

*На правах рукописи*

ШТЫК Александр Викторович

**Кинетика электрон-фононных процессов и флуктуации в  
неупорядоченных проводниках и сверхпроводниках**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук.

**Научный руководитель:** **Фейгельман Михаил Викторович**,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

**Официальные оппоненты:** **Рожков Александр Владимирович**,  
к. ф.-м. н., ФГБУН Институт теоретической  
и прикладной электродинамики РАН, стар-  
ший научный сотрудник

**Юдсон Владимир Исаакович**,  
д. ф.-м. н., ФГБУН Институт спектроско-  
пии РАН, главный научный сотрудник

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджет-  
ное учреждение науки Институт физики  
твердого тела Российской академии наук  
(ИФТТ РАН)

Защита состоится 30 декабря 2016 г. в \_\_\_ часов \_\_\_ минут на заседании диссертационного совета Д.002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук, расположенном по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1-А.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте <http://www.itp.ac.ru/> или в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Автореферат разослан \_\_\_ \_\_\_\_\_ 2016 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физ.-мат. наук

Гриневич Петр Георгиевич

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Поглощение ультразвука в металлах изучается уже долгое время [1–5] и может казаться полностью понятным. Отношение скорости поглощения ультразвука  $\alpha(\omega)$  к частоте ультразвука  $\omega$  в чистых металлах мало из-за малости адиабатического параметра  $mk_F^3/\rho_m \ll 1$ , где  $m$  есть электронная масса,  $k_F$  есть волновой вектор Ферми и  $\rho_m$  есть плотность вещества. Простейшая модель электрон-фононного взаимодействия это Фрелиховская модель со скалярной вершиной, позже расширенная Мигдалом [6, 7]. Эта модель хорошо работает в чистых металлах. Однако хорошо известно, что Фрелиховская модель неадекватна когда длина волны фонона  $2\pi/q$  превосходит упругую электронную длину свободного пробега  $l$ . В этом *грязном* пределе, когда  $ql \ll 1$ , привычная теория электрон-фононного взаимодействия приводит к концепции неэффективности Пиппарда, которая утверждает, что поглощение ультразвука на малых волновых векторах подавлено на фактор  $ql \ll 1$  [5].

Поглощение ультразвука тесно связано с электрон-фононным теплообменом [8], который определяет возможный масштаб нарушения термодинамического равновесия электронного газа и фононов, решетки. В частности, в работе [9] было показано, что сильные нелинейности вольт-амперной характеристик  $I(V)$  наблюдаемые в эксперименте [10] возникают благодаря перегреву электронов; более того, тщательное исследование формы  $I(V)$  кривых при различных температурах позволяет определить скорость неупругих электрон-фононных процессов. Таким образом было обнаружено, что в ряде случаев [10–12] скорость электрон-фононного охлаждения значительно выше, чем ожидается в рамках только процессов Пиппардовского типа. Следовательно важно внимательно пересмотреть как вопросы электрон-фононного теплообмена, так и поглощения ультразвука на предмет эффектов, которые могли быть ранее упущены, а также попытаться ответить на загадки недавних экспериментов,

а именно несоответствия интенсивности электрон-фононного теплообмена наблюдаемой экспериментально с предсказываемой имеющимися теоретическими моделями.

## Цель работы

Целью работы являлись

1. Исследование связи скоростей электрон-фононного теплообмена и поглощения ультразвука.
2. Исследование влияния медленных диффузных мод на скорость поглощения ультразвука в неупорядоченных проводниках.
3. Построение теории электрон-фононного взаимодействия в псевдощелевых сверхпроводниках.

## Положения, выносимые на защиту

1. Указана фундаментальная связь потока тепла и скорости поглощения ультразвука, справедливая при произвольном электрон-электронном взаимодействии.
2. Показано, что в легированных полупроводниках близких к пределу применимости теории неупорядоченных проводников по критерию Иоффе-Регеля  $k_F l \sim 1$  ожидается усиленное поглощение ультразвука благодаря зарядовой диффузной моде, несмотря на наличие сильного Кулоновского взаимодействия.
3. Предсказан эффект поглощения ультразвука за счет возбуждения моды диффузии спиновой плотности, который может иметь место во внешнем магнитном поле или в ферромагнетиках. Рассмотрен конкретный пример магнитного поля направленного в плоскости двумерного электронного газа.

4. Показано, что ультразвук в неупорядоченных проводниках и сверхпроводниках испытывает дополнительное поглощение благодаря взаимодействию модуляций плотности решетки и газа термически возбужденных квазичастиц, которые находятся в неравновесных условиях по отношению к решетке из-за конечной частоты индуцированных акустической волной модуляций. Рассмотрены случаи нормального,  $s$ -волнового и  $d$ -волнового сверхпроводящих состояний. Для  $d$ -волновых сверхпроводников мы вычислили также локальное поглощение, которое обладает сильной анизотропией с симметрией сверхпроводящего параметра порядка.
5. Развита теория электрон-фононного взаимодействия и поглощения ультразвука в псевдощелевом сверхпроводящем состоянии. Показано, что измерение скорости поглощения ультразвука может служить полезным инструментом для измерения коллективной сверхпроводящей щели.

### **Научная новизна и достоверность**

Результаты диссертации являются новыми. Достоверность ее выводов обеспечена надежностью применявшихся методов и подтверждается результатами апробации работы.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты позволяют глубже понять особенности электрон-фононного взаимодействия в неупорядоченных проводниках, обычных, необычных и псевдощелевых сверхпроводниках. Учет перегрева электронного газа важен во многих экспериментах. Таким образом, работа имеет потенциал для непосредственного практического применения.

## **Апробация диссертации**

Результаты диссертации были представлены автором на международных и все-российских конференциях: “Landau Days 2016” (Черноголовка, 2016), “Landau Days 2013” (Черноголовка, 2013), “Landau Days 2012” (Черноголовка, 2012), “Мезоскопические электронные системы - 5: Неравновесные и когерентные явления в наномасштабе” а также на научных семинарах в ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург) и университета Лафборо (Лафборо, Англия) .

## **Личный вклад автора**

Все изложенные в диссертации результаты получены автором лично, либо при его непосредственном участии. Автором осуществлялась разработка теоретических методов исследования, обсуждение результатов и подготовка публикаций.

## **Публикации**

Результаты диссертации изложены в трех статьях. Две работы опубликованы и одна находится на стадии рецензирования в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка публикаций автора по теме диссертации, списка литературы; содержит 100 страниц, 13 рисунков и 65 пунктов цитированной литературы.

В главе 1 рассмотрена связь скоростей электрон-фононного теплообмена и поглощения ультразвука; главы 2, 3 и 4 посвящены эффектам зарядовой, спиновой диффузных мод и моды плотности энергии соответственно (последняя рассмотрена на примере как нормального, так и сверхпроводящих  $s$ - и  $d$ -волновых

состояний); в главе 5 построена теория электрон-фононного взаимодействия в псевдощелевом сверхпроводнике.

# Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель исследований, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов и представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** рассмотрена связь между скоростью поглощения ультразвука  $\alpha(\omega)$  и потоком тепла  $\mathcal{J}$  между электронными и фононными подсистемами,

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (\nu_{ph}(\omega) d\omega) \left( \alpha(\omega, T_{el}) \omega \right) \left[ \mathfrak{B}(\omega, T_{el}) - \mathfrak{B}(\omega, T_{ph}) \right], \quad (1)$$

где  $\nu_{ph}(\omega) = \omega^2/2\pi^2 s^3$  есть фононная плотность состояний, а  $\mathfrak{B}(\omega, T) = (1/2)(\coth(\omega/2T) - 1)$  есть бозонная функция распределения. Показано, что эта связь очень общего характера за которой стоит единственное ключевое приближение, которое выполнено в большинстве случаев. А именно, это приближение состоит в слабости электрон-фононного взаимодействия. С точки зрения диаграммной техники это значит, что электрон-фононное взаимодействие должно рассматриваться в древесном приближении, в то время как по электрон-электронному взаимодействию никаких ограничений не предполагается. В типичном металле это ограничение всегда выполнено в силу теоремы Мигдала, в силу адиабатичности электрон-фононного взаимодействия и малости параметра  $s^2/v_F^2 \ll 1$ .

Одним из результатов главы есть общий вид потока тепла между электронной и фононной подсистемами,

$$\mathcal{J}(T_{el}, T_{ph}) = \mathcal{J}_+(T_{el}) - \mathcal{J}_-(T_{ph}, T_{el}),$$

который не сводится к стандартному приближению при описании квазиравновесной ситуации. Последнее состоит в предположении о том, что  $\mathcal{J}$  есть просто разность одной и той же функции взятой на электронной и фононной темпе-



ратурах,  $\mathcal{J}(T_{el}) - \mathcal{J}(T_{ph})$ . Стандартное приближение воспроизводится, если в электронных параметрах, таких, как например коэффициент диффузии  $D$  и плотность состояний  $\nu$ , можно пренебречь зависимостью от температуры (то есть если  $\nu(T), D(T) \approx \text{const}$ ).

Во **второй главе** рассмотрено поглощение ультразвука в неупорядоченном проводнике за счет зацепления акустической волны за диффузную моду отвечающую зарядовой плотности. Рассматривается исключительно грязный предел в смысле фононов,  $\lambda \gg l$ , где  $\lambda$  есть длина волны фонона, а  $l$  длина свободного пробега электронов.

Электронное действие для рассматриваемой системы  $\mathcal{A}_e$  есть

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_e &= \mathcal{A}_{e0} + \mathcal{A}_{e-e}, \\ \mathcal{A}_{e0} &= \int dt d\mathbf{r} \sum_i \bar{\psi}_{\mathbf{r},i} \left[ \hat{\varepsilon} - \xi_i(\hat{\mathbf{p}}) - U_{imp}(\mathbf{r}) \right] \psi_{\mathbf{r},i}, \\ \mathcal{A}_{e-e} &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' V_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U_{imp}(\mathbf{r})$  есть случайный потенциал,  $V_0(\mathbf{q})$  есть голое Кулоновское взаимодействие, которое зависит от диэлектрической постоянной подложки  $\varepsilon_C$  (электрон-электронное взаимодействие может испытывать дополнительную экранировку при наличии металлического затвора), а  $n(\mathbf{r}) = \sum_i n_i(\mathbf{r})$  и  $n_i(\mathbf{r}) = \bar{\psi}_{\mathbf{r},i} \psi_{\mathbf{r},i}$  есть полная электронная плотность и плотность отдельно взятых электронов  $i$ -го сорта соответственно.

В разделе 2.2 описана модель электрон-фононного взаимодействия, применяемая для довольно общих условий. Гамильтониан электрон-фононного взаимодействия выглядит как

$$\begin{aligned} (H_{e-ph}^{CFR})_{scr} &= - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, i} (i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_q) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2, i} \\ &+ \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, i} \left( V_{RPA} \sum_j \nu_j \left( \frac{p_F v_F}{d} \right)_j \text{div} \mathbf{u} \right) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2, i}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $v$  и  $p$  есть электронные скорость и импульс, а  $V_{RPA}$  есть Кулоновское взаимодействие в приближении случайных фаз.

В разделе 2.3 приведен обычный ответ для поглощения ультразвука, предсказываемый стандартной теорией, за счет процессов Пиппардовского типа,

$$\alpha_{n,l} = C \frac{\nu_{tot} p_F^2}{\rho_m} D q^2, \quad (4)$$

где константа  $C$  есть  $4(d-1)/[d(d+2)]$  для продольных фононов и  $2/(d+2)$  для поперечных,  $\nu_{tot}$  есть полная плотность электронных состояний,  $p_F$  есть импульс Ферми,  $\rho_m$  плотность вещества,  $D$  коэффициент диффузии и наконец  $q$  – волновой вектор акустической волны.

Раздел 2.4 посвящен собственно описанию поглощения в диффузном канале зарядовой плотности. При учете конечности Кулоновского взаимодействия необходимо сохранить скалярную часть электрон-фононной вершины  $\Gamma$ , так что экранированная вершина получается равной

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma}{1 + \nu_{tot} V_0(q)}, \quad (5)$$

где  $V_0(q)$  есть голое Кулоновское взаимодействие. Эта вершина приводит к скорости поглощения

$$\alpha_{n,C} = \frac{\Gamma^2}{\rho_m v_s^2} \frac{N_f \nu D q^2}{(Dq)^2 (1 + N_f \nu V_0(q))^2}, \quad (6)$$

так что отношение полного поглощения (зарядовый канал + локальный) к локальному ответу есть

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}(q) \equiv \frac{\alpha_{n,C}}{\alpha_{n,l}} = 1 + \frac{1}{c_l} \frac{(\Gamma/p_F v_F)^2}{(v_s/v_F)^2 + d_e^{-2} (q^2 l^2) (1 + N_f \nu V_0(q))^2}. \quad (7)$$

Для двумерного электронного газа с постоянной диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  окружающей среды мы имеем  $V_0(q) = V_{2D}(q) = 2\pi e^2/\varepsilon q$ . В таком случае, для релевантных значений волнового вектора  $\mathbf{q}$  фактор усиления  $\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}(q)$  сводится к константе. Согласно результатам главы 1 это соответствует мощности охлаждения, которая ведет себя как  $J(T) \propto T^6$  [13], но с усиленным префактором пропорциональным  $\varepsilon^2/g_{\square}^2$  (где  $g_{\square}$  есть безразмерный кондактанс на единицу площади в единицах  $e^2/h$ ) при сильном беспорядке и большой диэлектрической

постоянной  $\varepsilon$ . В трехмерных проводниках, где  $V_0(q) \propto q^{-2}$ , Ур.(7) имеет режим, в котором  $\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}(q) \propto q^2$ . Поток тепла в таком режиме соответственно ведет себя как  $J(T) \propto T^8$  [13].

Интересная ситуация возникает в двумерном электронном газе с расположенным поблизости металлическим затвором, который дополнительно экранирует Кулоновское взаимодействие и таким образом усиливает характерные флуктуации плотности заряда. Для подобной геометрии и волнового вектора акустической волны  $\mathbf{q}$  параллельного плоскости электронного газа  $V_0(q)$  заменяется на  $V_g(q) = V_{2D}(q) (1 - e^{-2qb})$ , где  $b$  есть расстояние между электронным газом и затвором. Более того, для ультразвука с длиной волны  $1/q \geq b$  экранированный таким образом Кулон  $V_g(q) \approx V(q) \cdot 2qb \approx \text{const}$  и наличие адиабатического параметра в знаменателе (7) становится важным при достаточно низких температурах:

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,C_{\text{gate}}} = 1 + \frac{4(\Gamma/p_F v_F)^2}{(v_s/v_F)^2 + (q^2 l^2)(4\pi\nu e^2 b/\varepsilon)^2}, \quad (8)$$

где Кулоновское взаимодействие все еще предполагается относительно сильным,  $2\pi\nu e^2 b/\varepsilon \gg 1$ . В этом случае возникает режим, где фактор усиления пропорционален  $q^{-2}$  и мощность охлаждения  $J(T) \propto T^4$ .

В **третьей главе** рассмотрено поглощение ультразвука в диффузных каналах отвечающих асимметричным модам электронной плотности. Этот эффект особенно актуален для хороших проводников, где флуктуации зарядовой плотности обычно запрещены Кулоновским взаимодействием. Принципиально новый предсказываемый эффект касается поглощения за счет возбуждения диффузии спиновой плотности, который может иметь место во внешнем магнитном поле или в ферромагнетиках (раздел 3.3). Рассмотрен случай магнитного поля направленного в плоскости двумерного образца, в котором Зеемановское расщепление приводит к разным положениям Ферми уровня для разных спиновых поляризаций электронов, что приводит к асимметрии вершины

$$\Gamma_{\uparrow} - \Gamma_{\downarrow} = (\partial\Gamma/\partial\varepsilon_F)\mu H. \quad (9)$$

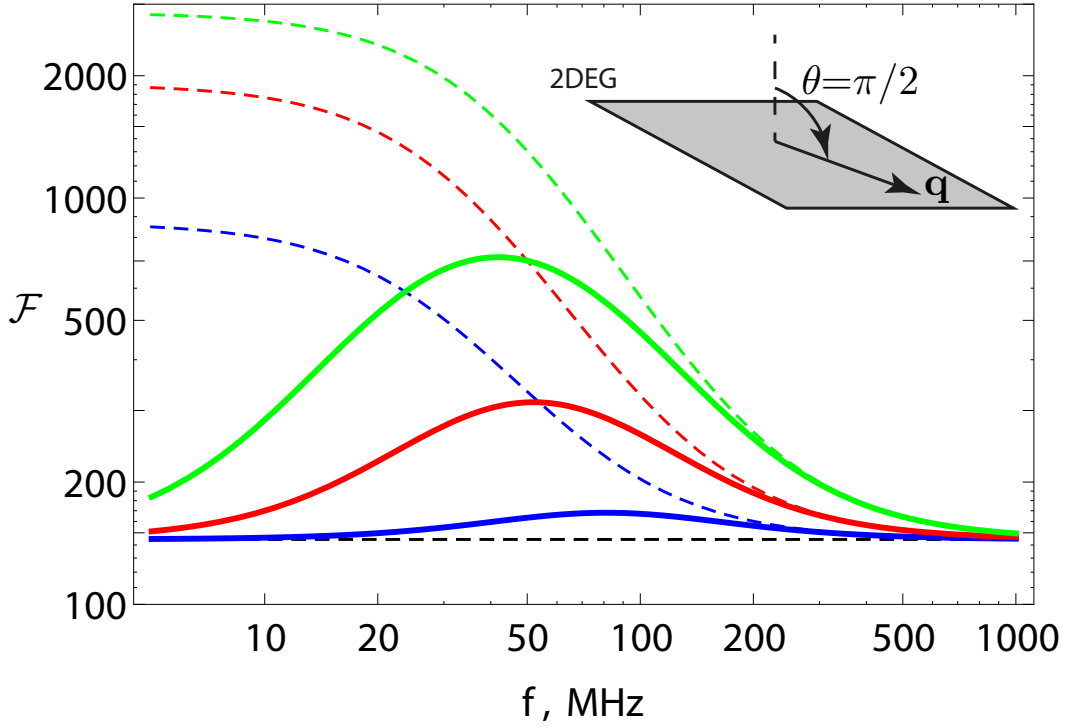


Рис. 1: Полный фактор усиления  $\mathcal{F}_{n,l}^{n,\text{diff}} = \alpha_{n,\text{diff}}/\alpha_{n,l}$  для ультразвука, распространяющегося параллельно плоскости образца, двумерной пленки InSb. Магнитные поля 3 Т (синий), 5 Т (красный) и 7 Т (зеленый). Штриховые линии дают ответ в отсутствие спин-орбитального взаимодействия, в то время как сплошные линии учитывают спиновую релаксацию. Черная штриховая линия же дает поглощение ультразвука за счет зарядовой диффузии, описанной в главе 2,  $\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}$ , которое, как можно видеть, оказывается в приведенном случае весьма существенным.

По мере увеличения магнитного поля вклад спинового канала в поглощение ультразвука растет, тем не менее исчезая на самых сильных полях, когда электронный газ достигает состояния полной поляризации:

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,H}(q, h) \equiv \frac{\alpha_{n,H}}{\alpha_{n,l}} = 1 + \frac{v_F^2 h^2 (1 - h^2)}{v_s^2 + (Dq(1 - h^2))^2}, \quad (10)$$

где введено безразмерное магнитное поле  $h = \mu H / 2\varepsilon_F$ .

Поглощение ультразвука в спиновом канале чувствительно к спин-орбитальным эффектам, поскольку они приводят к релаксации спиновой поляризации. Проведен количественный расчет эффектов спин-орбитального взаимодействия в разделе 3.4. Эти эффекты сводятся к появлению эффективной

массы у пропагатора спиновой диффузии,

$$\frac{D_*q^2}{-i\omega + D_*q^2} \Rightarrow \frac{D_*q^2}{-i\omega + D_*q^2 + 1/2\tau_{so}}, \quad (11)$$

так что ответ для фактора усиления становится равным

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,\text{spin}+\text{SO}}(q, h) = 1 + \frac{q^2 v_F^2 h^2 (1 - h^2)}{(qv_s)^2 + (Dq^2(1 - h^2) + 1/2\tau_{so})^2}. \quad (12)$$

Поведение скорости поглощения как функции магнитного поля показано на Рис.1, где также учтены эффекты зарядового канала описанные в главе 2.

Наконец, в разделе 3.2 показано, что задача о вкладе диффузных каналов в поглощение ультразвука формулируется на языке чисто классических уравнений движения для сохраняющихся макроскопических величин,

$$\begin{cases} \partial_t n^{(i)} + \text{div} \mathbf{j}^{(i)} = 0, \\ \mathbf{j}^{(i)} = -D \nabla n^{(i)} - \kappa_i \mathbf{F}^{(i)}, \end{cases} \quad (13)$$

где индекс  $(i)$  нумерует ветви квазичастиц,  $n^{(i)}$  есть электронная плотность,  $\mathbf{j}^{(i)}$  есть квазичастичный ток,  $\kappa_i = \nu_i D_i$  подвижность,  $D_i$  коэффициент диффузии для  $i$ -й ветви,  $\mathbf{F}^{(i)} = -\nabla U^{(i)}$  есть сила и наконец  $U^{(i)}$  потенциальная энергия. Потенциальная энергия  $U^{(i)} = U_C + \Phi^{(i)}$  в Ур.(13) имеет два вклада, Кулоновский и фононный  $\Phi^{(i)} = \Gamma^{(i)} \text{div} \mathbf{u}$ ,

$$U^{(i)} = \int V_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_j \delta n^{(j)}(\mathbf{r}') + \Gamma^{(i)} \text{div} \mathbf{u}. \quad (14)$$

В этом разделе приведено решение этих макроскопических уравнений и показано, что ответ воспроизводит результаты диаграммного подхода.

В **четвертой главе** показано, что ультразвук в неупорядоченных проводниках и сверхпроводниках испытывает дополнительное поглощение благодаря взаимодействию модулирующей плотности решетки и газа термически возбужденных квазичастиц, которые находятся в неравновесных условиях по отношению к решетке из-за конечной частоты индуцированных акустической волной модулирующей. Этот эффект подобен случаю эффектов спиновой плотности, но главную

роль теперь исполняет мода плотности энергии. Ключевым моментом является то, что Кулоновское взаимодействие зануляет скалярную часть электрон-фононной вершины только на самой Ферми поверхности, так что вдали от нее на ненулевых электронных энергиях

$$\Gamma \sim \varepsilon \sim T. \quad (15)$$

Неравновесное распределение энергии квазичастиц тогда медленно релаксирует подобно тому, как это происходит в релаксации типа Мандельштама-Леонтовича. Эффект особенно силен в легированных полупроводниках при не слишком малом отношении  $T/E_F$  и частотах ультразвука  $\omega \ll T/\hbar$ . В разделе 4.2 выполнено последовательное вычисление на языке диаграммной техники для нормального состояния, которое дает для фактора усиления

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,d} \equiv \frac{\alpha_{n,d}}{\alpha_{n,l}} = \frac{\pi^2}{3c_l} \left( \frac{\varkappa T}{p_F s} \right)^2 \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + \omega^2}; \quad \omega_c = \frac{s^2}{D}. \quad (16)$$

В частности оценено, что поглощение ультразвука в легированном Si будет сильнее на фактор порядка 100 благодаря этому механизму. Частотная зависимость скорости поглощения ультразвука  $\alpha(\omega)$  содержит типичную частоту кроссовера  $\omega_c$  (как видно из Ур.(16)), которая явно зависит от коэффициента электронной диффузии  $D$ . Иными словами, измерения  $\alpha(\omega)$  могут быть использованы для определения  $D$ . Подобное явление существует и в сверхпроводниках, как это показано в разделе 4.3; для обычного  $s$ -волнового сверхпроводника поглощение в канале диффузии энергии обычно слабое, но может быть важным для материалов с очень низкой электронной плотностью вблизи кроссовера BCS-BEC, как например недавно открытого сверхпроводника UPtBi.

В разделе 4.4 рассмотрена модель сильно анизотропного d-wave сверхпроводника, когда параметр порядка зависит от направления импульса (Рис.2) как

$$\Delta(\mathbf{p}) = \Delta_0(\cos p_x a - \cos p_y a), \quad (17)$$

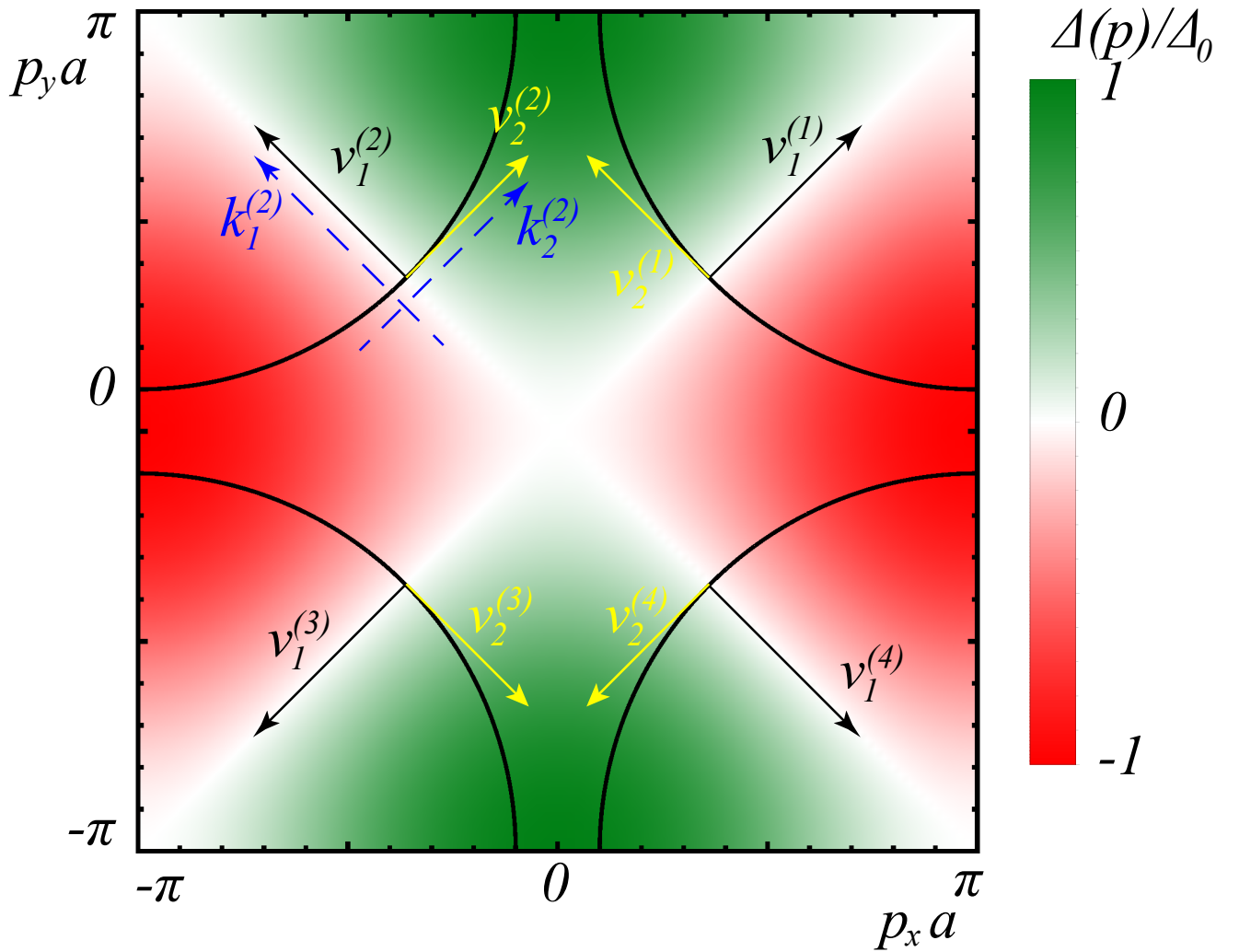


Рис. 2: Схематическое изображение Ферми поверхности d-wave сверхпроводника. Фоновый цвет представляет угловую зависимость параметра порядка  $\Delta(\mathbf{p})$ , которая обладает четырьмя узловыми направлениями на поверхности Ферми. Каждый узел имеет собственную Ферми  $\mathbf{v}_F = d\xi/d\mathbf{p}$  и "целевую"  $\mathbf{v}_g = d\Delta/d\mathbf{p}$  скорости. Для удобства мы выбираем четыре системы отсчета  $(k_1, k_2)^{(i)}$  (для ясности изображена только одна) вокруг каждого узла, с осями сонаправленными с локальными Ферми и  $\Delta$ -скоростями электронов, в то время как  $x, y$  оси совпадают с  $[100]$  и  $[010]$  кристаллическими осями;  $a$  есть постоянная решетки.

где  $a$  есть постоянная решетки. При низких температурах  $T \ll \Delta_0$  такой параметр порядка приводит к угловой зависимости затухания ультразвука для локальных процессов. В то же время, вклад канала диффузии энергии оказывается изотропным.

В чистом d-wave сверхпроводнике одночастичная функция Грина есть

$$\check{G}_{\alpha\beta}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -i \langle \Psi_\alpha \Psi_\beta^+ \rangle = [(\varepsilon + i0)\check{\tau}_3 - \xi - (i\check{\tau}_2)\Delta]^{-1}. \quad (18)$$

В d-wave сверхпроводящем состоянии Ферми поверхность квазичастиц состоит из 4 точек для четырех различных направлений импульса, при которых щель обращается в нуль, см. (Рис.2). Около этих направлений спектр может быть линеаризован:

$$\xi = v_F k_1, \quad \Delta = v_g k_2, \quad (19)$$

где импульс  $\mathbf{k}$  измеряется относительно выбранного узла,  $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{node}$ , причем базис отдельный для каждого узла(см. Рис.2). Из-за наличия низколежащих возбуждений, все тепловые эффекты при  $T \ll T_c$  пропорциональны степеням  $T$ , а не экспоненциально малы как в s-wave случае. Случайный потенциал рассматривается в приближении белого шума,

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = u\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (20)$$

Рассеяние на беспорядке приводит к перенормировке электронного пропагатора, генерируя как скорость рассеяния  $\gamma$ , так и перенормировку энергии,  $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon}$ .

В самосогласованном Борновском приближении

$$\langle \check{G}_{\alpha\beta}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle = [(\tilde{\varepsilon} + i\gamma)\check{\tau}_3 - \xi\check{\tau}_0 + (i\check{\tau}_2)\Delta]^{-1}, \quad (21)$$

где  $\tilde{\varepsilon}$  по сути описывает перенормировку электронного вычета  $Z$ ,

$$\varepsilon \equiv Z(\varepsilon)\tilde{\varepsilon}(\varepsilon). \quad (22)$$

В итоге получается привычное уравнение самосогласования

$$\check{\Sigma}^R(\varepsilon) = u \int (d\mathbf{p}) \check{G}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \quad (23)$$

$$= \int (d\mathbf{p}) \frac{(\varepsilon_* + i\gamma)\check{\tau}_3 + \xi - (i\check{\tau}_2)\Delta}{(\varepsilon_* + i\gamma)^2 - \Delta^2 - \xi^2}. \quad (24)$$



Искомые величины  $\gamma$  и  $\varepsilon_*$  в итоге должны определяться из уравнений самосогласования [14]

$$1 = K \left( \frac{\varepsilon_*}{\gamma} \arctan \frac{\varepsilon_*}{\gamma} + \ln \frac{\Delta_0}{\sqrt{\varepsilon_*^2 + \gamma^2}} \right), \quad (25)$$

$$\varepsilon = K \frac{\varepsilon_*^2 + \gamma^2}{\gamma} \arctan \frac{\varepsilon_*}{\gamma}, \quad (26)$$

где  $K$  есть безразмерная константа, отвечающая силе беспорядка

$$K = \frac{Nu}{2\pi v_F v_g} \equiv N \frac{v_F}{v_g} G_n^{-1}. \quad (27)$$

Здесь  $N$  есть число долин ( $N = 4$ ), и  $G_n$  есть безразмерный кондактанс в нормальном состоянии, из расчета на один слой (в единицах  $e^2/\hbar$ ). Самосогласованное Борновское приближении верно покуда  $K \ll 1$ ; так как  $v_F/v_g$  является большим параметром (например для BSCCO сверхпроводников это отношение порядка 20 [15]), то кондактанс в нормальном состоянии должен быть достаточно большим ( $G_n \geq 100$ ) для того, чтобы этот подход работал.

Опуская подробности вычислений, для локального канала получен результат

$$\alpha_{d,l} = \frac{F(\theta)}{2\pi^2} \frac{v_F}{v_g} \frac{p_F^2 \omega^2}{\rho_m v_s^2} \ln \frac{T}{\gamma_0}, \quad (28)$$

где функция

$$F(\theta) = \sin^2 2\theta + \left( \frac{v_g}{v_F} \right)^2 \cos^2 2\theta. \quad (29)$$

Полученная скорость поглощения обладает необычным логарифмическим поведением  $\propto \ln(T/\gamma_0)$  которое не соответствует наивным ожиданиям для случая линейной плотности состояний.

Вклад диффузных процессов возможно разбить на электронные вклады отдельных энергий,

$$\alpha_{d,d}(\omega) = \int_0^\infty \left( d\varepsilon \frac{\partial f(\varepsilon, T)}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_{d,d}^{(\varepsilon)}(\omega), \quad (30)$$

где

$$\alpha_{d,d}^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{v_F}{v_g} \left( 1 + \frac{Z(\varepsilon)}{K} \right) \frac{\varepsilon^2}{\rho_m s^4} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2/\omega_{c,d}^2(\varepsilon)} \quad (31)$$

с частотой кроссовера  $\omega_{c,d}(\varepsilon) = s^2/D_d^{(\varepsilon)}$ . Эффективная частота кроссовера, которая определяет итоговый ответ следующий из (30), есть

$$\omega_{c,d}(T) = \frac{\pi s^2}{2v_F^2} \frac{KT}{[1 - K \ln(\Delta_0/T)]^3}, \quad T \gg \gamma_0, \quad (32)$$

где в (32) использовано тождество  $K \ln(T/\gamma_0) \equiv 1 - K \ln(\Delta_0/T)$ .

При низких температурах полная скорость поглощения ультразвука имеет  $\propto T^2 \ln T$  температурную зависимость,

$$\alpha_{d,d}(\omega) = \frac{1}{3} \frac{v_F}{v_g} \frac{T^2 \omega^2}{\rho_m s^4} \ln(T/\gamma_0), \quad \omega \ll \omega_{c,d}(T), \quad (33)$$

в то время как на высоких частотах он ведет себя грубо говоря как  $\propto T^4$ ,

$$\alpha_{d,d}(\omega) = \frac{7\pi^4}{60\rho_m v_F^3 v_g} \frac{KT^4}{[1 - K \ln(\Delta_0/T)]^5}, \quad \omega \gg \omega_{c,d}(T).$$

Две дополнительные степени температуры,  $\propto T^4$  по сравнению с  $\propto T^2$  в нормальном состоянии, есть результат линейной плотности состояний на высоких энергиях,  $\nu_d(\varepsilon) \propto \varepsilon$ , с точностью до логарифмического фактора. Заметим, что энергетическая зависимость коэффициента диффузии имеет то же происхождение,  $D_d^{(\varepsilon)} \propto \gamma(\varepsilon) \propto \nu_d^{-1}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-1}$ .

Вклад диффузного канала особенно выражен в направлениях минимумов поглощения в локальном канале (Рис.2, формула 28). Для таких направлений на самых низких частотах, когда  $\omega \leq \omega_{c,d}$ , результат для отношение вкладов в поглощение ультразвука от E-диффузного и локального каналов подобен этому же отношению в нормальной фазе:

$$\frac{\alpha_{d,d}}{(\alpha_{d,l})_{min}} = \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{v_F}{v_g} \right)^2 \frac{T^2}{p_F^2 s^2}. \quad (34)$$

Для более высоких частот  $\omega \gg \omega_{c,d}$  получается

$$\frac{\alpha_{d,d}}{(\alpha_{d,l})_{min}} = \frac{14\pi^4}{15} \left( \frac{v_F}{v_g} \right)^2 \frac{T^2}{p_F^2 s^2} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2, \quad (35)$$

Используя параметры для BSCCO сплавов [15–18], оценено отношение (изотропной) скорости поглощения в диффузном канале (34) к скорости поглощения в локальном канале в направлениях распространения ультразвука, где она

минимальна:

$$\frac{\alpha_{d,d}}{(\alpha_{d,l})_{min}} \approx 10, \quad f = 2\pi\omega \lesssim 1GHz. \quad (36)$$

Здесь использованы следующие значения релевантных параметров:  $n = 5 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ ,  $v_F = 2.5 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$ ,  $v_F/v_g = 20$ ,  $T = 10 \text{ K}$ , скорость рассеяния на примесях  $\gamma_0 = 1 \text{ K}$  и скорость звука  $s = 4.6 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$ .

Возможность извлекать электронные параметры такие как коэффициент диффузии  $D$  из измерений  $\alpha(\omega)$  в  $d$ -волновом случае особенно интересна, поскольку они обладают нетривиальными зависимостями от температуры и беспорядка, благодаря квантовой критичности  $d$ -волнового состояния [19].

В **пятой главе** рассматривается псевдощелевой сверхпроводник при низких температурах гораздо меньше критической  $T \ll T_c$ . Рассматривается модель, сформулированная на языке “псевдоспинов”  $\frac{1}{2}$ , впервые предложенной Андерсоном в работе [21]:

$$H[\mathbf{S}_i] = -2 \sum_{i=1}^N \xi_i S_i^z - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} [S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-]. \quad (37)$$

Здесь  $S_i^+ = S_i^x + iS_i^y$  и  $S_i^- = S_i^x - iS_i^y$  являются операторами, создающими (аннигилирующими) пару электронов на заполненном  $i$ -ом локализованном состоянии в рамках задачи о свободных электронах (без учета электрон-электронного взаимодействия), в то время как  $S_i^z + 1/2$  измеряет число этих пар. Соответственно  $2\xi_i$  есть локальная энергия Куперовской пары сидящей на “узле”  $i$ . Предполагается, что узлы  $i$  выстроены в кубическую решетку с элементарной ячейкой размера  $a$ . Гамильтониан (37) действует в редуцированном Гильбертовом пространстве, порожденным локализованными электронными парами с полным спином равным нулю; возможность одноэлектронного заполнения уровней исключена благодаря большой энергии  $\Delta_P \gg \Delta$  с этим связанной.

Значения  $\xi_i$  случайно распределены с вероятностью  $p(\xi) = (2W)^{-1}\Theta(W - |\xi|)$  типа ступеньки, с энергиями в интервале  $\xi \in (-W, W)$ . Это подразумевает эффективную плотность состояний  $\nu = 1/(2Wa^3)$ . Второй член уравнения

(37) описывает прыжки Куперовских пар между орбиталями, или, что эквивалентно, взаимодействие между псевдоспинами. В длинноволновом пределе это взаимодействие (его Фурье образ) можно разложить по степеням малого импульса  $\mathbf{k}$ ,

$$J(\mathbf{k}) = g [1 - R^2 k^2 + O(k^4)], \quad (38)$$

где  $g \equiv J(\mathbf{0})$  есть полная сила взаимодействия (со всеми соседями) и  $R$  можно понимать как типичный радиус взаимодействия (длину прыжка Куперовской пары). Предполагается, что радиус взаимодействия (прыжка) очень большой  $R \gg a$ , и вычисления ведутся в приближении среднего поля основанным на этом неравенстве. В этом смысле подход эквивалентен обычной квазиклассической теории сверхпроводимости.

Для решения поставленной в пятой главе задачи использовано представление Федотова-Попова для операторов спина- $\frac{1}{2}$ , которое полезно для построения диаграммного подхода к изучению коллективных мод в упорядоченном состоянии. В работе [23] (которая была позднее несколько обобщена и сформулирована в реальном времени [24]) было показано, что статсумма взаимодействующей спиновой системы может быть строго (без каких-либо приближений) преобразована с помощью представления спиновых операторов через специальный тип фермионных операторов:

$$S_i^\alpha = (1/2)\psi_i^\dagger \sigma^\alpha \psi_i, \quad (39)$$

где  $\sigma^\alpha$  три матрицы Паули ( $\alpha=1,2,3$ ) и (антикоммутирующие) двухкомпонентные спиноры  $\psi(\tau)$ ,  $\psi^\dagger(\tau)$  подчиняются следующим граничным условиям в мнимом Мацубаровском времени:  $\psi(\tau + \beta) = i\psi(\tau)$ ,  $\psi^\dagger(\tau + \beta) = -i\psi^\dagger(\tau)$ , где  $\beta = \hbar/T$ . В работе [24], такие модифицированные фермионы предложено называть “семионами”.

Используя представление (39), исходный Гамильтониан переписывается как

$$H = - \sum_i \psi_i^+ \xi_i \sigma^z \psi_i - \frac{1}{4} \sum_{i,j} J_{ij} (\psi_i^\dagger \sigma^\alpha \psi_i) (\psi_j^+ \sigma^\alpha \psi_j), \quad (40)$$

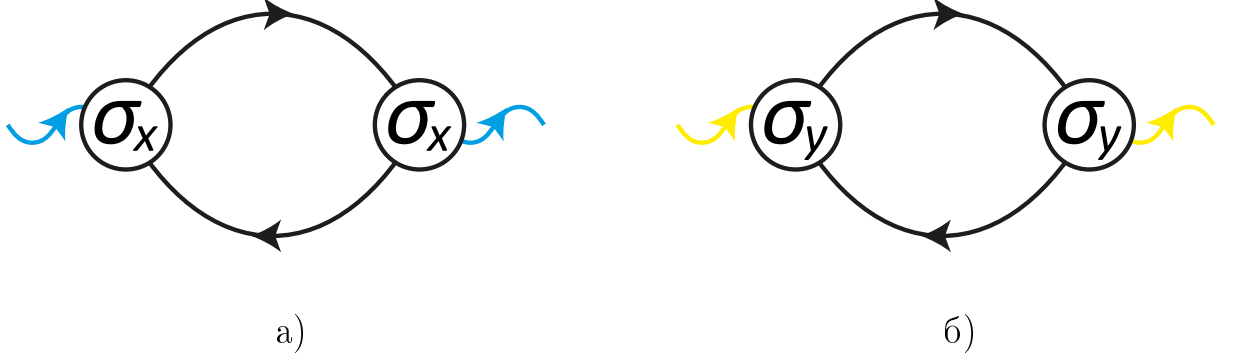


Рис. 3: Собственная энергия коллективной сверхпроводящей моды (амплитудной слева, синие внешние линии и фазовой справа, желтые линии). Здесь черные линии обозначают семионные пропагаторы.

где в члене со взаимодействием индекс  $\alpha = x, y$ . Далее вводится комплексное поле параметра порядка  $\Delta$  с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича и после этого интегрируется по семионным полям. Это приводит к эффективному действию во мнимом времени:

$$\mathcal{A}[\Delta] = -\text{Tr} [\Delta^* J^{-1} \Delta] + \text{Tr} \ln \left[ i\varepsilon_l + \xi\sigma^z + \frac{1}{2}(\Delta\sigma^- + \Delta^*\sigma^+) \right]. \quad (41)$$

Мацубаровские энергии здесь семионного типа,  $\varepsilon_l = 2\pi T(l + 1/4)$ , в то время как след берется по всем пространствам. Это действие является краеугольным камнем пятой главы.

В сверхпроводящей фазе, при температурах  $T < T_c$ , симметрия нарушена и флуктуации параметра порядка вокруг ненулевого среднего значения можно параметризовать как

$$\Delta = (1 + \eta)\Delta_0 e^{i\varphi}, \quad (42)$$

явно выделяя две коллективные моды: массивную амплитудную  $\eta$  (Андерсон-Хиггсовскую) и безмассовую Голдстоуновскую, фазовую  $\phi$ .

Действие (41) можно разложить по флуктуациям вокруг основного состояния  $\Delta_0$ . Квадратическая Гауссова часть описывает динамику коллективных

мод. После разложения, действие дает для амплитудного пропагатора

$$(L_\eta^R(\Omega, \mathbf{Q}))^{-1} = -\nu\Delta^2 \left[ i\pi\sqrt{\frac{\Omega - 2\Delta}{4\Delta}} + \frac{v^2k^2}{4\Delta^2} \right], \quad (43)$$

$$(\Omega > 2\Delta, |\Omega - 2\Delta| \ll \Delta)$$

а для фазового

$$(L_\phi^R(i\Omega_n, \mathbf{k}))^{-1} = -\frac{\nu}{4} [-(\Omega + i0)^2 + v^2k^2]. \quad (44)$$

Взаимодействие с продольными фононами вводится посредством модуляций амплитуды перескока Куперовской пары (то есть взаимодействия псевдоспинов) как

$$H_{\text{e-ph}}[\mathbf{S}_i] = \kappa \sum_{i,j=1}^N (J_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}) [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y] \quad (45)$$

с константой взаимодействия  $\kappa$ , которая обычно порядка единицы  $\kappa \sim 1$ . Такая модель электрон-фононного взаимодействия также находится в очень близкой аналогии с электрон-фононным взаимодействии, описанным в главе 4 для слабонеупорядоченных сверхпроводников. А именно, в адиабатическом пределе  $\omega, q \rightarrow 0$  влияние акустической волны сводится к модуляциям безразмерной константы связи

$$\lambda \rightarrow \lambda(1 - \kappa \operatorname{div} \mathbf{u}). \quad (46)$$

Важнейшим следствием таких модуляций константы взаимодействия  $\lambda$  является изменение параметра порядка  $\Delta_0$  в основном состоянии, из-за экспоненциальной чувствительности последнего:

$$\Delta = 2We^{-1/\lambda} \rightarrow \Delta \left( 1 + \frac{\kappa}{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{u} \right). \quad (47)$$

Используя явные выражения для амплитудного (43) и фазового (44) пропагаторов, получено действие, описывающее электрон-фононное взаимодействие

$$\mathcal{A}_{\text{e-ph}}[\Delta, \mathbf{u}] = -\operatorname{Tr} (\Gamma_\eta \eta^2 + \Gamma_\phi \phi^2) \delta\Delta, \quad (48)$$

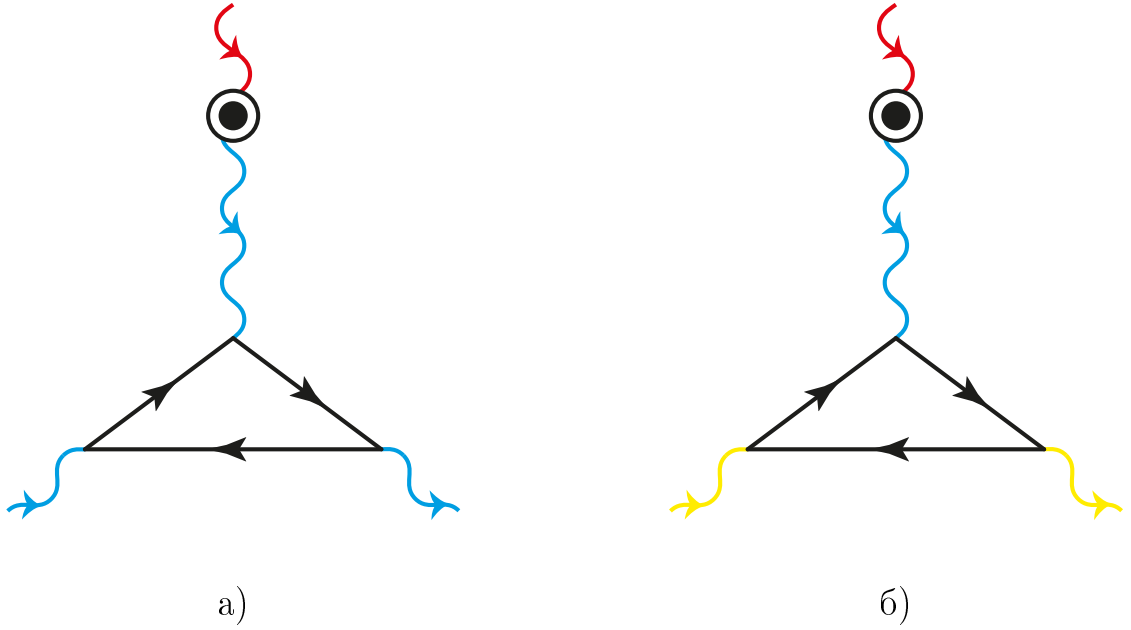


Рис. 4: Вершина взаимодействия фонон-коллективные-сверхпроводящие моды. Слева изображена вершина конверсии фонона в две амплитудные моды, а справа в две фазовые; черные линии в треугольнике являются семионными пропагаторами.

где  $\delta\Delta = (\kappa/\lambda)\Delta\text{div}\mathbf{u}$  обозначает изменение параметра порядка при деформации решетки и  $\Gamma_{\eta(\phi)}$  определяются обратными пропагаторами с помощью тождества, подобному тождеству Уорда в электродинамике,

$$\Gamma_{\eta(\phi)} = \frac{\delta L_{\eta(\phi)}^{-1}}{\delta\Delta}. \quad (49)$$

Опуская детали дальнейших вычислений (которые можно найти в тексте диссертации), для вклада фазовой моды в поглощение ультразвука получен результат

$$\alpha_{\text{ph}-\phi} = \frac{2\pi^4\kappa_*^2}{15} \frac{T^4}{\rho_m s v^4} \omega, \quad (50)$$

а для амплитудной

$$\alpha_{\text{ph}-\eta} = \frac{64\sqrt{\pi}}{3} \kappa_*^2 \frac{\Delta^5}{\rho_m s^2 v^3} \left(\frac{\Delta}{T}\right) \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^{7/4} e^{-2\Delta/T} \quad (51)$$

Сравнивая этот вклад с фазонным (50), мы видим, что фазовый и амплитудный механизмы приводят к весьма разным функциональным зависимостям скорости поглощения ультразвука от частоты  $\omega$  и температуры  $T$ . В частности, амплитудный вклад ведет себя как  $\omega^{7/4}$ , в то время как фазовый не зависит от

частоты. Отношение вкладов получается равным

$$\frac{\alpha_{\text{ph}-\eta}}{\alpha_{\text{ph}-\phi}} = \underbrace{\frac{480}{\pi^{7/2}} \left(\frac{v}{s}\right)}_{=8.73} \left(\frac{\Delta}{T}\right)^5 \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^{3/4} e^{-2\Delta/T}, \quad (52)$$

из которого видно, что возникает кроссовер как в частотном, так и в температурном поведении поглощения ультразвука. Для частотного кроссовера мы имеем

$$\omega_* = \Delta \left(\frac{\pi^{7/2} s}{480 v}\right)^{4/3} \left(\frac{T}{\Delta}\right)^{20/3} e^{8\Delta/3T} : \quad \begin{array}{l} \omega > \omega_* \text{ доминирует амплитуда} \\ \omega < \omega_* \text{ доминирует фаза} \end{array}, \quad (53)$$

в то время как температурный кроссовер происходит при температуре (с логарифмической точностью)

$$T_* = \frac{2\Delta}{\ln\left(\frac{480}{\pi^{7/2}} \left(\frac{v}{s}\right) \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^{3/4}\right)} : \quad \begin{array}{l} T > T_* \text{ доминирует амплитуда} \\ T < T_* \text{ доминирует фаза} \end{array}, \quad (54)$$

Обратим особое внимание на нетривиальные температурные зависимости кроссоверных частоты и температуры  $\omega_*$ ,  $T_*$ . В частности, частота кроссовера имеет нетривиальную экспоненту с “активационной энергией”  $(8/3)\Delta$ .

В асимптотическом пределе  $T/\Delta \rightarrow 0$ , фазовый вклад доминирует, хотя есть небольшое окно относительно малых  $T/\Delta \ll 1$ , где главный вклад дается амплитудной модой. Несмотря на это, фазовая мода на самом деле является артефактом модели с полностью выключенным Кулоновским взаимодействием. Даже относительно слабое дальнедействующее Кулоновское взаимодействие отодвигает энергии самых мягких коллективных мод на энергию  $2\Delta$ . Это показано в разделе 5.7 посредством включения Кулоновского скалярного потенциала  $\Phi$  в Гамильтониан системы (37) как

$$H[\mathbf{S}_i] = -2 \sum_{i=1}^N (\xi_i + \Phi_i) S_i^z - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} [S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-] + \sum_{i < j} \Phi_i \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\right)^{-1} \Phi_j, \quad (55)$$

где в последнем члене подразумевается матричное обращение и он описывает коррелятор скалярного потенциала (обычный закон Кулона с диэлектрической



постоянной  $\epsilon$ ). В тексте диссертации показано, что для типичных параметров такая модификация Гамильтониана приводит к замораживанию фазовой моды по механизму Андерсона-Хиггса, за счет перемешивания фазонного (Голдстоуновского бозона) и фотонного полей.

Наконец, в **заключении** сформулированы выводы следующие из диссертационной работы.

## Работы автора по теме диссертации

1. A.V. Shtyk, M.V. Feigel'man, V.E. Kravtsov, Magnetic Field-Induced Giant Enhancement of Electron-Phonon Energy Transfer in Strongly Disordered Conductors, *Phys. Rev. Lett.* 111, 166603 (2013)
2. A. Shtyk, M. Feigel'man, Ultrasonic attenuation via energy diffusion channel in disordered conductors, *Phys. Rev. B* 92, 195101 (2015)
3. A. Shtyk, M. Feigel'man, Ultrasonic attenuation in a pseudogapped superconductor – arXiv:1609.01683.

# Литература

- [1] A. B. Pippard. CXXII. Ultrasonic attenuation in metals. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 46(381):1104–1114, 1955.
- [2] А. И. Ахиезер, М. И. Каганов и Г. Я. Любарский. Затухание ультразвука в металлах. *ЖЭТФ*, 32:837, 1957.
- [3] E. I. Blount. Ultrasonic attenuation by electrons in metals. *Physical Review*, 114(2):418, 1959.
- [4] T. Tsuneto. Ultrasonic attenuation in superconductors. *Physical Review*, 121(2):402, 1961.
- [5] A. Schmid. Electron-phonon interaction in an impure metal. *Zeitschrift für Physik*, 259(5):421–436.
- [6] H. Fröhlich. Theory of the superconducting state. i. the ground state at the absolute zero of temperature. *Physical Review*, 79(5):845, 1950.
- [7] А. Б. Мигдал. Взаимодействие электронов с колебаниями решетки в нормальном металле. *ЖЭТФ*, 34(6):1438–1446, 1958.
- [8] A. V. Shtyk, M. V. Feigelman and V. E. Kravtsov. Magnetic field-induced giant enhancement of electron-phonon energy transfer in strongly disordered conductors. *Physical review letters*, 111(16):166603, 2013.

- [9] B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, I. V. Lerner and I. L. Aleiner. Jumps in current-voltage characteristics in disordered films. *Physical review letters*, 102(17):176803, 2009.
- [10] M. Ovadia, B. Sacépé, and D. Shahar. Electron-phonon decoupling in disordered insulators. *Phys. Rev. Lett.*, 102:176802, Apr 2009.
- [11] M. E. Gershenson, Yu. B. Khavin, D. Reuter, P. Schafmeister, and A. D. Wieck. Hot-electron effects in two-dimensional hopping with a large localization length. *Physical review letters*, 85(8):1718, 2000.
- [12] A. Savin, J. Pekola, M. Prunnila, J. Ahopelto and P. Kivinen. Electronic cooling and hot electron effects in heavily doped silicononinsulator film. *Physica Scripta*, 2004(T114):57, 2004.
- [13] A. Sergeev and V. Mitin. Breakdown of pippard ineffectiveness condition for phonon-electron scattering in micro and nanostructures. *EPL (Europhysics Letters)*, 51(6):641, 2000.
- [14] A. E. Koshelev and A. A. Varlamov. Mesoscopic variations of local density of states in disordered superconductors. *Physical Review B*, 85(21):214507, 2012.
- [15] J. Mesot, M. R. Norman, H. Ding, M. Randeria, J. C. Campuzano, A. Paramekanti, H. M. Fretwell, A. Kaminski, T. Takeuchi, T. Yokoya, et al. Superconducting gap anisotropy and quasiparticle interactions: a doping dependent photoemission study. *Physical review letters*, 83(4):840, 1999.
- [16] G. Heine, W. Lang, X. L. Wang, and S. X. Dou. Positive in-plane and negative out-of-plane magnetoresistance in the overdoped high-temperature superconductor  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ . *Physical Review B*, 59(17):11179, 1999.
- [17] L. Forro, D. Mandrus, C. Kendziora, L. Mihaly, and R. Reeder. Hall-effect

- measurements on superconducting and nonsuperconducting copper-oxide-based metals. *Physical Review B*, 42(13):8704, 1990.
- [18] J. Dominec. Ultrasonic and related experiments in high- $T_c$  superconductors. *Superconductor Science and Technology*, 6(3):153, 1993.
- [19] O. Vafek and Z. Tešanović. Quantum criticality of d-wave quasiparticles and superconducting phase fluctuations. *Physical review letters*, 91(23):237001, 2003.
- [20] M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. Cuevas. Fractal superconductivity near localization threshold. *Annals of Physics*, 325(7):1390–1478, 2010.
- [21] P. W. Anderson. Theory of dirty superconductors. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 11(1-2):26–30, 1959.
- [22] M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, and M. Mezard. Superconductor-insulator transition and energy localization. *Physical Review B*, 82(18):184534, 2010.
- [23] В. Н. Попов и С. А. Федотов. Метод функционального интегрирования и диаграммная техника для спиновых систем. *ЖЭТФ*, 94(3):183–194, 1988.
- [24] M. N. Kiselev and R. Oppermann. Schwinger-keldysh semionic approach for quantum spin systems. *Physical review letters*, 85(26):5631, 2000.