

На правах рукописи

Белан Сергей Александрович

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ
ИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ В
НЕОДНОРОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ
ТЕЧЕНИЯХ**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Долгопрудный — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Научный руководитель: **Лебедев Владимир Валентинович**,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН.

Официальные оппоненты: **Виноградова Ольга Игоревна**,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН,
заведующая лабораторией.

Сиковский Дмитрий Филиппович,
кандидат физико-математических наук,
ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,
старший научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБУН Институт физики твердого тела РАН

Защита состоится «___» _____ 2016 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, проспект Академика Семенова, д. 1-А, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН и на сайте www.itp.ac.ru.

Автореферат разослан «___» _____ 2016 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 002.207.01, д-р физ.-мат. наук

Гриневич П.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теоретическое исследование, представленное в этой диссертационной работе, относится к области статистической гидродинамики. А именно, в рамках статистического подхода рассматривается динамика инерционных частиц, помещенных в турбулентную жидкость или газ. Эта проблема представляет как фундаментальный, так и прикладной интерес, поскольку практически все окружающие нас гидродинамические течения турбулентны и содержат примесную фазу. Пыль и аэрозоли в атмосфере, капли воды в облаках, микроорганизмы в океане, порошки в химических реакторах, частицы пыли в протопланетных газопылевых облаках - все это примеры турбулентных потоков с примесными частицами. Понимание процессов турбулентного транспорта частиц, таким образом, важно для многих областей от экологии до астрофизики.

В фокусе внимания этой диссертационной работы динамика частиц в пространственно-неоднородных турбулентных течениях. Говоря о неоднородности мы будем иметь в виду ситуацию, когда интенсивность турбулентных флуктуаций скорости в однородной по своим физическим свойствам жидкости по той или иной причине зависит от координаты. На практике такая ситуация является скорее правилом чем исключением, неизбежно реализуясь в присутствии границ и/или вследствие неоднородности накачивающих сил.

Степень разработанности темы. Хотя динамика инерционных частиц в неоднородной турбулентности привлекает внимание исследователей уже достаточно долгое время, область применимости существующих аналитических результатов ограничена пределом относительно малой инерции или слабой неоднородности. Физически это означает, что характерная длина свободного пробега частицы, определенная как произведение ее характерной скорости на стоксово время релаксации, много меньше масштаба неоднородности. В этом случае оправданно локально-равновесное приближение и на достаточно больших временах оказывается возможным исключить скорость из кинетического уравнения для функции распределения частиц по скоростям и координатам, перейдя к градиентному транспортному уравнению, описывающему пространственный перенос концентрации частиц [1–3]. В выражении для потока частиц при этом возникает специфический член, пропорциональный градиенту коэффициента турбулентной диффузии и направленный в

сторону уменьшения интенсивности турбулентности. Это – так называемый турбофорический дрейф или просто турбофорез, который ведет к аккумуляции частиц в областях с пониженной интенсивностью турбулентных пульсаций. Своим названием турбофорез обязан известному со времен Максвелла термофорическому эффекту [4], характерному для броуновского движения в среде с неоднородной температурой. В то время как термофорез может быть, в принципе, любого знака, о турбофорезе с момента появления самого этого термина более сорока лет назад принято думать, что он направлен всегда в сторону минимума турбулентности.

В общем случае, когда длина свободного пробега частицы одного порядка или много больше масштаба неоднородности, приближение локального равновесия теряет свою применимость. Это влечет за собой невозможность замкнутого описания турбулентного транспорта примесной фазы в терминах концентрации частиц. Какие-либо строгие аналитические результаты, относящиеся к ситуации далекой от локального равновесия, в известной нам литературе отсутствуют.

Естественным примером неоднородного турбулентного течения является пристенная область развитой гидродинамической турбулентности. При рассмотрении динамики частиц в пристенной области возникает дополнительная сложность, связанная с тем, что необходимо принимать во внимание взаимодействие частиц со стенкой. Это взаимодействие диссипативное и может быть параметризовано через некоторый эффективный коэффициент восстановления скорости, представляющий собой меру неупругости столкновений частиц со стенкой [5]. Никаких аналитических результатов, касающихся случая неупругих соударений, на данный момент нет.

Особый практический интерес представляет исследование процессов турбулентного транспорта частиц в приземном слое атмосферы. Понятно, что ситуация крайне неоднородна и анизотропна, поскольку вблизи земной поверхности и средняя скорость ветра и коэффициенты турбулентной диффузии существенно зависят от высоты [6]. Большинство имеющихся на данный момент теоретических работ по этой теме посвящены стационарным профилям концентрации [7–11], возникающим в присутствии постоянных источников частиц, в то время как о нестационарных процессах переноса известно очень мало.

Целью исследования было последовательное статистическое описание турбулентного транспорта инерционных частиц в неоднородных течениях в том числе за рамками локально-равновесного приближения и с учетом диссипативного взаимодействия частиц с ограничивающей поток стенкой, а также описание нестационарных процессов рассеяния и осаждения тяжелых частиц в приземном атмосферном слое.

Теоретическая и практическая значимость. Развитые в диссертации теоретические методы могут быть использованы для описания широкого круга транспортных явлений в средах с пространственно-неоднородной статистикой случайных сил. Предсказанные переходы локализация-делокализация могут найти применение в технологиях сегрегации частиц.

Методология и методы исследования. Анализ движения частиц в турбулентных течениях сопряжен с существенными техническими трудностями. Строгое рассмотрение требует согласованного решения уравнений динамики частиц и жидкости с учетом воздействия турбулентных флуктуаций на движение частиц, их обратного влияния на поток, а также взаимодействия частиц друг с другом. Здесь полезно вспомнить, что на данный момент не известно ни одного точного аналитического решения уравнений гидродинамики, соответствующего турбулентному состоянию сплошной среды, не говоря уже об учете примесей. В виду этих сложностей, настоящее исследование опирается на идеализированные статистические модели, в которых сила, приложенная к частице со стороны жидкости, принимается равной силе стокового трения, а турбулентность заменяется некоторым флуктуирующим во времени полем скорости с известной статистикой. Такой подход подразумевает, во-первых, что размеры частиц очень малы, а их плотность очень велика в сравнении с плотностью окружающей жидкости. Во-вторых, концентрация примесной фазы должны быть достаточно низкой, чтобы можно было не принимать во внимание обратное влияние частиц на движение жидкости и межчастичное взаимодействие. Последние годы показали, что подобные статистические модели правильно отображают многие важные аспекты динамики частиц в реальных турбулентных потоках, наблюдаемые в экспериментах и численных симмуляциях [12–14].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Диффузионные частицы ($\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$) в вязком пограничном подслое турбулентного течения претерпевают переход локализация-делокализация при изменении числа Стокса: легкие частицы выносятся из пристенной области, в то время как достаточно тяжелые частицы скапливаются вблизи стенки.
2. Сильно инерционные частицы ($\sqrt{\text{St}} \gg 1$) в вязком подслое претерпевают переход локализация-делокализация в зависимости от коэффициента восстановления скорости β , характеризующего степень неупругости столкновений со стенкой: частицы покидают пристенную область, если $\beta > \beta_c$, и скапливаются вблизи стенки, если $\beta < \beta_c$, где $\beta_c = \exp(-\pi/\sqrt{3}) \approx 0,163$.
3. Критическое значение коэффициента восстановления скорости β_c , контролирующее переход локализация-делокализация для инерционных частиц в пристенной области коротко-коррелированного во времени случайного течения, универсально для моделей, где коэффициент турбулентной диффузии растет быстрее чем квадрат расстояния до стенки.
4. Инерционные частицы в окрестности глубокого одномерного минимума коротко-коррелированной во времени турбулентности претерпевают переход локализация-делокализация при изменении безразмерного параметра инерции I . Получена также точная фазовая диаграмма в плоскости $\beta - I$ для модели с неупругими отражениями от стенки в минимуме.
5. В рамках модели турбулентной диффузии для частиц в приземном слое атмосферы найдено, по какому закону количество примеси в воздухе убывает во времени благодаря осаждению на земную поверхность и как ведет себя результирующая поверхностная плотность осажденного материала в подветренном направлении.

Апробация работы. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на международной конференции Turbulence and Amorphous Materials (Израиль), на международной конференции Landau Days 2015 (г. Черногоровка), а также на семинарах в ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН (г. Черногоровка), в Научном Институте им. Вейцмана (Из-

раиль) в Институте Гётеборга (Швеция) и в Лос-Аламосской Национальной Лаборатории (США).

Личный вклад. Все теоретические результаты, изложенные в данной диссертации, получены лично автором либо при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты работы изложены в 6 публикациях, список которых приведен в конце реферата.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследования, проводимого в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется ряд вопросов, не получивших достаточное освещение к настоящему моменту и на разрешение которых направлено исследование, сформулированы научная новизна и практическая значимость представленной работы.

Первая глава, материалом для которой послужили работы [15; 16], посвящена рассмотрению инерционных частиц в вязком пограничном подслое несжимаемой турбулентной жидкости. В ней сперва обсуждаются свойства вязкого подслоя, а затем вводится уравнение движения частицы

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}(t), t)}{\tau}, \quad (1)$$

где \vec{r} это координата частицы, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ - ее скорость, а $\tau = d^2\rho_0/18\nu\rho$ - стоксово время релаксации. Это уравнение предполагает, что размер частицы d намного меньше ширины вязкого подслоя L , а ее плотность ρ_0 много больше плотности жидкости ρ . Кроме того, число Рейнольдса $Re = Vd/\nu$, посчитанное через характерную скорость V движения частицы относительно жидкости с вязкостью ν , должно быть мало.

Мы считаем, что столкновения частицы со стенкой, совпадающей с плоскостью $z = 0$ декартовой системы координат, частично неупругие. В момент столкновения нормальная компонента скорости частицы моментально меняет свой знак на противоположный, а модуль скорости домножается на

некоторое положительное число, не превосходящее единицу, то есть

$$v_z \rightarrow -\beta v_z, \text{ где } 0 < \beta \leq 1. \quad (2)$$

Связывая между собой значения скорости частицы за мгновение до и сразу после столкновения, коэффициент β , называемый обычно коэффициентом восстановления скорости, характеризует степень диссипативности взаимодействия частицы со стенкой. Строго говоря, коэффициент восстановления β есть функция скорости частицы в момент столкновения. Более того, неизбежная шероховатость поверхностей частицы и стенки приводит к стохастичности этого параметра [17; 18]. Мы, однако, в качестве нулевого приближения ограничиваемся моделью с постоянным β .

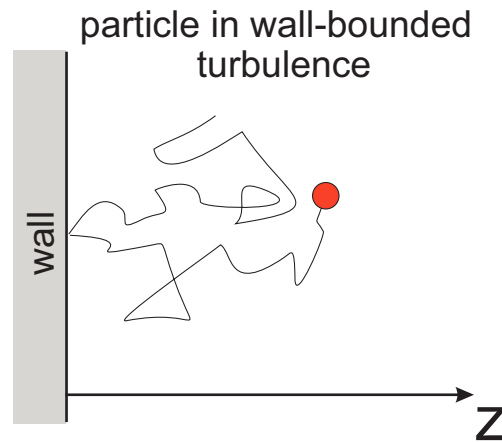


Рис. 1 — Основной объект исследования данной диссертационной работы - движение инерционной частицы в случайном гидродинамическом течении вблизи плоской стенки.

То, насколько существенна инерционность частицы для процесса ее взаимодействия со случайной компонентой течения, определяется соотношением между временем релаксации скорости частицы τ и временем жизни характерных флуктуаций скорости жидкости τ_c . Безразмерный параметр $St = \tau/\tau_c$, известный как число Стокса, дает качественное представление о том, насколько существенно скорость частицы отличается от мгновенной скорости окружающей жидкости. Мы ставим своей целью описать динамику частиц в вязком подслое при произвольном значении числа Стокса.

Рассмотрим простейшую модель с конечным временем корреляции τ_c флуктуирующей компоненты течения \vec{u}' , парный коррелятор которой имеет экспоненциальный вид $\langle u'_i(\vec{r}, t_1) u'_j(\vec{r}, t_2) \rangle = \tau_c^{-1} D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}) \exp(-|t_1 - t_2|/\tau_c)$. Здесь

D_{ij} это тензор турбулентной диффузии, характеризующий неоднородную интенсивность флуктуаций скорости жидкости в вязком подслое. Мы показали, что если $\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$, то во всем вязком подслое статистика скорости частицы находится в локальном равновесии с турбулентными флуктуациями: функция распределения скорости частицы успевает отрелаксировать за счет вязкого трения к распределению, диктуемому локальной интенсивностью флуктуаций, до того как частица попадает в область течения с существенно отличающейся интенсивностью. Физически это означает, что характерная длина свободного пробега частицы, определенная как произведение ее характерной скорости в направлении нормали к стенке на стоковское время релаксации, много меньше расстояния до стенки. В этом случае для распределения концентрации частиц в нормальном по отношению к стенке направлении мы получили следующее замкнутое уравнение

$$\partial_t n = \frac{\text{St}}{1 + \text{St}} \partial_z^2 [D_{zz}(z)n] + \frac{1}{1 + \text{St}} \partial_z [D_{zz}(z) \partial_z n], \quad (3)$$

в котором $D_{zz}(z) = \mu z^4$ в силу свойств вязкого подслоя. Стационарное беспотоковое решение уравнения (3) имеет степенной вид

$$n \propto z^{-\frac{4\text{St}}{1+\text{St}}}. \quad (4)$$

и не зависит от коэффициента восстановления β , так как в рамках используемого нами локально-равновесного приближения частицы движутся в диффузионном режиме и не чувствуют неупругости столкновений со стенкой. Отметим, что равновесное распределение концентрации для модели с экспоненциальным парным коррелятором флуктуирующей компоненты поля скорости жидкости было получено ранее другим методом в работе [?]. Наш вклад состоит в выводе уравнения (3), описывающего нестационарные процессы турбулентного транспорта инерционных частиц в вязком подслое при $\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$.

Степенной профиль (4) не нормируем на бесконечности при $\text{St} < 1/3$ и нормируем, если $\text{St} > 1/3$. Поведение решения на поверхности стенки всегда сингулярно, но эта сингулярность интегрируема при $\text{St} < 1/3$ и не интегрируема, если $\text{St} > 1/3$. Все это означает, что при критическом значении числа Стокса равном $1/3$ происходит переход локализация-делокализация: части-

цы с достаточно большой инерцией имеют тенденцию скапливаться вблизи стенки, а слабоинерционные частицы покидают вязкий подслой.

Физическая картина, которая стоит за этим динамическим фазовым переходом, выглядит следующим образом. В рассматриваемом нами диапазоне чисел Стокса ($\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$), для которого оправдано приближение локального равновесия, динамика частиц определяется совместным действием двух эффектов - турбулентной диффузии и турбофореза. В случае малой инерции ($\text{St} < 1/3$) турбофорез, "притягивающий" частицы к стенке, не может компенсировать турбулентную диффузию, которая стремится размещать частицы равномерно по всему объему. Однако, турбофорез становится все более и более ярко выраженным с ростом числа Стокса и в конечном счете побеждает турбулентную диффузию, запирая достаточно инерционные частицы ($\text{St} > 1/3$) в вязком подслое.

Если $\sqrt{\text{St}} \gg 1$, то уравнение (3) и его равновесное решение (4) справедливы только в узкой области $z \ll L/\sqrt{\text{St}}$, непосредственно примыкающей к стенке. Частицы, находящиеся в пределах вязкого подслоя на расстояниях $z \gtrsim L/\sqrt{\text{St}}$ от стенки, далеки от равновесия с локальной интенсивностью флуктуаций скорости жидкости, так как обладают достаточной энергией, чтобы достичь поверхности стенки баллистически. Для ответа на вопрос о локализационных свойствах в случае $\sqrt{\text{St}} \gg 1$, необходимо описать статистику таких частиц. Поскольку $\tau_c \ll \tau$ в рассматриваемом пределе, то мы можем считать флуктуации скорости жидкости в стохастическом уравнении динамики (1) дельта-коррелированными во времени. Стационарная функция распределения координаты и скорости частицы $\rho(z, v_z)$, соответствующая движению в направлении нормали к стенке, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$-v_z \partial_z \rho + \frac{1}{\tau} \partial_{v_z} (v_z \rho) + \frac{1}{\tau^2} D_{zz}(z) \partial_{v_z}^2 \rho = 0, \quad (5)$$

которое должно быть дополнено неупругим граничным условием на поверхности стенки

$$\rho(0, v_z) = \beta^{-2} \rho(0, -\beta^{-1} v_z), \quad \text{при } v_z > 0, \quad (6)$$

следующим из соотношения (2). Множитель β^{-2} в уравнении (6) связан с сохранением вероятности: отраженный поток вероятности $\rho v_z dv_z$ для положительных v_z должен совпадать с падающим потоком для $-v_z/\beta$.

При $z \gg L/\sqrt{St}$ оказывается возможным пренебречь вторым членом в уравнении Фоккера-Планка (5) и перейти к упрощенному уравнению

$$-v_z \partial_z \rho + \frac{1}{\tau^2} D_{zz}(z) \partial_{v_z}^2 \rho = 0. \quad (7)$$

Этот переход оправдан тем, что область фазового пространства, в которой второй член относительно не мал, намного уже чем ширина тела функции распределения по скорости, если $z \gg L/\sqrt{St}$. Отметим, что кинетическое уравнение (7) соответствует уравнению динамики $d\vec{v}/dt = \vec{u}(\vec{r}(t), t)/\tau$, описывающему движение инерционной частицы под действием случайной силы в отсутствие вязкой релаксации скорости. По этой причине частицы на больших расстояниях от стенки имеет смысл называть стохастически ускоряемыми.

Решения уравнения (7) могут быть экстраполированы вплоть до $z \rightarrow 0$, что соответствует баллистическому полету частиц к стенке и обратно. А значит это уравнение необходимо рассматривать совместно с неупругим граничным условием (6). Мы показали, что равновесная функция распределения стохастически ускоряемых частиц существует не всегда, а только при достаточно малом β . Если $\beta > \beta_c$, где

$$\beta_c = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,163, \quad (8)$$

то у уравнения (7) попросту нет решения с ненулевым потоком. Если же $\beta < \beta_c$, то равновесный профиль концентрации случайно ускоряемых частиц существует и имеет степенной вид с показателем, который зависит от коэффициента восстановления скорости β . Этот профиль нормируем при $z \rightarrow \infty$, а значит критическое значение $\beta = \beta_c$ соответствует переходу локализация-делокализация.

Во второй главе, соответствующей по своему содержанию работе [19], исследуются локализационные свойства инерционных частиц в дельта-коррелированном во времени случайном пристенном течении с произвольным степенным профилем интенсивности флуктуаций. Функция распределения координаты и скорости частицы в направлении нормали к стенке удовлетворяет уравнению (5), в котором коэффициент диффузии имеет вид $D_{zz} \propto z^m$,

где $m > 0$. Неупругость столкновений частицы со стенкой как и ранее учитывается посредством граничного условия (6).

Чтобы установить, стремится частица к стенке, или же убегает на бесконечность, нужно рассмотреть равновесное решение $\rho(z, v_z)$ сформулированной краевой задачи. Если такое решение существует и "хвост" соответствующей редуцированной функции распределения $n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(z, v_z) dv_z$ на больших z нормируем, то частица локализована в пристенной области. Отсутствие равновесной функции распределения или ее ненормируемость будет означать делокализацию.

Статистически равновесное распределение характеризуется балансом между флуктуациями скорости частицы, сообщаемыми ей турбулентным потоком, и диссипацией этих флуктуаций за счет вязкого трения и неупругих столкновений со стенкой. Чтобы оценить, насколько существенна роль неоднородности интенсивности турбулентности в формировании равновесного распределения по скорости на заданном расстоянии от стенки, полезно ввести следующий безразмерный параметр

$$I(z) = \left(\frac{\tau}{\tilde{\tau}(z)} \right)^{2/3}, \quad (9)$$

где как и в предыдущем разделе $\tilde{\tau}(z)$ это характерное время, необходимое частице, чтобы почувствовать неоднородность при условии, что ее текущая координата равна z . Обозначив характерную скорость частицы через $\tilde{v}(z)$, получаем $\tilde{\tau} \sim z/\tilde{v}$. Эквивалентно, параметр I можно определить через отношение длины свободного пробега $l(z) = \tilde{v}(z)\tau$ к расстоянию до стенки z : $I = (l/z)^{2/3}$. Заметим, что степень $2/3$ в определении (9) не имеет никакого глубокого смысла и введена из соображений компактности последующих формул.

В той области течения, где справедливо условие $I \ll 1$, работает локальный механизм диссипации типичных флуктуаций: релаксация возмущенного распределения по скоростям происходит за счет вязкого трения настолько быстро, что частица не успевает попасть в область с заметно отличающейся интенсивностью турбулентности. Иными словами, статистика скорости частицы находится в локальном равновесии с турбулентностью. В противоположность этому, при $I \gg 1$ ситуация далека от локального равновесия, поскольку

характерная скорость частицы позволяет ей достичь стенки за время много меньшее стоксова времени релаксации скорости. В этом случае диссипация флуктуаций происходит главным образом благодаря неупругим столкновениям со стенкой. Можно сказать, что, показывая, как сильно характерные флуктуации скорости частицы отличаются от тех, что диктуются локальной интенсивностью турбулентности, параметр I играет для статистики скорости частицы такую же роль, какую широко используемое число Стокса St играет для ее мгновенной скорости.

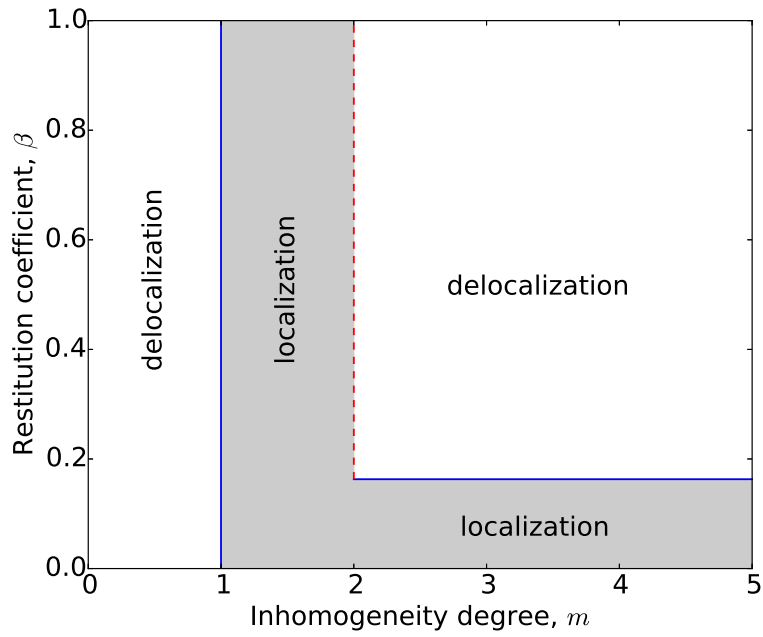


Рис. 2 — Фазовая диаграмма перехода локализация-делокализация в плоскости $m - \beta$ (неоднородность-упругость). Для набора параметров, лежащих на красной пунктирной линии, локализационные свойства зависят также от безразмерного параметра инерции I .

Предположим, что справедливо неравенство $I \ll 1$. Тогда типичная скорость частицы определяется вторым и третьим членами в правой части уравнения (5): $\tilde{v}(z) \sim \sqrt{D_{zz}(z)/\tau}$. Используя эту оценку, в случае степенной z -зависимости коэффициента турбулентной диффузии находим $I(z) \propto z^{m/2-1}$. Отсюда видно, что необходимо отдельно рассмотреть три случая, отличающихся поведением параметра инерции на больших расстояниях от стенки. Если $0 \leq m < 2$, то при $z \rightarrow \infty$ становится оправданным приближение локального равновесия. При $m > 2$ в пределе $z \rightarrow \infty$ работает приближение стохастического ускорения. Наконец, в частном случае $m = 2$

параметр инерции не зависит от координаты и поэтому режим турбулентного транспорта на больших расстояниях от стенки может быть в принципе любым. Фазовая диаграмма, приведенная на рисунке 2, резюмирует результаты анализа всех указанных случаев. В частности она показывает, что переход локализация-делокализация по параметру β (неупругий коллапс), описанный в первой главе для инерционных частиц в вязком подслое развитой турбулентности, универсален для всех моделей, в которых коэффициент диффузии дельта-коррелированного во времени случайного поля скорости растет быстрее чем квадрат расстояния от стенки.

Третья глава посвящена случаю квадратичного профиля коэффициента турбулентной диффузии дельта-коррелированного во времени случайного течения, $D_{zz}(z) = \mu z^2$, который был рассмотрен в статьях [20; 21]. Особенностью квадратичной модели является тот факт, что параметр I , определение которого дано формулой (9), не зависит от расстояния до стенки z : $I = (\mu\tau)^{1/3}$. То есть, степень нарушения локального равновесия одинакова в любой точке. Чтобы ответить на вопрос, остается ли частица в окрестности стенки, или же постепенно убегает на бесконечность, можно было бы пойти по тому же пути, что был выбран в первых двух главах. А именно, выяснить при каких условиях существует равновесное решение уравнения Фоккера-Планка, и как ведет себя на больших расстояниях от стенки функция распределения частицы по координате, соответствующая этому решению. Однако такая программа осуществима только в предельных случаях $I \rightarrow 0$ и $I \rightarrow \infty$. В общем же случае, решить уравнение Фоккера-Планка с квадратичной координатной зависимостью коэффициента диффузии и неупругим граничным условием на стенке не представляется возможным. К счастью, это и не нужно. Описать локализационные свойства частицы с произвольным значением параметра инерции I можно, вычислив ляпуновскую экспоненту, которая определена как

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{z(t)}{z(0)}, \quad (10)$$

где $z(t)$ это стохастическая траектория частицы, а $z(0)$ - ее начальная координата. Эта величина содержит информацию о поведении частицы на больших временах. Положительный знак ляпуновской экспоненты означает, что частица стремится убежать на бесконечность. Напротив, отрицательная ля-

пуновская экспонента свидетельствует о локализации частицы около начала координат.

Нам удалось получить точное выражение для ляпуновской экспоненты как функции от β и I

$$\lambda(\beta, I) = \lambda(1, I) + \ln \beta \cdot F(I), \quad (11)$$

где

$$\lambda(1, I) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} F(I) \int_0^{+\infty} dx \frac{x - I^{-1}}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4I^2}\right), \quad (12)$$

$$F(I) = \frac{I}{\sqrt{\pi\tau}} \left[\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4I^2}\right) \right]^{-1}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что неупругость ведет к появлению аддитивной поправки к ляпуновской экспоненте, соответствующей случаю абсолютно упругих столкновений.

Смена знака ляпуновской экспоненты означает переход локализация-делокализация. Из формулы (11) следует, что кривая перехода в плоскости $\beta - I$ определяется уравнением $\ln \beta(I) = -\lambda(1, I)/F(I)$. В пределе $I \rightarrow \infty$ это уравнение дает уже знакомый нам порог неупругого коллапса $\beta_c = \exp(-\pi/\sqrt{3})$. При $\beta < \beta_c$ частица в среднем движется по направлению к стенке независимо от значения параметра инерции I . Отметим, что теоретическая кривая фазового перехода совпадает с кривой, полученной в результате численного моделирования, см. Рис. 3.

До сих пор, обсуждая неоднородную турбулентность, мы полагали, что неоднородность напрямую связана с наличием стенки. Имеет также смысл обсудить ситуацию, когда неоднородность возникает в отсутствии границ благодаря пространственной неоднородности накачки, возбуждающей турбулентность, как, например, в случае колмогоровского течения [22]. В зависимости от профиля интенсивности возбуждающей силы, возможны различные результирующие профили коэффициента турбулентной диффузии. В том числе, может реализоваться глубокий минимум, что и соответствует квадратичной модели.

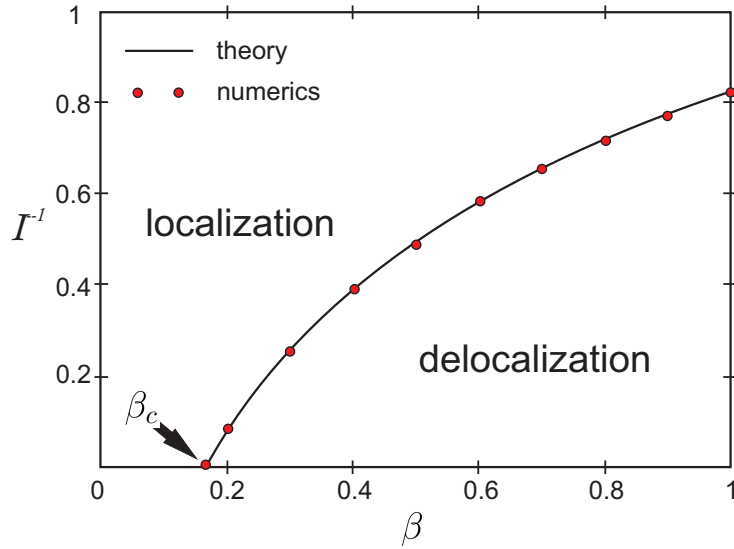


Рис. 3 — Фазовая диаграмма перехода локализация-делокализация: теория (сплошная линия) и численный счет (o).

Чтобы описать движение инерционной частицы в окрестности минимума турбулентности в неограниченном пространстве, мы снова должны обратиться к уравнению Фоккера-Планка (5), но теперь уже рассматривать его на всей оси z . Поскольку координата частицы может принимать отрицательные значения, то ляпуновская экспонента определена как $\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln |z(t)/z(0)|$. В силу симметрии ответ к нашей задаче совпадает с ответом для задачи, в которой частица движется на полуоси $z > 0$ с идеально упругой стенкой в начале координат, поэтому мы сразу можем воспользоваться формулой (12). Полученная ляпуновская экспонента меняет знак с отрицательного на положительный, когда I переваливает через критическое значение $I_c \approx 1.2$. Таким образом, частицы с достаточно малым параметром инерции скапливаются в минимуме турбулентности, а сильно инерционные частицы убегают на бесконечность, Рис. 4. Аккумуляция в минимуме это проявление хорошо известного турбофорического эффекта, в то время как делокализацию сильно инерционных частиц можно интерпретировать как обратный турбофорез, ранее никем не обсуждавшийся. Парадоксально, но несмотря на то, что турбофорез обязан своим существованием именно инерционности частиц, слишком большая инерция играет против локализации! Качественно этот неожиданный результат можно объяснить, если вспомнить, что безразмерный параметр I , контролирующий обнаруженный нами переход локализация-делокализация, есть ничто иное как отношение характерной длины свободного пробега частицы к расстоянию до минимума.

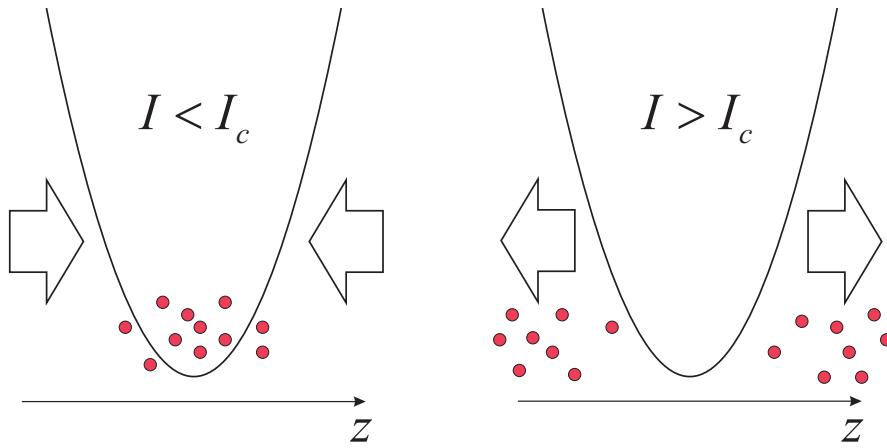


Рис. 4 — Динамический фазовый переход локализация-делокализация для инерционных частиц в окрестности глубокого минимума интенсивности турбулентности.

Мы видим, что делокализация имеет место для тех частиц, длина пробега которых больше расстояния до минимума. Область пониженной интенсивности турбулентности не может играть роль ловушки для таких частиц, поскольку они попросту баллистически пролетают сквозь нее.

Здесь необходимо сделать важное предостережение во избежание возможных недоразумений, связанных с ошибочными интерпретациями. Обычный (положительный) турбофорез проявляет себя в том, что в статистически стационарной ситуации максимумы концентрации частиц в системе конечного объема соответствуют минимумам турбулентности. Говоря об отрицательном турбуфорезе, мы ни в коем случае не имеем в виду, что теперь максимумы равновесной концентрации будут приходиться на максимумы турбулентности. В конечной системе частицы с любым параметром инерции I в конечном счете концентрируются преимущественно в минимумах, просто с ростом I этот эффект становится все менее и менее ярко выражен. Следует подчеркнуть, что отрицательный турбофорез это принципиально неравновесное явление убегания частиц из окрестности минимума, выведенное нами для формально неограниченного пространства. Для конечных систем этот эффект может наблюдаться на начальных этапах эволюции, предшествующих установлению стационарного распределения.

В четвертой главе, следуя работе [23], мы рассматриваем рассеяние примесных частиц в приземном атмосферном слое. Феноменологическое уравнение турбулентной диффузии, описывающее пространственный перенос кон-

центрации частиц, было сформулировано более полувека назад и имеет вид

$$\partial_t n = \partial_z [D_{zz}(z) \partial_z n] + g\tau \partial_z n - U_x(z) \partial_x n. \quad (14)$$

Здесь D_{zz} это коэффициент турбулентной диффузии для вертикального направления, а U_x – средняя (горизонтальная) скорость ветра. Молекулярная диффузия пренебрежимо мала в сравнении с эффектом турбулентной диффузии, поэтому уравнение (14) не содержит соответствующего ей вклада. Кроме того, мы пренебрегаем турбулентной диффузией вдоль оси x на фоне переноса средним ветром и не интересуемся дисперсией частиц в горизонтальном направлении поперек среднего ветра.

В пределах турбулентного пограничного слоя пульсационная компонента скорости воздуха не зависит от расстояния до земной поверхности, в то время как характерный размер вихрей определяется как раз этим расстоянием [6; 24]. Это ведет к линейной зависимости коэффициента турбулентной диффузии от высоты

$$D_{zz}(z) = \mu z, \quad (15)$$

с угловым коэффициентом $\mu = \kappa u_*$, где u_* это характерная пульсационная скорость, а $\kappa \approx 0.4$ - постоянная Кармана.

Скорость среднего ветра в турбулентном пограничном слое тоже зависит от высоты и описывается хорошо известным логарифмическим законом [6; 24]. Поскольку теоретический анализ уравнения турбулентной диффузии с таким профилем средней скорости наталкивается на значительные технические трудности, то, следуя обычной практике, мы будем использовать степенную аппроксимацию

$$U_x(z) = bz^m, \quad (16)$$

где $b = u_* C_p / z_*^m$, z_* это характерная высота шероховатостей подстилающей поверхности и для нейтральных атмосферных условий $m = 1/7$ и $C_p = 6$ [25].

Благодаря осаждению земная поверхность играет роль стока для поля концентрации переносимых воздухом частиц. Кажется физически правдоподобным, что независимо от конкретных деталей взаимодействия между частицами и поверхностью, темп осаждения должен быть пропорционален концентрации частиц вблизи поверхности (см. более подробное обсуждение этого вопроса в [26; 27]). Приравнивая поток осаждения и поток, полученный

из уравнения (14), мы приходим к так называемому радиационному граничному условию

$$[D_{zz}(z)\partial_z n + g\tau n]_{z=r} = [v_d n]_{z=r}, \quad (17)$$

в котором v_d это феноменологическая скорость осаждения, а r это некоторая контрольная высота, на которой измеряется поток. Случаи $v_d = 0$ и $v_d \rightarrow \infty$ соответствуют абсолютно отражающим и абсолютно поглощающим граничным условиям. В промежуточном случае $0 < v_d < \infty$ мы имеем дело с частично поглощающей поверхностью. Здесь предполагается, что, однажды поглотившись на границе, частица в область $z > 0$ уже не возвращается. Таким образом, наша модель не учитывает возможное повторное вовлечение в движение уже осевших частиц [28].

Однородность статистики турбулентности в горизонтальном направлении (подразумевающая однородность свойств подстилающей поверхности) позволяет исключить эффекты горизонтального переноса и перейти к редуцированному описанию в терминах суммарной концентрации частиц на заданной высоте $\tilde{n}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,z,t) dx$

$$\partial_t \tilde{n} = \partial_z [D_{zz}(z)\partial_z \tilde{n}] + g\tau \partial_z \tilde{n}. \quad (18)$$

Таким образом, распределение частиц в вертикальном направлении может быть описано независимо от их горизонтального движения.

Стационарные решения уравнений (14) и (18) с неоднородными по высоте коэффициентами D_{zz} и U_x , определяемыми формулами (15) и (16), и граничным условием типа (17) много раз обсуждались в литературе на примере рассеяния частиц от линейных [7–9] и поверхностных [10;11] источников. О нестационарных процессах переноса, описываемых этой моделью, известно намного меньше, несмотря на то, что соответствующие уравнения сформулированы давно. Анализ, проделанный в работе [23], давшей материал для настоящей главы, заполняет этот пробел.

Рассмотрим процесс рассеяния небольшого облака частиц, выпущенных в начальный момент времени на высоте z_0 . За счет осаждения на земную поверхность количество примеси в воздухе будет убывать со временем. Для произвольного момента времени число частиц, оставшихся в атмосфере, можно записать как $N(t) = \int_0^\infty \tilde{n}(z,t) dz$. Для этой величины мы получили

следующий результат

$$N(t) = \frac{N_0}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{z_0/\mu t} \xi^{\gamma-1} e^{-\xi} d\xi. \quad (19)$$

где $\gamma = g\tau/\mu$ это так называемое число Фруда [29], показывающее насколько важен эффект гравитационного осаждения на фоне турбулентного транспорта. Отношение $p(t) = N(t)/N_0$ можно интерпретировать как вероятность того, что частица, выпущенная на высоте z_0 , не осела на земную поверхность вплоть до момента времени t .

Теперь поставим вопрос о том, как далеко от точки выброса происходит осаждение. Оказывается возможным определить результирующую поверхностную плотность $\sigma(x)$ осажденного материала. Эта величина определена как полное число осевших частиц на единицу длины в горизонтальном направлении. Мы получили следующий ответ

$$\sigma(x) = N_0 \left[\frac{(m+1)^2 \mu}{bz_0^{m+1}} \right]^{-\frac{\gamma}{m+1}} \frac{x^{-\frac{\gamma}{m+1}-1}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{m+1}\right)} \exp\left(-\frac{bz_0^{m+1}}{(m+1)^2 \mu x}\right). \quad (20)$$

Легко проверить, что выполняется условие сохранения массы $\int_0^\infty \sigma(x) dx = N_0$. Поверхностная плотность осажденных частиц тождественно равна нулю при $x \leq 0$, поскольку наша модель не учитывает турбулентную диффузию в горизонтальном направлении.

Приведенные выше результаты были получены в пределе, когда контрольная высота в граничном условии (17) стремится к нулю, $r \rightarrow 0$. В этом случае, как оказалось, во всех формулах скорость осаждения v_d попросту сокращается. На первый взгляд тот факт, что характеристики процесса турбулентного транспорта оказываются не зависящими от скорости осаждения, кажется противоречащим интуиции. Формальное объяснение этой неожиданной особенности рассматриваемой нами модели состоит в том, что для уравнения (18) точка $z = 0$, в которой коэффициент диффузии (15) обнуляется, неизбежно является поглощающей, см. например [30]. По этой причине, когда мы переходим к пределу $r \rightarrow 0$, эффект любого граничного условия становится неотличим от эффекта абсолютно поглощающей стенки: попадая с единичной вероятностью за конечное время в точку $z = 0$, частица уже не может

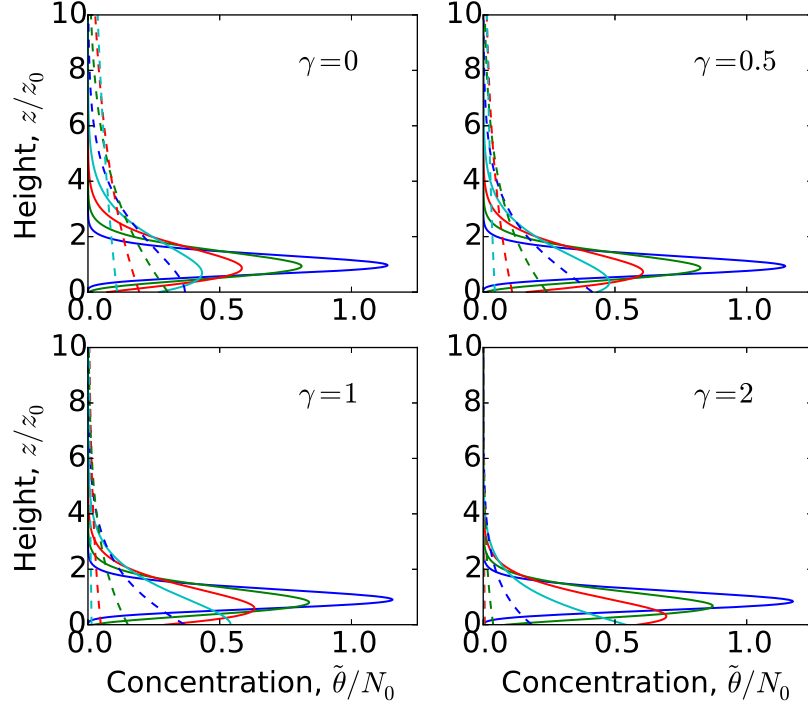


Рис. 5 — Вертикальный профиль концентрации частиц, находившихся изначально на высоте z_0 над землей, для различных моментов времени:

$$\mu t/z_0 = 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2 \text{ и } 2^3.$$

вернуться в область $z > 0$. Это позволяет заключить, что существует универсальное решение уравнения (18), в которое переходят в пределе $r \rightarrow \text{все}$ его решения, удовлетворяющие с граничному условию (17), независимо от значения v_d . Действительно, как легко проверить, следующее нестационарное распределение

$$\tilde{n}(z,t) = \frac{N_0}{\mu t} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\gamma/2} \exp\left(-\frac{z+z_0}{\mu t}\right) \mathcal{I}_\gamma\left(\frac{2\sqrt{zz_0}}{\mu t}\right), \quad (21)$$

это точное решение уравнения (18), удовлетворяющее дельта-функциональному начальному условию $\tilde{n}(z,0) = N_0\delta(z-z_0)$. Распределение (21) не сохраняет полное число частиц и его интегрирование по z от 0 до $+\infty$ дает в точности формулу (19). В книге [30] это решение получено для частного случая $\gamma = 1$, а в [6] приведен хорошо известный ответ для пассивного скаляра, $\gamma = 0$. Отношение $\tilde{n}(z,t)/N_0$ есть плотность вероятности того, что частица, начавшая движение с высоты z_0 , находится на высоте z в момент времени t , см. Рис. (5).

В заклучении обсуждаются основные результаты диссертации.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Belan, S., Chernykh, A., Lebedev, V., Falkovich, G.* Inelastic collapse and near-wall localization of randomly accelerated particles // *Physical Review E* - 2016. - Vol. 93, no. 5. - P. 052206
2. *Belan, S., Lebedev, V., Falkovich, G.* Particle dispersion in the neutral atmospheric surface layer // *Boundary-Layer Meteorology* - 2016. - Vol. 159, no. 1. - P. 23
3. *Belan, S.* Concentration of diffusional particles in viscous boundary sublayer of turbulent flow // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* - 2016. - Vol. 443, - P. 128
4. *Belan, S., Chernykh, A., Falkovich, G.* Phase transitions in the distribution of inelastically colliding inertial particles // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* - 2015. - Vol. 49, P. 035102
5. *Belan, S., Chernykh, A., Lebedev, V., Vergeles, S.* Confinement of inertial particles in viscous boundary layer of turbulent flow // *JETP Letters* - 2015. - Vol. 101, no. 1, P. 12
6. *Belan, S., Fouxon, I., Falkovich, G.* Localization-Delocalization Transitions in Turbophoresis of Inertial Particles // *Physical Review Letters* - 2014. - Vol. 112, P. 234502

Список литературы

1. Transfer of particles in nonisotropic air turbulence / M. Caporali, F. Tampieri, F. Trombetti, O. Vittori // *Journal of the atmospheric sciences*. — 1975. — Vol. 32, no. 3. — Pp. 565–568.
2. Reeks M.W. The transport of discrete particles in inhomogeneous turbulence // *Journal of aerosol science*. — 1983. — Vol. 14, no. 6. — P. 729–739.
3. Young J., Leeming A. A theory of particle deposition in turbulent pipe flow // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1997. — Vol. 340. — Pp. 129–159.
4. Maxwell J.C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // *Philosophical Transactions of the royal society of London*. — 1879. — Vol. 170. — Pp. 231–256.
5. A note on the modelling of the bouncing of spherical drops or solid spheres on a wall in viscous fluid / D. Legendre, R. Zenit, C. Daniel, P. Guiraud // *Chemical engineering science*. — 2006. — Vol. 61, no. 11. — Pp. 3543–3549.
6. Monin A.S., Yaglom A.M. Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence. — Dover, New York, 2007.
7. Rounds W. Solutions of the two-dimensional diffusion equations // *Eos, Transactions American Geophysical Union*. — 1955. — Vol. 36, no. 3. — Pp. 395–405.
8. Godson W.L. The diffusion of particulate matter from an elevated source // *Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, Serie A*. — 1958. — Vol. 10, no. 4. — Pp. 305–327.
9. Okubo A., Levin S.A. A theoretical framework for data analysis of wind dispersal of seeds and pollen // *Ecology*. — 2008. — Vol. 70, no. 2. — P. 329–338.
10. Chamecki M., Meneveau C. Particle boundary layer above and downstream of an area source: scaling, simulations, and pollen transport // *Journal of Fluids Mechanics*. — 2011. — Vol. 683, no. 1. — Pp. 1–26.

11. *Pan Y., Chamecki M., S.A. Isard.* Dispersion of heavy particles emitted from area sources in the unstable atmospheric boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*. — 2013. — Vol. 146. — Pp. 1–26.
12. Stochastic suspensions of heavy particles / J. Bec, M. Cencini, R. Hillerbrand, K. Turitsyn // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2008. — Vol. 237, no. 14. — Pp. 2037–2050.
13. *Reeks M. W.* Transport, mixing and agglomeration of particles in turbulent flows // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2014. — Vol. 530, no. 1. — P. 012003.
14. *Gustavsson K., Mehlig B.* Statistical models for spatial patterns of heavy particles in turbulence // *Advances in Physics*. — 2016. — no. 65(1). — Pp. 1–57.
15. *Belan S. Chernykh A., Lebedev V., Vergeles S.* Confinement of inertial particles in the viscous boundary layer of a turbulent flow // *JETP Letters*. — 2015. — Vol. 101, no. 1. — Pp. 12–16.
16. *Belan S.* Concentration of diffusional particles in viscous boundary sublayer of turbulent flow // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2016. — Vol. 443. — Pp. 128–136.
17. Coefficient of restitution as a fluctuating quantity / M. Montaine, M. Heckel, C. Kruehle et al. // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84, no. 4. — P. 041306.
18. *Gunkelmann N., Montaine M., Poschel T.* Stochastic behavior of the coefficient of normal restitution // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89, no. 2. — P. 022205.
19. Inelastic collapse and near-wall localization of randomly accelerated particles / S. Belan, A. Chernykh, V. Lebedev, G. Falkovich // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 5. — P. 052206.
20. *Belan S., Fouxon I., Falkovich G.* Localization-delocalization transitions in turbophoresis of inertial particles // *Physical review letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 23. — P. 234502.

21. *Belan S., Chernykh A., Falkovich G.* Phase transitions in the distribution of inelastically colliding inertial particles // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2015. — Vol. 49, no. 3. — P. 035102.
22. Clustering and turbophoresis in a shear flow without walls / F. De Lillo, M. Cencini, S. Musacchio, G. Boffetta // *Physics of fluids*. — 2016. — Vol. 26, no. 3.
23. *Belan S., Lebedev V., Falkovich G.* Particle Dispersion in the Neutral Atmospheric Surface Layer // *Boundary-Layer Meteorology*. — 2016. — Vol. 159, no. 1. — P. 23.
24. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics. — 1986.
25. *Brutsaert W.* Evaporation into the atmosphere: theory, history and applications (Vol.1). — Springer Science and Business Media, 2013.
26. *Monin A.S.* On the boundary condition on the Earth surface for diffusing pollution // *Advances in Geophysics*. — 1959. — Vol. 6. — P. 435.
27. *Calder K.* Atmospheric diffusion of particulate material, considered as a boundary value problem // *Journal of Meteorology*. — 1959. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 413–415.
28. *Nicholson K.W.* A review of particle resuspension // *Atmospheric Environment*. — 1988. — Vol. 22. — Pp. 2639–2651.
29. *Shaw R.A.* Particle-turbulence interactions in atmospheric clouds // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2003. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 183–227.
30. *Van Kampen N.G.* Stochastic processes in physics and chemistry. — Elsevier, New York, 1992. — Vol. 1. — P. 463.