На правах рукописи

Суслов Михаил Васильевич

Полная статистика переноса квантовых частиц, квантовая метрология и создание запутанных состояний

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Долгопрудный – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, Лесовик Гордей Борисович

Официальные оппоненты: Манько Ольга Владимировна, доктор физико-математических наук, ФГБУН «Физический институт им. П.Н.Лебедева» РАН, ведущий научный сотрудник.

Печень Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова» РАН, ученый секретарь, ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБУН «Институт физики твердого тела» РАН

Защита состоится «____»____________ 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при ФГБУН «Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау» РАН, расположенном по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, проспект Академика Семенова, д.1-А.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте института http://www.itp.ac.ru/.

Автореферат разослан «____»____________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Гриневич П. Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. За послении двадцать лет в квантовой физике произошли изменения, которые можно смело назвать революционными: во-первых, резко выросли возможности создавать системы с заданными свойствами и детально изучать их на мезо- и наномасштабах, во-вторых, в 90-е годы были осознаны новые возможности чисто квантовых систем, такие, как, например, возможность факторизации больших чисел посредством знаменитого алгоритма Шора [1], квантовая криптография и квантовая метрология. В данной работе изучается электронный транспорт в наноструктурах, возможность создания квантово запутанных электронных состояний с помощью специфических измерений, относящихся к так называемой квантовой метрологии. Соответствующие методы измерения могут быть применены для сверхточной регистрации ультрамалых напряжений и магнитных потоков, при этом применяются элементы квантовых алгоритмов, такие, как, например, преобразование Фурье в системе кубитов.

Цель работы состояла в изучении динамики квантовых частиц в нанопроводниках, возможности манипуляций ими и создания запутанных состояний, а также новых методов измерения состояния частиц и электромагнитных полей.

Научная новизна работы заключается в следующих оригинальных результатах, которые выносятся на защиту

1. Используя формализм первичного квантования для описания полной статистики переноса заряда невзаимодействующими электронами в мезоскопических устройствах, воспроизведены известные и получены новые выражения для характеристической функции

полной статистики переноса, учитывающие энергетические зависимости и зависимость от времени в процессе рассеяния, а также обменные эффекты, обусловленные конечными перекрытиями пролетающих волновых пакетов.

2. Результаты пункта 1 применены для описания общих статистических свойств при рассеянии двух фермионов.

3. Получена суббиномиальная статистика для незапутанных входящих состояний (Слэтеровский детерминант ранга 1), в то время как, запутанные состояния (Слэтеровский детерминант ранга 2) могут порождать супербиномиальный (и даже суперпуассоновский) шум. Это свойство может быть использовано в качестве детектора для различения спинового синглета или триплета.

4. Описан случай с постоянным напряжением, где учитывается зависимости рассеяния от энергии и конечных времен измерения, включая совсем короткие времена измерения, на которых принцип Паули становится более важен.

5. Предложена схема, в которых несколько кубитов служат детекторами в задаче о полной статистики переноса заряда. Ключевым элементом алгоритма является устройство из K кубитов, выполняющее неразрушающий счет частиц $n < N = 2^K$ в потоке, проходящем по квантовой проволоке. Этот алгоритм оказывается аналогичным алгоритму оценки фазы в обращенном виде: вместо того, чтобы определять фазу ϕ при помощи N операций, фаза ϕ считается известной, а мы стремимся найти число N операций, ассоциированных с прохождением частиц. Схема содержит условные измерения, когда j-ое измерение зависит от результатов предыду-

щих $j-1$ измерений, что напоминает двоичный граф.

6. Более простое одновременное (а не условное) измерение K кубитов позволяет выполнить проверку делимости на 2^K измеряемого числа.

7. Сформулирована и решена задача счета в терминах проблемы различимости различных квантовых состояний при однократном измерении. Такое сведение к небольшому числу основных элементов естественным образом связывает задачу счета с квантовым преобразованием Фурье и дает нам общую конструктивную схему прибора для (невозмущающего) квантового алгоритма счета.

8. Исследованы различные возможности приборной реализации этого алгоритма, обращая особое внимание на случай считающих в троичном базисе систем, использующих кутриты в качестве элементаных считающих устройств.

9. Предложен способ создания многокубитных запутанных состояний мобильных кубитов следующим образом — сначала они запутываются со спиновым счетчиком; а после проективного измерения состояний счетчика запутанное многокубитное состояние может использоваться дальше.

10. Предложен новый способ измерения напряжения при помощи одного или нескольких зарядовых кубитов. Метод позволяет достичь гейзенберговского или стандартного квантового предела в зависимости от времени измерения.

Научная и практическая ценность. Полученные в работе результаты имеют как теоретическую, так и практическую ценность. Они допускают прямую экспериментальную проверку, позволяют разрабатывать и реализовывать новые процедуры счета и измерения. Эти результаты указывают возможное направление новых исследований.

Апробация работы. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на международной Конференции «The Science of Nanostructures: New Frontiers in the Physics of Quantum Dots» в Черноголовке (2010 г.), на общемосковском семинаре в ИФП имени Капицы, на семинаре отдела теоретической физики ИФТТ, на международной Конференции «Дни Ландау 2010» в Черноголовке.

Публикации. По материалам диссертации опубликованы 3 научные работы, список которых приведен в конце реферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, двух приложений, списка иллюстраций и списка литературы.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 посвящена изучению полной статистики переноса заряда в формализме волновых пакетов. Простота формализма первичного квантования позволила получить нетривиальные результаты по полной статистике переноса для рассеивателя, зависящего от энергии, включая зависимость от обменной симметрии переносимого заряда.

В настоящей работе мы интенсивно используем формализм волновых пакетов для решения задачи транспорта зарядов и выводим различные выражения для характеристической функции $\chi_N(\lambda)$ более простым способом. Мы начинаем с N-частичного детерминанта Слэтера, который получен из ортонормированных одночастичных волновых функций ϕ_m, описывающих фермионны, падающие слева и выводим соответствующую характеристическую функцию, описывающую полную статистику переноса в виде детерминанта

$$\chi_N(\lambda) = \det\langle\phi_m|1 - \mathcal{T} + \mathcal{T}e^{i\lambda}|\phi_n\rangle, \tag{1}$$

с оператором $\mathcal{T}$, описывающим зависящее от энергии прохождение частицы через рассеиватель, $\mathcal{T} = \int(dk/2\pi)T_k|k\rangle\langle k|$ в импульсном (k) представлении (здесь число частиц N заменяет временную переменную t в исходной формуле из работы [2]). Детерминант в уравнении (1) может быть выражен в форме произведения

$$\chi_N(\lambda) = \prod_{m=1}^{N}(1 - \tau_m + \tau_m e^{i\lambda}), \tag{2}$$

где τ_m - собственные значения Эрмитова оператора $\mathcal{T}$ в пространстве, натянутом на состояния $|\phi_n\rangle$. Мы называем распределение в (2) как *‘обобщенное биномиальное’*.

В реальном эксперименте (см. рис. 1) импульсы напряжения, генерирующие входящие волновые пакеты, могут перекрываться. Для этого случая мы вновь выведем простое и элегантное выражение (2) для полной статистики переноса, но при этом коэффициенты τ_m заменяются корнями обобщенной задачи на собственные значения, которые включают все эффекты фермионной статистики и полную зависимость амплитуды прохождения (прозрачности) от энергии. Результаты (1) и (2) относятся к незапутанному состоянию в форме детерминанта Слэтера. [14] Имеет-

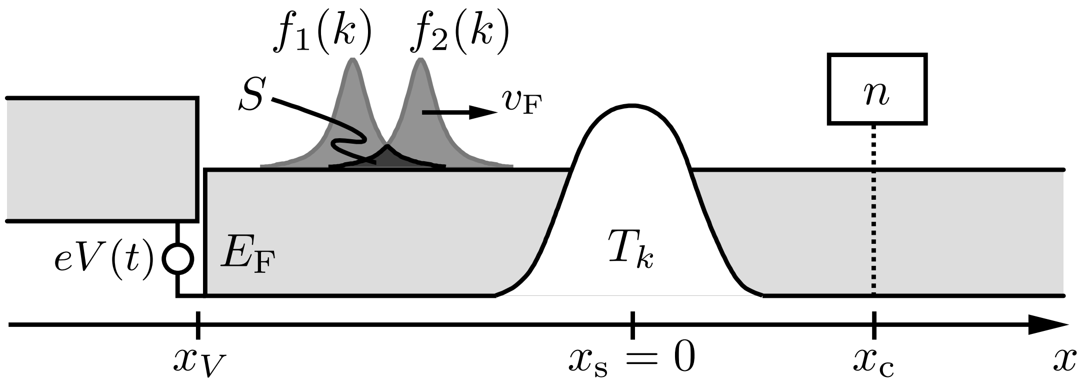

Рис. 1. Квантовый провод с рассеивающим центром, расположенным в точке x_s и имеющим зависящую от импульса вероятность прохождения T_k. Потенциал $eV(t)$, приложенный в точке x_V (слева от рассеивателя) создает входящии волновые пакеты f_1, f_2 с перекрытием $S = \langle f_2 | f_1 \rangle$. Счетчик, расположенный в точке x_c (справа от рассеивателя), измеряет число n прошедших частиц. Мы рассматриваем входящии волновые пакеты с импульсом $k > 0$, находящиеся вне Ферми моря. В результате Ферми море, которое не учитывается в нашем анализе, не возбуждено в пределе больших времен. Для конечных времен наблюдения присутствие Ферми моря создает дополнительный шум, который не рассматривается в этой работе.

ся также обобщение для запутанных состояний в форме детерминанта Слэтера ранга 2. [15]

Далее мы обобщаем результат (1), чтобы описать ситуацию, в которой и процесс рассеивания и интервал счета зависят от времени, и получаем компактный результат в форме (1) с

$$\mathcal{T} \to \mathcal{T}_Q = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{Q} \mathcal{U}, \tag{3}$$

где $\mathcal{U}$ обозначает одночастичный оператор эволюции по времени, а оператор $\mathcal{Q}$ проецирует волновую функцию на ее измеряемую часть. Полная статистика переноса для фермионных атомов в виде детерминанта была выведена в работе [16] при помощи замены бозонного выражения [17] на фермионное, недавние применения можно найти в работе [18].

Наконец, мы распространяем результат (3) на случай, когда исходное состояние состоит из некогерентной суперпозиции многих детерминантов Слэтера с различным числом частиц. В случае, когда частицы приходят только слева, мы имеем результат (1) с

$$\mathcal{T} \to \eta \mathcal{T}_Q, \tag{4}$$

где η обозначает одночастичный оператор чисел заполнения. Кроме того, детерминант в (1) должен быть взят по всему одночастичному Гильбертову пространству.

Мы широко используем эти формулы: для двухчастичной задачи мы показываем, что *i)* исходное состояние, описанное простым детерминантом Слэтера не может дать фактор Фано $F = \langle\langle n^2 \rangle\rangle / \langle n \rangle > 1 - \langle n \rangle / 2$ (т.е. шум всегда суббиномиальный, в частности также субпуассонов, отсутствует группировка); эти кумулянты получены из производящей функции $\chi(\lambda)$ при помощи $\langle\langle n^j \rangle\rangle = (-i)^j \partial_\lambda^j \log \chi|_{\lambda=0}$, *ii)* при надлежащем выборе T_k, входящее запутанное состояние может дать любую величину фактора Фано $F < 2$ и *iii)* для двух фермионов со спином 1/2 мы показываем, что простой эксперимент по рассеянию дает информацию о запутанности исходного состояния (смотри также статью [19]).

Далее мы анализируем случай N фермионов и выводим полную статистику переноса для постоянного напряжения V, обобщая таким образом исходный результат Левитова и Лесовика [2], чтобы описать транспорт с зависящей от энергии амплитудой прохождения (см. статью [20]). Наш результат,

$$\log \chi_N(\lambda) = N \frac{2\pi\hbar v_{\mathrm{F}}}{eV} \int\limits_0^{eV/\hbar v_{\mathrm{F}}} \frac{dk}{2\pi} \log(1 - T_k + T_k e^{i\lambda}), \tag{5}$$

допускает простую интерпретацию полной статистики переноса, как получаемую из переноса выведенного из равновесия моря Ферми, находящегося между энергиями E_{F} и $E_{\mathrm{F}} + eV$, где E_{F} обозначает энергию Ферми, а V - приложенное напряжение. Используя альтернативный вывод, основанный на уравнении (3), и стационарные состояния рассеяния, мы получаем статистику переноса в пределе коротких времен, затем снова получаем биномиальный результат (5) в пределе больших времен, при этом число частиц N заменяется на время измерения t, $N \to t\,eV/2\pi\hbar$. Использование нашего детерминанта вместе с теоремой Сегё [21, 22] позволяет нам представить строгий вывод этих результатов.

Далее мы даем краткий обзор предыдущей работы по этой тематике, а затем выводим характеристические функции (1) и (2) для N фермионов. В разделе **??**, мы используем эти результаты для обсуждения статистических транспортных свойств двух фермионов. Раздел **??** посвящен вычислению характеристической функции для случая постоянного напряжения, начиная с N-частичного транспорта, устремляя затем ширину индивидуальных волнлвых пакетов к бесконечности. В разделе **??**

мы выводим результаты (3) и (4), которые относятся к устройству с зависящим от времени рассеянием и счетом некогерентных суперпозиций входящих частиц. Мы еще раз выводим результат для постоянного напряжения, включая предел коротких времен.

Глава 2. В этой главе предложен эффективный алгоритм счета частиц, который требует всего ($\log_2 N$) спинов-счетчиков (кубитов).

В начале в разделах 2.1.1 и 2.1.2 изучается эффективность классического алгоритма и квантового измерения спином-кубитом. Показано,что простейшая схема, использующая спиновые счетчики для нахождения числа прошедших по проволоке частиц нуждается в проведении $\propto N^2$ измерений.

В разделе 2.1.3 строится эффективный квантовый алгоритм счета частиц, который заметно уменьшает колличество требуемых ресурсов до ($\log_2 N$). Схема реализации этого алгоритма показана на Рис. 2, где $n < N = 2^K$ частиц, которые необходимо сосчитать, пролетают в квантовой проволоке вдоль оси x.

Первоначально все K спинов или кубитов (мы используем эти термины как синонимы, см. обзор [5]) поляризованы вдоль положительного направления оси y, то есть начальные состояния записываются как: $|+y\rangle_j = [|\uparrow\rangle_j + i|\downarrow\rangle_j]/\sqrt{2}$, $j = 1, \ldots, K$. Мы используем состояния спина, поляризованные вдоль оси z, как наш вычислительный базис $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ и $|\downarrow\rangle \leftrightarrow -i|1\rangle$.

Взаимодействие между заряженной частицей и спином такое, что пролет частицы поворачивает спины в x-y плоскости. Сила взаимодействия спинов с проволокой выбирается так, чтобы j-й спин вращался (против часовой стрелки) на угол $\phi_j = 2\pi/2^j$ (вращение оператором $\mathsf{U}_z(\phi_j) = \exp(-i\phi_j\sigma_z/2)$, где σ_z - матрица Паули). Тогда пролет n ча-

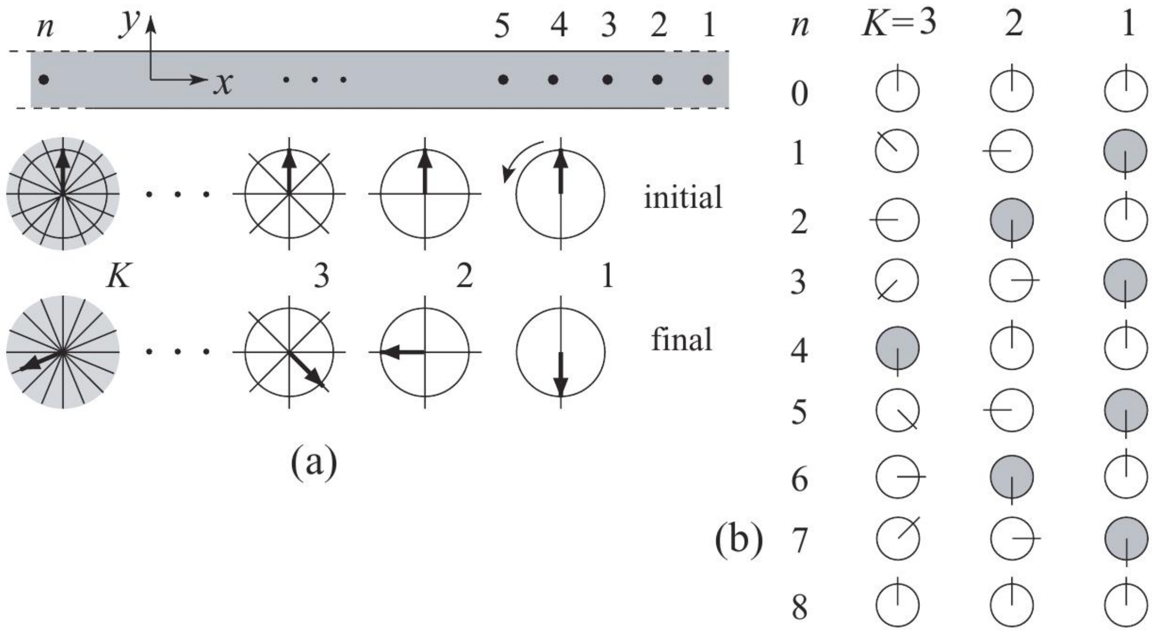

Рис. 2. Иллюстрация квантового алгоритма счета и записи числа частиц n в двоичной форме. (a) Первоначально все спины поляризованны в $+y$ направлении. После пролета одной частицы j-й спин поворачивается (против часовой стрелке) на угол $\phi_j = 2\pi/2^j$. После пролета всех частиц первый спин измеряется вдоль оси y, это дает нам четность числа и цифру двоичной записи. В зависимости от четности, второй спин измеряется вдоль оси y (четное число) или оси $-x$ (нечетное число); если в результате измерения получен спин вдоль (или в противоположном направлении) оси, то мы получаем вторую двоичную цифру 0 (1). Дальнейшие шаги делаются аналогично (см. текст). На рисунке показана ситуация после пролета 5 частиц при наличии $K = 3$ кубитов. (b) Проверка делимости: состояния кубитов после прохождения $n = 0, \ldots, 8$ частиц для $K = 3$. При $n = 1, \ldots, 7$ имеется в точности один кубит, направленный вниз (в конце процедуры) в состоянии $|\downarrow\rangle$ (затемнено), сигнализируя, что число частиц n не делится на $2^3 = 8$.

стиц поворачивает j-й спин на угол $n\phi_j$ и переводит его в состояние $[|\uparrow\rangle_j + i\exp(2\pi i\, n/2^j)|\downarrow\rangle_j]/\sqrt{2}$, где мы отбросили общую фазу $\exp(-\pi i\, n/2^j)$. Состояние всей системы кубитов может быть записано следующим образом:

$$|\Psi_n\rangle_Q \;=\; \prod_{j=1}^{K} \frac{|\uparrow\rangle_j + i\exp(2\pi i\, n\, 2^{K-j}/2^K)|\downarrow\rangle_j}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

Использование упрощенного варианта квантового алгоритма позволяет определить степень двойки в разложении числа на простые множители. Эта процедура рассмотрена в разделе 2.1.4.

Различные возможные реализации кубитов и их свойства представлены в разделе 2.2. Рассмотрена возможность реализовать зарядовый кубит при помощи заряженной частицы в двойной квантовой точке и предложены способы управления такими кубитами.

Глава 3. В этой главе сформулирована и решена задача счета в терминах проблемы различимости различных квантовых состояний при однократном измерении.

В разделе 3.1 проблема квантового счета сведена к задаче различения квантовых состояний. Процесс счета частиц естественным образом разбивается на три шага. Первый шаг - процедура приготовления считающего устройства (счетчика) в начальном состоянии. На втором шаге пролетающие частицы взаимодействуют со счетчиком, изменяя его состояние. Третий шаг - это процесс считывания полученной информации, то есть получения числа пролетевших частиц. Такая разбивка процесса счета приводит к определению двух базисов в Гильбертовом пространстве состояний считающего устройства. Один базис (вычислительный базис) определяется процессом конечного измерения (шаг три), а второй (базис счета) возникает непосредственно в процессе счета (шаг два). Если мы хотим иметь "мягкую"невозмущающую процедуру счета, то эти два базиса должны быть связаны обобщенным квантовым преобразованием Фурье.

В процессе счета частица взаимодействует со счетчиком. В результате начальное состояние $|\Psi_0\rangle$ счетчика после прохождения n объектов переходит в конечное состояние $|\Psi_n\rangle$. Для описания пролета одной частицы определяем унитарный оператор C_1

$$|\Psi_1\rangle = \mathsf{C}_1|\Psi_0\rangle. \tag{7}$$

Оператор C_1 определяется гамильтонианом взаимодействия частицы и счетчика. Простое повторение действия оператора C_1 n раз дает состояние

$$|\Psi_n\rangle = \mathsf{C}_1^n|\Psi_0\rangle \equiv \mathsf{C}_n|\Psi_0\rangle \tag{8}$$

возникающее после пролета n частиц.

Нам требуется, чтобы мы могли отличить состояния $|\Psi_n\rangle$ от состояния $|\Psi_0\rangle$ в процессе однократного измерения, следовательно, эти состояния должны быть ортогональными $\langle\Psi_n|\Psi_0\rangle = 0$. Отсюда следует, что все состояния $|\Psi_n\rangle$ являются ортогональными и различимыми в процессе однократного измерения. Таким образом, (минимальная) вспомогательная система, осуществляющая счет частиц (по модулю N), описывается N-мерным Гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ с ортонормированным базисом (базис счета) $|\Psi_n\rangle \in \mathcal{H}$, $n = 0, \ldots, N-1$ и $\langle\Psi_l|\Psi_n\rangle = \delta_{ln}$. В этом базисе оператор счета C_1 имеет вид

$$\mathsf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Собственные значения C_1 равны корням N-й степени из единицы, то есть $\lambda_k = \exp(2\pi i k/N)$, а собственные вектора $|k\rangle$ связаны квантовым преобразованием Фурье с базисом счета

$$|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i\, kn/N} |k\rangle = \mathsf{F}(|n\rangle). \tag{10}$$

В процессе счета собственные состояния $|k\rangle$ оператора C_1 умножаются на фазовые множители, причем соотвествующие фазы равномерно распределены по единичной окружности в комплексной плоскости. Это означает, что гамильтониан взаимодействия частицы и счетчика $\mathsf{H}_{\rm int}$ должен иметь эквидистантный спектр. Следовательно, если мы выберем в качестве нашего вычислительного базиса набор ортонормальных собственных состояний $\{|k\rangle\}_{k=0}^{N-1}$ оператора C_1, то процесс счета может быть реализован "мягким"образом, добавлением фаз к состояниям вычислительного базиса (заметим, что эти состояния являются как раз теми состояниями, над которыми будет производиться окончательное проективное измерение). В то же время базис счета, вектора которого связаны между собой оператором C_1, сформирован из состояний $|\Psi_n\rangle = \mathsf{F}(|n\rangle)$, каждое из которых является квантовым преобразованием Фурье собственного состояния $|n\rangle$.

Для осуществления процедуры счета необходимо на первом шаге перевести считающее устройство из полуклассического состояния $|0\rangle$ в состояние $|\Psi_0\rangle = \mathsf{F}(|0\rangle)$. Для этого нам необходим набор физических процедур, которые описываются унитарным оператором (оператор приготовления) U_p. Заметим, что наш оператор приготовления U_p может не действовать как преобразование Фурье на другие базисные состояния, а является простейшим оператором, который переводит состояние $|0\rangle$ в состояние $|\Psi_0\rangle$).

На втором шаге пролетающие частицы взаимодействуют со счетчи-

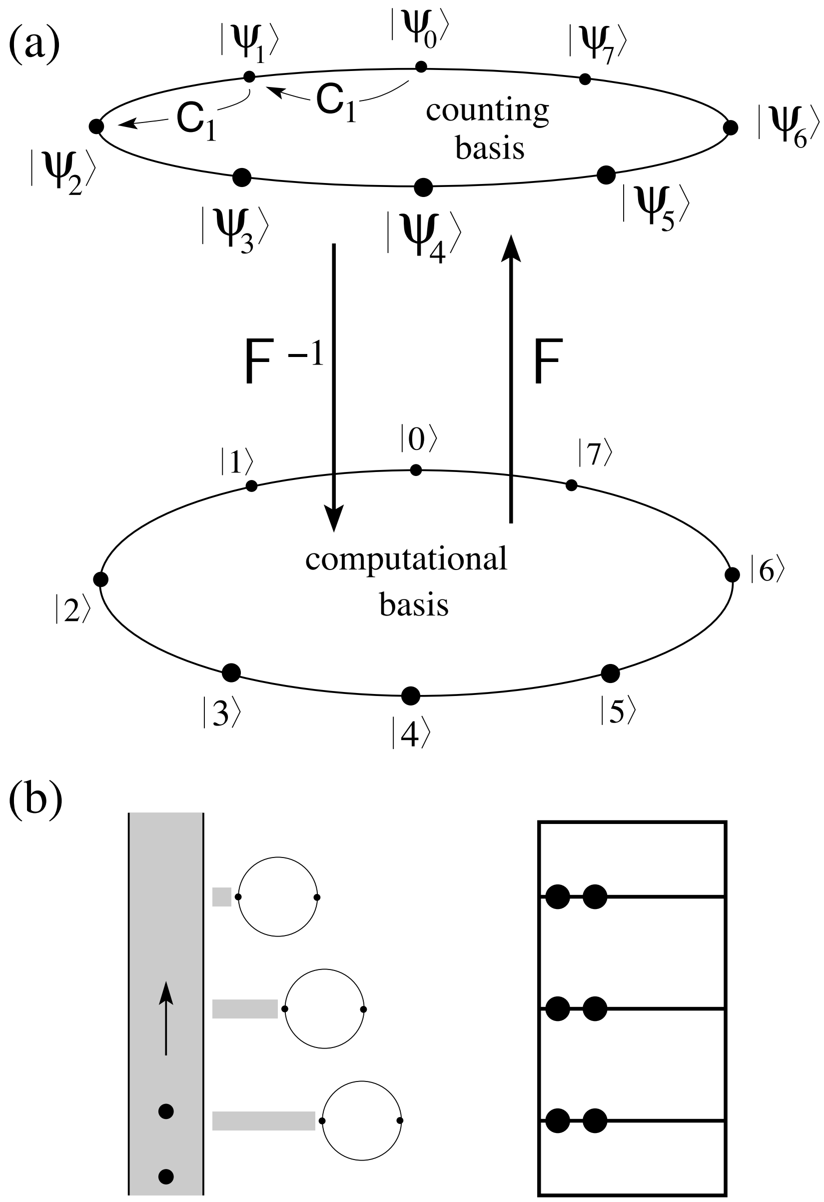

Рис. 3. (a) Процесс счета на примере $N = 8$ (кудит с $d = N = 8$). Квазиклассические состояния $|k\rangle$, $k = 0, \ldots, N-1$ образуют вычислительный базис; их образы Фурье $|\Psi_n\rangle$ задают базис счета. При пересчете одной частицы оператор C_1 переводит одну моду Фурье $|\Psi_n\rangle$ в следующую $|\Psi_{n+1}\rangle$. (b) Эмуляция $N = 8$ кудита тремя кубитами, которые выполняют квантовый счет с $d = 2$ и $K = 3$ (слева), и соответствующие классические счеты (справа).

ком, изменяя его состояние. Этот процесс можно представить в виде перехода между расположенными по кругу состояниями счета $|\Psi_n\rangle$ под действием оператора C_1, преобразующего одно состояние в следующее, см. Рис. 3(a). Состояния $|n\rangle$ меняют только фазы; эти состояния образуют наш вычислительный базис, в котором мы делаем финальные измерения. Следовательно необходимо сделать обратное преобразование Фурье, переводящее состояния $|\Psi_n\rangle$ в $|n\rangle$

До сих пор вычислительные состояния $|n\rangle$ выбирались тривиальным образом без какой-нибудь дополнительной структуры. "Мягкая"реализация процесса счета требует N квазиклассических состояний $|n\rangle$, как, например, заряженная частица в N-ямном потенциале. В разделе 3.2 расматривается лополнительнаяя стректура (квантовые счеты), которая может заметно упростить конструкцию счетчика. Счетчик разбивается на K одинаковых подсистем, каждая из которых реализует d квазиклассических состояний (кудит). Такая система имеет d^K квазиклассических состояний и позволяет считать до $N = d^K$. Первая подсистема считает частицы по модулю d, вторая группы из d частиц, третья группы из d^2 частиц и т.д., см. Рис. 3(a). Эффективность такого алгоритма возрастает с линейного по N до логарифмического по N. Такая процедура реализует счет по основанию d и обобщает двоичный алгоритм.

Роль произвольных фаз в определении собственных состояний оператора счета и связь обобщенного и канонического преобразований Фурье рассмотрены в разделе 3.3

Глава 4. В этой главе рассматриваются различные обобщения двоичного алгоритма на случай счета по другому основанию, обращая особое внимание на случай считающих в троичном базисе систем, использующих кутриты в качестве элементарных считающих устройств.

В разделе 4.1 детально обсуждается алгоритм двоичного счета с точки зрения общей теории квантового счета и его связь с квантовым преобразованием Фурье.

В разделе 4.2 рассмотрены возможность реализации кубитов и кутритов заряженной частицей в многоямном потенциале и способы управления их состояниями. Кубит (кутрит) управляется при помощи импульса напряжения V_{a}, который опускает барьер между ямами и изменяет амплитуды в состоянии кубита, или импульса напряжения V_{φ}, который опускает (поднимает) уровень дна ямы и изменяет фазы в состоянии кубита (аналогично для кутритов). Эти операции позволяют создать любой унитарный оператор. Все операторы, которые нужны для реализации алгоритма счета, получены в этом разделе. В конце раздела получен алгоритм счета по основанию 3 и счет степеней 3 при помощи кутритов.

В разделе 4.3 рассмотрен случай произвольного d. Показано, что любой унитарный оператор U может быть реализован при помощи d^2 элементарных операций (фазовых и амплитудных).

В разделе 4.4 обсудаются различные возможности других реализаций кутритов: систему со спином 1, служащую скорее мысленным экспериментом для иллюстрации, и две практические версии эмуляции кутритов кубитами. Вычисления необходимых операторов приведены в приложении Б.

Глава 5. В этой главе устанавливается связь между квантовым алгоритмом счета и алгоритмом оценки фазы (АОФ), а также обсуждаются различные приложения.

В разделе 5.1 обсуждается соответствие между алгоритмом счета и алгоритмом оценки фазы (насколько известно, не существует аналогичного соответствия для алгоритма проверки делимости). Эта аналогия позволяет воспользоваться преимуществами АОФ: если мы хотим измерить фазу φ в задаче оценки фазы с точностью $1/2^A$ (т.е. закодировать φ A битами) и быть уверенными в результате нашего измерения с вероятностью, по меньшей мере, $P = 1 - \epsilon$, то наше устройство должно содержать $K = A + \lceil \log_2(2 + 1/2\epsilon) \rceil$ кубитов.

Этот результат может быть применен к нашему алгоритму счета. Рассмотрим случай прохождения нецелого числа $x = n + \delta n$ через счетчик, где n - целое и $0 < \delta n < 1$ - действительное число. Такая ситуация может возникнуть, если взаимодействие между частицами и кубитами останется конечным в момент старта процедуры считывания, что соответствует прохождению части полного заряда. Благодаря реализации полного квантового обратного преобразования Фурье, АОФ дает возможность измерить число с любой желаемой точностью. Например, если мы хотим измерить число $n < N = 2^K$ так, чтобы $|n_{\text{meas}} - x| < 1/2$ с вероятностью $P = 1 - 2^{-r}$, нам необходимо иметь возможность различать дробные заряды $\delta n \sim 2^{-r} \ll 1$, для чего мы должны использовать дополнительные кубиты для измерения половины заряда (поворачивающиеся на 2π при прохождении одной частицы), четверти заряда (поворот на 4π), и т.д. В результате устройство должно содержать $\approx K + \log_2(1/2^{-r}) = K + r$ кубитов. Этот результат может быть распространен на кудиты: точность $P = 1 - d^{-r}$ обеспечивается $\approx K + \log_d(1/d^{-r}) = K + r$ кудитами. Следовательно, мы можем использовать дополнительные кудиты для получения правильного численного результата с высокой вероятностью.

В конце этого раздела показано, что полуклассическое и полное квантовое преобразования Фурье одинаково устойчивы относительно систематических ошибок, появляющихся при неполном (нецелом) счете. Более того, полуклассический алгоритм довольно устойчив относительно случайных ошибок; с последними можно справиться при помощи классической многокубитной схемы коррекции ошибок.

Используя возможность точного измерения нецелых чисел, в разделе 5.2 рассматривается возможность создания квантового вольтметра (аналого-цифрового преобразователя). Этот прибор можно реализовать, используя один кубит.

Схема для создания многочастичных запутанных состояний в интерферометре Маха-Цендера обсуждается в разделе 5.3.

В **Заключении** сформулированы основные результаты работы.

Список публикаций

1. *Hassler F., Suslov M. V., Graf G. M., Lebedev M. V., Lesovik G. B., Blatter G.* Wave-packet formalism of full counting statistics // *Phys. Rev. B.* — 2008. — October. — Vol. 78, no. 16. — P. 165330.

2. *Lesovik G. B., Suslov M. V., Blatter G.* Quantum counting algorithm and its application in mesoscopic physics // *Phys. Rev. A.* — 2010. — July. — Vol. 82, no. 1. — P. 012316.

3. *Suslov M. V., Lesovik G. B., Blatter G.* Quantum abacus for counting and factorizing numbers // *Phys. Rev. A.* — 2011. — May. — Vol. 83, no. 5. — P. 052317.

Литература

[1] P. Shor, in *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, edited by S. Goldwasser (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1994), pp. 124-134; SIAM J. Sci. Stat. Comput. **26**, 1484 (1997); SIAM Rev. **41**, 303 (1999).

[2] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, JETP Lett. **58**, 230 (1993).

[3] L.S. Levitov, H.W. Lee, and G.B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).

[4] Yu.V. Nazarov, ed., *Quantum Noise in Mesoscopic Physics* (Kluwer Academic Publishers, 2003).

[5] G.B. Lesovik, F. Hassler, and G. Blatter, Phys. Rev. Lett. **96**, 106801 (2006).

[6] A. Peres, Phys. Rev. A **30**, 1610 (1984).

[7] Th. Martin and R. Landauer, Phys. Rev. B **45**, 1742 (1992).

[8] H. Lee and L.S. Levitov, cond-mat/9507011 (1995).

[9] D.A. Ivanov, H. Lee, and L.S. Levitov, Phys. Rev. B **56**, 6839 (1997).

[10] A.V. Lebedev, G.B. Lesovik, and G. Blatter, Phys. Rev. B **72**, 245314 (2005).

[11] J. Keeling, I. Klich, and L.S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **97**, 116403 (2006).

[12] G. Fève, A. Mahé, J.-M. Berroir, T. Kontos, B. Plaçais, D.C. Glattli, A. Cavanna, B. Etienne, and Y. Jin, Science **316**, 1169 (2007).

[13] F. Hassler, G.B. Lesovik, and G. Blatter, Phys. Rev. Lett. **99**, 076804 (2007).

[14] We use the term 'entangled-state' for indistinguishable particles in the sense of J. Schliemann, J.I. Cirac, M. Kuś, M. Lewenstein, and D. Loss, Physical Review A **64**, 022303 (2001).

[15] F. Taddei and R. Fazio, Phys. Rev. B **65**, 075317 (2002).

[16] K.E. Cahill and R.J. Glauber, Phys. Rev. A **59**, 1538 (1999). Cahill *et al.* denote their generating function (generating counting probabilities upon taking derivatives) by $\mathcal{Q}(\lambda)$ where their λ is equivalent to $1 - e^{i\lambda}$ in our article.

[17] R.J. Glauber, in *Quantum Optics and Electronics*, edited by C. DeWitt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York, 1965).

[18] S. Braungardt, A. Sen(De), U. Sen, R.J. Glauber, and M. Lewenstein, arXiv:0802.4276 (2008).

[19] G. Burkard, D. Loss, and E.V. Sukhorukov, Phys. Rev. B **61**, R16303 (2000).

[20] K. Schönhammer, Phys. Rev. B **75**, 205329 (2007).

[21] G. Szegő, Math. Ann. **76**, 490 (1915).

[22] G. Szegő, Comm. Sém. Math. Univ. Lund pp. 228–238 (1952).

[23] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, JETP Lett. **55**, 555 (1992).

[24] G.B. Lesovik and N.M. Chtchelkatchev, JETP Lett. **77**, 393 (2003).

[25] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, cond-mat/9401004 (1994).

[26] I. Neder and F. Marquardt, New J. Phys. **9**, 112 (2007).

[27] D.V. Averin and E.V. Sukhorukov, Phys. Rev. Lett. **95**, 126803 (2005).

[28] B.A. Muzykantskii and Y. Adamov, Phys. Rev. B **68**, 155304 (2003).

[29] A. Shelankov and J. Rammer, Europhys. Lett. **63**, 485 (2003).

[30] J.E. Avron, S. Bachmann, G.M. Graf, and I. Klich, Commun. Math. Phys. **280**, 807 (2008).

[31] C.C.J. Roothaan, Rev. Mod. Phys. **23**, 69 (1951).

[32] In condensed matter theory this statement is made use of in the Bogoliubov-Valatin transformation where the quadratic Hamiltonian is diagonalized while keeping the commutation relations invariant.

[33] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, 4th edition (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993).

[34] M.V. Lebedev, A.A. Shchekin, and O.V. Misochko, Quantum Electron. **38**, 710 (2008).

[35] A.G. Abanov and D.A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **100**, 086602 (2008).

[36] M.J.M. de Jong and C.W.J. Beenakker, Phys. Rev. B **49**, 16070 (1994).

[37] F. Bodoky, W. Belzig, and C. Bruder, Phys. Rev. B **77**, 035302 (2008).

[38] We assume that the Hamilton operators $\mathcal{H}(t)$ and $\mathcal{H}(t')$ for different times $t \neq t'$ commute. Otherwise a time-ordering operator has to be introduced.

[39] I. Klich, in Ref. [4].

[40] B.A. Muzykantskii and D.E. Khmelnitskii, Phys. Rev. B **50**, 3982 (1994).

[41] Yu.V. Nazarov and D.A. Bagrets, Phys. Rev. Lett. **88**, 196801 (2002).

[42] S. Pilgram and M. Büttiker, Phys. Rev. B **67**, 235308 (2003).

[43] R.J. Brown, M.J. Kelly, M. Pepper, H. Ahmed, D.G. Hasko, D.C. Peacock, J.E.F. Frost, D.A. Ritchie, and G.A.C. Jone, J. Phys.: Condens. Matter **1**, 6285 (1989).

[44] E.L. Basor, Indiana Univ. Math. J. **28**, 975 (1979).

[45] W. Schottky, Ann. Phys. (Leipzig) **57**, 541 (1918).

[46] B. Simon, in *Geometry, Spectral Theory, Groups, and Dynamics*, vol. 387 of *Contemporary Mathematics*, pp. 253–275 (American Mathematical Society, Providence, 2005).

[47] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).

[48] L.K. Grover, Proceedings of the 28-th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, (May 1996) p. 212.

[49] P. Shor, Proceedings of the 35-th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, NM (1994) and SIAM, J. Sci. Statist. Comput. **26** 1484 (1997).

[50] C.H. Bennett and G. Brassard, Proceedings IEEE Int. Conf. on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India (IEEE, New York, 1984), p. 175.

[51] D. Stucki, N. Gisin, O. Guinnard, G. Ribordy, and H. Zbinden, New Journal of Physics **4**, 41.1 (2002); see also www.idquantique.com.

[52] M. Dobsicek, G. Johansson, V. Shumeiko, and G. Wendin, Phys. Rev. A **76**, 030306 (2007).

[53] A.Y. Kitaev, Russ. Math. Surv. **52**, 1191 (1997).

[54] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello, and M. Mosca, Proc. R. Soc. Lond. A **454**, 339 (1998).

[55] E. Andersson and D.K.L. Oi, Phys. Rev. A **77**, 052104 (2008).

[56] E. Buks, R. Schuster, M. Heiblum, D. Mahalu, and V. Umansky, Nature **391**, 871 (1998).

[57] A.I. Baz', Sov. J. Nucl. Phys. **4**, 182 (1967).

[58] V.F. Rybachenko, Sov. J. Nucl. Phys. **5**, 635 (1967).

[59] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, cond-mat/9401004 (1994); L.S. Levitov, H.W. Lee, and G.B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).

[60] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J.-M. Raimond, and N. Zagury, Phys. Rev. Lett. **65**, 976 (1990).

[61] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, Nature **448**, 889 (2007).

[62] W.K. Wootters and W.H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).

[63] D. Dieks, Physics Letters A **92**, 271 (1982).

[64] T. Hayashi, T. Fujisawa, H.D. Cheong, Y.H. Jeong, and Y. Hirayama, Phys. Rev. Lett. **91**, 226804 (2003).

[65] J.R. Petta, A.C. Johnson, C.M. Marcus, M.P. Hanson, and A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **93**, 186802 (2004).

[66] J. Gorman, D.G. Hasko, and D.A. Williams, Phys. Rev. Lett. **95**, 090502 (2005); see also the comment/reply in *ibid* **97**, 208901 (2006).

[67] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, M.H. Devoret, Science **296**, 886 (2002).

[68] J. Koch, T.M. Yu, J. Gambetta, A.A. Houck, D.I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M.H. Devoret, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, Phys. Rev. A **76**, 042319 (2007).

[69] J.A. Schreier, A.A. Houck, J. Koch, D.I. Schuster, B.R. Johnson, J.M. Chow, J.M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M.H. Devoret, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, Phys. Rev. B **77**, 180502 (2008).

[70] Alexandre Blais, private communication.

[71] L.S. Levitov, H.W. Lee, and G.B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).

[72] J. Keeling, I. Klich, and L.S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **97**, 116403 (2006).

[73] G. Fève, A. Mahé, J.-M. Berroir, T. Kontos, B. Plaçais, D.C. Glattli, A. Cavanna, B. Etienne, anf Y. Jin, Science **316**, 1169 (2007).

[74] I. Snyman and Y.V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **99**, 096802 (2007).

[75] B.-G. Englert, Phys. Rev. Lett. **77**, 2154 (1996).

[76] B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. A **46**, 2229 (1992).

[77] P. Samuelsson, E.V. Sukhorukov, and M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **92**, 026805 (2004).

[78] I. Neder, N. Ofek, Y. Chung, M. Heiblum, D. Mahalu, and V. Umansky, Nature **448**, 333 (2007).

[79] R. Ruskov and A.N. Korotkov, Phys. Rev. B **67**, 241305 (2003).

[80] B. Trauzettel, A.N. Jordan, C.W.J. Beenakker, and M. Büttiker, Phys. Rev. B **73**, 235331 (2006).

[81] S. Bose and D. Hume, Phys. Rev. Lett. **88**, 050401 (2002).

[82] C.W.J. Beenakker, D.P. DiVincenzo, C. Emary, and M. Kindermann, Phys. Rev. Lett. **93**, 020501 (2004).

[83] D.M. Greenberger, M.A. Horne, and A. Zeilinger, in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, M. Kafatos (Ed.) (Kluwer, Dordrecht, 1989), 69-72; see also arXiv:0712.0921v1.

[84] R.H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).

[85] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).

[86] S. Bose and D. Home, Phys. Rev. Lett. **88**, 050401 (2002).

[87] G.B. Lesovik, M.V. Suslov, and G. Blatter, Phys. Rev. A **82**, 012316 (2010).

[88] C. D'Helon and G.J. Milburn, Phys. Rev. A **54**, 5141 (1996).

[89] S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simovic, R. Schleser, T. Ihn, P. Studerus, K. Ensslin, D.C. Driscoll, and A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **96**, 076605 (2006).

[90] R.B. Griffiths and C.-S. Niu, Phys. Rev. Lett. **76**, 3228 (1996).

[91] A.Y. Kitaev, quant-phys/9511026, 1995 and Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC) TR96-003.

[92] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello, M. Mosca, Proc. R. Soc. Lond. A, **454**, 339 (1998).

[93] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, Phys. Rev. Lett. **96**, 010401 (2006).