электронных системах и наноструктурах.

Полученные в диссертационной работе однопетлевые уравнения ренормализационной группы, описывающие зависимость физических величин (проводимости, спиновой восприимчивости, изоспиновой восприимчивости) от размера системы при нулевой температуре в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы и не предполагающие равенство амплитуд межэлектронного взаимодействия, существенно обогащают теорию переходов металл-изолятор. Применение полученных уравнений ренормализационной группы к конкретным двумерным электронным системам с дополнительными изоспиновыми степенями свободы позволяет объяснить ряд экспериментальных наблюдений в электронном транспорте и сделать предсказание о новом интересном поведении сопротивления при понижении температуры, требующее экспериментальной проверки.

Развитый в диссертационной работе метод получения непертурбативных уравнений ренормализационной группы, описывающих для случая взаимодействующих спинполяризованных электронов зависимость диссипативной и холловской проводимости, а также амплитуды взаимодействия от размера системы и магнитного поля при нулевой температуре, является в настоящее время единственным способом учесть одновременно перенормировку проводимости за счёт электрон-электронного взаимодействия и орбитального влияния магнитного поля. В дальнейшем этот метод может быть применён для изучения вопроса о наблюдаемом экспериментально сосуществовании перехода металл-изолятор в нулевом магнитном поле и целочисленного квантового эффекта Холла. Развитый в диссертационной работе метод вычисления непертурбативных уравнений ренормализационной группы может быть применён и для вычисления непертурбативных поправок к физическим наблюдаемым в неабелевых калибровочных теориях поля.

Построенная в диссертационной работе теория квантовых холловских осцилляций магнетопроводимости и теплоёмкости, учитывающая влияние межэлектронного взаимодействия, будет способствовать постановке экспериментов по изучению всплывания делокализованных состояний над уровнем химического потенциала и квантования холловской проводимости в слабых магнитных полях.

Предсказываемое в диссертационной работе целочисленное квантование в пределе нулевой температуры новой физической величины, соответствующей затворной ёмкости одноэлектронного транзистора с большим числом туннельных каналов, имеет фундаментальное значение и существенно обогащает теорию кулоновской блокады в

одноэлектронных устройствах. Полученный результат показывает существование тесной связи между теорией целочисленного квантового эффекта Холла и теорией электронного транспорта в одноэлектронных устройствах.

Полученные в диссертационной работе результаты для температурной зависимости спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний, учитывающие наличие зарядовых и спиновых корреляций, зеемановского расщепления и флуктуаций одночастичных уровней энергии, показывают, что в квантовых точках из почти ферромагнитных материалов явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости можно экспериментально исследовать при достаточно высоких температурах.

Апробация работы. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных конференциях “Flux, Charge, Topology, and Statistics” (Амстердам, Нидерланды, 2003), “Mesoscopic and Strongly Correlated Electron Systems” (Черноголовка, 2003, 2009), “Strongly Correlated Phenomena in Quantum Field Theory, Nanophysics and Hydrodynamics” (Триест, Италия, 2006), “Symposium on Theoretical and Mathematical Physics” (Санкт-Петербург, 2007, 2009, 2011), “Correlated Electron Systems in High Magnetic Fields” (Дрезден, Германия, 2008), “Fundamentals of Electronic Nanosystems” (Санкт-Петербург, 2008, 2010), “Landau-Weizmann Workshop on Theoretical Physics” (Реховот, Израиль, 2008), “Localization Phenomena in Novel Phases of Condensed Matter” (Триест, Италия, 2010), “XLVI Recontres de Moriond” (Ла Туилль, Италия, 2011), “Fundamental Problems of High Temperature Superconductivity” (Звенигород, 2011), международной конференции в честь 100-летия Л. Д. Ландау “Advances in Theoretical Physics” (Черноголовка, 2008), на конференциях “Landau Days” (Черноголовка, 2003, 2005, 2006, 2009, 2010, 2011), “34-е Всероссийское совещание по физике низких температур” (Сочи, 2006), “Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления” (Троицк, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011), “VIII всероссийская конференция по физике полупроводников” (Екатеринбург, 2007), “Всероссийская школа молодых учёных Микро-, нанотехнологии и их применения” (Черноголовка, 2008, 2010), “35-е Всероссийское совещание по физике низких температур” (Черноголовка, 2009), “Уральская зимняя школа по физике полупроводников” (Екатеринбург, 2010, 2012), на семинарах в ИТФ РАН, ФИАН РАН, ИФТТ РАН, ИЯИ РАН, ИФВД РАН, ФТИ РАН, ИТЭФ, НИЦ “Курчатовский Институт”, НИТУ МИСиС, в университетах Миннесоты (США), Карлсруэ (Германия), Кёльна (Германия), в университете Бен-Гуриона (Беер-Шева, Израиль), в университете Бар-Илан (Тель-Авив, Израиль), в университете Аалто (Хельсинки, Финляндия), в исследовательском центре Карлсруэ (Германия) и в международном центре теоретической физики (Триест, Италия).

Представленные в диссертационной работе результаты были получены при финансовой поддержке РФФИ (гранты 09-02-92474-МНКС_а, 11-02-92470-МНТИ_а), совета по грантам при Президенте РФ (гранты МК-1617.2005.2, МК-4445.2007.2, МК-125.2009.2, МК-296.2011.2), ФЦП “Научные и педагогические кадры России” (госконтракт П926 от

26 мая 2010 г.), РАН (программы “Квантовая физика конденсированных сред” и “Основы нанотехнологий и наноматериалов”) и фонда Династия.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2002 – 2011 годах в 14 научных работах, список которых приводится в конце реферата.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, четырёх приложений, заключения, списка публикаций и списка литературы.

Содержание работы

Во **введении** обрисовано современное состояние физики электронного транспорта в низкоразмерных электронных системах и наноструктурах, обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, обоснованы новизна и практическая ценность полученных результатов. Здесь же раскрыто содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена изучению влияния спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе.

Во **введении** к первой главе (раздел 1.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов о переходе металл-изолятор и электронном транспорте в двумерной неупорядоченной электронной системе и формулируются задачи, решаемые в первой главе.

В **разделе 1.2** рассматривается нелинейная сигма-модель для взаимодействующей электронной системы со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы и в рамках однопетлевого приближения выводятся уравнения ренормализационной группы, описывающие зависимость физических наблюдаемых (проводимости, спиновой и изоспиновой восприимчивости) от размера системы L при нулевой температуре $T = 0$. Хорошо известно [1, 2, 3], что при низких температурах $T\tau_{tr} \ll 1$, где τ_{tr} – транспортное время упругого рассеяния, эффективное описание неупорядоченной электронной жидкости производится с помощью нелинейной сигма-модели, которая учитывает взаимодействие низкоэнергетических мод (диффузонов и куперонов) с энергиями $|\varepsilon| \lesssim 1/\tau_{tr}$. Нелинейная сигма-модель является теорией матричного поля $Q_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{r})$, подчиняющегося условиям $Q^2(\mathbf{r}) = 1$ и $Q(\mathbf{r}) = Q^\dagger(\mathbf{r})$. Целые числа $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N_r$ обозначают репличные индексы, а целые числа m, n соответствуют мацубаровским энергиям $\varepsilon_n = \pi T(2n + 1)$. Так как в однопетлевом приближении купероны и диффузоны не взаимодействуют, то в разделе 1.2 нелинейная сигма-модель сформулирована для случая, когда купероны и взаимодействие в куперовском канале можно не учитывать, а $Q_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ является матрицей 4×4 , действующей в спиновом и изоспиновом пространствах.

Действие нелинейной сигма-модели имеет вид (вес равен $\exp(-\mathcal{S})$)

$$\mathcal{S} = - \int d\mathbf{r} \left[\frac{\sigma_{xx}}{32} \text{tr}(\nabla Q)^2 + \frac{\pi T}{4} \sum_{\alpha n; ab} \Gamma_{ab} \text{tr} I_n^\alpha t_{ab} Q(\mathbf{r}) \text{tr} I_{-n}^\alpha t_{ab} Q(\mathbf{r}) - 4\pi T z \text{tr} \eta \left(Q - \frac{3}{2} \Lambda \right) \right]. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{xx} = 4\pi\nu_* D$ (D – коэффициент диффузии) представляет собой друдовскую проводимость в единицах e^2/h и предполагается большой по сравнению с единицей: $\sigma_{xx} \gg 1$. Термодинамическая плотность состояний $\nu_* = m_*/\pi$ определяется эффективной массой m_* , которая учитывает ферми-жидкостные перенормировки. Символ tr обозначает след по репличным, мацубаровским, спиновым и изоспиновым индексам. Матрицы $t_{ab} = \boldsymbol{\tau}_a \otimes \boldsymbol{\sigma}_b$ ($a, b = 0, 1, 2, 3$) являются генераторами группы $SU(4)$. Матрицы Паули $\boldsymbol{\tau}_a$, $a = 0, 1, 2, 3$, действуют в изоспиновом пространстве, а матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}_b$, $b = 0, 1, 2, 3$, действуют в спиновом пространстве. Величины Γ_{ab} обозначают амплитуды электрон-электронного взаимодействия и предполагаются *различными*. Параметр z определяется термодинамической плотностью состояний: $z = \pi\nu_*/4$. Хорошо известно [2], что физический смысл параметра z состоит в том, что его перенормированное значение определяет температурную зависимость теплоёмкости. Амплитуды взаимодействия Γ_{ab} связаны со стандартными ферми-жидкостными параметрами взаимодействия F_{ab} : $\Gamma_{ab} = -zF_{ab}/(1 + F_{ab})$. Матрицы Λ , η и I_k^γ определены следующим образом:

$$\Lambda_{nm}^{\alpha\beta} = \text{sign } n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}, \quad \eta_{nm}^{\alpha\beta} = n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}, \quad (I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m,k} \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\gamma} t_{00}.$$

С помощью процедуры фонового поля и вычисления однопетлевых поправок к физическим наблюдаемым в размерности $d = 2$ найдены следующие однопетлевые уравнения ренормализационной группы, определяющие поведение физических наблюдаемых с изменением масштаба L при $T = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi} \left[2 + \sum_{ab} f(\Gamma_{ab}/z) \right], \quad f(x) = 1 - \frac{1+x}{x} \ln(1+x) \\ \frac{d\Gamma_{ab}}{dy} &= -\frac{1}{2\pi\sigma_{xx}} \sum_{cd;ef} \left[[\text{sp}(t_{cd} t_{ef} t_{ab})]^2 \frac{\Gamma_{cd}}{8} + [\mathcal{C}_{cd;ef}^{ab}]^2 \left[\frac{\Gamma_{ab}^2}{z} - \frac{(\Gamma_{ab} - \Gamma_{cd})(\Gamma_{ab} - \Gamma_{ef})}{\Gamma_{cd} - \Gamma_{ef}} \ln \frac{z + \Gamma_{cd}}{z + \Gamma_{ef}} \right] \right] \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{1}{\pi\sigma_{xx}} \sum_{ab} \Gamma_{ab}, \quad \mathcal{C}_{cd;ef}^{ab} = \frac{1}{4} \text{sp}(t_{ab}[t_{cd}, t_{ef}]), \quad y = \ln L/l. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь l – длина свободного пробега, а значения величин σ_{xx} , Γ_{ab} и z при $y = 0$ определяются соответствующими параметрами действия (1). Символ sp обозначает след по спиновым и изоспиновым степеням свободы. Уравнения (2) обобщают известные результаты [4] для случая электронной системы со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы на случай разных параметров взаимодействия Γ_{ab} . Согласно этим уравнениям рассматриваемая ранее ситуация, когда совпадают все Γ_{ab} кроме Γ_{00} , оказывается неустойчивой. Ситуации, когда значения амплитуд Γ_{ab} различны, действительно реализуются в электронных системах со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы.

При этом по сравнению со стандартной ситуацией, когда все Γ_{ab} кроме Γ_{00} одинаковы, возникает ряд новых эффектов. Температурное поведение физических наблюдаемых может быть найдено из интегрирования ренормгрупповых уравнений (2) до масштаба, определяемого температурой.

В *разделе 1.3* общие результаты (2) применены к описанию зависимости сопротивления, спиновой и долинной восприимчивости от температуры в двумерной электронной системе в кремниевых металл-оксид-полупроводник структурах [5] с высокой подвижностью носителей в параллельном магнитном поле B , создающим зеемановское расщепление $\Delta_s = g_L \mu_B B$. Здесь g_L и μ_B обозначают g -фактор и магнетон Бора, соответственно. Хорошо известно [6, 7], что в рассматриваемой двухдолинной электронной системе существуют конечное междолинное расщепление Δ_v и конечное время рассеяния между долинами τ_v , при этом выполняются следующие соотношения $\tau_{so}^{-1}, \tau_v^{-1} \ll \Delta_v \ll \tau_{tr}^{-1}$, где τ_{so} – время спиновой релаксации за счет спин-орбитального взаимодействия. В дальнейшем предполагается, что зеемановское расщепление и температура удовлетворяют аналогичным неравенствам: $\tau_{so}^{-1}, \tau_v^{-1} \ll \Delta_s, T \ll \tau_{tr}^{-1}$, причём для определённости считается, что $\Delta_v \ll \Delta_s$.

На малых масштабах $L \ll L_s \ll L_v$, где $L_{s,v} = \sqrt{\sigma_{xx}/(16z(1+\gamma_t)\Delta_{s,v})}$ рассматриваемая двумерная система описывается действием (1), в котором $\Gamma_{00} = -z$ (как следствие наличия кулоновского взаимодействия), а все остальные амплитуды одинаковы: $\Gamma_{ab} = \gamma_t z$. На промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$, во-первых, моды $Q_{ab} = \text{sp}[t_{ab}Q]/4$ с $b = 1, 2$ становятся массивными и не приводят к логарифмическим расходимостям, а во-вторых, амплитуды взаимодействия могут быть различными, так как наличие сильного зеемановского расщепления даёт возможность различать взаимодействие электронов с одной и той же проекцией спина и электронов с разными проекциями спина. В частности, амплитуда $\Gamma_{03} = \tilde{\gamma}_t z$ может отличаться от амплитуд $\Gamma_{a1} = \Gamma_{a3} = \gamma_t z$, где $a = 1, 2, 3$. Для этого случая, из общих уравнений (2) получаются следующие однопетельные уравнения ренормализационной группы на промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi} [2 + 1 + 6f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t)], & \frac{d\gamma_t}{dy} &= \frac{1 + \gamma_t}{\pi\sigma_{xx}} (1 + 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \\ \frac{d\tilde{\gamma}_t}{dy} &= \frac{1 + \tilde{\gamma}_t}{\pi\sigma_{xx}} (1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), & \frac{d \ln z}{dy} &= -\frac{1}{\pi\sigma_{xx}} (1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь с логарифмической точностью $y = \ln L/L_s$. Естественно считать, что в начале значения γ_t и $\tilde{\gamma}_t$ одинаковы: $\tilde{\gamma}_t(0) = \gamma_t(0)$. Как видно из Рис. 1а, на котором представлен ренормгрупповой поток в координатах $(\tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$, линия $\gamma_t = \tilde{\gamma}_t$ оказывается неустойчивой. При больших значениях y параметр γ_t растёт, тогда как $\tilde{\gamma}_t$ стремится к -1 . Как показано на Рис. 1б, возможно два различных типа поведения сопротивления $\rho = 1/\pi\sigma_{xx}$ как функции масштаба L . Вдоль кривой a (см. Рис. 1а), которая не пересекает кривую d , отвечающую уравнению $2 + 1 + 6f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t) = 0$, сопротивление имеет зависимость металлического типа: ρ монотонно уменьшается при увеличении y . Если двигаться

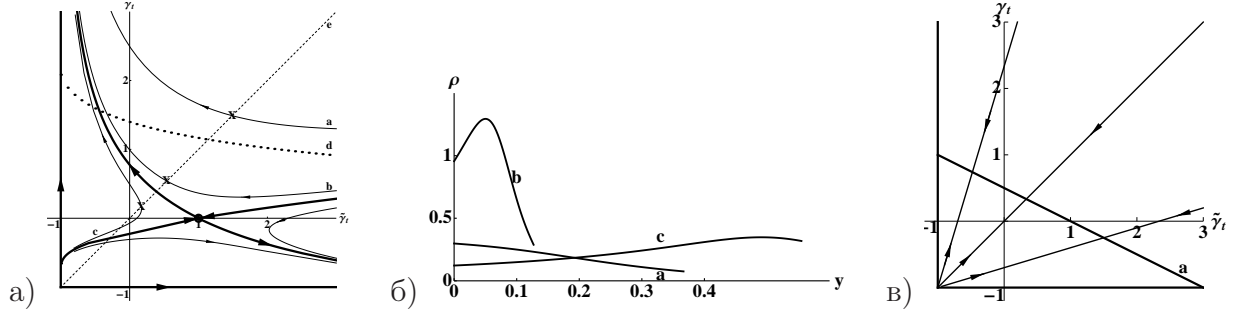


Рис. 1: а) Проекция ренормгруппового потока (3) в трёхмерном пространстве $(\sigma_{xx}, \tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$ на плоскость $(\tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$. Пунктирная кривая d определяется уравнением $2 + 1 + 6f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t) = 0$. Штриховая линия e соответствует уравнению $\gamma_t = \tilde{\gamma}_t$. б) Зависимость сопротивления $\rho = 1/(\pi\sigma_{xx})$ от y . Начальные условия соответствуют пересечению кривых a , b , и c с линией e (точки X) на Рис. 1а. в) Проекция ренормгруппового потока (4) в трёхмерном пространстве $(\sigma_{xx}, \tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$ на плоскость $(\tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$. Прямая линия a задается уравнением $2\gamma_t + \tilde{\gamma}_t = 1$.

вдоль кривых b или c , которые пересекают кривую d один раз, сопротивление проходит через максимум. Во всех случаях поведение сопротивления на больших масштабах имеет металлический тип. В пределе $y \rightarrow \infty$ электроны с разными проекциями спина становятся совершенно независимыми, и уравнения (3) превращаются в уравнения для однодолинной электронной системы с проводимостью равной $\sigma_{xx}/2$. Хорошо известно [1], что в такой ситуации однопетлевые уравнения ренормгруппы приводят к металлическому поведению сопротивления.

Из восьми мод Q_{ab} с $a = 0, 1, 2, 3$ и $b = 0, 3$, которые были безмассовыми на промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$, на больших масштабах $L_s \ll L_v \ll L$ безмассовыми остаются только четыре: Q_{00}, Q_{03}, Q_{30} и Q_{33} . Таким образом, на этих масштабах действие нелинейной сигма-модели определяется выражением (1) с матрицей Q , имеющей вид $Q = \sum_{a,b=0,3} t_{ab} Q_{ab}$. Наличие сильных зеемановского и междолинного расщеплений даёт возможность различать взаимодействие электронов с одинаковыми и разными проекциями спина и изоспина. При этом, амплитуда $\Gamma_{00} = -z$, а три другие амплитуды Γ_{03}, Γ_{30} и Γ_{33} , могут быть все различные. Однако, так как амплитуды Γ_{30} и Γ_{33} , совпадающие на масштабах $L \lesssim L_v$, на больших масштабах перенормируются одинаковым образом, то естественно считать их равными: $\Gamma_{30} = \Gamma_{33} = \gamma_t z$. Таким образом, на масштабах $L \gg L_v \gg L_s$, общие выражения (2) приводят к следующим однопетлевым уравнениям ренормализационной группы ($y = \ln L/L_v$):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi} [2 + 1 + 2f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t)], & \frac{d\gamma_t}{dy} &= \frac{1 + \gamma_t}{\pi\sigma_{xx}} (1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \\ \frac{d\tilde{\gamma}_t}{dy} &= \frac{1 + \tilde{\gamma}_t}{\pi\sigma_{xx}} (1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), & \frac{d \ln z}{dy} &= -\frac{1}{\pi\sigma_{xx}} [1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ренормгрупповой поток, соответствующий уравнениям (4), на плоскости $(\gamma_t, \tilde{\gamma}_t)$ показан на Рис. 1в. Существует линия фиксированных точек, описываемая уравнением

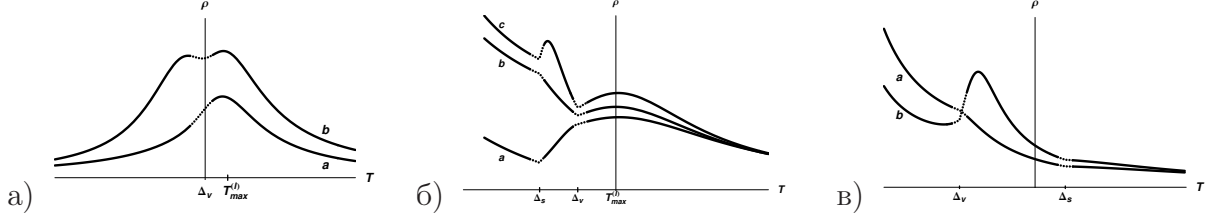


Рис. 2: Схематическая зависимость сопротивления ρ от T в случае а) нулевого зеемановского расщепления, б) $\Delta_s < \Delta_v$, в) сильного магнитного поля: $\Delta_v, T_{\max}^{(I)} < \Delta_s$, где $T_{\max}^{(I)}$ – наибольшая из температур, при которой сопротивление в случае $\Delta_s = 0$ имеет максимум.

$2\gamma_t + \tilde{\gamma}_t = 1$. Линии ренормгруппового потока в плоскости $(\gamma_t, \tilde{\gamma}_t)$ представляют собой прямые, описываемые уравнениями: $(1 + \tilde{\gamma}_t)/(1 + \gamma_t) = \text{const}$. Если при $y = 0$ значение параметров γ_t и $\tilde{\gamma}_t$ не велико, то сопротивление будет монотонно увеличиваться при увеличении y , т.е. зависимость $\rho(y)$ будет диэлектрического типа.

При наличии междолинного и зеемановского расщеплений разнообразные случаи зависимости сопротивления от температуры, следующие из уравнений (3) и (4), приведены на Рис. 2. В частности, наличие как междолинного так и зеемановского расщеплений приводит к изменению температурной зависимости сопротивления при низких температурах (больших $1/\tau_v$) с металлической на диэлектрическую в полном согласии с имеющимися экспериментальными данными. Также учёт того, что амплитуды γ_t и $\tilde{\gamma}_t$ перенормируются по-разному, приводит к возможности существования двух максимумов в температурной зависимости сопротивления.

В *разделе 1.4* общие результаты (2) использованы для описания зависимости сопротивления от температуры в двумерной электронной системе с двумя почти идентичными квантовыми ямами и с общими рассеивателями. Такая система была недавно реализована и подробно исследована экспериментально [8, 9]. Наиболее интересен случай баланса, когда концентрации и подвижности электронов в обоих квантовых ямах совпадают. Этот случай сравнивается со случаем, когда одна из квантовых ям полностью обеднена электронами. Предполагается, что выполнены следующие соотношения $1/\tau_{+-}, \Delta_s, \Delta_{SAS} \ll T \ll 1/\tau_{tr}$, где $1/\tau_{+-}$ – время упругого рассеяния между симметричным и антисимметричным состояниями в структуре с почти идентичными квантовыми ямами, а Δ_{SAS} – расщепление между энергиями этих состояний. В рассматриваемом случае электронная система описывается нелинейной сигма-моделью (1), в которой амплитуды взаимодействия устроены следующим образом ($b = 1, 2, 3$): $\Gamma_{00} = -z$, $\Gamma_{0,b} = \Gamma_{1,b} = \gamma_t z$, $\Gamma_{2,0} = \Gamma_{2,b} = \Gamma_{3,0} = \Gamma_{3,b} = \gamma_v z$ и $\Gamma_{10} = \tilde{\gamma}_s z$. Значения этих амплитуд на масштабе порядка длины свободного пробега определяются расстоянием между ямами, электронной концентрацией и длиной статической экранировки.

Из общих уравнений (2) получаются следующие однопетельные уравнения ренормализационной группы, описывающие поведение двумерной электронной системы с

двумя почти идентичными квантовыми ямами и с общими рассеивателями:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi} [2 + 1 + f(\tilde{\gamma}_s) + 6f(\gamma_t) + 8f(\gamma_v)], & \frac{d\gamma_t}{dy} &= \frac{1 + \gamma_t}{\pi\sigma_{xx}} \left[1 - \tilde{\gamma}_s + 2\gamma_t + 8\gamma_v \frac{\gamma_t - \gamma_v}{1 + \gamma_v} \right], \\ \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dy} &= \frac{1 + \tilde{\gamma}_s}{\pi\sigma_{xx}} \left[1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_s + 8\gamma_v + 16\gamma_v \frac{\tilde{\gamma}_s - \gamma_v}{1 + \gamma_v} \right], & & (5) \\ \frac{d\gamma_v}{dy} &= \frac{1}{\pi\sigma_{xx}} \left[1 + \tilde{\gamma}_s + \gamma_v - \gamma_v(6\gamma_t + \tilde{\gamma}_s) + 8\gamma_v^2 \right], & \frac{d \ln z}{dy} &= \frac{1}{\pi\sigma_{xx}} \left[\tilde{\gamma}_s + 6\gamma_t + 8\gamma_v - 1 \right]. \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (5) двумерная поверхность $\gamma_t = \gamma_v = \tilde{\gamma}_s$ является инвариантной относительно ренормализационной группы. Эта поверхность соответствует случаю совпадающих квантовых ям, а уравнения (5) полностью эквивалентны уравнениям для электронной жидкости с двумя долинами. Однако, эта поверхность неустойчива: небольшое различие в начальных значениях амплитуд взаимодействия, например, из-за конечного расстояния между ямами, увеличивается в процессе потока ренормализационной группы. Во-вторых, ренормгрупповой поток сохраняет двумерную поверхность $\gamma_v = 0$, $\tilde{\gamma}_s = -1$, которая является устойчивой. Эта поверхность реализуется в пределе двух бесконечно удалённых квантовых ям. Кроме этого, имеются ещё интересные дополнительные особенности потока. Например, сохраняется двумерная поверхность $\gamma_t = \tilde{\gamma}_s = -1$. Также в рамках однопетлевого приближения сохраняется линия $\tilde{\gamma}_s = -1$, $\gamma_v = -1/2$, $\gamma_t = -1/3$. К сожалению, последние две особенности потока нельзя наблюдать в двойной квантовой яме. Действительно, начальные значения параметров γ_t , γ_v и $\tilde{\gamma}_s$ удовлетворяют неравенствам $\gamma_t(0) \geq \gamma_v(0) \geq 0$ и $\gamma_t(0) \geq \tilde{\gamma}_s(0)$. В процессе потока ренормализационной группы эти условия сохраняются, причём γ_t возрастает. В пределе $y \rightarrow \infty$ амплитуда γ_v обращается в нуль, $\tilde{\gamma}_s$ стремится к -1 , а γ_t неограниченно возрастает, т.е. система становится эквивалентна двум независимым квантовым ямам. Зависимость σ_{xx} от температуры всегда имеет металлический характер. Наличие трёх разных амплитуд электрон-электронного взаимодействия γ_t , γ_v и $\tilde{\gamma}_s$ позволило объяснить наблюдаемое в эксперименте [8, 9] слабое изменение температурной зависимости сопротивления и времени сбоя фазы при сильном обеднении электронами одной из квантовых ям.

В *разделе 1.5* изучается переход Андерсона в бесспиновой неупорядоченной электронной системе. Физически такая ситуация реализуется в однодолинной электронной системе в присутствии достаточно сильных магнитных примесей или сильного магнитного поля, полностью поляризующего спины электронов. В размерности $d = 2$, хорошо известные однопетлевые уравнения ренормализационной группы [2] предсказывают в случае кулоновского взаимодействия температурную зависимость сопротивления диэлектрического типа. Этот факт указывает на вероятное отсутствие перехода металл-изолятор в бесспиновой электронной системе. Для проверки этой гипотезы в диссертации с помощью нелинейной сигма-модели вычисляется поправка к проводимости бесспиновых электронов в следующем порядке по малому безразмерному параметру $1/k_F l$. Найденное в двухпетлевом приближении уравнение ренормализационной

группы для проводимости имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi} - \frac{a_2}{4\pi^2\sigma_{xx}}, \quad (6)$$

где $y = \ln L/l$, а численная константа a_2 равна

$$\begin{aligned} a_2 = & 50 + \frac{1}{6} - 3\pi^2 + \frac{19}{2}\zeta(3) + 16\ln^2 2 - 44\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 16\mathbf{G} + \\ & + \frac{\pi^4}{12} + \frac{\pi^2}{3}\ln^2 2 - \frac{1}{3}\ln^4 2 - 7\zeta(3)\ln 2 - 8\text{li}_4(1/2) \approx 1.64. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{G} \approx 0.916$ – постоянная Каталана, $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана, и $\text{li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^n$. Также как в случае невзаимодействующих электронов, для электронов с кулоновским взаимодействием петлевые поправки в уравнение ренормализационной группы отрицательные. Это даёт основание считать, что для взаимодействующих бесспиновых электронов переход металл-изолятор в размерности $d = 2$ отсутствует и электронная система становится локализованной на больших масштабах. При этом, кулоновское взаимодействие усиливает локализацию.

Во **второй главе** исследуется влияние электрон-электронного взаимодействия на целочисленный квантовый эффект Холла.

Во **введении** ко второй главе (раздел 2.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов для электронного транспорта в режиме целочисленного квантового эффекта Холла и ставятся задачи, решаемые во второй главе.

В **разделе 2.2** рассматривается нелинейная сигма-модель с топологическим членом, которая описывает двумерную взаимодействующую электронную систему в сильном, поляризующем спин, перпендикулярном магнитном поле. С учётом наличия межэлектронного взаимодействия вычисляются непертурбативные (инстантонные) вклады в зависимость диссипативной и холловской проводимости от размера системы при нулевой температуре.

В рассматриваемом случае нелинейная сигма-модель имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -\frac{\sigma_{xx}}{8} \int d^2\mathbf{r} \text{tr}(\nabla Q)^2 + 2\pi i\sigma_{xy}\mathcal{C}[Q] - \pi T\Gamma_{00} \int d^2\mathbf{r} \text{tr} I_n^\alpha Q(\mathbf{r}) \text{tr} I_{-n}^\alpha Q(\mathbf{r}) + \\ & + 4\pi Tz \int d^2\mathbf{r} \text{tr} \eta Q - 6\pi Tz \int d^2\mathbf{r} \text{tr} \eta \Lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

В отличие от действия (1) коэффициент в члене с σ_{xx} больше в $2 \times 2 = 4$ раза, где одна двойка соответствует спину, а другая двойка – изоспину. Символ tr обозначает след по репличным и мацубаровским индексам, а элемент матрицы Q_{nm}^{ab} не имеет дополнительной матричной структуры. Хорошо известно [11], что именно наличие сильного

перпендикулярного магнитного поля приводит к появлению в (7) слагаемого, пропорционального холловской проводимости σ_{xy} и топологическому заряду

$$\mathcal{C}[Q] = \frac{1}{16\pi i} \int d^2\mathbf{r} \operatorname{tr} \varepsilon_{ab} Q \nabla_a Q \nabla_b Q = \frac{1}{4\pi i} \oint ds \operatorname{tr} \Lambda \mathcal{T} \nabla_s \mathcal{T}^{-1}, \quad Q = \mathcal{T}^{-1} \Lambda \mathcal{T}. \quad (8)$$

Здесь $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$ – антисимметричный тензор второго ранга, $a, b = x, y$. Можно показать, что если матрица Q на границе принимает одно и то же значение, например, $Q|_{\text{edge}} = \Lambda$, то $\mathcal{C}[Q]$ равно целому числу. Вообще говоря, граничные условия на матрицу Q в действии (7) не требуют постоянства Q на границе. Однако известно [12], что для вычисления зависимости физических наблюдаемых от размера системы нужно рассматривать матрицы Q , постоянные вдоль границы. Тогда автоматически они зависят только от дробной части θ холловской проводимости, определённой как $\sigma_{xy} = k + \theta/2\pi$, где k – целое число и $-\pi < \theta \leq \pi$.

Хорошо известно [11], что существуют решения классических уравнений движения для действия (7) с ненулевым значением топологического заряда $\mathcal{C}[Q]$. Эти решения являются инстантонами Белавина-Полякова для $O(3)$ нелинейной сигма-модели, помещенными в матрицу большего размера. Проведённый в диссертации инстантонный анализ в регуляризации Паули-Вилларса для корреляционных функций, определяющих физические наблюдаемые, показывает, что при $\sigma_{xx} \gg 1$ зависимость продольной (σ'_{xx}) и холловской (σ'_{xy}) проводимостей, а также физической наблюдаемой z' , определяющей теплоёмкость, от размера системы L при $T = 0$ описывается следующими уравнениями ($y = \ln L/l$):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma'_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi} f(\gamma_s) - D(\gamma_s) \sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos \theta, & \frac{d\theta'}{dy} &= -2\pi D(\gamma_s) \sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \sin \theta, \\ \frac{dz'}{dy} &= z \left(\frac{\gamma_s}{\pi\sigma_{xx}} + D_\gamma(\gamma_s) \gamma_s \sigma_{xx} e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\gamma_s = \Gamma_{00}/z$, а функции $D(\gamma_s)$ и $D_\gamma(\gamma_s)$ определены как

$$\begin{aligned} D(\gamma_s) &= 16\pi \exp \left\{ 1 - 4\gamma_E \left[1 - (1 + \gamma_s^{-1}) \ln(1 + \gamma_s) \right] + 2(1 + \gamma_s^{-1}) \left[-\frac{2\gamma_s^2 \ln 2}{1 + 2\gamma_s} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\psi(3 + \gamma_s^{-1}) + \psi(-\gamma_s^{-1}) - 1] \ln(1 + \gamma_s) + g(-1 - \gamma_s^{-1}) - g(-\gamma_s^{-1}) \right] \right\}, \\ D_\gamma(\gamma_s) &= -\frac{1 + \gamma_s}{2\gamma_s} D(\gamma_s) \exp \left[-\frac{2}{\gamma_s} \ln(1 + \gamma_s) \right] \int_0^{-\gamma_s} ds (1 - s)^{-2-2/s}, \end{aligned}$$

где $g(z) = \sum_{J=2}^{\infty} \frac{2z^2 \ln J}{J(J^2 - z^2)}$, а $\gamma \approx 0.577$ обозначает постоянную Эйлера. Зависимость функций $D(\gamma_s)$ и $D_\gamma(\gamma_s)$ от γ_s показана на Рис. За. Подчеркнём, что в правых частях уравнений (9) зависимость σ_{xx} , γ_s и z от y определяется пертурбативными уравнениями ренормализационной группы, которые обсуждались в разделе 1.5, а θ от y не зависит.

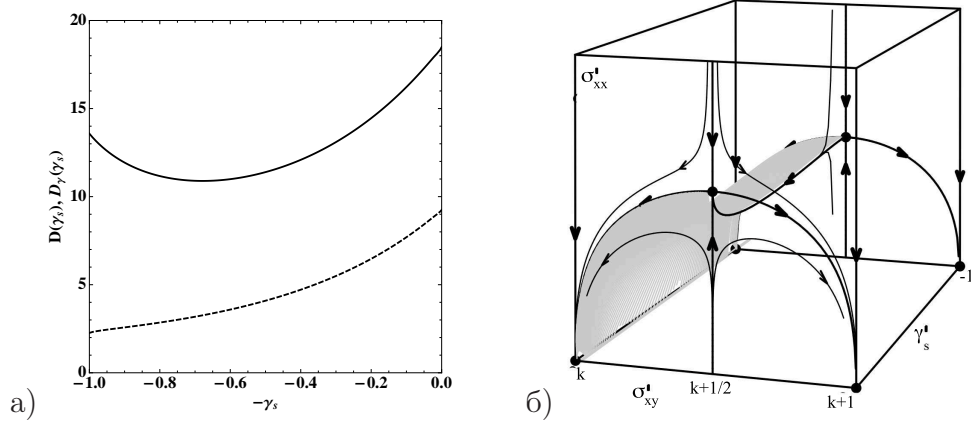


Рис. 3: а) Функции $D(\gamma_s)$ (сплошная кривая) и $D_\gamma(\gamma_s)$ (пунктирная кривая). б) Схематическая диаграмма, иллюстрирующая зависимость физических наблюдаемых σ'_{xx} , $\sigma'_{xy} = k + \theta'/2\pi$ и γ'_s от размера системы L . Стрелки указывают направление увеличения масштаба L .

Начальные условия для уравнений (9) имеют вид: $\sigma'_{xx}(0) = \sigma_{xx}(0) = \sigma_{xx}$, $\theta'(0) = \theta$, и $z'(0) = z(0) = z$.

Уравнения (9) показывают, что механизм появления зависимости физических наблюдаемых от θ -угла в нелинейной сигма-модели с топологическим членом не зависит от наличия межэлектронного взаимодействия, несмотря на то, что взаимодействие меняет поведение наблюдаемых при увеличении размера системы. Как видно из уравнения (9), при всех значениях σ_{xx} и γ_s , есть два выделенных значения θ -угла: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, при которых θ' не зависит от L и равна θ . При $-\pi < \theta < \pi$ физическая наблюдаемая θ' уменьшается, стремясь к нулевому значению. Это согласуется с общими ожиданиями, что в пределе $L \rightarrow \infty$ физическая наблюдаемая θ' стремится к нулю, а холловская проводимость σ'_{xy} стремится к целому значению.

В *разделе 2.3* результаты инстантонного анализа предыдущего раздела применяются для изучения влияния электрон-электронного взаимодействия на ширину критической области (при конечном размере системы или ненулевой температуре) при переходе между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. Для того, чтобы использовать стандартные методы анализа уравнений ренормализационной группы, величины σ_{xx} , θ , z и γ_s в правых частях уравнений (9), заменены на физические наблюдаемые σ'_{xx} , θ' , z' и $\gamma'_s = \Gamma'_{00}/z'$. Получившиеся уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma'_{xx}}{dy} &= \beta_\sigma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s) = -\frac{2}{\pi} f(\gamma'_s) - D(\gamma'_s) \sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \cos \theta', \\
\frac{d\theta'}{dy} &= \beta_\theta(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s) = -2\pi D(\gamma'_s) \sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \sin \theta', \\
\frac{d\gamma'_s}{dy} &= \beta_\gamma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s) = -(1 + \gamma'_s) \gamma'_s \left(\frac{1}{\pi\sigma'_{xx}} + D_\gamma(\gamma'_s) \sigma'_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \cos \theta' \right),
\end{aligned} \tag{10}$$

имеют вид характерный для уравнений ренормализационной группы. Несмотря на то,

что сделанная замена σ_{xx}, θ, z и γ_s на $\sigma'_{xx}, \theta', z'$ и γ'_s в правых частях уравнений (9) справедлива с той точностью, с которой они были получены, уравнения (10) и (9) принципиально отличаются. При значении $\theta' = \pi$ инстантонный вклад в первом из уравнений (10) является антилокализирующим. Это указывает на то, что при $\theta' = \pi$ непертурбативные вклады могут привести к тому, что при $L \rightarrow \infty$ диссипативная проводимость σ'_{xx} будет стремиться к конечному значению при полуцелом значении холловской проводимости σ'_{xy} . Для проверки того, насколько оправдано включение непертурбативных (инстантонных) вкладов в уравнения ренормализационной группы требуется вычисление двухинстантонных вкладов в физические наблюдаемые.

Уравнения (10) имеют две фиксированные точки: устойчивую (относительно направления γ'_s) при $\gamma'_s = 0$, что соответствует случаю невзаимодействующих электронов, и неустойчивую при $\gamma'_s = -1$, соответствующую случаю кулоновского взаимодействия. Интервал $-1 < \gamma'_s \leq 0$ контролируется фиксированной точкой при $\gamma'_s = 0$. При $\gamma'_s = 0$ и $\gamma'_s = -1$ вдоль линии $\theta' = 0$ система при $L \rightarrow \infty$ стремится к локализации: σ'_{xx} уменьшается при увеличении L . Поэтому можно ожидать существования фиксированной точки при $\theta' = \sigma'_{xx} = 0$, которая описывает локализованную электронную систему с целочисленно квантованной холловской проводимостью. На линии $\theta' = \pi$ пертурбативный (с учётом следующих порядков петлевого разложения) и инстантонный вклады имеют разные знаки, что может привести к появлению неустойчивой критической точки при конечном значении $\sigma'_{xx} = \sigma_{xx}^*$. При $-\pi < \theta' < \pi$ физическая наблюдаемая θ' уменьшается, стремясь к нулевому значению. Неустойчивая критическая точка при $\theta' = \pi$ и $\sigma'_{xx} = \sigma_{xx}^*$ отвечает квантовому фазовому переходу между двумя состояниями с целочисленно-квантованными значениями холловской проводимости. Ширина квантовой критической области (перехода между плато) определяется критическими индексами, которые вычисляются стандартным образом по значениям бета-функций (правых частей уравнений (10)) и их производных в критической точке.

Таким образом, учёт непертурбативных вкладов в физические наблюдаемые показывает, что для электронов, с полностью поляризованными спинами, взаимодействие не меняет топологию диаграммы потока, как показано на Рис. 3б.

В *разделе 2.4* изучается температурная зависимость времени сбоя фазы на переходе между плато в случае короткодействующего межэлектронного взаимодействия. Несмотря на то, что основной целью этого раздела является изучение целочисленного квантового эффекта Холла, большая часть результатов относится и к переходам Андерсона с нарушенной симметрией относительно обращения времени в размерностях $d > 2$. Рассматривается межэлектронное взаимодействие, которое имеет следующее поведение на малых и больших расстояниях ($\lambda > d$):

$$U(R) = u_0 \begin{cases} 1, & R \ll a, \\ (a/R)^\lambda, & R \gg a. \end{cases} \quad (11)$$

Вычисление в духе золотого правила Ферми показывает, что температурное поведение

Таблица 1: Выражения для индексов ζ_1 и ζ_2 в уравнении (13). Здесь $\alpha_c = \min\{2\mu_2 - d, 2\lambda - 3d\}$.

	$d < \lambda < d + \mu_2$	$\lambda = d + \mu_2$	$d + \mu_2 < \lambda$
$\alpha > \alpha_c$	$\zeta_1 = -1 + 2\lambda/d$ $\zeta_2 = 0$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 2$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 0$
$\alpha = \alpha_c$	$\zeta_1 = -1 + 2\lambda/d$ $\zeta_2 = 1$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 3$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 1$
$-d < \alpha < \alpha_c$	$\zeta_1 = 2 + \alpha/d$ $\zeta_2 = 0$	$\zeta_1 = 2 + \alpha/d$ $\zeta_2 = 0$	$\zeta_1 = 2 + \alpha/d$ $\zeta_2 = 0$

времени сбоя фазы τ_ϕ зависит от двух индексов μ_2 и α , определяющих скейлинговое поведение усреднённых по беспорядку корреляционных функций с четырьмя (\mathcal{K}_1) и восьмью (\mathcal{K}_2) волновыми функциями, соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, E, \omega) &= \frac{\delta^2}{2} \sum_{\alpha\beta} \left\langle |\mathcal{B}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \delta(E + \omega - \epsilon_\alpha) \delta(E - \epsilon_\beta) \right\rangle, \\ \mathcal{K}_2(\{\mathbf{r}_j\}, E, \varepsilon, \varepsilon', \omega) &= \frac{\delta^4}{8} \left\langle \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{B}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{B}_{\delta\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{B}_{\gamma\delta}^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \mathcal{B}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta(E - \epsilon_\alpha) \delta(\varepsilon' + \omega - \epsilon_\beta) \delta(\varepsilon' - \epsilon_\gamma) \delta(\varepsilon + \omega - \epsilon_\delta) \right\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь, $\delta = 1/\nu_* L^d$ – среднее расстояние между точными уровнями энергии ϵ_α для невзаимодействующих электронов в данном случайном потенциале, $\mathcal{B}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \phi_\alpha(\mathbf{r}_1)\phi_\beta(\mathbf{r}_2) - \phi_\alpha(\mathbf{r}_2)\phi_\beta(\mathbf{r}_1)$, где $\phi_\alpha(\mathbf{r})$ обозначают точные волновые функции, соответствующие энергиям ϵ_α . В случае $\alpha > -d$, темп сбоя фазы имеет вид

$$\frac{1}{\tau_\phi} \propto T_0 u^2(a) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\zeta_1} \ln^{\zeta_2} \frac{T_0}{T}, \quad (13)$$

где $u(a) = \nu_* u_0 a^d$, ультрафиолетовый масштаб энергий $T_0 = 1/\nu_* a^d$, а значения индексов ζ_1 и ζ_2 приведены в таблице 1. Для $\alpha \leq -d$ нахождение τ_ϕ должно производиться самосогласовано, что приводит к следующему выражению

$$\frac{1}{\tau_\phi} \propto \begin{cases} T u^2(a) |\ln u(a)|, & \alpha = -d, \\ T_0 [T u^2(a)/T_0]^{-d/\alpha}, & \alpha < -d. \end{cases} \quad (14)$$

В подходе нелинейной сигма-модели корреляционные функции \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 могут быть представлены в виде средних от линейной комбинации собственных относительно ренормализационной группы операторов $P[Q]$, являющихся полиномами четвертой и вто-

рой степени от матрицы Q : $\mathcal{K}_1 = (\nu_*^2 \delta^2 / 4) \langle P_{1,1}[Q] \rangle$ и

$$\mathcal{K}_2 = \frac{\nu_*^4 \delta^4}{16} \left[\frac{4N^2}{4N^2(N^2 - 1)^2} \langle P_{2,2}[Q] \rangle - \frac{4N^2 + 8N + 3}{6N^2(N + 1)^2(N^2 + N - 2)} \langle P_{2,1,1}[Q] \rangle + \frac{4N^2 + 16N + 15}{2N^2(N + 1)^2(N + 2)(N + 3)} \langle P_{1,1,1,1}[Q] \rangle \right]. \quad (15)$$

Здесь число N определяет размер матрицы Q в репличном и мацубаровском пространствах. Из-за наличия хартри-фоковского сокращения корреляционная функция \mathcal{K}_2 выражается только через три наименее релевантных из семи возможных собственных операторов $P[Q]$.

В инфракрасном пределе, $L \rightarrow \infty$, скейлинговое поведение корреляционной функции \mathcal{K}_1 определяется аномальной размерностью собственного оператора $P_{1,1}[Q]$, равной для перехода между плато, $\mu_2 = -\partial \beta_\gamma(\sigma_{xx}^*, \pi, \gamma'_s) / \partial \gamma'_s |_{\gamma'_s=0}$. Численные расчёты для перехода между плато [14] дают значение индекса $\mu_2 \approx 0.6$. Скейлинговое поведение корреляционной функции \mathcal{K}_2 определяется аномальной размерностью α собственного оператора $P_{2,2}[Q]$, который является наиболее релевантным из трёх собственных операторов в уравнении (15). Известно [13], что пертурбативные вычисления дают нулевое значение для аномальной размерности α . Инстантонный анализ, аналогичный вычислениям раздела 2.2, показывает, что непертурбативный вклад в α так же равен нулю. Таким образом, можно ожидать, что аномальная размерность α тождественно равна нулю. Численные расчёты для перехода между плато, проведенные недавно в группе F. Evers (Технологический Институт Карлсруэ, Германия), находятся в согласии с предположением, что $\alpha = 0$.

В *разделе 2.5* изучается зависимость физических наблюдаемых (диссипативной и холловской проводимости, а также теплоёмкости) от температуры и магнитного поля в области, где $\sigma'_{xx} \gg 1$. Согласно предсказанию Д. Е. Хмельницкого [15] для невзаимодействующих электронов, в этой области магнетопроводимость должна испытывать осцилляции в магнитном поле, связанные с наличием делокализованных состояний. В диссертации показано, что для случая кулоновского взаимодействия ($\gamma'_s = -1$) эти, так называемые квантовые холловские, осцилляции испытывает не только магнетопроводимость, но и теплоёмкость. Амплитуда квантовых холловских осцилляций определяется инстантонным вкладом в соответствующие физические наблюдаемые, и как следствие, растёт с понижением температуры. Интегрирование уравнений (9) с учётом того, что при $L \gg L_T = \sqrt{\sigma_{xx} / (zT)}$ логарифмическая расходимость обрезается масштабом

L_T , даёт следующую зависимость физических наблюдаемых от температуры:

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx}(T) &= \sigma_{xx}(T) - \left[f_{xx}(\sigma_{xx}(T)) - f_{\infty}(\sigma_{xx}) \right] \cos 2\pi\sigma_{xy}, \\ \sigma'_{xy}(T) &= \sigma_{xy} - \left[f_{xy}(\sigma_{xx}(T)) - f_{\infty}(\sigma_{xx}) \right] \sin 2\pi\sigma_{xy}, \\ z'(T) &= z \left(\frac{\sigma_{xx}(T)}{\sigma_{xx}} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \left[h_{\infty}(\sigma_{xx}(T)) - h_{\infty}(\sigma_{xx}) \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}(T)} \right)^{1/2} \right] \cos 2\pi\sigma_{xy} \right\},\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$\sigma_{xx}(T) = \sigma_{xx} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{c_2^2 L_T}{4\sqrt{\pi}l}, \quad c_2 = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\text{sh}^2 x} dx - \int_0^1 [1 - x \text{cth} x] \frac{dx}{x^2} \approx 0.43.$$

Здесь $f_{xx}(z) = f_{xy}(z) = f_{\infty}(z) = 6zh_{\infty}(z) = [D(-1)/4]z^2 \exp(-2\pi z)$. Зависимость физических наблюдаемых от магнитного поля в выражениях (16) определяется зависимостью σ_{xx} и σ_{xy} от поля B . Выражения (16) справедливы при не слишком низких температурах, таких что $\sigma_{xx}(T) \gg 1$.

Величины $\sigma'_{xx}(T)$, $\sigma'_{xy}(T)$ и $z'(T)$ представляют собой физические наблюдаемые усредненные по ансамблю. Хорошо известно [16, 17], что в макроскопическом образце размера L , большего длины сбоя фазы, соответствующие измеряемые наблюдаемые G_{xx} , G_{xy} , и $\mathcal{Z}(T)$ могут сильно отличаться от усредненных по ансамблю. Используя уравнения Каллана-Симанчика [18], которые предполагают, что измеряемая физическая величина не зависит от микроскопической длины – длины свободного пробега l , находим

$$\begin{aligned}G_{xx}(T) &= g(X) - \left[f_{xx}(g(X)) - f_{\infty}(\sigma_{xx})\pi X g'(X) \right] \cos 2\pi\sigma_{xy}, \\ G_{xy}(T) &= \sigma_{xy} - \left[f_{xy}(g(X)) - f_{\infty}(\sigma_{xx}) \right] \sin 2\pi\sigma_{xy}, \\ \mathcal{Z}(T) &= \frac{z}{\sqrt{\sigma_{xx}}} \left\{ h(g(X)) + \left[h_z(g(X)) + h_{\infty}(\sigma_{xx})h(g(X)) + f_{\infty}(\sigma_{xx})X \frac{dh(g(X))}{dX} \right] \cos 2\pi\sigma_{xy} \right\},\end{aligned}\tag{17}$$

где теперь $f_{xx}(g)$, $f_{xy}(g)$, $h(g)$ и $h_z(g)$ – произвольные функции своего аргумента. Функция $g(X)$ – произвольная функция скейлинговой переменной $X = Tz l^2 \exp(\pi\sigma_{xx})/\sqrt{\sigma_{xx}}$. Уравнения (17) описывают зависимость измеряемых величин от температуры и магнитного поля. Они, в отличие от уравнений (16), не ограничены условием $\sigma'_{xx}(T) \gg 1$, а справедливы даже при таких температурах, что $g(X) \sim 1$, если при этом амплитуда осцилляций с изменением σ_{xy} всё еще мала по сравнению с плавной частью. При этом, конечно, предполагается, что $\sigma_{xx} \gg 1$. Сравнение уравнений (16) и (17) показывает, что при температурах таких, что $X \gg 1$, $g(X) \approx (1/\pi) \ln X$, а $f_{xx}(g) = f_{xy}(g) = f_{\infty}(g)$, $h(g) = \sqrt{g}$ и $h_z(X)/h(X) = -h_{\infty}(g)$. Первые из двух уравнений (17) находятся в качественном согласии с результатами экспериментов [19] по магнетотранспорту.

Третья глава посвящена изучению явления макроскопического зарядового квантования в одноэлектронных устройствах.

Во *введении* к третьей главе (раздел 3.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов по электронному транспорту в одноэлектронных устройствах и изучению явления кулоновской блокады, а также формулируется задача, решаемая в третьей главе.

В *разделе 3.2* приводятся необходимые для дальнейшего рассмотрения сведения о действии Амбегаокара-Эккерна-Шона, описывающего одноэлектронный транзистор с большим числом туннельных каналов. Для теоретического описания этой системы (см. Рис. 4а) используется модель, в которой межэлектронное взаимодействие на островке одноэлектронного транзистора учитывается с помощью ёмкостного взаимодействия. Хорошо известно [20], что такое нульмерное приближение оправдано в пределе $\delta/E_{\text{Th}} \ll 1$, где E_{Th} – энергия Таулесса, а δ обозначает среднее расстояние между одночастичными уровнями энергии на островке. Взаимодействием электронов в резервуарах пренебрегается. Связь островка с резервуарами описывается в рамках туннельного гамильтониана. Таким образом, гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{k,s=l,r} \epsilon_k^{(s)} a_k^{(s)\dagger} a_k^{(s)} + \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} + E_c \left(\sum_{\alpha} d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} - q \right)^2 + \sum_{k\alpha} \left(t_{k\alpha}^{(s)} a_k^{(s)\dagger} d_{\alpha} + \text{h.c.} \right). \quad (18)$$

Здесь первые два члена описывают свободные электроны в левом (l) и правом (r) резервуарах и на островке. Нижний индекс k обозначает электронные состояния в резервуарах, а α – состояния на островке. Величины $\epsilon_k^{(s)}$, ϵ_{α} обозначают энергии электронов, отсчитанных от уровня Ферми. Третий член в (18) описывает ёмкостное взаимодействие между электронами на островке. Зарядовая энергия $E_c = e^2/(2C)$ определяется полной ёмкостью C , которая складывается из ёмкостей туннельных контактов ($C_{l,r}$) и затвора (C_g): $C = C_l + C_r + C_g$. Величина $q = C_g V_g / e$ представляет собой дополнительный заряд (в единицах заряда электрона e), наведённый на островке при приложении напряжения затвора V_g . Последний член в (18) описывает туннелирование электронов между резервуарами и островком. Матрица $t_{k\alpha}^{(s)}$ содержит амплитуды туннелирования между электронными состояниями в резервуаре и на островке.

Эффективный безразмерный (в единицах e^2/h) кондактанс на один канал ($g_{\text{ch}}^{(s)}$) и число каналов ($N_{\text{ch}}^{(s)}$) в контакте:

$$g_{\text{ch}}^{(s)} = \frac{\sum_{\alpha\alpha'} \check{g}_{\alpha\alpha'}^{(s)} \check{g}_{\alpha'\alpha}^{(s)}}{\sum_{\alpha} \check{g}_{\alpha\alpha}^{(s)}}, \quad N_{\text{ch}}^{(s)} = \frac{\left(\sum_{\alpha} \check{g}_{\alpha\alpha}^{(s)} \right)^2}{\sum_{\alpha\alpha'} \check{g}_{\alpha\alpha'}^{(s)} \check{g}_{\alpha'\alpha}^{(s)}}, \quad \check{g}_{\alpha\alpha'}^{(s)} = 4\pi^2 [\delta(\epsilon_{\alpha})\delta(\epsilon_{\alpha'})]^{1/2} \sum_k t_{\alpha k}^{(s)\dagger} \delta(\epsilon_k^{(s)}) t_{k\alpha'}^{(s)},$$

определяют безразмерный кондактанс контакта между островком и резервуаром $g_s = g_{\text{ch}}^{(s)} N_{\text{ch}}^{(s)}$. Дельта-функции, входящие в определение величин $\check{g}_{\alpha\alpha'}^{(s)}$, подразумеваются сглаженными на масштабе δE таком, что $\max\{\delta, \delta^{(l,r)}\} \ll \delta E \ll T$, где $\delta^{(l,r)}$ обозначают средние расстояния между одночастичными уровнями энергии в резервуарах.

При выполнении условий $g_{\text{ch}}^{(s)} \ll 1 \ll N_{\text{ch}}^{(s)}$ и $\delta \max\{1, g\} \ll T$, где $g = g_l + g_r$, гамильтониан (18) сводится к действию Амбегаокара-Эккерна-Шона в мнимом времени [21]:

$$\mathcal{S}_d[\Phi] = \frac{g}{4} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \alpha(\tau_1 - \tau_2) e^{i\Phi(\tau_1) - i\Phi(\tau_2)} - iq \int_0^\beta d\tau \dot{\Phi} + \frac{1}{4E_c} \int_0^\beta d\tau \dot{\Phi}^2. \quad (19)$$

Здесь $\beta = 1/T$, абелева фаза $\Phi(\tau)$, связанная с флуктуирующим электрическим потенциалом на островке соотношением $V(\tau) = i\dot{\Phi}(\tau)$, удовлетворяет граничному условию: $\Phi(\beta) = \Phi(0) + 2\pi W$, где W – целое число. Ядро $\alpha(\tau) = -T^2 / \sin^2(\pi T\tau)$.

В *разделе 3.3* определяются физические наблюдаемые для одноэлектронного транзистора. С помощью стандартной процедуры отклика на изменение граничного условия для фазы $\Phi(\tau)$ в действии (19) найдены две физические наблюдаемые:

$$\mathbb{G} = g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\pi} \epsilon \frac{\partial f_B(\epsilon)}{\partial \epsilon} \text{Im} D^R(\epsilon), \quad \mathbb{Q} = Q + g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{4\pi^2} \frac{\partial \epsilon f_B(\epsilon)}{\partial \epsilon} \text{Re} D^R(\epsilon). \quad (20)$$

Здесь запаздывающая функция $D^R(\epsilon)$ соответствует мацубаровскому коррелятору фаз $D(\tau) = \langle e^{-i\Phi(\tau) + i\Phi(0)} \rangle$, $f_B(\epsilon) = [\exp(\beta\epsilon) - 1]^{-1}$ обозначает функцию распределения Бозе-Эйнштейна, а $Q = q + i\langle \dot{\Phi} \rangle / (2E_c)$ – средний заряд на островке. Новизна результата (20) состоит в том, что кроме физической наблюдаемой \mathbb{G} , определяющей хорошо известную величину – кондактанс одноэлектронного транзистора $G = (e^2/h)(g_l g_r / g^2) \mathbb{G}$, найдена физическая наблюдаемая \mathbb{Q} , которая в задачах о транспорте через одноэлектронный транзистор до сих пор не рассматривалась. С точки зрения отклика на изменение граничных условий величины \mathbb{G} и \mathbb{Q} оказываются аналогичны диссипативной и холловской проводимости в целочисленном квантовом эффекте Холла.

Физическая наблюдаемая \mathbb{Q} связана с *несимметризованным* коррелятором токов:

$$\mathbb{Q} = Q + \frac{g^2}{g_l g_r} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial V} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{S_I(\omega, V)}{\omega}, \quad S_I(\omega, V) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \mathcal{J}(t) \mathcal{J}(0) \rangle. \quad (21)$$

Здесь \mathcal{J} – оператор тока через одноэлектронный транзистор, а V – напряжение, приложенное между левым и правым резервуарами. Также \mathbb{Q} определяет затворную ёмкость одноэлектронного транзистора: $\mathbb{C}_g = C_g \partial \mathbb{Q} / \partial q$, которая отличается от геометрической ёмкости затвора C_g из-за квантовых флуктуаций фазы Φ , связанных с наличием кулоновского взаимодействия на островке. Связь величины \mathbb{Q} со средним зарядом Q и коррелятором токов $S_I(\omega, V)$, а также с затворной ёмкостью \mathbb{C}_g может быть использован для определения зависимости \mathbb{Q} от T и V_g в эксперименте.

В *разделе 3.4* исследуется поведение физических наблюдаемых (20) в режиме слабой связи в действии Амбегаокара-Эккерна-Шона, $g \gg 1$, что соответствует сильному туннелированию между островком и резервуарами. В этом режиме, теория возмущений по $1/g$ приводит к тривиальному ответу $\mathbb{Q}(T, q) = q$. Температурная зависимость

физической наблюдаемой \mathbb{Q} появляется только при учёте решений классических уравнений движения для действия (19) с ненулевым значением W (инстантонов). Учёт инстантонных решений с $W = \pm 1$, достаточный при не слишком низких температурах, $gE_c \gg T \gg g^3 E_c e^{-g/2}$, приводит к следующему выражению

$$\mathbb{Q}(T, q) = q - \frac{g^3 E_c}{24\pi T} \left[1 + \frac{24T}{gE_c} \ln \frac{E_c}{2\pi^2 T} \right] e^{-g/2} \sin 2\pi q. \quad (22)$$

Выражение (22) аналогично выражению для квантовых холловских осцилляций проводимости из раздела 2.5. Осцилляции \mathbb{Q} при изменении наведённого заряда q являются проявлением кулоновской блокады в режиме сильной связи островка с резервуарами, когда $g \gg 1$. Как видно из выражения (22), инстантонная поправка отсутствует при целых и полуцелых значениях наведённого заряда q . При этом физическая наблюдаемая \mathbb{Q} оказывается также равна целому или полуцелому значению, соответственно. Как и в случае квантового эффекта Холла, для значений наведённого заряда в интервале $k - 1/2 < q < k + 1/2$ можно ожидать, что при понижении температуры физическая наблюдаемая \mathbb{Q} стремится к целому значению k .

В *разделе 3.5* рассматривается режим сильной связи для действия Амбегаокара-Эккерна-Шона, когда $g \ll 1$, что соответствует слабому туннелированию между островком и резервуарами. В области кулоновских пиков, т. е. при значениях наведённого заряда q близкого к полуцелому значению $k + 1/2$, т. е. $|q - k - 1/2| \ll 1$, с помощью известного отображения [22] действия (19) на более простое действие для модели Бозе-Кондо [23] вычислена зависимость физической наблюдаемой \mathbb{Q} от температуры и напряжения затвора:

$$\mathbb{Q}(T, q) = k + \frac{1}{e^{\beta\bar{\Delta}} + 1}, \quad \bar{\Delta} = \frac{E_c(2k + 1 - 2q)}{1 + \frac{g}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\max\{|\Delta|, T\}}}. \quad (23)$$

Здесь, хорошо известная величина $\bar{\Delta}$ имеет смысл перенормированной (за счёт виртуальных переходов электронов с островка в резервуары и обратно) щели между основным и возбужденным состояниями и вычислена в главном логарифмическом приближении. Параметр Λ – высокоэнергетическая обрезка порядка E_c .

Согласно (23) наблюдаемая \mathbb{Q} имеет такую же температурную зависимость, как средний заряд Q в случае изолированного островка с щелью равной $\bar{\Delta}$. При $T \rightarrow 0$ и неравном нулю значении g физическая наблюдаемая \mathbb{Q} , в отличие от среднего заряда на островке, стремится к $k + \Theta(2q - 2k - 1)$, где $\Theta(x)$ обозначает функцию Хевисайда ($\Theta(0) = 1/2$). Таким образом, при $T \rightarrow 0$ физическая наблюдаемая \mathbb{Q} становится независимой от g и целочисленно квантуется при всех значениях напряжения затвора кроме значений $q = k + 1/2$, соответствующих кулоновским пикам. Используя известные из литературы [24, 25] результаты для физической наблюдаемой \mathbb{G} , можно схематически представить зависимости $\mathbb{G}(q, T)$ и $\mathbb{Q}(q, T)$ в виде диаграммы, аналогичной диаграмме ренормгруппового потока (Рис. 46). Для фиксированных значений затравочных параметров g , q и E_c зависимость \mathbb{G} и \mathbb{Q} от температуры представляется некоторой кривой.

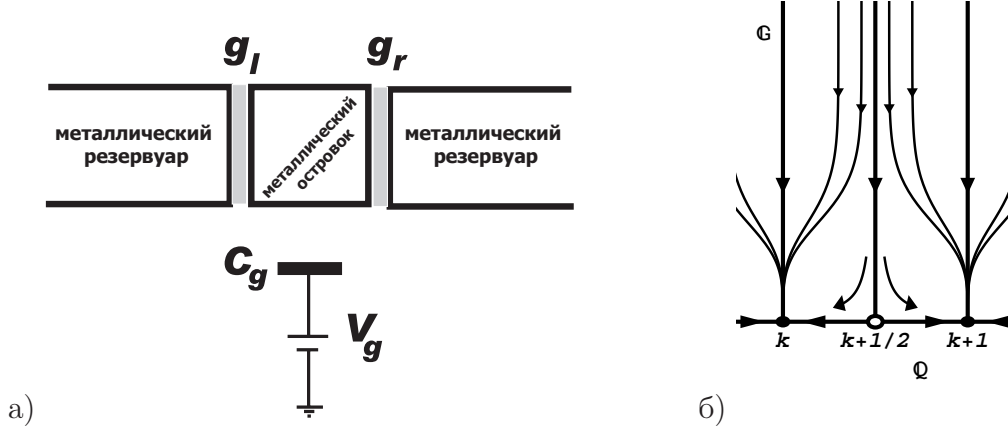


Рис. 4: а) Схема одноэлектронного транзистора. б) Схематическая диаграмма, иллюстрирующая зависимость физических наблюдаемых \mathbb{G} и \mathbb{Q} от температуры при разных значениях параметров g , q и E_c . Стрелки указывают направление, соответствующее понижению температуры.

На этой диаграмме область сильной связи, $\mathbb{G} \ll 1$, вблизи точки $\mathbb{Q} = k + 1/2$ и область слабой связи, $\mathbb{G} \gg 1$, никак не связаны, так как отсутствуют аналитические результаты для температурной зависимости физических наблюдаемых в промежуточной области $\mathbb{G} \sim 1$. На данный момент эта область может быть исследована только численно. Однако, так как согласно (20) физические наблюдаемые \mathbb{G} и \mathbb{Q} определены во всей области параметров, то можно ожидать гладкую интерполяцию между результатами в слабой и сильной связи. Особенностью диаграммы на Рис. 4б является точка $\mathbb{Q} = k + 1/2$ и $\mathbb{G} = 0$, которую естественно назвать квантовой критической точкой, разделяющей состояния с целочисленными значениями наблюдаемой \mathbb{Q} и $\mathbb{G} = 0$ при $T = 0$. Таким образом, одноэлектронный транзистор с большим числом туннельных каналов при $T \rightarrow 0$ оказывается эквивалентным изолированному островку.

В **четвёртой главе** исследуются спиновые корреляции в квантовых точках вблизи стоунеровского перехода.

Во **введении** к четвёртой главе (раздел 4.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов по межэлектронному взаимодействию в квантовых точках и ставится проблема, которая решается в четвёртой главе.

В **разделе 4.2** содержатся необходимые сведения об универсальном гамильтониане, описывающем взаимодействующие электроны в квантовой точке в нульмерном пределе, и точный аналитический результат для туннельной плотности состояний.

Хорошо известно, что при выполнении условия $\delta/E_{\text{Th}} \ll 1$, квантовая точка может описываться в нульмерном приближении в рамках универсального гамильтониана [26]:

$$H = \sum_{\alpha, \sigma} \epsilon_{\alpha, \sigma} d_{\alpha, \sigma}^\dagger d_{\alpha, \sigma} + E_c (\hat{n} - q)^2 - J \mathbf{S}^2, \quad \hat{n} = \sum_{\alpha, \sigma} d_{\alpha, \sigma}^\dagger d_{\alpha, \sigma}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \sigma \sigma'} d_{\alpha, \sigma}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\sigma \sigma'} d_{\alpha, \sigma'}. \quad (24)$$

Здесь $\epsilon_{\alpha,\sigma} = \epsilon_\alpha + g_L \mu_B B \sigma / 2$ обозначают одноэлектронные уровни энергии, расщепленные по спину ($\sigma = \pm 1$) магнитным полем B . В зависимости от реализации квантовой точки статистика одноэлектронных уровней энергии ϵ_α может описываться ортогональным или унитарным классами симметрии по классификации Вигнера-Дайсона. Величина $J > 0$ характеризует ферромагнитное обменное взаимодействие электронов в квантовой точке.

Для гамильтониана (24) с помощью метода Вея-Нормана-Колоколова [27, 28] в диссертации найдено следующее точное аналитическое выражение для туннельной плотности состояний, определяющей ток через квантовую точку в приближении последовательного туннелирования:

$$\begin{aligned} \nu_\sigma(\varepsilon) = & \frac{1 + e^{-\beta\varepsilon}}{2Z} \sum_{\alpha, n_\uparrow, n_\downarrow} \frac{\text{sh} \frac{\beta b(2m+1)}{2}}{\text{sh} \frac{\beta b}{2}} Z_{n_\uparrow} Z_{n_\downarrow} e^{-\beta \mathcal{E}_{n_\uparrow, n_\downarrow}} \left\{ \left[\frac{Z_{n_\downarrow}(\epsilon_\alpha)}{Z_{n_\downarrow}} - \frac{Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)}{(2m+1)Z_{n_\uparrow}} \right] \left[1 + B_m(\sigma m \beta b) \right] \right. \\ & \times \delta(\varepsilon - \epsilon_{\alpha\sigma} + \mathcal{E}_{n_\uparrow, n_\downarrow} - \mathcal{E}_{n_\uparrow, n_\downarrow+1}) + \left[\frac{Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)}{Z_{n_\uparrow}} + \frac{Z_{n_\downarrow}(\epsilon_\alpha)}{(2m+1)Z_{n_\downarrow}} \right] \left[1 - B_{-m-1}(\sigma(m+1)\beta b) \right] \\ & \left. \times \delta(\varepsilon - \epsilon_{\alpha\sigma} + \mathcal{E}_{n_\uparrow, n_\downarrow} - \mathcal{E}_{n_\uparrow+1, n_\downarrow}) \right\}, \quad Z = \sum_{n_\uparrow, n_\downarrow \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sh} \frac{\beta b(2m+1)}{2}}{\text{sh} \frac{\beta b}{2}} Z_{n_\uparrow} Z_{n_\downarrow} e^{-\beta \mathcal{E}_{n_\uparrow, n_\downarrow}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $b = g_L \mu_B B$, $n_\uparrow(n_\downarrow)$ – число электронов с проекцией спина вверх (вниз), полное число электронов равно $n = n_\uparrow + n_\downarrow$, а $m = (n_\uparrow - n_\downarrow)/2$. В случае $m \geq 0$ ($m < 0$) полный спин $S = m$ ($S = -m - 1$). Величина $\mathcal{E}_{n_\uparrow, n_\downarrow} = E_c(n - q)^2 - Jm(m+1)$ представляет вклад от взаимодействия в энергию состояний с n_\uparrow и n_\downarrow электронами с проекциями спина вверх и вниз. Множитель $\text{sh} \left[\frac{\beta b(2m+1)}{2} \right] / \text{sh} \left[\frac{\beta b}{2} \right]$ имеет смысл статистической суммы для спина $S = m$ в присутствии зеемановского расщепления b , а $B_m(x) = \frac{2m+1}{2m} \text{cth} \left(\frac{2m+1}{2m} x \right) - \frac{1}{2m} \text{cth} \frac{x}{2m}$ обозначает функцию Бриллюэна. Множители $Z_n(\epsilon_\alpha)/Z_n$, где

$$Z_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta n} \prod_\gamma (1 + e^{i\theta - \beta \epsilon_\gamma}), \quad Z_n(\epsilon_\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta n} \prod_{\gamma \neq \alpha} (1 + e^{i\theta - \beta \epsilon_\gamma}),$$

учитывают вероятность того, что состояние α свободно. Выражение (25) позволяет вычислить туннельную плотность состояний при заданном наборе одноэлектронных уровней энергии $\{\epsilon_\alpha\}$. Согласно (25) туннельная плотность состояний представляет сумму дельта-функций, соответствующих всем возможным процессам туннелирования электрона с энергией ε и спином σ на или с одноэлектронного уровня энергии $\epsilon_{\alpha\sigma}$.

В *разделе 4.3* вычисляется продольная спиновая восприимчивость, усреднённая по реализациям одноэлектронных уровней энергии, в зависимости от магнитного поля и температуры в интервале $\delta \ll T \ll E_{\text{Th}}$. Поведение средней спиновой восприимчивости $\overline{\chi(T, b)}$ зависит от значений безразмерных параметров b/J и J_\star/T , где $J_\star = J\delta/(\delta - J)$ обозначает перенормированную обменную энергию, обращение в бесконечность которой сигнализирует о стоунеровской неустойчивости. Найденные выражения для $\overline{\chi(T, b)}$

Таблица 2: Зависимость средней спиновой восприимчивости от магнитного поля и температуры в интервале $\delta \ll T \ll E_{\text{Th}}$. Численная константа $c = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{\omega \text{cth } \omega - 1}{\text{sh}^2 \omega} \right] \approx 0.02$. Параметр $\beta = 1$ или 2 для ортогонального или унитарного класса симметрии.

Область	Средняя восприимчивость $\overline{\chi(T, b)}$
I: $\frac{J_*}{T} \max\{1, \frac{b}{J}\} \ll 1$	$\frac{J_*}{2J\delta} \left\{ 1 + \frac{J_*}{6T} + \frac{c}{\beta} \frac{J_*^2}{T^2} \left[1 + \frac{J_*}{2T} \right] - \frac{J_*^3 b^2}{120T^3 J^2} \left[1 + \frac{10c}{\beta} \frac{J_*^2}{T^2} \right] \right\}$
II _a : $\frac{b^2}{J^2} \ll \frac{T}{J_*} \ll 1$	$\frac{T}{b^2} \left[1 - \frac{J_*^2 b^2}{4J^2 T^2 \text{sh}^2(J_* b/2JT)} \right] + \frac{T}{2\beta\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left[\frac{J_* b}{JT} \text{cth} \frac{J_* b}{2TJ} - \frac{J_*^2 b^2 [\ln(2J_*/T) + \gamma]}{4J^2 T^2 \text{sh}^2(J_* b/2JT)} \right]$
II _b : $\frac{T}{J_*} \ll \frac{b^2}{J^2} \ll 1$	$\frac{J_*}{2J\delta} \left\{ 1 - \frac{2J_*}{T} e^{-J_* b/JT} + \frac{2J_*}{\beta\pi^2 T} \left(\ln \frac{b}{J} - \frac{3}{2} \right) e^{-J_* b/JT} \right\}$
III: $\frac{T}{J_*} \ll \frac{b}{J}, \frac{J}{b} \ll 1$	$\frac{J_*}{2J\delta} \left(1 - \frac{1}{\beta\pi^2} \frac{J^2}{b^2} \right)$

вблизи стоунеровской неустойчивости, $\delta - J \ll \delta$, в разных областях параметров представлены в Таблице 2.

Хорошо известно [26], что наличие ферромагнитного обменного взаимодействия и ненулевого среднего расстояния между одночастичными уровнями энергии приводит к явлению мезоскопической стоунеровской неустойчивости, которое проявляется в появлении в основном состоянии квантовой точки ненулевого полного спина. Его значение вблизи стоунеровской неустойчивости, $\delta - J \ll \delta$, оказывается порядка $J_*/2\delta$. В области I мезоскопическая стоунеровская неустойчивость проявляется в виде малых поправок, зависящих от температуры и магнитного поля, к усиленной обменным взаимодействием спиновой восприимчивости Паули, $J_*/2J\delta$. Поправки, связанные с флуктуациями одночастичных уровней энергии, оказываются малы. В областях II_b, III и в части области II_a ($JT/J_* \ll b \ll J\sqrt{T/J_*}$) мезоскопическая стоунеровская неустойчивость подавляется магнитным полем. Средняя спиновая восприимчивость имеет вид восприимчивости Паули, усиленной обменным взаимодействием, с малыми поправками из-за наличия флуктуаций одночастичных уровней энергии. Для того чтобы подавить проявление мезоскопической стоунеровской неустойчивости требуется слабое магнитное поле $b \sim (J/J_*)T \ll J, T$. Это связано с тем, что по аналогии с обменным усилением g -фактора в ферми-жидкости характерная величина зеемановского расщепления определяется величиной $J_* b/J$, а не просто b как в одночастичной задаче. В части области II_a ($b \ll JT/J_*$) зависимость спиновой восприимчивости от магнитного поля слабая, а мезоскопическая стоунеровская неустойчивость проявляется в том, что средняя спиновая восприимчивость в нулевом поле ведёт себя согласно закону Кюри:

$$\overline{\chi(T, 0)} = \frac{(J_*/J)^2}{12T} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta\pi^2} \left[\ln \frac{2J_*}{T} + \gamma + 2 \right] \right\}. \quad (26)$$

Флуктуации одночастичных уровней энергии приводят к логарифмической зависимости от температуры квадрата эффективного спина в законе Кюри (26). Этот результат справедлив, строго говоря, при температурах, удовлетворяющих условию $1 \ll J_*/T \ll \beta\pi^2$. Однако, приведённые в приложении к главе 4 вычисления вместе с качественными

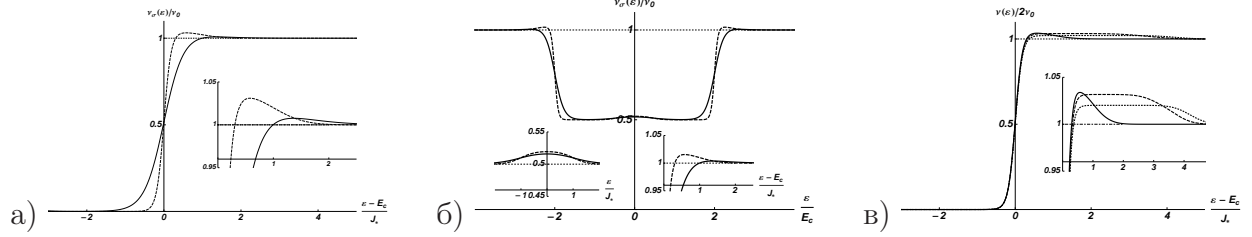


Рис. 5: Туннельная плотность состояний для случая кулоновской долины (значение q близко к целому) (а) и кулоновского пика (значение q близко к полуцелому) (б) в нулевом магнитном поле. Сплошная (пунктирная) кривая соответствует значениям параметров $J/\delta = 0.92$, $\delta/T = 0.35$, и $J_*/T = 3.95$ ($J/\delta = 0.92$, $\delta/T = 0.95$, и $J_*/T = 10.70$). в) Полная туннельная плотность состояний $\nu(\varepsilon) = \nu_\uparrow(\varepsilon) + \nu_\downarrow(\varepsilon)$ в случае кулоновской долины для значений магнитного поля $b = 0$ (сплошная кривая), $b = 2.75J$ (штриховая кривая) и $b = 3.25J$ (пунктирная кривая). Значения остальных параметров: $J/\delta = 0.92$, $\delta/T = 0.95$, и $J_*/T = 10.7$.

соображениями раздела 4.3.3 указывают на то, что логарифмическое поведение с температурой квадрата эффективного спина в (26) может иметь место в более широкой области температур: $\delta \ll T \ll J_*$.

В *разделе 4.4* рассматривается поведение туннельной плотности состояний, усреднённой по реализациям одноэлектронных уровней энергии, с изменением магнитного поля и температуры в интервале $\delta \ll T \ll E_{\text{Th}}$ и вблизи стоунеровской неустойчивости, $\delta - J \ll \delta$. Найденное без учёта влияния флуктуаций одночастичных уровней энергии выражение для туннельной плотности состояний для электрона с энергией ε и проекцией спина σ имеет вид

$$\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(n-q)^2} \sum_{p=\pm} \left\{ f_F(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p}) + \frac{\sqrt{\pi}\beta J e^{\frac{\beta}{4}(\sigma b - J_* \frac{b^2 + J^2}{J^2})}}{8\sqrt{J_*} \text{ch}(\frac{\beta b}{4}) \text{sh}(\frac{J_*\beta b}{2J})} \sum_{s=\pm} s \left[\text{erfi}\left(\frac{\sqrt{\beta} J_*(s b - J)}{2J}\right) \right. \right. \\ \left. \left. \times f_F\left(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p} + \frac{\sigma b}{2}\right) - \mathbb{F}\left(\beta \left[p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p} + \frac{\sigma b}{2}\right], \frac{s b}{2J}, \sqrt{\beta} J_*\right) \right] \right\} / \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(n-q)^2}. \quad (27)$$

Здесь $\nu_0 = 1/\delta$ обозначает среднюю плотность состояний невзаимодействующих электронов на одну проекцию спина, $\Omega_n^p = E_c(n - q + p/2)$, распределение Ферми-Дирака: $f_F(\varepsilon) = 1/[\exp(\beta\varepsilon) + 1]$, $\text{erfi}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{t^2}$ – функция ошибок от мнимого аргумента, и

$$\mathbb{F}(x, y, z) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{ixt}}{\text{ch}(\pi t)} \text{erfi}(z(y - it)).$$

Проведённый анализ общего выражения (27) показывает, что в области температур $\delta \ll T \ll J_*$ явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости проявляется в появлении максимумов в туннельной плотности состояний. В нулевом магнитном поле высота максимума оценивается как $[\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0}]_{\text{max}} - 1 \sim \frac{J}{J_*}$, а ширина оказывается порядка J_* . Магнитное поле $b \gg J$ уменьшает высоту максимума, $[\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0}]_{\text{max}} - 1 \sim \frac{J\delta}{J_* b}$, но приводит к

линейному росту ширины максимума при увеличении магнитного поля ($\sim J_* b/J$). Для $T \ll E_c$ немонотонное поведение туннельной плотности состояний показано на Рис. 5.

В разделе 4.4.3 влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии на поведение туннельной плотности состояний учитывается, исходя из качественных соображений. В нулевом магнитном поле флуктуации одночастичных уровней энергии приводят к увеличению высоты максимума, $[\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0}]_{\max} - 1 \sim [1 + \frac{1}{\beta\pi^2} \ln \frac{J_*}{T}] \frac{J}{2J_*}$, и уменьшению его ширины, которая становится порядка $J_* / [1 + \frac{1}{\beta\pi^2} \ln \frac{J_*}{T}]$. Таким образом, в противоположность обычной ситуации флуктуации одночастичных уровней энергии приводят к более резкому максимуму в туннельной плотности состояний. Магнитное поле $b \gg J$ заметно подавляет влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии и, поэтому, приводит к малым относительным поправкам порядка $(\delta/b) \ln(J_* b/J\delta) \ll 1$.

В **заклучении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы, выносимые на защиту.

В **приложении** вынесен ряд громоздких вычислений.

Выводы

1. Поведение сильно-коррелированных неупорядоченных электронных систем со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы, в которых амплитуды взаимодействия между электронами с разными проекциями спина и изоспина имеют разными значениями, качественно отличается от случая однодолинной системы.
2. В двухдолинной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе металлическое поведение сопротивления изменяется на диэлектрическое поведение при достаточно низких температурах только при наличии как зеемановского, так и междолинного расщеплений.
3. В двухдолинной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе при низких температурах возможно существование двух максимумов в температурной зависимости сопротивления вблизи перехода металл-изолятор.
4. В двумерной взаимодействующей неупорядоченной электронной системе в структурах с двойной квантовой ямой и общими рассеивателями при достаточно низких температурах электронный транспорт оказывается таким же как в двух независимых квантовых ямах.
5. В двухпетлевом приближении переход металл-изолятор в системе двумерных взаимодействующих электронов с полностью поляризованными спинами отсутствует.

6. В системе электронов с полностью поляризованными спинами наличие межэлектронного взаимодействия оставляет в силе хорошо известное для модели невзаимодействующих электронов объяснение целочисленного квантования холловской проводимости.
7. Несмотря на мультифрактальное поведение волновых функций, из-за хартифокковского сокращения, температурная зависимость времени сбоя фазы в критической области перехода между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в спин-поляризованной электронной неупорядоченной системе с короткодействующим межэлектронным взаимодействием определяется критическим индексом, зависящим только от аномальной размерности амплитуды электрон-электронного взаимодействия в критической точке для невзаимодействующих электронов.
8. В двумерной неупорядоченной спин-поляризованной электронной системе с кулоновским взаимодействием в перпендикулярном магнитном поле предсказаны осцилляции теплоёмкости с магнитным полем, отличные от осцилляций де Гааза и связанные с наличием делокализованных состояний.
9. В одноэлектронном транзисторе, наряду с появлением температурной зависимости кондактанса, перенормировки приводят к появлению температурной зависимости у затворной ёмкости, делая её отличной от геометрической ёмкости затвора. Заряд, соответствующий затворной ёмкости одноэлектронного транзистора, целочисленно квантуется при нулевой температуре.
10. Вблизи порога стоунеровской неустойчивости явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости в квантовых точках можно наблюдать в широком интервале температур, изучая логарифмическую температурную зависимость квадрата эффективного спина в законе Кюри для спиновой восприимчивости и дополнительное немонотонное поведение дифференциального кондактанса в зависимости от приложенного напряжения.

Список публикаций по теме диссертации

1. M. A. Baranov, I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *Non-Fermi-liquid theory for disordered metals near two dimensions*, Phys. Rev. B **66**, 075317 (2002).
2. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *The instanton vacuum of generalized CP^{N-1} models*, Ann. of Phys. (N.Y.) **316**, 285 (2005).
3. A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, I. S. Burmistrov, *Non-Fermi liquid theory of the quantum Hall effects*, Письма в ЖЭТФ **82**, 166 (2005).
4. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *Comment on “Topological oscillations of the magnetoconductance in disordered GaAs layers”*, Phys. Rev. Lett. **95**, 189701 (2005).
5. I. S. Burmistrov, N. M. Chtchelkatchev, *Crossover behavior of disordered interacting two-dimensional electron systems in a parallel magnetic field*, Письма в ЖЭТФ **79**, 775 (2006).
6. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *θ renormalization, electron-electron interactions and superuniversality in the quantum Hall regime*, Ann. of Phys. (N.Y.) **322**, 1265 (2007).
7. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *Non-Fermi liquid criticality and super universality in the quantum Hall regime*, Письма в ЖЭТФ **87**, 252 (2008).
8. I. S. Burmistrov, N. M. Chtchelkatchev, *Electronic properties in a two-dimensional disordered electron liquid: Spin-valley interplay*, Phys. Rev. B **77**, 195319 (2008).
9. I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *Coulomb blockade and super universality of the θ -angle*, Phys. Rev. Lett. **101**, 056801 (2008).
10. I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *The problem of macroscopic charge quantization in the Coulomb blockade*, AIP Conference Proceedings **1134**, 101 (2009).
11. I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *The problem of macroscopic charge quantization in single electron devices*, Phys. Rev. B **81**, 085428 (2010).
12. I. S. Burmistrov, Y. Gefen, M. N. Kiselev, *Spin and charge correlations in quantum dots: An exact solution*, Письма в ЖЭТФ **92**, 202 (2010).
13. I. S. Burmistrov, S. Bera, F. Evers, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, *Wave function multifractality and dephasing at metal-insulator and quantum Hall transitions*, Ann. of Phys. (N.Y.) **326**, 1457 (2011).
14. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, K. S. Tikhonov, *Disordered electron liquid in double quantum well heterostructures: Renormalization group analysis and dephasing rate*, Phys. Rev. B **84**, 075338 (2011).

Цитируемая литература:

- [1] A. M. Finkelstein, *Electron liquid in disordered conductors*, vol. 14 of Soviet Scientific Reviews, ed. by I. M. Khalatnikov, Harwood Academic Publishers, London, (1990).
- [2] D. Belitz, T. R. Kirkpatrick, *The Anderson-Mott transition*, Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).
- [3] A. Kamenev, A. Levchenko, *Keldysh technique and non-linear σ -model: basic principles and applications*, Adv. Phys. **58**, 197 (2009).
- [4] A. Punnoose, A. M. Finkelstein, *Dilute electron gas near the metal-insulator transition: Role of valleys in silicon inversion layers*, Phys. Rev. Lett. **88**, 016802 (2001).
- [5] T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern, *Electronic properties of two-dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
- [6] A. Yu. Kuntsevich, N. N. Klimov, S. A. Tarasenko, N. S. Averkiev, V. M. Pudalov, H. Kojima, M. E. Gershenson, *Intervalley scattering and weak localization in Si-based two-dimensional structures*, Phys. Rev. B **75**, 195330 (2007).
- [7] N. N. Klimov, D. A. Knyazev, O. E. Omelyanovskii, V. M. Pudalov, H. Kojima, M. E. Gershenson, *Interaction effects in conductivity of a two-valley electron system in high-mobility Si inversion layers*, Phys. Rev. B **78**, 195308 (2008).
- [8] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, A. K. Bakarov, D. V. Dmitriev, *Dephasing and interwell transitions in double quantum well heterostructures*, Phys. Rev. B **82**, 165325 (2010).
- [9] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, A. K. Bakarov, D. V. Dmitriev, *Interaction correction to conductivity of $Al_xGa_{1-x}As/GaAs$ double quantum well heterostructures near the balance*, Phys. Rev. B **84**, 075337 (2011).
- [10] A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, *Cracking Coulomb interactions in the quantum Hall regime*, Europhys. Lett. **31**, 543 (1995).
- [11] A. M. M. Pruisken, in *The Quantum Hall Effect*, eds. R. E. Prange and S. M. Girvin (Springer, 1987), p. 117.
- [12] A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, M. Voropaev, *The large N theory exactly reveals the quantum Hall effect and theta-renormalization*, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0101003>.
- [13] F. Wegner, *Anomalous dimensions for the nonlinear sigma-model, in $2 + \epsilon$ dimensions (II)*, Nucl. Phys. B **280**, 210 (1987).

- [14] D.-H. Lee, Z. Wang, *Effects of electron-electron interactions on the integer quantum Hall transitions*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4014 (1996).
- [15] D. E. Khmel'nitskii, *Quantum Hall effect and additional oscillations of conductivity in weak magnetic fields*, Phys. Lett. A **106**, 182 (1984).
- [16] Б. Л. Альтшулер, *Флуктуации остаточной проводимости неупорядоченных проводников*, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985).
- [17] P. A. Lee, A. D. Stone, *Universal conductance fluctuations in metals*, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).
- [18] D. J. Amit, *Field theory, renormalization group, and critical phenomena*, (World Scientific, 1984).
- [19] S. S. Murzin, A. G. M. Jansen, I. Claus, *Topological oscillations of the magnetoconductance in disordered GaAs layers*, Phys. Rev. Lett. **92**, 016802 (2004); S. S. Murzin, A. G. M. Jansen, *Murzin and Janssen reply*, Phys. Rev. Lett. **95**, 189702 (2005).
- [20] I. L. Aleiner, P.W. Brouwer, L. I. Glazman, *Quantum effects in Coulomb blockade*, Phys. Rep. **358**, 309 (2002).
- [21] V. Ambegaokar, U. Eckern, G. Schön, *Quantum dynamics of tunneling between superconductors*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1745 (1982).
- [22] К. А. Матвеев, *Квантовые флуктуации заряда металлической частицы в условиях кулоновской блокады*, ЖЭТФ **99**, 1598 (1991).
- [23] А. И. Ларкин, В. И. Мельников, *Магнитные примеси в почти магнитном металле*, ЖЭТФ **61**, 1232 (1971).
- [24] H. Schöller, G. Schön, *Mesoscopic quantum transport: Resonant tunneling in the presence of a strong Coulomb blockade*, Phys. Rev. B **50**, 18436 (1994).
- [25] A. Altland, L. I. Glazman, A. Kamenev, J. S. Meyer, *Inelastic electron transport in granular arrays*, Ann. Phys. (N.Y.) **321**, 2566 (2006).
- [26] I. L. Kurland, I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, *Mesoscopic magnetization fluctuations for metallic grains close to the Stoner instability*, Phys. Rev. B **62**, 14886 (2000).
- [27] J. Wei, E. Norman, *Lie algebraic solution of linear differential equations*, J. Math. Phys. **4**, 575 (1963).
- [28] I. V. Kolokolov, *A functional integration method for quantum spin systems and one-dimensional localization*, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 2189 (1996).