*На правах рукописи*

**Алексеев Олег Вадимович**

# Физические состояния в некоторых точно решаемых моделях двумерной квантовой теории поля

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черноголовка — 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук<br>Белавин Александр Абрамович |
| Официальные оппоненты: | кандидат физико-математических наук<br>Вергелес Сергей Никитович |
| | доктор физико-математических наук<br>Миронов Андрей Дмитриевич |
| Ведущая организация: | Институт Теоретической и<br>Экспериментальной Физики РАН |

Защита диссертации состоится 28 декабря 2012 г. в 11 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук по адресу: 142432, Московская обл., Ногинский р-н, г. Черноголовка, Институт физики твердого тела РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Автореферат разослан ____ ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Гриневич П. Г.

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Диссертация посвящена изучению некоторых вопросов, касающихся двумерных точно решаемых моделей квантовой теории поля. Обсуждаемые вопросы связаны с тремя конкретными моделями: двумерной Лиувиллевской гравитацией, двумерной теорией Тоды для афинной алгебры $A_{L-1}^{(1)}$ и моделью Буллоу-Додда.

Теория двумерной квантовой гравитации была впервые рассмотрена в работе Полякова [1]. Под теорией Лиувиллевской гравитации обычно понимается динамическая теория метрики на некотором двумерном многообразии. Действие для метрики дается в виде суммы действий трех конформных теорий поля: конформной теории поля для полей материи на рассматриваемом многообразии, теории Лиувилля и конформной теории поля для духовых полей. Суммарный центральный заряд эти конформных теорий поля равен нулю [2]. Если рассматриваемая конформная теория поля для полей материи является минимальной, то соответствующая ей теория гравитации называется минимальной Лиувиллевской гравитациейь [3]. Отметим, недавний прогресс в изучении физических состояний этой модели, а именно, удалось вычислить трех и четырех-точечные функции для простейших операторов [4, 5].

Квантование Минимальной Лиувиллевской гравитации удобно осуществлять, используя процедуру БРСТ квантования. С помощью этого метода удалось построить бесконечное количество физических состояний, духовые числа которых могут принимать любые целые значения [6]. Изучение таких состояний, в частности, исследование их операторной алгебры, является важным шагом в построении всех корреляционных функций в рассматриваемой модели.

Аналогичная задача об изучении пространства физических состояний возникает во многих точно решаемы моделях квантовой теории поля. До сих пор обсуждалась безмассовая конформная теория поля. Однако, существует подкласс массивных двумерных квантовых теорий поля, для которых можно построить удобный формализм для изучения пространства физических состояний. Речь идет о двумерных массивных интегрируемых моделях квантовой теории поля, т.е. моделях, в которых существует бесконечное количество сохраняющихся интегралов движения. В данной работе мы подробно рассмотрим две такие модели: теорию Тоды для афинной алгебры Ли $A_L^{(1)}$ [7] и модель Буллоу-Додда [8].

Для исследования пространства физических состояний рассматриваемых моделей и, в частности, для вычисления корреляционных функций удобно использовать форм-факторный формализм [9]. В частности, корреляционные функции могут быть построены, используя спектральное представление. Быстрый радиус сходимости спектральных серий для всех масштабов позволяет вычислять их достаточно точно. Пространство физических состояний исследуемых моделей содержит бесконечное число операторов. Вычисление форм-факторов этих операторов позволит приблизиться к задаче вычисления корреляционных функций.

Отметим, что модель Буллоу-Додда связана с некоторым подклассом возмущенных минимальных моделей квантовой теории поля. В работе [10] показано, что при аналитическом продолжении константы связи до некоторых мнимых значений и дополнительных ограничениях на пространство физических состояний, модель Буллоу-Додда описывает класс минимальных моделей, возмущенных оператором $\Phi_{12}$. Такие модели, как известно, являются интегрирумыми [11, 12]. В частности, модель Изинга при критической температуре в ненулевом магнитном поле может описываться таким образом. В результате, появляется возможность исследования свойств определенного подкласса возмущенных минимальных моделей, используя форм-факторный подход.

**Цель работы.** Целью настоящей работы является исследование пространства физических состояний в двумерных интегрируемых моделях квантовой теории поля. В частности, изучение операторной алгебры физических состояний в Минимальной Лиувиллевской гравитации, вычисление форм-фаткоров физических состояний в двумерной теории Тоды для афинной алгебры $A_{L-1}^{(1)}$ и в модели Буллоу-Додда и исследование их свойств.

**Основные результаты.** Результаты диссертации состоят в следующем:

1. Найдена размерность пространства физических состояний в минимальной Лиувиллевской гравитации $M(2,3)$. Изучена структура операторной алгебры.

2. Представлено свободно полевое представление для форм-факторов локальных операторов для двумерной теории Тоды для алгебры Ли $A_{L-1}^{(1)}$, в частности и для операторов потомков. Установлены рекуррентные соотношения между ними. Доказаны отражательные свойства.

3. Найдено свободно-полевое представление для форм-факторов операторов потомков в модели Буллоу-Додд. Найдены рекуррентные соотношения и доказаны отражательные свойства. Вычислены некоторые много-частичные форм-факторы легчайших частиц в $\Phi_{12}$ возмущенных минимальных моделях и, в частности, в модели Изинга при критической температуре в ненулевом магнитном поле.

**Научная новизна и достоверность.** Результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Выводы обоснованы надежностью современных методов теоретической физики, таких как методов гомологической алгебры и методов теории представлений, применявшихся при исследовании, и подтверждаются результатами апробации работы.

**Научная и практическая ценность.** Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут иметь применение в теории представлений, в конформной теории поля и при исследовании двумерных массивных моделей квантовой теории поля.

**Апробация диссертации.** Результаты диссертации докладывались: на международной конференции "Second International Conference on String Field Theory and Related Aspects", Москва 2009, на международной конференции "Conformal Field Theory, Integrable Models and Liouville Gravity", Черноголовка 2009 г., а также на научных семинарах в ИТФ им. Ландау, семинарах в Корейском Институте Передовых Исследований, Сеул, Корея и семинарах в центре Квантового пространства-времени Университета Соганг, Сеул, Корея.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в трех статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

# Содержание работы

Во введении представлен обзор литературы, обоснована актуальность рассматриваемых вопросов, сформулированы цели, аргументирована научная новизна полученных результатов и представлены основные результаты диссертации.

В первой главе рассматривается модель Минимальной Лиувиллевской гравитация $M(2,3)$. Данная модель соответствует так называемой чистой теории гравитации, т.е. центральный заряд материального сектора модели равен нулю. В Лиувиллевском секторе пространство состояний состоит из прямой суммы неприводимых модулей алгебры Вирасоро $\mathcal{L}_\Delta$ со старшим весом $\Delta$ и центральным зарядом $c_L$. Для процедуры БРСТ квантования мы рассматриваем $(b,c)$-систему духовых полей, используя которые определяется БРСТ оператор $Q$, такой что $Q^2 = 0$. Физические состояния в таком формализме определяются как когомологии БРСТ оператора. Мы рассматриваем как относительные $H^{\text{rel}}$, так и абсолютные $H^{\text{abs}}$ когомлогии.

Лианом и Цукерманом установлено [6], что пространство относительных когомологий $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ нетривиально тогда и только тогда, когда значения старшего веса $\Delta$ неприводимого модуля принадлежат некоторому счетному множеству чисел $E = \{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$. Так же, в работе [6] вычислены размерности пространств относительных когомлогий для этих представлений.

Нами предложена некоторая рекурсивная процедура нахождения представителей классов относительных когомологий. Именно, показано, что явные выражения для представителей классов относительных когомлогий однозначно определяются структурой вложения особых векторов в неприводимых модулях алгебры Вирасоро. Следовательно, все когомлогии однозначно определяются только старшими когомлогиями, т.е. когомлогиями с максимальным духовым числом в рассматриваемом пространстве $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$.

Ответ для размерностей относительных когомологий был получен Лианом и Цукерманом [6]. Оказывается, что $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta) \neq 0$ только при $\Delta$, принадлежащих некоторому счетному множеству размерностей $E$ (мы обозначаем эти размерности $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$). Для $\Delta \in E$ размерности когомологий также найдены Лианом и Цукерманом. Эти результаты кратко описаны в пункте 1.2.1. В пункте 1.2.2 приведен рекурсивный алгоритм нахождения представителей этих классов когомологий.

Базис, построенный в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$, $\Delta \in E$ является неудобным для исследования операторной алгебры. Нами показано, что можно выбрать другой бызис, используя духовые операторы, действующие на пространстве когомлогий, а именно

$$X = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_{-n} c_n, \quad X_+ = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^3 c_{-n} c_n,$$

где $c_n$ — это разложения духового поля $c(z)$ в ряд Лорана. Данные операторы коммутируют с БРСТ зарядом $Q$ и, как следствие, образуют алгебру, действующую на пространстве относительных когомлогий с соотношением $X \cdot X_+ = 0$. Используя данные операторы возможно построить базис в пространстве относительных когомлогий в силу следующей теоремы

**Теорема 1.** *Следующие представители классов когомлогий*

$$\begin{array}{l} O(a_n), \quad XO_{a_n}, \quad X^2 O_{a_n}, \dots X^n O_{a_n}, \\ X_+ O(a_n), \quad X_+^2 O_{a_n}, \quad X_+^3 O_{a_n}, \dots X^{n-1} O_{a_n} \end{array}$$

*образуют базис в пространстве* $H^{\mathrm{rel}}_*(\mathcal{L}_{a_n})$.

В этой теореме $O_{a_n}$ обозначает представителя классов когомлогий из $H^{\mathrm{rel}}_*(\mathcal{L}_{a_n})$ с наименьшим духовым числом. Аналогичную теорему можно сформулировать для пространства $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{b_n})$. Утверждение теоремы можно представить с помощью следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & XO_{a_n} \arrow[r, "X"] & X^2 O_{a_n} \arrow[r, "X"] & \dots \arrow[r, "X"] & X^{n-1} O_{a_n} \arrow[dr, "X"] & \\
O_{a_n} \arrow[ur, "X"] \arrow[dr, "X_+"'] & & & & & X^n O_{a_n} \\
 & X_+ O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & X_+^2 O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & X_+^{n-1} O_{a_n} \arrow[ur, "X_+"'] &
\end{tikzcd}$$

$$-n+1, \qquad -n+3, \qquad -n+5, \qquad \dots \qquad n-1, \qquad n+1.$$

причем в нижней строчке набор чисел $-n+1, \dots, n+1$ соответствует духовым числам.

Построение базиса в пространстве относительных когомологий позволяет исследовать их операторную алгебру. Операторная алгебра обладает структурой кольца, т.е.

$$O_1(z)O_2(0) = O_3(0) + [Q, \dots].$$

Используя явные выражения для найденных базисных элементов мы показываем, что операторная алгебра в пространстве относительных когомлогий не является ассоциативной.

До сих пор обсуждались классы относительных когомлогий $w$, по модулю $Qw_0$, где оба элемента $w$ и $w_0$ зануляются при действии нулевой моды духового поля $b(z)$, т.е. $b_0$. Однако, существуют состояния вида $Q\tilde{w}$, такие что $b_0\tilde{w} \neq 0$. Любая корреляционная функция, которая содержит такие состояния равна нулю. Можно сказать, что эти состояния не являются физическими. Поэтому, нам следует исключить такие состояния из рассмотрения. Для этого, мы рассматриваем абсолютный БРСТ комплекс.

Мы формулируем теорему для размерностей пространств абсолютных когомлогий. Именно $H_*^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$ нетривиальны если и только если, $\Delta \in E$, причем

**Теорема 2.**

$$\dim H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n+1,\ -n+3, \dots,\ n-1, \\ 1, & k = -n+4,\ -n+6, \dots,\ n+2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

*при* $n > 0$. *В случае* $n = 0$

$$\dim H_k^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1} + \delta_{k,2}.$$

Здесь через $\delta_{i,j}$ обозначена дельта функция Кронекера.

Мы вводим оператор

$$Y = \frac{1}{12} \sum_{i+j+k=0} (i-j)(j-k)(k-i) c_i c_j c_k,$$

действующий на пространстве абсолютных когомологий. С помощью этого оператора удается изучить структуру операторной алгебры на этом пространстве. На алгебру налагаются довольно сильные ограничения, вытекающие из правил отбора в теории Лиувилля и связи умножения в алгебре с действием операторов $X_+$ и $Y$.

Во второй главе рассматривается двумерная теория Тоды для афинной алгебры Ли $A_{L-1}^{(1)}$, определяемая с помощью действия

$$S[\varphi] = \int d^2x \left( \frac{\langle \partial_\mu \varphi, \partial^\mu \varphi \rangle}{8\pi} - \frac{\mu}{2} \sum_{i=0}^{L-1} e^{b\alpha_i \varphi} \right),$$

где $\mu$ — регуляризованный массовый параметр, $\varphi(x) \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ — $(L-1)$-мерная Картанова подалгебра простой алгебры Ли $A_{L-1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — форма Килинга. Кроме того, мы будем обозначать простые корни как $\alpha_i$, а полусумму положительных корней как $\rho$. Спектр рассматриваемой модели содержит из $L-1$ различных частиц [7], которые будут нумероваться как $k_i$, $i = 1, \dots L-1$.

Пространство состояний этой модели состоит как из экспоненциальных операторов $V_a(x) = e^{Q(a+\rho)\varphi(x)}$, так и их потомков, т.е. линейных комбинации операторов

$$(\alpha_{i_1} \partial^{l_1} \varphi) \cdots (\alpha_{i_r} \partial^{l_r} \varphi)(\alpha_{j_1} \bar{\partial}^{\bar{l}_1} \varphi) \cdots (\alpha_{j_s} \bar{\partial}^{\bar{l}_s} \varphi) e^{Q(a+\rho)\varphi}(x),$$

где $Q = b + b^{-1}$. На малых расстояниях, теория Тоды может рассматриваться как свободная теория. Тогда все пространство состояний имеет вид прямого произведения модулей Фока $\mathcal{F}_a \otimes \bar{\mathcal{F}}_a$, причем эти модули изоморфны и градуированы

$$\mathcal{F}_a = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{a,n}, \quad \mathcal{F}_n = \operatorname{span}\left\{ \mathbf{a}_{i_1,-l_1} \dots \mathbf{a}_{i_r,-l_r} |a\rangle_{\mathrm{rad}} \middle| \sum_{i=1}^{r} l_i = n \right\},$$

где $|a\rangle_{\mathrm{rad}}$ — старший вектор в модуле, соответствующий экспоненциальному оператору $V_a(0)$. Размерности соответствующих подпространств даются производящей функцией

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim \mathcal{F}_{a,n} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^m)^{L-1}}.$$

Вычисление форм-факторов локальных операторов в двумерных интегрируемых моделях квантовых теорий поля сводится к нахождению решений набора разностных уравнений, известных как форм-факторные аксиомы [13]. Одним из способов решения этих уравнений является свободно полевое представление, предложенное Лукьяновым [14]. В частности в работе [15] найдены решения форм-факторных аксиом, соответствующие экспоненциальным операторам.

В работе [16] была предложена модификация Лукьяновского свободно-полевого представления, позволяющая вычислят форм-факторы операторов потомков в модели синус-Гордона. Для теории Тоды эта конструкция выглядит следующим образом. Определим алгебру $\mathcal{A}$ как коммутативную алгебру, порождаемую элементами $\langle \alpha_i, c_{-n} \rangle$ $n > 0$ (мы будем работать с символом $c_{-n}$ как с вектором из $\mathfrak{h}$). Рассмотрим представление со старим весом. Тогда

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n, \quad \mathcal{A}_n = \operatorname{span}\Big\{ c_{-l_1} \dots c_{-l_r} |1\rangle \Big| \sum_{i=1}^{r} l_i = n \Big\},$$

где $|1\rangle$ — вектор старшего веса. Пусть $\bar{\mathcal{A}}$ — другая копия алгебры $\mathcal{A}$, порождаемая элементами $\bar{c}_{-n}$, причем естественный гомоморфизм определен как $\overline{c_{-n}} = \bar{c}_{-n}$. Определим скобку на алгебре $\mathcal{A}$:

$$\left( \prod_{n=1}^{\infty} (u_n c_{-n})^{\mu_n}, \prod_{n=1}^{\infty} (v_n c_{-n})^{\nu_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n! \, \langle u_n, v_n \rangle^{\mu_n} \delta_{\mu_n \nu_n}, \quad \forall u_n, v_n \in \mathfrak{h}^*.$$

Используя генераторы алгебр $\mathcal{A}$ и $\bar{\mathcal{A}}$, мы определяем модифицированные Лукьяновские операторы $\mathcal{T}_{k_i}(x_i)$, такие что для любого элемента $g \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$ функция

$$f_a^g(\theta_1, \dots, \theta_N)_{k_1 \dots k_N} = \big( \langle\langle \mathcal{T}_{k_N}(\theta_N) \dots \mathcal{T}_{k_1}(\theta_1) \rangle\rangle_a, g \big)$$

является решением форм-факторных аксиом и, потому, представляет форм-фактор некоторого оператора $V_a^g(x)$. В этом выражении $\langle\langle \dots \rangle\rangle_a$ — это многоточечная функция, введенная Лукьяновым в [15], которая вычисляется с помощью теоремы Вика по некоторым заданным правилам. Таким образом, вычисление форм-факторов операторов потомков сводится к определенной комбинаторной задаче.

Далее изучаются свойства построенных функций $f_a^g(\theta_1, \dots, \theta_N)_{k_1 \dots k_N}$. Мы доказываем, что эти функции обладают свойством кластерной факторизации [17]:

$$\begin{aligned} &f_a^{h\bar{h}'}(\theta_1, \dots, \theta_M, \theta_{M+1} + \Lambda, \dots, \theta_N + \Lambda)_{k_1 \dots k_M k_{M+1} \dots k_N} \\ &\quad = f_a^h(\theta_{M+1} + \Lambda, \dots, \theta_N + \Lambda)_{k_{M+1} \dots k_N} f_a^{\bar{h}'}(\theta_1, \dots, \theta_M)_{k_1 \dots k_M} \text{ as } \Lambda \to +\infty. \end{aligned}$$

Кроме того, в случае общего положения параметра $a$, функции $f_a^g(\theta_1, \dots, \theta_N)_{k_1 \dots k_N}$ с различными $g$ различаются. Как следствие, мы получаем

**Предложение 1.** *В случае общего положения параметра $a$ размерность пространства операторов $V_a^g$ с $g \in \mathcal{A}_l \otimes \bar{\mathcal{A}}_{\bar{l}}$ совпадает с размерностью пространства Фока $\dim(\mathcal{F}_l \otimes \mathcal{F}_{\bar{l}}) = \dim \mathcal{F}_l \cdot \dim \mathcal{F}_{\bar{l}}$. Размерности пространств* *операторов $V_a^g$ с $g \in \mathcal{A}_l$ или $g \in \bar{\mathcal{A}}_l$ совпадают с размерностями соответствующих подпространств* $\dim \mathcal{F}_l$.

Оставшаяся часть главы посвящена доказательству отражательных соотношений для форм-факторов [18]. Эти соотношения связывают между собой операторы с различными значениями параметра $a$, связанными действием группы Вейля $\mathcal{W}$ алгебры Ли $A_{L-1}$. Заметим, что полученные форм-факторы могут быть представлены в виде

$$f_a^g(\theta_1, \dots, \theta_N)_{k_1 \dots k_N} = J_{N,a}^g(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_N})_{k_1, \dots, k_N} \prod_{i<j}^{N} R_{k_i k_j}(\theta_i - \theta_j),$$

где $R_{k_i k_j}(\theta_i - \theta_j)$ — это минимальный двухточечный форм-фактор, а функции $J_{N,a}^g(x_1, \dots, x_N)_{k_1 \dots k_N}$ являются рациональными функциями переменных $x_1, \dots, x_N$ и симметричными функциями при перестановке пар $(k_i, x_i)$.

Мы получаем свободно-полевое представление для этих функций, которое отличается от Лукьяновского представления тем, что во-первых, алгебра Гейзенберга порождается счетным множеством генераторов и, во-вторых, функции $J_{N,a}^g$ для всех $g \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$ выражаются посредством матричных элементов. Одним из важных следствий полученного свободно-полевого представления являются рекурсивные уравнения, связывающие функции $J_{N,a}^g$ с различным числом частиц $N$. Эти соотношения позволяют эффективно вычислять многоточечные форм-факторы.

Первым шагом доказательства отражательных соотношений является доказательство этих соотношений для форм-факторов экспоненциальных операторов. Так как эти функции могут быть построены рекурсивно, то оказывается достаточным доказательство отражательных соотношений для начальных условий рекурсивных уравнений. В результате мы получаем:

**Теорема 3.** *Функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)_{k_1, \dots, k_N}$ являются симметричными функциями относительно преобразований группы Вейля $\mathcal{W}$ алгебры Ли $A_{L-1}$:*

$$J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)_{k_1, \dots, k_N} = J_{N,wa}(x_1, \dots, x_N)_{k_1, \dots, k_N} \qquad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Основная идея доказательства отражательных соотношений для форм-факторов операторов потомков основывается на предложении, сделанном в работе [19], а именно, данное предложение утверждает, что все форм-факторы могут быть получены из форм-факторов примарных операторов, как коэффициенты разложения при больших значениях быстрот. В результате, мы получаем

**Теорема 4.** *В случае общего положения параметра $a$ существует представление группы Вейля $r_a$ на алгебре $\mathcal{A}$ такое, что для любых $h, h' \in \mathcal{A}$ выполняется следующее соотношение*

$$J_{N,a}^{h\bar{h}'}(x_1, \ldots, x_N)_{k_1 \ldots k_N} = J_{N,wa}^{(r_a(w)h)(\overline{r_{w_* a}(\widetilde{w})h'})}(x_1, \ldots, x_N)_{k_1 \ldots k_N}.$$

*где $w_* \in \mathcal{W}$, $w_* \alpha_i = -\alpha_{L-i}$ и автоморфизм группы Вейля определен как $\widetilde{w} = w_* w w_*$.*

Более того, мы доказываем существование Вейль инвариантного базиса в Фоковском пространстве, т.е.

**Теорема 5.** *Для любых $l$ существует аналитическое по параметру $a$ семейство наборов $\{h_{a,l,\mu}^{\mathrm{inv}} \in \mathcal{A}_l\}_{\mu=1}^{\dim \mathcal{A}_l}$, которые являются базисами в $\mathcal{A}_l$ в случае общего положения параметра $a$, такими что $r_a(w) h_{a,l,\mu}^{\mathrm{inv}} = h_{wa,l,\mu}^{\mathrm{inv}}$.*

В дополнение к утверждению данной теоремы, мы предложили явную конструкцию нахождения Вейль инвариантного базиса.

В третьей главе нами рассматривается модель Буллоу-Додда, которая определяется действием

$$S_{BD} = \int d^2x \left( \frac{1}{16\pi} (\partial_\nu \varphi)^2 + \mu (e^{\sqrt{2} b \varphi} + 2 e^{-\frac{b}{\sqrt{2}} \varphi}) \right),$$

где $\mu$ — регуляризованный массовый параметр, $b$ — константа связи. Спектр модели Буллоу-Додда содержит только одну частицу. Двухчастичная амплитуда рассеяния имеет вид

$$S(\theta) = \frac{\tanh \frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi}{3}) \tanh \frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi}{3bQ}) \tanh \frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi b}{3Q})}{\tanh \frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi}{3}) \tanh \frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi}{3Qb}) \tanh \frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi b}{3Q})},$$

где $Q = b + b^{-1}$. Пространство локальных операторов состоит из экспоненциальных операторов $V_a(x) = e^{a\varphi(x)}$ и их потомков

$$\partial^{n_1} \varphi \ldots \partial^{n_r} \varphi \bar{\partial}^{\bar{n}_1} \varphi \ldots \bar{\partial}^{\bar{n}_s} \varphi \, e^{a\varphi(x)}.$$

Далее мы следуем логике, изложенной в предыдущей главе. Используя процедуру радиального квантования, мы получаем пространство состояний этой модели в виде тензорного произведения Фоковских модулей

$\mathcal{F}_a \otimes \bar{\mathcal{F}}_a$, таких что $\mathcal{F}_a = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{a,n}$, причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim \mathcal{F}_{a,n} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^m}.$$

Форм-факторы экспоненциальных операторов были найдены в работе [20]. Для построения форм-факторов операторов потомков мы рассматриваем алгебру $\mathcal{A} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$, порождаемую операторами $c_{-n}$ $n > 0$ и ее копию $\bar{\mathcal{A}}$. Определим скобку

$$\left( \prod_{m=1}^{\infty} c_{-m}^{k_m}, \prod_{m=1}^{\infty} c_{-m}^{l_m} \right) = \prod_{m=1}^{\infty} k_m! \delta_{k_m, l_m}.$$

С помощью этой вспомогательной алгебры мы определяем модифицированные Лукьяновские операторы $\mathcal{T}(\theta)$. Тогда для любого $g \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$ функции

$$f_a^g(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \big( \langle\langle \mathcal{T}(\theta_N), \ldots, \mathcal{T}(\theta_1) \rangle\rangle, g \big)$$

являются форм-факторами некоторых локальных операторов $V_a^g(x)$ в модели Буллоу-Додда, причем многоточечная функция $\langle\langle \cdots \rangle\rangle$ определена в [20].

Аналогично предыдущему случаю, мы доказываем, что найденные форм-факторы функции обладают свойством кластерной факторизации. Кроме того, доказано, что для общих значений параметра $a$ размерность пространства функций $f_a^g(x_1, \ldots, x_N)$ с $g \in \mathcal{A}_n \otimes \bar{\mathcal{A}}_{\bar{n}}$ совпадает с размерностью соответствующего подпространства Фоковского модуля $\mathcal{F}_n \otimes \bar{\mathcal{F}}_{\bar{n}}$. Таким образом, нами полностью описано пространство форм-факторов модели Буллоу-Додда.

Найденные форм-факторы могут быть представлены в виде

$$f_a^g(\theta_1, \ldots, \theta_N) = J_{N,a}^g(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_N}) \prod_{i<j}^{N} R(\theta_i - \theta_j),$$

где $R(\theta)$ — двухточечный минимальный форм-фактор в модели Буллоу-Додда. Рассмотренное нами свободно-полевое представление для форм-факторов операторов потомков позволяет получить функции $J_{N,a}^g$ в явном виде, а именно

$$J_{N,a}^g(x_1, \ldots x_N) = \sum_{I_+ + I_- + I_0 = I} h^{\# I_0} e^{(\# I_+ - \# I_-) i\pi p} P^g(X_+ | X_- | X_0) \times$$
$$\times \prod_{i \in I_+, j \in I_-, k \in I_0} f\Big(\frac{x_i}{x_j}\omega\Big) f\Big(\frac{x_i}{x_j}\omega^2\Big) f\Big(\frac{x_i}{x_k}\omega\Big) f\Big(\frac{x_j}{x_k}\omega^{-1}\Big) \prod_{(p<q) \in I_0} f\Big(\frac{x_p}{x_q}\Big),$$

где

$$f(x) = 1 + \frac{h^2 - 1}{x + x^{-1} - 1}, \quad h = 2\sin\frac{\pi(b - b^{-1})}{6Q}, \quad \omega = e^{i\pi/3}.$$

В приведенном выше выражение мы ввели множество целых чисел, $I = \{1, \dots, N\}$ и сумма берется по всем разложения множества $I$ в три подмножества $I_\sigma$, $\sigma = \{+, -, 0\}$, так что $I_+ \cup I_- \cup I_0 = I$ и $I_{\sigma'} \cap I_\sigma = \varnothing$ if $\sigma' \neq \sigma$. Каждому подмножеству $I_\sigma$ мы поставили в соответствие подмножество $X_\sigma = \{x_i | i \in I_\sigma\}$. Функции $P^g(X|Y|Z)$ являются полиномами, определяемыми с помощью следующих соотношений

$$\begin{aligned}
&P^{c_{-m}}(X|Y|Z) = S_m(X) - (-1)^m S_m(Y) + (\omega^{-m} - (-1)^m \omega^m) S_m(Z),\\
&P^{\bar{c}_{-m}}(X|Y|Z) = S_{-m}(Y) - (-1)^m S_{-m}(X) + (\omega^{-m} - (-1)^m \omega^m) S_{-m}(Z),\\
&P^{g_1 g_2} = P^{g_1} P^{g_2}, \quad P^{C_1 g_1 + C_2 g_2} = C_1 P^{g_1} + C_2 P^{g_2},
\end{aligned}$$

для $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Мы обозначили степенные суммы порядка $m$ как $S_m(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x^m$.

Функции $J^g_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ допускают свободно-полевое представление, которое позволяет установит рекурсивные соотношения между этими функциями с различным числом частиц $N$. Рекурсивные соотношения позволяют доказать отражательные свойства форм-факторов в этой модели. Так, для экспоненциальных операторов мы получаем:

**Теорема 6.** *Рассмотрим преобразования конечной группы $\mathcal{W}$, порождаемой элементам $w_1$ и $w_2$, такими что*

$$w_1 a = \frac{1}{\sqrt{2}b} + \sqrt{2}b - a, \quad w_2 a = -\frac{\sqrt{2}}{b} - \frac{b}{\sqrt{2}} - a.$$

*Тогда функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ являются симметричными функциями относительно преобразований этой группы, а именно*

$$J_{N,a}(x_1, \dots, x_N) = J_{N,wa}(x_1, \dots, x_N) \qquad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Для форм-факторов операторов потомков мы получаем

**Теорема 7.** *В случае общего положения параметра $a$ существует представление группы $\mathcal{W}$, а именно $r_a$ на алгебре $\mathcal{A}$ такое, что для любых $h, h' \in \mathcal{A}$ выполняется следующее соотношение*

$$J^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1, \dots, x_N) = J^{(r_a(w)h)\overline{(r_{-a}(w)h')}}_{N,wa}(x_1, \dots, x_N).$$

Оставшаяся часть главы 3 посвящена изучению квантово-групповой редукции модели Буллой-Додда при специальных мнимых значениях константы связи, а именно при $2b^2 = p/p'$, где $p$ и $p'$ — это взаимно простые целые числа, такие что $p' > p > 1$. В работе [10] было установлено, что редуцированная теория при данных значения константы связи совпадает с минимальной моделью конформной теории поля $M(p,p')$, возмущенной примарным оператором $\Phi_{1,2}$. Отметим, что при аналитическом продолжении до мнимых значения двух-частичная амплитуда рассеяния приобретает дополнительные полюса, которые соответствуют более тяжелым частицам в процессах рассеяния.

Полученные форм-факторы $f^g_{N,a}$ могут быть аналитически продолжены до требуемых значений констант связи. Мы полагаем, что будучи аналитически продолженными, эти форм-факторы соответствуют форм-факторов легчайших бризеров в $\Phi_{1,2}$ возмущенной минимальной модели. Однако, в силу бутстрапной структуры модели, вычисление форм-факторов тяжелых бризеров сводится к вычислению много-частичных форм-факторов легчайших бризеров. Таким образом, нами описан бризерный сектор $\Phi_{1,2}$ возмущенной минимальной модели.

В качестве примера мы подробно рассматриваем случай $(p,p') = (3,4)$, который соответствует модели Изинга при критической температуре в ненулевом магнитном магнитном поле. Теория рассеяния для этой модели содержит 8 типов различных частиц [12]. Мы вычисляем много-частичные форм-факторы для легчайшей частицы в этой модели и проверяем, что полученные нами результаты находятся в согласии с результатами, полученными путем прямого решения системы форм-факторных аксиом.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

**Выводы.**

1. В работе рассмотрено пространство физических состояний в минимальной Лиувиллевской гравитации $M(2,3)$, в которой пространство состояний в гравитационном секторе представлено неприводимыми модулями алгебры Вирасоро. С помощью процедуры БРСТ квантования удалось получить и классифицировать все физические состояния теории. Показано, что определение физических состояний, как классов относительных когомлогий, является неудовлетворительным, так как их операторная алгебра не ассоциативна. Построены некоторые операторы, действующие на когомлогиях. С помощью этих операторов удается установить операторную алгебру классов абсолютных когомлогий.

2. Изучено пространство физических состояний в двумерной теории Тоды афинной алгебры Ли $A^{(1)}_{L-1}$. Представлено свободно полевое представление как для форм-факторов локальных операторов, так и для форм-факторов операторов потомков. Показано, что количество полученных форм-факторов совпадает с количеством операторов в Лагранжевом формализме. Получен эффективный формализм для изучения аналитических свойств форм-факторов. Показано, что они удовлетворяют нетривиальным тождествам, которые известны как отражательные соотношения. Однако задача об отождествлении пространства полученных форм-факторов и операторов в Лагранжевом формализме пока остается нерешенной. Мы полагаем, что полученные нами результаты, такие как отражательные свойства для форм-факторов, являются важными шагами в направлении решения этой задачи.

3. Получено свободно-полевое представление для форм-факторов локальных операторов в модели Буллоу-Додда. Показано, что количество форм-факторов совпадает с количеством операторов в Лагранжевом формализме. Изучены основные свойства форм факторов и доказаны отражательные соотношения. Квантово-групповая редукция модели Буллоу-Додда для некоторых мнимых значений константы связи описывает $\Phi_{12}$ возмущенные минимальные модели. Как следствие, полученный нами формализм, а именно, свободно-полевое представление и рекурсивные соотношения, позволяют эффективно

вычислять много-частичные форм-факторы в таких моделях. В качестве примера применения разработанного нами формализма, вычислены много-частичные форм-факторы легчайших частиц для модели Изинга при критической температуре в ненулевом магнитном поле.

# Работы автора по теме диссертации


[1] О. Алексеев, М. Берштейн *Кольцо физических состояний в* $M(2,3)$ *минимальной Лиувиллевской гравитации*, ТМФ, **164**(1) (2010) 119;

[2] O. Alekseev, M. Lashkevich, *Form factors of descendant operators:* $A_{L-1}^{(1)}$ *affine Toda theory*, J. High Energy Phys., **1007** (2010) 095;

[3] О. Алексеев, *Форм факторы в моделях, связанных с моделью Буллоу-Додда: модель Изинга в магнитном поле*, ТМФ, **173**(2) (2012) 219;


# Цитированная литература


[1] A. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys.Lett. **B103**, (1981) 207;

[2] J. Distler, H. Kawai, *Conformal field theory and 2-D quantum gravity or who's afraid of Joseph Liouville?* Nucl. Phys. B **321**, (1989) 509;

F. David, *Conformal field theories coupled to 2-D gravity in the conformal gauge*, Mod. Phys. Lett. A **3**, (1988) 1651;

[3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984) 333–380;

[4] Ал. Б. Замолодчиков, *Трехточечная функция минимальной лиувиллевской гравитации*, ТМФ **142** 2 (2005) 183;

[5] А. А. Белавин, Ал. Б. Замолодчиков, *Интегралы по пространству модулей, кольцо дискретных состояний и четырехточечная функция в минимальной лиувиллевской гравитации*, ТМФ **147**(3) (2006) 339;

[6] B. Lian, G. Zuckerman, *New Selection Rules And Physical States in 2D Gravity*, Phys. Lett. B **254**, (1991) 417.

[7] A. Arinshtein, V. Fateev and A. Zamolodchikov, *Quantum $S$-matrix of the (1+ 1)-dimensional Todd chain*, Phys. Lett. B **87** (1979) 389;

[8] R. K. Dodd and R. K. Bullough, *Polynomial conserved densities for the Sine-. Gordon equations*, Proc. R. Soc. London A **352** (1977) 481;

[9] F.A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theories*, World Scientific, (1992);

[10] F. Smirnov, *Exact $S$-matrices for $\Phi_{12}$ perturbed minimal models of conformal field theory*, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 1407;

[11] A. Zamolodchikov, *Integrable field theory from conformal field theory*, Advanced Studies in Pure Mathematics **19** (1989) 641;

[12] A. Zamolodchikov, *Integrals of motion and the $S$-matrix of the (scaled) $T = T_c$ Ising model with a magnetic field*, Int. J. Mod. Phys A **4** (1989) 4235;

[13] M. Karowski and P. Weisz, *Exact form-factors in (1+ 1)-dimensional field theoretic models with soliton behavior*, Nucl. Phys. B **139** (1978) 455;

[14] S. Lukyanov, *Free field representation for massive integrable models*, Commun. Math. Phys. **167** (1995) 183;

[15] S. Lukyanov, *Form-factors of exponential fields in the affine $A^{(1)}_{N-1}$ Toda model*, Phys. Lett. B **408** (1997) 192;

[16] B. Feigin and M. Lashkevich, *Form factors of descendant operators: Free field construction and reflection relations*, J. Phys. A **42** (2009) 304014;

[17] G. Delfino and G. Niccoli, *Form factors of descendant operators in the massive Lee-Yang model*, J. Stat. Mech. **0504** (2005) P004;

[18] V. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov and Al. Zamolodchikov, *Expectation values of boundary fields in the boundary sine-Gordon model*, Phys. Lett. B **406** (1997) 83;

[19] V. Fateev, V. Postnikov and Y. Pugai, *On scaling fields in $Z_N$ Ising models*, JETP Lett. **83** (2006) 172;

[20] V. Brazhnikov and S. Lukyanov, *Angular quantization and form-factors in massive integrable models*, Nucl. Phys. B **512** (1998) 616;