На правах рукописи

ТАРНОПОЛЬСКИЙ Григорий Михайлович

Интегрируемые структуры в 2d Конформной теории поля и 4d Суперсимметричной калибровочной теории поля.

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черноголовка — 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Белавин Александр Абрамович** доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН
Официальные оппоненты:	**Кричевер Игорь Моисеевич** доктор физико-математических наук ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН, г. Черноголовка, ведущий научный сотрудник
	Рослый Алексей Андреевич кандидат физико-математических наук ФГБУ "ГНЦ РФ ИТЭФ г. Москва, старший научный сотрудник.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук

Защита диссертации состоится 27 июня 2014 г. в 11 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1-А, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Автореферат разослан ____ мая 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ-мат. наук Гриневич Петр Георгиевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена изучению и доказательству гипотезы Алдая Гаиотто и Тачикавы [1] (в дальнейшем АГТ соответствие). Данная гипотеза заключается в равенстве между конформными блоками в двумерной конформной теории поля и статистической суммой в суперсимметричной калибровочной теории Янга-Миллса.

Открытие АГТ явилось своего рода неожиданностью для экспертов в области двумерной конформной теории поля. Это связанно с тем, что активное изучение двумерной конформной теории поля началось в 1984 году со знаменитой статьи Белавина, Полякова и Замолодчикова [2], и продолжается по текущее время. Главная идея этих авторов состояла в одновременном использовании конформной симметрии теории и гипотезы об операторной алгебере локальных полей [3]. За это время в изучении конформной теории поля был достигнут определенный прогресс. В частности, были хорошо изучены свойства одного из основных объектов в теории — конформного блока. Но явной формулы для данного объекта известно не было. Конформный блок можно было вычислять как ряд по степеням параметров (конформных инвариантов координат локальных операторов) коэффициент за коэффициентом, но общего ответа для n-ого коэффициента ряда не было известно. С появлением АГТ соответствия [1], которое по сути устанавливало явную формулу для конформного блока в двумерной конформной теории поля, начался новый подъем интереса к двумерной конформной теории поля.

Алдай, Гаиотто и Тачикава предложили связь между двумерными конформными теориями и $\mathcal{N} = 2$ четырех-мерными суперсимметричными калибровочными теориями. В частности, они связали $n-$точечный конформный блок на сфере с инстантонной частью статистической суммы Некрасова [8–10] для калибровочной теории с калибровочной группой $U(2)_1 \otimes \cdots \otimes U(2)_{n-3}$ и со специальным набором полей материи, который либо в (анти-)фундаментальном представлении группы $U(2)_1$ от $U(2)_{n-3}$ либо в бифундаментальном представлении $U(2)_i \otimes U(2)_{i+1}$ для $i = 1, \ldots, n-2$. Теории такого типа обычно называются линейными квиверными калибровочными теориями [11–14].

В вследствие результатов статьи [1] передовыми задачами стали задачи о понимании и доказательстве АГТ соответствия.

Цель работы. Целью настоящей работы является изучение и доказательство АГТ соответствия и его обобщений. В частности, построение ортогонального базиса состояний для конформной теории с алгеброй симметрии $\mathrm{Vir}\otimes\mathcal{H}$ и нахождение специальных вертексных операторов, в случае классического АГТ соответствия. Построение ортогонального базиса состояний для конформной теории с алгеброй симметрии $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}\otimes\mathrm{NSR}$ и нахождение специальных вертексных операторов в случае суперсимметричного обобщения АГТ соответствия. Также в цели работы входит дальнейшее изучение и объяснение обобщений АГТ соответствия. А именно изучение свойств алгебры $\mathcal{A}(2,p)=\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_2/\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_2$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построен ортогональный базис состояний и предъявлен специальный вертексный оператор в тензорном произведении алгебры Вирасоро и Гейзенберга: $\mathrm{Vir}\otimes\mathcal{H}$. Результатом этого является доказательство классического АГТ соответствия для случая конформной теории поля с симметрией алгебры Вирасоро Vir.

2. Построен ортогональный базис состояний и предъявленны специальные вертексные операторы в тензорном произведении алгебр: $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}\otimes\mathrm{NSR}$. Результатом этого является доказательство суперсимметричного АГТ соответствия для случая конформной теории поля с симметрией алгебры Супер-Вирасоро: NSR.

3. Рассмотренно обобщение АГТ соответствия для конформной теории с алгеброй симметрии: $\mathcal{A}(2,p)=\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_2/\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_2$. Показанно, что данная алгебра может быть реализованна двумя способами. Эквивалентность двух способов приводит к нетривиальным тождествам для конформных блоков данной теорий.

Научная новизна и достоверность. Результаты диссертации являются новыми. Достоверность ее выводов обеспечена надежностью применявшихся методов и подтверждается результатами апробации работы.

Научная и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут иметь применения в теории представлений, конформной теории поля, калибровочных теориях поля, в физике конденсированного состояния в применении к дробному квантовому эффекту Холла.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались: на международной конференции «Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems », Дубна 2011, на международной конференции «Workshop on AGT conjecture», Бонн 2011 г., а также на научных семинарах в ИТФ им. Ландау.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы.

Содержание работы

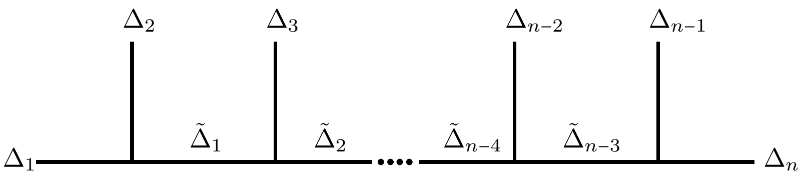
Во введении дан краткий обзор литературы, аргументированна актуальность и научная новизна полученных результатов. Представлены основные результаты диссертации.

Результатом Главы 1 является доказательство классического АГТ соответствия.

В пункте 1.1 изложено понятие операторного разложения, понятие примарных локальных полей и их потомков. Дается определение алгебры Вирасоро. Также определяется понятие конформного блока, как голоморфный вклад в корреляционную функцию примарных полей

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$$

Конформный блок обычно представляется в виде следующей диаграммы:



Удобно использовать проективную симметрию и зафиксировать $z_1 = 0$, $z_{n-1} = 1$ и $z_n = \infty$. Также удобно выбрать

$$z_{i+1} = q_i q_{i+1} \dots q_{n-3} \quad \text{for} \quad 1 \le i \le n-3,$$

тогда конформный блок, соответствующий диаграмме является рядом [2]

$$\mathcal{F}(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) = 1 + \sum_{\vec{k}} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_{n-3}^{k_{n-3}} \mathcal{F}_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c),$$

где сумма берется по всем положительным целым $\vec{k} = (k_1, \dots, k_{n-3})$ и коэффициенты $\mathcal{F}_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c)$ являются какими-то рациональными функциями от Δ_i, $\tilde{\Delta}_j$ и центрального заряда c, который полностью определен конформной симметрией [2].

Проблема вычисления конформного блока сводится к нахождению матричных элементов вида

$$\frac{\langle i|L_{k_1'} \dots L_{k_m'} \Phi_k(1) \, L_{-k_n} \dots L_{-k_1}|j\rangle}{\langle i|\Phi_k(1)|j\rangle}.$$

Для двух данных наборов целых чисел $(k_1, \dots, k_n)$ и $(k_1', \dots, k_m')$ вычисление матричного элемента является проблемой матиматических манипуляций с элементами алгебры Вирасоро. Матричный элемент является некоторым полиномом от конформных размерностей Δ_i, Δ_j и Δ_k. Однако, такое математическое вычисление становится очень трудным для высоких уровней.

Далее в пункте 1.1 сформулированна АГТ гипотеза. Для этого мы определяем новую функцию

$$Z(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n-3} \prod_{m=k}^{n-3} (1 - q_k \dots q_m)^{2\alpha_{k+1}(Q-\alpha_{m+2})} \, \mathcal{F}(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c),$$

где параметры α_k и Q были введены, чтобы параметризовать внешние конформные размерности Δ_k и ценральный заряд c как

$$\Delta_k = \alpha_k(Q - \alpha_k), \quad c = 1 + 6Q^2, \qquad Q = b + \frac{1}{b}.$$

Гипотеза состоит в том, что $Z(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c)$ обладает замечательным разложением

$$Z(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) = 1 + \sum_{\vec{k}} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_{n-3}^{k_{n-3}} Z_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c),$$

с коэффициентами $Z_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c)$, которые имеют явное комбинаторное выражение:

$$Z_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) = \sum_{\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_{n-3}} Z_{\mathsf{vec}}(P_1, \vec{\lambda}_1)\ldots Z_{\mathsf{vec}}(P_{n-3}, \vec{\lambda}_{n-3})\times$$
$$\times Z_{\mathsf{bif}}(\alpha_2|P, \varnothing; P_1, \vec{\lambda}_1) Z_{\mathsf{bif}}(\alpha_3|P_1, \vec{\lambda}_1; P_2, \vec{\lambda}_2) Z_{\mathsf{bif}}(\alpha_4|P_2, \vec{\lambda}_2; P_3, \vec{\lambda}_3)\times\ldots$$
$$\cdots\times Z_{\mathsf{bif}}(\alpha_{n-2}|P_{n-4}, \vec{\lambda}_{n-4}; P_{n-3}, \vec{\lambda}_{n-3}) Z_{\mathsf{bif}}(\alpha_{n-1}|P_{n-3}, \vec{\lambda}_{n-3}; \hat{P}, \varnothing).$$

Сумма берется по всем парам $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ диаграмм Юнга (двойных-разбиений) таких, что $|\vec{\lambda}_j| = k_j$, где $|\vec{\lambda}_j|$ полное число клеток в паре $\vec{\lambda}_j$. Параметры P, $\hat{P}$ и P_j связанны с внешними размерностями Δ_1, Δ_n и промежуточными размерностями $\tilde{\Delta}_j$ как

$$\Delta_1 = \frac{Q^2}{4} - P^2, \quad \Delta_n = \frac{Q^2}{4} - \hat{P}^2 \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta}_j = \frac{Q^2}{4} - P_j^2.$$

Явный вид функций Z_{bif} и Z_{vec} был выведен в [15–17].

В пункте 1.2 вводится специальный базис состояний в алгебре $\mathcal{A} = \mathsf{Vir}\otimes\mathcal{H}$, которая является тензорным произведением алегбры Вирасоро и алгебры Гейзенберга с коммутаторами:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\,\delta_{n+m,0},$$
$$[a_n, a_m] = \frac{n}{2}\,\delta_{n+m,0}, \qquad [L_n, a_m] = 0.$$

Вводится специальный вертексный оператор V_α как

$$V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_\alpha \cdot V_\alpha^{\mathrm{L}},$$

где V_α^{L} примарное поле алгебры Вирасоро с конформной размерностью $\Delta(\alpha) = \alpha(Q-\alpha)$ и $\mathcal{V}_\alpha$ экспонента от свободного поля

$$\mathcal{V}_\alpha = e^{2(\alpha-Q)\varphi_-} e^{2\alpha\varphi_+},$$

с $\varphi_+(z) = i\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n}$ и $\varphi_-(z) = i\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n}$.

Вводится понятие базиса в пространстве состояний теории:

$$|P\rangle_{\vec{\lambda}} = \sum_{|\vec{\mu}|=|\vec{\lambda}|} C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1,\mu_2}(P)\,\hat{a}_{-\mu_1}\hat{L}_{-\mu_2}|P\rangle,$$

где сумма идет по всем парам $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ диаграм Юнга, таких, что $|\vec{\mu}| = |\vec{\lambda}|$ и $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1,\mu_2}(P)$ некоторые неизвестные коэффициенты и

$$\hat{a}_{-\lambda_1}\hat{L}_{-\lambda_2}|P\rangle \stackrel{\text{def}}{=} a_{-l_m}\ldots a_{-l_1}L_{-k_n}\ldots L_{-k_1}|P\rangle,$$

где $\lambda_1 = (l_1, \dots, l_m)$, $\lambda_2 = (k_1, \dots, k_n)$.

Формулируется основное предложение являющееся главной идеей для доказательства классического АГТ соответствия:

Главное Предложение: *Существует и единственен ортогональный базис $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$, такой, что*

$$\frac{{}_{\vec{\mu}}\langle P'|V_\alpha|P\rangle_{\vec{\lambda}}}{\langle P'|V_\alpha|P\rangle} = Z_{\mathsf{bif}}(\alpha|P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}).$$

В пункте 1.3 приводится доказательство **Главного Предложения**. Доказательство состоит из 8 частей.

В начале генераторы алгебры Вирасоро L_n выражаются в терминах генераторов алгебры Гейзенберга c_k, как:

$$L_n = \sum_{k\neq 0,n} c_k c_{n-k} + i(nQ - 2\mathcal{P})c_n, \quad L_0 = \frac{Q^2}{4} - \mathcal{P}^2 + 2\sum_{k>0} c_{-k}c_k,$$
$$[c_n, c_m] = \frac{n}{2}\,\delta_{n+m,0}, \quad [\mathcal{P}, c_n] = 0, \quad \mathcal{P}|P\rangle = P|P\rangle, \quad \langle P|\mathcal{P} = -P\langle P|.$$

Предложение 1.3.1: *Матричный элемент между состояниями $|P\rangle_{\lambda,\varnothing}$ и ${}_{\mu,\varnothing}\langle P'|$ определенный как*

$$|P\rangle_{\lambda,\varnothing} = \Omega_\lambda(P)\,\mathbf{J}^{(1/g)}_\lambda(x)|P\rangle, \qquad {}_{\mu,\varnothing}\langle P'| = \Omega_\mu(P')\,\langle P'|\,\mathbf{J}^{(1/g)}_\mu(y), \qquad (1)$$

равен $Z_{\mathsf{bif}}(\alpha|P', (\mu,\varnothing); P, (\lambda,\varnothing))$. Здесь $g = -b^2$,

$$a_{-k} - c_{-k} = -ib\,p_k(x), \qquad a_k + c_k = -ib\,p_k(y),$$

с $p_k(x)$ являющимся k-той степенной суммой симметричного полинома $p_k(x) = \sum_j x_j^k$ и $\mathbf{J}^{(1/g)}_\lambda(x)$ полином Джека связанный с диаграммой Юнга λ нормированный как (“интегральная форма” нормировки [19])

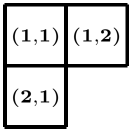
$$\mathbf{J}^{(1/g)}_\lambda(x) = |\lambda|!\,m_{[1,\dots,1]}(x) + \dots,$$

где $m_{[\nu_1,\dots,\nu_n]}(x)$ мономиальный симметричный полином.

Фактор $\Omega_\lambda(P)$ определен как

$$\Omega_\lambda(P) = (-b)^{|\lambda|} \prod_{(i,j)\in\lambda} (2P + ib + jb^{-1}),$$

индекс i пробегает вертикаль и j пробегает горизонталь диаграммы λ. Например, для диаграммы $\lambda = (2,1)$ мы имеем



Предложение 1.3.2: *Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ есть разбиение и $|P\rangle_{\lambda,\varnothing}$ состояние определенное, как (1), тогда состояние $|P = P_{m,n}\rangle_{\lambda,\varnothing}$ для $(m,n) \in \lambda$ имеет "факторизованную" форму*

$$|P_{m,n}\rangle_{\lambda,\varnothing} = (-1)^{mn} X_\lambda^{(m,n)} D_{m,n} |P_{m,n}\rangle \quad \textit{for} \quad (m,n) \in \lambda,$$

где

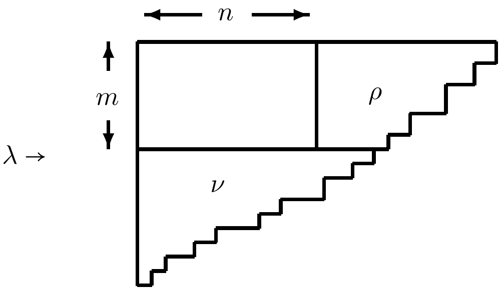
$$X_\lambda^{(m,n)} = \sum_{|\vec{\sigma}|=|\lambda|-mn} C_{\lambda;\vec{\sigma}}^{(m,n)} \hat{a}_{-\sigma_1} \hat{L}_{-\sigma_2},$$

есть оператор, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{{}_{\mu,\varnothing}\langle P'|V_\alpha X_\lambda^{(m,n)}|P_{m,-n}\rangle}{\langle P'|V_\alpha|P_{m,-n}\rangle} = Z_{\mathsf{bif}}(\alpha|P', (\mu,\varnothing); P_{m,-n}, (\rho,\nu)),$$

и пара разбиений (ρ,ν) определяется, как $\rho = (\lambda_1 - n, \dots, \lambda_m - n)$ и $\nu = (\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots)$.

Пример того, как пара разбиений (ρ,ν) определена для данных $(m,n) \in \lambda$ показан на следующей картинке.



Предложение 1.3.3: *Для любой пары диаграмм Юнга (ρ,ν) существует единственный оператор*

$$\mathbf{X}_{\rho,\nu}(P) = \sum_{|\vec{\sigma}|=|\rho|+|\nu|} C_{\rho,\nu}^{\vec{\sigma}}(P) \hat{a}_{-\sigma_1} \hat{L}_{-\sigma_2},$$

такой, что

$$\frac{{}_{\mu,\varnothing}\langle P'|V_\alpha\,\mathbf{X}_{\rho,\nu}(P)|P\rangle}{\langle P'|V_\alpha|P\rangle} = Z_{\mathsf{bif}}(\alpha|P',(\mu,\varnothing);P,(\rho,\nu)), \quad \forall\ \mu$$

где ${}_{\mu,\varnothing}\langle P'|$ *определен в* (1). *Более того* $m \geq l(\rho)$, $n \geq \nu_1 - \rho_m$

$$\mathbf{X}_{\rho,\nu}(P_{m,-n}) = X_\lambda^{(m,n)},$$

где $\lambda = (\rho_1 + n, \dots, \rho_m + n, \nu_1, \nu_2, \dots)$ *и* $X_\lambda^{(m,n)}$ *оператор определенный в Предложении 1.3.2.*

Лемма 1.3.4: *Пусть* $Y_N(P)$ *удовлетворяет*

$$\langle P'|\hat{L}_{\mu_1}\hat{a}_{\mu_2}\,V_\alpha\,Y_N(P)|P\rangle = 0 \qquad \text{для любых } \mu_1,\mu_2:\ |\mu_1| + |\mu_2| < N,$$

и P' *и* α *любые параметры, тогда* $Y_N(P) = 0$.

Предложение 1.3.5: *Для любых двух пар диаграмм Юнга* $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ *и* $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$

$$\frac{\langle P'|\mathbf{X}^+_{\vec{\mu}}(P')\,V_\alpha\,\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle}{\langle P'|V_\alpha|P\rangle} = Z_{\mathsf{bif}}(\alpha|P',\vec{\mu};P,\vec{\lambda}).$$

Следствие 1.3.6: *Состояния* $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ *образуют ортогональный базис*

$$\langle P|\mathbf{X}^+_{\vec{\mu}}(P)\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle = \mathcal{N}_{\vec{\lambda}}(P) \times \delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}},$$

где $\delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} = 0$ *если* $\vec{\lambda} \neq \vec{\mu}$, $\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}} = 1$ *и*

$$\mathcal{N}_{\vec{\lambda}}(P) = 1/Z_{\mathsf{vec}}(P,\vec{\lambda}).$$

Предложение 1.3.7: *Базис состояний* $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ *определенный выше есть единственный базис удовлетворяющий*

$$\frac{\langle P'|\mathbf{X}^+_{\vec{\mu}}(P')\,V_\alpha\,\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle}{\langle P'|V_\alpha|P\rangle} = Z_{\mathsf{bif}}(\alpha|P',\vec{\mu};P,\vec{\lambda}).$$

Следствие 1.3.8: *Все коэффициенты* $C^{\vec{\mu}}_{\vec{\lambda}}(P)$ *в*

$$\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) = \sum_{|\vec{\mu}|=|\vec{\lambda}|} C^{\vec{\mu}}_{\vec{\lambda}}(P)\hat{a}_{-\mu_1}\hat{L}_{-\mu_2},$$

полиномы по импульсу P.

Глава 2 посвящена обощению АГТ соответствия. В [18] было предложено, что инстантонное многообразие $\mathcal{M} = \bigsqcup_N \mathcal{M}(r,N)^{\mathbb{Z}_p}$ соответствует конформной теории с симметрией косета

$$\mathcal{A}(r,p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r},$$

где параметр n связан с эквивариантными параметрами и, в общем, может быть любым комплексным числом. Используя известную “уровень-ранг” дуальность, такой косет может быть переписан как

$$\mathcal{A}(r,p) = \widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r} = \mathcal{H} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(p)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n},$$

где $\mathcal{H}$ алгебра Гейзенберга. Принимая во внимание конструкцию [20] некоторые из этих алгебр могут быть переписаны как:

	• • •	• • •	• • •	
$p=3$	$\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(3)_1$	• • •	• • •	• • •
$p=2$	$\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$	$\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_2 \oplus \mathsf{NSR}$	• • •	• • •
$p=1$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H} \oplus \mathsf{Vir}$	$\mathcal{H} \oplus \mathsf{W}_3$	• • •
	$r=1$	$r=2$	$r=3$	

где Vir алгебра Вирасоро, W_3 есть $\mathfrak{sl}(3)$ W алгебра и NSR алгебра Невьё-Шварца-Рамона, $\mathcal{N}=1$ супераналог алгебры Вирасоро. Используя свободно-полевое представление алгебр $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$, $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_2$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}(3)_1$ и ограничиваясь только на некоторых компонентах $\mathcal{M}$ данная таблица может быть переписана как

	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$p=3$	$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$p=2$	$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$	$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{F}\oplus\mathsf{NSR}$	$\cdots$	$\cdots$
$p=1$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}\oplus\mathsf{Vir}$	$\mathcal{H}\oplus\mathsf{W}_3$	$\cdots$
	$r=1$	$r=2$	$r=3$	

где $\mathcal{F}$ алгебра Майорановских фермионов. Глава 2, в основном, посвящена изучению суперсимметричного случая, что на языке данных таблиц соответствует клетке $(p=2, r=2)$. Рассмотрение данного случая начинается с пункта 2.3.

В пункте 2.3.2. приводится алгебраический подход к суперсимметричному АГТ соответствию. Рассматривается алгебра $\mathcal{A}=\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{F}\oplus\mathsf{NSR}$. Показывается, что в нее нетривиальным образом вложены две коммутирующие алгебры Вирасоро:

$$L_n^{(1)}=\frac{1}{1-b^2}L_n-\frac{1+2b^2}{2(1-b^2)}\sum_{r=-\infty}^{\infty}r:f_{n-r}f_r:+\frac{b}{1-b^2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}f_{n-r}G_r,$$
$$L_n^{(2)}=\frac{1}{1-b^{-2}}L_n-\frac{1+2b^{-2}}{2(1-b^{-2})}\sum_{r=-\infty}^{\infty}r:f_{n-r}f_r:+\frac{b^{-1}}{1-b^{-2}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}f_{n-r}G_r,$$

где

$$[L_n^{(1)},L_m^{(2)}]=0,$$
$$[L_n^{(\sigma)},L_m^{(\sigma)}]=(n-m)L_{n+m}^{(\sigma)}+\frac{c^{(\sigma)}}{12}(n^3-n)\,\delta_{n+m,0},$$

с

$$c^{(\sigma)}=1+6Q^{(\sigma)\,2},\quad Q^{(\sigma)}=b^{(\sigma)}+1/b^{(\sigma)}\quad\text{и}\quad b^{(1)}=\frac{2b}{\sqrt{2-2b^2}},\quad (b^{(2)})^{-1}=\frac{2b^{-1}}{\sqrt{2-2b^{-2}}}.$$

Специальный базис состояний определяется как

$$|P,k\rangle_{\vec{Y}^{(1)},\vec{Y}^{(2)}}\stackrel{\text{def}}{=}X_{\vec{Y}^{(1)}}\Big(P^{(1)}+\frac{kb^{(1)}}{2},b^{(1)}\Big)X_{\vec{Y}^{(2)}}\Big(P^{(2)}+\frac{k}{2b^{(2)}},b^{(2)}\Big)|P,k\rangle,$$

где операторы $X_{\vec{Y}^{(\sigma)}}(P^{(\sigma)}, b^{(\sigma)})$ определялись в Главе 1. Также в данном пункте нам удается найти специальные вертексные операторы:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}^{(0)}_{\alpha}(z) = \Phi^{\mathsf{NS}}_{\alpha}(z) \cdot \mathcal{W}_{\alpha}(z),\\
&\mathbb{V}^{(1)}_{\alpha}(z) = \Big(\alpha f(z)\Phi^{\mathsf{NS}}_{\alpha}(z) + \Psi^{\mathsf{NS}}_{\alpha}(z)\Big)\, e^{i\phi(z)}\, \mathcal{W}_{\alpha}(z),\\
&\mathbb{V}^{(-1)}_{\alpha}(z) = \Big((Q-\alpha) f(z)\Phi^{\mathsf{NS}}_{\alpha}(z) + \Psi^{\mathsf{NS}}_{\alpha}(z)\Big)\, e^{-i\phi(z)}\, \mathcal{W}_{\alpha}(z),
\end{aligned}$$

Рассматривается матричный элемент вида

$$\mathfrak{F}(\alpha, m|P', k', \vec{W}^{(1)}, \vec{W}^{(2)}; P, k, \vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}) \overset{\text{def}}{=} \frac{{}_{\vec{W}^{(1)},\vec{W}^{(2)}}\langle k', P'|\mathbb{V}^{(m)}_{\alpha}|P, k\rangle_{\vec{Y}^{(1)},\vec{Y}^{(2)}}}{\langle k', P'|\mathbb{V}^{(m)}_{\alpha}|P, k\rangle}.$$

Далее формулируется:

Предложение 2.1: *Матричный элемент равен*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{F}(\alpha, m|P', k', \vec{W}^{(1)}, \vec{W}^{(2)}; P, k, \vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}) =\\
&\qquad \mathbb{F}\Big(\alpha^{(1)} + \frac{mb^{(1)}}{2}, b^{(1)}\Big| P'_1 + \frac{k'b^{(1)}}{2}, \vec{W}^{(1)}, P_1 + \frac{kb^{(1)}}{2}, \vec{Y}^{(1)}\Big)\times\\
&\qquad\qquad \times \mathbb{F}\Big(\alpha^{(2)} + \frac{m}{2b^{(2)}}, b^{(2)}\Big| P'_2 + \frac{k'}{2b^{(2)}}, \vec{W}^{(2)}, P_2 + \frac{k}{2b^{(2)}}, \vec{Y}^{(2)}\Big),
\end{aligned}$$

где функция $\mathbb{F}$ есть бифундаментальный вклад в статистическую сумму Некрасова.

Далее вводится определение “блоу-ап” факторов, как отношение матричных элементов

$$l(\alpha, m|P', k', P, k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\langle k', P'|\mathbb{V}^{(m)}_{\alpha}|P, k\rangle}{\langle P'|\mathbb{V}^{(0)}_{\alpha}|P\rangle}, & \text{если} \quad k + k' + m = 2n,\\ \frac{\langle k', P'|\mathbb{V}^{(m)}_{\alpha}|P, k\rangle}{\langle P'|\mathbb{V}^{(\pm1)}_{\alpha}|P\rangle}, & \text{если} \quad k + k' + m = 2n + 1. \end{cases} \tag{4}$$

Формулируется

Предложение 2.2: Факторы (4) выражаются формулой

$$l(\alpha, m|P', k', P, k) = \begin{cases} \prod_{i,j} s_{\text{even}}\Big(\alpha + P'_i + P_j, \frac{m + k'_i + k_j}{2}\Big) & \text{если} \quad m + k + k' \quad \text{четно}\\ \prod_{i,j} s_{\text{odd}}\Big(\alpha + P'_i + P_j, \text{int}\Big(\frac{m + k'_i + k_j}{2}\Big)\Big), & \text{если} \quad m + k + k' \ \text{нечетно} \end{cases}$$

где $\vec{P} = (P, -P)$, $\vec{k} = (k, -k)$, $\vec{P}' = (P', -P')$, $\vec{k}' = (k', -k')$ и $\text{int}(x) = \text{sgn}(x)\lfloor |x| \rfloor$ целая часть от x и для $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
&s_{\text{even}}(x, n) = 2^{-\frac{n^2}{2}} \prod_{\substack{i,j\geq1,\ i+j\leq 2n\\ i+j\equiv 0 \mod 2}} (x + (i-1)b + (j-1)b^{-1}),\\
&s_{\text{odd}}(x, n) = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{\substack{i,j\geq1,\ i+j\leq 2n+1\\ i+j\equiv 1 \mod 2}} (x + (i-1)b + (j-1)b^{-1}),
\end{aligned}$$

в то время, как для $n < 0$ мы имеем

$$s_{\text{even}}(x,n) = (-1)^n\, s_{\text{even}}(Q-x,-n), \quad s_{\text{odd}}(x,n) = s_{\text{odd}}(Q-x,-n).$$

Далее в пункте 2.4 рассматривается суперсимметричный случай, но с другой компактификацией пространства модулей инстантонов. Наличие этой компактификации приводит к нетривиальным тождествам для конформных блоков и статистических сумм Некрасова.

В Главе 3 рассматривается обобщение АГТ соответствия для конформной теории с алгеброй симметрии: $\mathcal{A}(2,p) = \widehat{\mathfrak{gl}}(n)_2/\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_2$. Показанно, что данная алгебра может быть реализованна двумя способами. А именно, используя “уровень-ранг” дуальность мы получаем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & & (\mathcal{H}\times \mathrm{Vir}^{(1)})\times\ldots\times(\mathcal{H}\times\mathrm{Vir}^{(p)}) \arrow[dd, leftrightarrow, "4"'] \\ \bigsqcup_N \mathcal{M}(2,N)^{\mathbb{Z}_p} \arrow[r, leftrightarrow, "1"] & \mathcal{A}(2,p) \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "3"'] & \\ & & \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p\times\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n}\times\mathcal{M}(3/4)\times\ldots\times\mathcal{M}(p+1/p+2)\times\mathcal{H}^p \end{tikzcd}$$

Исследуя различные ее части мы получаем разные нетривиальные тождества для характеров, конформных блоков и статистических сумм Некрасова.

Работы автора по теме диссертации

[1] Alba, Vasyl A. and Fateev, Vladimir A. and Litvinov, Alexey V. and Tarnopolskiy, Grigory M. *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, Lett.Math.Phys. **98**, (2011), 33-64, arXiv:1012.1312

[2] Belavin, A.A. and Bershtein, M.A. and Feigin, B.L. and Litvinov, A.V. and Tarnopolsky, G.M. *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **319(1)**, (2013) 269-301, arXiv:1111.2803.

[3] Belavin, A.A. and Bershtein, M.A. and Tarnopolsky, G.M., *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, JHEP, **1303**, (2013) 019 arXiv:1211.2788.

[4] Alfimov, M.N. and Belavin, A.A. and Tarnopolsky, G.M. *Coset conformal field theory and instanton counting on C^2/Z_p*, JHEP **1308** (2013) 134, arXiv:1306.3938.

Цитированная литература

[1] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167–197, arXiv:0906.3219

[2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333–380.

[3] A. M. Polyakov, *Nonhamiltonian approach to conformal quantum field theory*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **66** (1974) 23–42.

[4] G. W. Moore and N. Seiberg, *Classical and Quantum Conformal Field Theory*, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989) 177.

[5] V. P. Yurov and A. B. Zamolodchikov, *Truncated conformal space approach to scaling Lee-Yang model*, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 3221–3246.

[6] Al. B. Zamolodchikov, *Conformal symmetry in two-dimensions: an explicit reccurence formula for the conformal partial wave amplitude*, *Commun. Math. Phys.* **96** (1984) 419–422.

[7] L. Hadasz, Z. Jaskolski, and P. Suchanek, *Recursive representation of the torus 1-point conformal block*, *JHEP* **01** (2010) 063, arXiv:0911.2353

[8] G. W. Moore, N. Nekrasov, and S. Shatashvili, *Integrating over Higgs branches*, *Commun. Math. Phys.* **209** (2000) 97–121, hep-th/9712241

[9] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 831–864, hep-th/0206161

[10] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, hep-th/0306238

[11] M. R. Douglas and G. W. Moore, *D-branes, Quivers, and ALE Instantons*, hep-th/9603167

[12] D. Gaiotto and J. Maldacena, *The gravity duals of N=2 superconformal field theories*, arXiv:0904.4466

[13] D. Gaiotto, *N=2 dualities*, arXiv:0904.2715

[14] F. Benini, S. Benvenuti, and Y. Tachikawa, *Webs of five-branes and N=2 superconformal field theories*, *JHEP* **09** (2009) 052, arXiv:0906.0359

[15] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Instantons on quivers and orientifolds*, *JHEP* **10** (2004) 037, hep-th/0408090

[16] R. Flume and R. Poghossian, *An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential*, *Int. J. Mod. Phys.* **A18** (2003) 2541, hep-th/0208176

[17] S. Shadchin, *Cubic curves from instanton counting*, *JHEP* **03** (2006) 046, hep-th/0511132

[18] V. Belavin and B. Feigin, *Super Liouville conformal blocks from N=2 SU(2) quiver gauge theories*, *JHEP* **1107** (2011) 079, arXiv:1105.5800

[19] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford University Press, 1995.

[20] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and Supervirasoro algebras*, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 105–119.