

На правах рукописи

Островский Павел Михайлович

Электронные свойства неупорядоченного графена

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Михаил Михайлович Глазов,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
ФГБУН Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе РАН,
ведущий научный сотрудник

Кирилл Эдуардович Нагаев,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
главный научный сотрудник

Владимир Исаакович Юдсон,
доктор физико-математических наук,
Международная лаборатория физики
конденсированного состояния
НИУ Высшая школа экономики,
главный научный сотрудник

Ведущая организация:

ФГБУ Петербургский институт ядерной
физики им. Б. П. Константинова
НИЦ «Курчатовский институт»

Защита состоится 28 июня 2019 г. в 11 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д.002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук, расположенном по адресу 142432, Московская обл., г. Черноголовка, проспект академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета <http://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/>

Автореферат разослан

« ____ » _____ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук

П. Г. Гриневич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Графен — двумерный материал, представляющий собой слой углерода толщиной в один атом. Он был впервые получен в изолированном виде Геймом и Новоселовым в 2004 году [1]. Последующие транспортные измерения [2–9] показали, что графен является проводником с уникальными физическими свойствами. В частности, минимальная электрическая проводимость графена близка к квантовому значению e^2/h и при этом очень слабо зависит от температуры. Кроме того, графен в сильном поперечном магнитном поле демонстрирует квантование холловской проводимости только с нечетными числами заполнения. Эти открытия вызвали сильнейший научный интерес и мотивировали огромное количество исследований. Уже в течение года после первоначального эксперимента были предложены многочисленные модели для объяснения транспортных, оптических и механических свойств графена (ссылки на соответствующие работы можно найти в обзорной статье [10]). Такой ажиотаж связан с тем, что графен существенно отличается от других известных материалов, в том числе тонких металлических пленок и систем с двумерным электронным газом; его физические свойства противоречат сложившимся представлениям о металлах и полупроводниках.

Графен представляет собой двумерный металл, в котором электронный спектр имеет линейную дисперсию и описывается безмассовым дираковским гамильтонианом [11]. (Обычно при обсуждении графена слово «безмассовый» опускают и говорят просто о дираковских электронах). В итоге поверхность Ферми вырождается в две изолированные точки, называемые долинами, причем вырождение спектра в этих двух точках обеспечивается симметрией шестиугольной решетки графена и остается устойчивым к большинству внешних воздействий. Тем самым по своим электронным свойствам графен находится ровно по середине между обычными металлами и полупроводниками. Фактическое отсутствие массы у электронов в графене позволяет изучать многие релятивистские эффекты методами физики конденсированных сред в хорошо контролируемых лабораторных условиях. Также одно из очевидных преимуществ графена состоит в том, что этот самый тонкий в природе двумерный материал позволяет непосредственный доступ к поверхности. Этим он сильно отличается от полупроводниковых гетероструктур, в которых двумерный электронный газ можно создать только в области интерфейса между различными слоями. Это свойство можно использовать в многочисленных приложениях, называемых общим словом «функционализация» графена. При помощи осаждения различных веществ на поверхность можно контролируемо модифицировать свойства графена. Например, на основе графена можно создавать газовые датчики, чувствительные к отдельным молекулам [12]. Другое многообещающее применение этой техники предполагает использование

графена для создания элементной базы наноэлектроники будущих поколений. Подробно ознакомиться с необыкновенной физикой графена можно по материалам нескольких обзорных статей [10; 13–16].

Одним из первых экспериментальных наблюдений в графене стала минимальная проводимость [2]. Было показано, что, когда концентрация носителей минимальна, проводимость графена близка к значению $4e^2/h$ и практически не зависит от температуры в диапазоне от 30 мК до 300 К. Такое поведение противоречит надежно установленным фактам физики неупорядоченных металлов. Когда проводимость двумерного металла близка к квантовому значению, становятся важны эффекты интерференции электронов, приводящие к их локализации. Это, помимо прочего, выражается в экспоненциальном росте сопротивления при низких температурах. Возможное объяснение отсутствия такого эффекта в графене составляет одну из целей диссертации.

Эффекты квантовой локализации были впервые предсказаны Андерсоном [17] более 60 лет назад. За прошедшие годы было достигнуто детальное понимание квантовых явлений, связанных с беспорядком. Основной вывод теории локализации состоит в том, что по мере увеличения силы беспорядка в металле происходит фазовый переход в состояние изолятора. Свойства этого перехода существенно зависят от геометрии. В частности, в одномерных и двумерных системах состояние изолятора возникает уже при сколь угодно слабом беспорядке. Строгое обоснование этого результата для одномерных проволок было дано Моттом и Тузом [18]; затем Таулесс показал, что это свойство сохраняется и в квазиодномерных (многоканальных) системах [19]. Позже, в работе [20], была предложена общая теория, основанная на скейлинговой гипотезе, которая предсказала полную локализацию также в двумерных пленках. Эти предсказания получили впоследствии более надежное обоснование в рамках микроскопической теории слабой локализации [21], которая положила начало новому разделу науки — мезоскопической физике. Теория слабой локализации доказала, что двумерный металл со сколь угодно слабым беспорядком, не нарушающим симметрию по спину и обращению времени, неизбежно переходит в состояние изолятора на экспоненциально больших масштабах. Параметр, который определяет длину локализации, связан с обычной классической проводимостью (в единицах e^2/h). Это означает, что для графена, безразмерная проводимость которого близка к единице, характерные особенности изолятора должны наблюдаться уже на масштабах порядка длины свободного пробега. Отсутствие таких эффектов является одной из загадок графена, требующих научного объяснения.

Дальнейшее развитие теории слабой локализации показало, что возможны различные типы поведения неупорядоченных металлов в зависимости от их симметрии. В случае когда гамильтониан системы инвариантен при обращении времени, но спиновая симметрия нарушена (например, за счет спин-орбитального взаимодействия), интерференционные эффекты имеют противоположный знак и приводят к антилокализации [22]. По мере увеличения

размеров образца его проводимость также растет. Однако если сила беспорядка превысит некоторое пороговое значение, по-прежнему возможен фазовый переход в состояние изолятора. На языке скейлинговой теории этот переход описывается неустойчивой фиксированной точкой. Поэтому, даже если предположить, что графен относится к классу систем с нарушенной спиновой симметрией, это не позволяет объяснить фактическое отсутствие температурной зависимости проводимости.

Скейлинговая гипотеза [20] получила еще более строгое обоснование в рамках нелинейной сигма-модели [23], которая позволила описать поправки слабой локализации во всех порядках на языке эффективной теории поля. Кроме того, это позволило построить полную классификацию всех неупорядоченных систем на основе их симметрии [24; 25]. Было показано, что существует всего десять различных классов симметрии, которые, помимо обращения времени и спина, зависят также от наличия особой зеркальной симметрии гамильтониана, характерной для сверхпроводников. Эти десять классов тесно связаны с соответствующими симметрическими пространствами, на которых определена сигма-модель.

Среди десяти классов симметрии есть три особых класса, называемые киральными. Определяющая черта киральных классов состоит в том, что гамильтониан можно представить в блочно антидиагональном виде. Например, это случается в модели прыжков между ближайшими соседями на решетке, состоящей из двух подрешеток. Шестиугольная структура решетки графена обладает именно таким свойством. Как показали Гаде и Вегнер [26; 27], в двумерных системах с киральной симметрией поправки слабой локализации равны нулю во всех порядках. Это значит, что проводимость такого металла может принимать любое фиксированное значение и не будет меняться с температурой. Однако чтобы применить эту модель для описания графена, нужно предположить, что беспорядок обладает очень специальными свойствами и не имеет диагональных матричных элементов в пространстве подрешеток. Другой отличительной особенностью киральных систем является сингулярная зависимость плотности состояний от энергии. В то время как эффекты интерференции электронов точно сокращаются в проводимости, они приводят к расходимости плотности состояний на нулевой энергии (в центре зоны). Подобное поведение до сих пор не наблюдалось в графене.

Помимо симметрии, локализационные свойства также зависят от топологии гамильтониана. Исторически первым примером топологических эффектов в неупорядоченных металлах стал квантовый эффект Холла [28; 29]. В сильном магнитном поле холловская проводимость двумерного электронного газа принимает дискретные значения, равные целым кратным e^2/h . Квантование холловской проводимости имеет беспрецедентную точность. В современных экспериментах она достигает двенадцати порядков, поэтому квантовый эффект Холла используется в метрологии в качестве эталона электрического сопротивления. По мере изменения концентрации носителей или магнитного

поля происходят скачкообразные переходы между соседними целыми значениями холловской проводимости. Эти скачки имеют все признаки квантовых фазовых переходов. Они характеризуются зависящей от температуры шириной и становятся резче по мере понижения температуры. Также в области перехода наблюдается конечная продольная проводимость, которая принимает универсальное значение, близкое к $0.5 e^2/h$. В режиме плато, то есть вдали от переходов, продольная проводимость оказывается экспоненциально малой за счет эффектов локализации.

Объяснение квантового эффекта Холла в рамках нелинейной сигма-модели было впервые предложено Праускеном [30]. Он показал, что при наличии внешнего магнитного поля в сигма-модели возникает дополнительный топологический член, который может существенно влиять на поведение проводимости, когда она близка к квантовому значению. Модификация скейлинговой теории локализации в магнитном поле [31] включает два параметра: продольную и холловскую проводимость, и хорошо описывает критические свойства переходов между плато. В случае графена квантовый эффект Холла также имеет ряд отличительных особенностей. Уже в самых первых экспериментах [3; 4] было показано, что холловская проводимость графена принимает лишь нечетные целые значения. Причина такого поведения состоит в специфическом топологическом свойстве дираковского гамильтониана, связанном с фазой Берри электронов. Этот вопрос подробно обсуждается в диссертации.

В последние годы были также предсказаны [32–36], а потом и экспериментально обнаружены [37; 38], другие топологические эффекты в неупорядоченных системах. В полупроводнике с чрезвычайно сильным спин-орбитальным взаимодействием может наблюдаться так называемый квантовый спин-Холл эффект. Это аналог квантового эффекта Холла, когда приложенное к образцу напряжение вызывает поперечный спиновый ток. Отношение этих величин, называемое спин-холловской проводимостью, принимает лишь одно универсальное значение. Еще более удивительное явление наблюдается в аналогичных трехмерных образцах. Они могут оказаться в состоянии изолятора, щель в котором целиком определяется сильным спин-орбитальным взаимодействием. При этом на поверхности этих материалов сохраняется металлическое состояние с электронами, подчиняющимися безмассовому дираковскому гамильтониану. Такие трехмерные вещества называются топологическими изоляторами [39; 40]. Их поверхностные состояния обладают рядом необычных свойств, связанных с топологией. Например, электроны на поверхности невозможно локализовать даже сильным беспорядком, при условии, что он не нарушает симметрию. Поверхностные состояния трехмерных топологических изоляторов очень похожи на графен, поскольку описываются аналогичным дираковским гамильтонианом. В некотором смысле графен можно рассматривать как бесконечно тонкий топологический изолятор, в котором две параллельные поверхности эффективно становятся двумя идентичными долинами в спектре.

Систематический учет топологических эффектов в локализации позволил построить полную классификацию возможных типов топологических изоляторов [41–43]. Она предсказывает, в каких из десяти классов симметрии неупорядоченных систем можно ожидать возникновение топологически нетривиального состояния. При этом была обнаружена циклическая зависимость топологических свойств неупорядоченных систем от их размерности с периодом восемь. Оказалось, что помимо уже известных двумерных (квантовый эффект Холла и спин-Холл эффект) и трехмерных топологических изоляторов, возможны также аналогичные одномерные системы, в которых можно создавать локализованные майорановские состояния [44; 45]. Применение общей топологической классификации неупорядоченных систем к графену также позволяет сделать глубокие выводы о его свойствах. Например, беспорядок, который не перемешивает долины, всегда приводит к топологическому состоянию графена, защищенному от локализации. Это утверждение является одним из результатов диссертации.

Причина особенных топологических свойств графена состоит в дираковском характере его электронного спектра. Известны также другие материалы с аналогичными свойствами. В частности, двумерные (слоистые) d -волновые сверхпроводники могут обладать особыми возбуждениями, которые также описываются безмассовым дираковским гамильтонианом вблизи узловых точек спектра. Теория подобных систем, в том числе для объяснения эффектов беспорядка, развивалась еще до открытия графена [46–48]. В частности, был разработан метод самосогласованной T -матрицы для описания влияния сильных и резонансных примесей на дираковские электроны [49–56]. Также была построена частичная классификация возможных состояний с учетом симметрии и топологии [48]. Несмотря на схожесть с графеном, у d -волновых сверхпроводников есть и ряд существенных отличий. Во-первых, их спектр обычно включает четыре узловые точки, а не две долины. Во-вторых, наличие сверхпроводящего конденсата кардинально влияет на транспортные свойства. И в-третьих, возможности экспериментов с необычными сверхпроводниками гораздо беднее по сравнению с графеном, не говоря уже о том, что на данный момент не существует материалов, для которых был бы надежно установлен d -волновой характер куперовского спаривания. Тем не менее мы будем использовать некоторые результаты теории необычных сверхпроводников при описании неупорядоченного графена.

Цель работы. Диссертационная работа преследует следующие цели: 1) построить теорию электронной проводимости в графене вдали от дираковской точки, 2) определить возможные механизмы локализации в графене, 3) построить теорию полного переноса заряда в графене в баллистическом режиме с примесями, 4) изучить влияние вакансий и других сильных примесей на спектральные и транспортные свойства графена, 5) развить теорию локализации в двумерных киральных металлах.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построена полная симметричная классификация возможных типов примесей в графене. На ее основе развита теория квазиклассического транспорта вдали от дираковской точки. Примеси избирательно нарушают некоторые симметрии дираковского гамильтониана, что приводит к различному поведению плотности состояний и проводимости графена в зависимости от типа примесей и концентрации носителей.
2. Изучены транспортные свойства графена в дираковской точке при наличии кирального беспорядка. Явно вычислена минимальная проводимость графена в этом случае с точным учетом всех квантовых эффектов.
3. Построена теория электронного транспорта в графене с перемешанными долинами. Показано, что особенности дираковского гамильтониана приводят к появлению топологических членов в действии сигма-модели и меняют локализационные свойства системы. В частности, продемонстрировано возникновение сигма-модели симплектического класса с θ -членом типа \mathbb{Z}_2 в случае плавного потенциального беспорядка. Этот дополнительный член делает локализационный переход невозможным.
4. Изучены транспортные свойства графена в поперечном магнитном поле. Выведена унитарная сигма-модель для произвольного параметра перемешивания долин. Найдена необычная связь между холловской проводимостью и топологическим углом θ , которая объясняет нечетное квантование холловской проводимости. Также показано, что при наличии кирального беспорядка квантование холловской проводимости в пределах нулевого уровня Ландау не происходит.
5. Подробно исследованы свойства чистого графена при двухконтактном измерении кондактанса. Найдена полная функция распределения прозрачностей как около дираковской точки, так и на больших энергиях. Рассмотрен металлический эффект близости — изменение локальной плотности состояний в графене вблизи контакта с металлом в зависимости от энергии и расстояния.
6. Развита последовательная теория баллистических эффектов слабого беспорядка. Найдена полная функция распределения коэффициентов прозрачности при наличии разных типов примесей. Также получена зависимость этой функции от энергии вблизи дираковской точки. Построена аналогичная теория в диффузном пределе и вычислены квантовые поправки к полной статистике переноса заряда.
7. Изучены свойства графена с резонансными потенциальными примесями. Выведена точная формула, выражающая кондактанс графена как

функцию положения каждой примеси. На основе этой формулы разработан чрезвычайно эффективный алгоритм численного моделирования транспортных свойств графена. Продемонстрирован переход из баллистического в диффузный режим и логарифмический рост кондактанса за счет эффектов антилокализации.

8. Построена теория электронного транспорта в графене с вакансиями. Показано, что значение кондактанса существенно зависит от распределения вакансий между шестью подрешетками. Проведено детальное сравнение аналитических результатов с численным моделированием транспортных свойств методом трансфер-матрицы. Найдены некоторые неустойчивые и устойчивые критические точки с разными значениями проводимости в зависимости от распределения вакансий. Продемонстрирован скейлинг между такими фиксированными точками.
9. Изучены транспортные свойства графена с сильными примесями во внешнем магнитном поле. Показано, что кондактанс графена может немонотонно зависеть от размеров образца вследствие различных точных или приближительных симметрий системы и соответствующих им фиксированных точек. В пределе самых больших размеров наблюдается либо полная локализация, либо критическое поведение, характерное для перехода квантового эффекта Холла, с проводимостью $\approx 2e^2/h$.
10. Построена квазиклассическая теория транспорта в графене с сильными примесями, расположенными в каждом третьем ряду шестиугольной решетки. Показано, что в этом случае электронный транспорт имеет супердиффузный характер в направлении рядов с проводимостью, которая растет пропорционально квадратному корню из длины образца. В то же время поперечная проводимость имеет обыкновенный диффузный характер и не меняется с длиной. Результаты подтверждены масштабным численным моделированием методом рекурсивных функций Грина.
11. Рассмотрены транспортные свойства двумерного кирального металла с беспорядком. Предложен новый механизм локализации в таких системах, основанный на динамике вихрей в соответствующей сигма-модели. Выведены критические свойства локализационного перехода. Также проанализирована структура вихрей, когда сигма-модель содержит дополнительные топологические члены. Показано, что в этом случае локализация при помощи вихрей становится неэффективной.
12. Построена теория квантовых эффектов в двумерном киральном металле с вакансиями. Показано, что классические флуктуации распределения вакансий между двумя подрешетками приводят к возникновению дополнительного релевантного члена в действии сигма-модели. Этот член

радикально меняет критические свойства вблизи центра зоны. В частности, корреляционная длина расходится на малых энергиях $\propto |\ln \epsilon|^{1/2}$. Также показано, что плотность состояний имеет особенность в этой области и расходится по закону $\propto \epsilon^{-1} |\ln \epsilon|^{-3/2}$.

Научная новизна и достоверность. Все результаты диссертационной работы получены впервые, ее выводы обоснованы надежностью применявшихся аналитических методов, согласием с теоретическими результатами, полученными в других работах, данными физических экспериментов, а также численного моделирования, выполненного как в самой диссертации, так и независимо другими авторами.

Методы исследования и практическая значимость. Все задачи диссертации связаны с электронными свойствам графена и многообразными эффектами беспорядка в нем. Для достижения поставленных целей требуется развитие особых методов исследования, применимых к дираковскому спектру и выходящих за рамки теории обычных металлов. Развитые в диссертационной работе методы могут быть использованы для описания широкого круга явлений в электронном транспорте в неупорядоченных двумерных и трехмерных электронных системах.

Построенная в диссертации классификация типов беспорядка в графене дает возможность определять характер примесей в экспериментально изучаемых образцах графена на основе их спектральных и транспортных характеристик в зависимости от концентрации носителей. Это позволяет устанавливать микроскопические свойства графена в различных экспериментальных условиях, а также предсказывать физические свойства графена для возможных разнообразных приложений в современной наноэлектронике.

Выведенные в диссертации матричные функции Грина в графене дают возможность вычислять характеристики баллистических образцов с любыми типами примесей, в том числе при наличии внешнего магнитного поля. Это также позволяет определить полную функцию распределения коэффициентов прохождения и тем самым вычислить любые транспортные параметры, включая кондактанс и мощность дробового шума.

Разработанный в диссертации метод развернутых функций Грина позволяет с беспрецедентной эффективностью рассчитывать любые транспортные характеристики неупорядоченных металлов. Этот метод может быть непосредственно обобщен для описания металлов с произвольным спектром и допускает включение любых типов примесей. Единственной характеристикой примеси, необходимой для применения метода, является ее T -матрица, которую можно в простейших случаях найти аналитически из решения стандартной задачи рассеяния. Для примесей сложной структуры и с сильными внутренними корреляциями возможно применение современных численных методов квантовой химии. Их результаты могут определить исходные параметры для применения

метода развернутых функций Грина. Тем самым можно совместить аккуратный учет квантовых эффектов на микроскопическом уровне с вычислением характеристик макроскопических образцов, включающих большое количество примесей.

Построенная в диссертации теория локализации в двумерных киральных металлах на основе динамики вихрей в сигма-модели впервые объяснила наблюдаемые в таких системах переходы в состояние изолятора. Она также может быть применена для изучения локализации в двумерных образцах симплектической симметрии с достаточно сильным беспорядком. Это, в свою очередь, позволяет определить особенности критического состояния в переходе квантового спин-Холл эффекта и на поверхности трехмерных топологических изоляторов.

Развитая в диссертации теория локализации в киральных металлах с вакансиями объясняет наблюдаемые в таких системах необычные критические свойства. Она позволяет одновременно учитывать эффекты классических флуктуаций и квантовой интерференции. Подобная ситуация возникает в моделях любой пространственной размерности с киральной симметрией, а также в сверхпроводниках с нарушенной спиновой симметрией. В последнем случае мезоскопические флуктуации примесей тесно связаны с локализованными майорановскими состояниями и представляют непосредственный интерес для возможного применения таких материалов в реализации квантовых вычислений.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в четырнадцать научных статьях, список которых приведен в конце автореферата. Все статьи опубликованы в ведущих международных журналах, входящих в систему Web of Science, Scopus и в перечень ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, двух приложений, заключения, списка публикаций автора по теме диссертации и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 227 страниц, включая 47 иллюстраций и 4 таблицы. Список литературы содержит 311 наименований.

Содержание работы

Во **введении** изложено современное состояние физики графена, неупорядоченных металлов и топологических изоляторов, обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, и перечислены основные результаты, охарактеризована новизна и практическая ценность развитых методов, а также раскрыто содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена построению модели беспорядка в графене и объяснению спектральных и транспортных свойств неупорядоченных образцов вдали от дираковской точки.

В **разделе 1.1** рассмотрена модель сильной связи на шестиугольной решетке графена и выведен безмассовый дираковский гамильтониан

$$H = v_0 \tau_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}. \quad (1)$$

Также определена модель потенциальных примесей произвольной силы, которые описываются матричными элементами потенциала на решетке

$$U_{\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \sum_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad U'_{\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \sum_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r} - \mathbf{m}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (2)$$

В самом общем случае на низких энергиях сила таких примесей задается тремя вещественными параметрами U_0 , U'_0 и U_K .

Дираковский гамильтониан обладает группой симметрии $SU(2)$ в пространстве долин, для которого мы используем матрицы Паули τ , а также симметрией по обращению времени и киральной симметрией:

$$T_0 : A \mapsto \sigma_y \tau_y A^* \sigma_y \tau_y, \quad C_0 : A \mapsto -\sigma_z \tau_z A \sigma_z \tau_z. \quad (3)$$

Более общая модель беспорядка включает операторы примесей произвольной матричной структуры, которые классифицируются в соответствии с тем, какие из вышеназванных симметрий или их комбинации они нарушают. Все возможные типы изотропного беспорядка перечислены в таблице 1.

Таблица 1 — Различные типы беспорядка в графене, соответствующие им амплитуды в гауссовой модели и симметрии.

Оператор	Сила	τ_{\perp}	τ_z	T_0	T_{\perp}	T_z	C_0	C_{\perp}	C_z	CT_0	CT_{\perp}	CT_z
$\sigma_0 \tau_0$	α_0	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
$\sigma_{\perp} \tau_{\perp}$	β_{\perp}	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+
$\sigma_{\perp} \tau_z$	γ_{\perp}	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+
$\sigma_z \tau_{\perp}$	β_z	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-
$\sigma_z \tau_z$	γ_z	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-
$\sigma_0 \tau_{\perp}$	β_0	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	+
$\sigma_0 \tau_z$	γ_0	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+
$\sigma_{\perp} \tau_0$	α_{\perp}	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-
$\sigma_z \tau_0$	α_z	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+

В **разделах 1.2 и 1.3** эффекты беспорядка изучаются в рамках приближения самосогласованной T -матрицы. Для потенциальных примесей средняя

T -матрица имеет вид

$$\langle T(\epsilon) \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{2U'_0}{1 - U'_0 g} + \frac{U_0 + U_K}{1 - (U_0 + U_K)g} + \frac{U_0 - U_K}{1 - (U_0 - U_K)g} \right] \quad (4)$$

и определяет собственную энергию электронов $\Sigma(\epsilon) = n_{\text{imp}} \langle T(\epsilon) \rangle$. Функция Грина в совпадающих точках дается выражением

$$g(\epsilon) = -\frac{\epsilon - \Sigma(\epsilon)}{4\pi v_0^2} \ln \frac{-\Delta^2}{[\epsilon - \Sigma(\epsilon)]^2}, \quad (5)$$

где Δ — масштаб ширины зоны.

При помощи такого приближения можно определить плотность состояний и проводимость вдали от дираковской точки. Для слабых потенциальных примесей уравнения самосогласованной T -матрицы сводятся к самосогласованному борновскому приближению и дают следующие квазиклассические результаты:

$$\rho_{\text{SCBA}}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\pi v_0^2} \left(1 + 2\alpha \ln \frac{\Delta}{\epsilon} \right), \quad \sigma_{\text{SCBA}}(\epsilon) = \frac{2e^2}{\pi h \alpha_{\text{tr}}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_{\text{tr}}} \ln \frac{\Delta}{\epsilon} \right). \quad (6)$$

Здесь введены два интегральных параметра для силы беспорядка, определяющие термодинамические и транспортные свойства,

$$\alpha = \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp} + \gamma_{\perp} + \alpha_z + \beta_z + \gamma_z, \quad (7)$$

$$\alpha_{\text{tr}} = \frac{1}{2} (\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp} + \gamma_{\perp} + \frac{3}{2} (\alpha_z + \beta_z + \gamma_z). \quad (8)$$

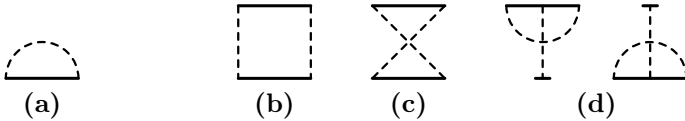


Рис. 1 — Однопетлевые диаграммы, перенормирующие (a) энергию и (b, c, d) силу беспорядка.

Оказывается, что в случае дираковского спектра графена самосогласованное борновское приближение обладает рядом недостатков и может использоваться лишь для качественного описания наблюдаемых явлений. Более точные результаты дает суммирование диаграмм при помощи ренорм-группы. Однопетлевая перенормировка беспорядка и энергии определяется диаграммами на рис. 1. В случае плавного потенциального беспорядка уравнения ренорм-группы имеют вид

$$\frac{d\tilde{\alpha}_0}{d \ln L} = 2\tilde{\alpha}_0^2, \quad \frac{d\tilde{\epsilon}}{d \ln L} = \tilde{\alpha}_0 \tilde{\epsilon}. \quad (9)$$

Решение этих уравнений дает следующий результат для плотности состояний и проводимости:

$$\rho(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\pi v_0^2} \left[1 - 2\alpha_0 \ln \frac{\Delta}{\epsilon} \right]^{-1}, \quad \sigma(\epsilon) = \frac{4e^2}{\pi h \alpha_0} \left[1 - 2\alpha_0 \ln \frac{\Delta}{\epsilon} \right]. \quad (10)$$

В разделе 1.4 изучен противоположный предел сильных (унитарных) примесей. В этом случае приближение самосогласованной T -матрицы количественно оправдано, а результаты выражаются через параметр безразмерной концентрации примесей

$$\eta = \frac{\pi n_{\text{imp}} v_0^2}{\Delta^2} \times \begin{cases} 1, & \text{короткие,} \\ 4, & \text{длинные.} \end{cases} \quad (11)$$

Два значения этого параметра соответствуют потенциалу примеси короткого и длинного радиуса на масштабе периода решетки. Плотность состояний и проводимость вдали от дираковской точки даются выражениями

$$\rho_U(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\pi v_0^2} \left[1 - \frac{\eta \Delta^2}{2\epsilon^2 \ln^2(\Delta/\epsilon)} \right], \quad \sigma_U(\epsilon) = \frac{8e^2 \epsilon^2}{\pi h \eta \Delta^2} \ln^2 \frac{\Delta}{\epsilon}. \quad (12)$$

Такая зависимость проводимости хорошо согласуется с экспериментальными результатами [3–8], в отличие от предела слабого беспорядка.

Одни и те же примеси могут эффективно быть слабыми или сильными в зависимости от энергии. На рис. 2 показана качественная фазовая диаграмма для этих двух пределов.

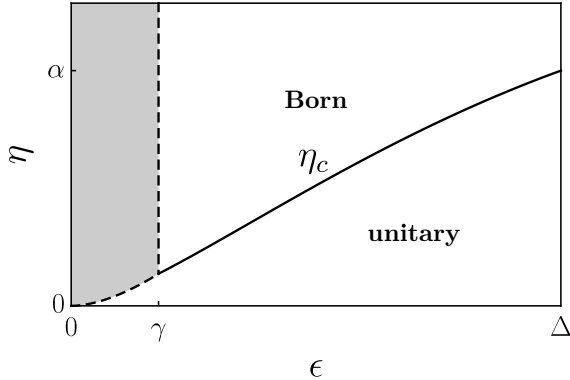


Рис. 2 — Фазовая диаграмма в плоскости ϵ - η при фиксированной силе примесей. Сплошная линия обозначает границу фаз $\eta_c(\epsilon) \sim (\alpha \epsilon^2 / \Delta^2) \ln^2(\Delta/\epsilon)$. При низких энергиях (серая область) становятся особенно важны интерференционные эффекты.

В разделе 1.5 рассмотрен особый случай кулоновских (заряженных) примесей, расположенных непосредственно в плоскости образца графена. Оказывается, что такие примеси автоматически попадают в область кроссовера между борновским и унитарным пределами, рис. 2. При этом проводимость оказывается линейной функцией концентрации электронов

$$\sigma \sim \frac{e^2 \epsilon^2}{\hbar n_{\text{имп}} v_0^2} \sim \frac{e^2 n_e}{\hbar n_{\text{имп}}}, \quad (13)$$

что также хорошо согласуется экспериментом.

Во второй главе изучаются транспортные свойства графена со слабым беспорядком вблизи дираковской точки.

В разделе 2.1 показано, что при наличии киральной симметрии беспорядок не приводит к локализации и минимальная проводимость графена принимает универсальное значение $4e^2/\pi h$. Для киральной симметрии C_z получено строгое доказательство сокращения всех диаграмм с примесными линиями. Симметрия C_z устанавливает связь между запаздывающей и опережающей функциями Грина

$$\sigma_z G^{R(A)}(\epsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_z = -G^{A(R)}(-\epsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (14)$$

Кроме того, компоненты оператора тока в графене также связаны тождеством

$$\sigma_z j^x = -j^x \sigma_z = ij^y. \quad (15)$$

Благодаря этим соотношениям можно записать формулу Кубо для проводимости только через запаздывающие функции

$$\sigma^{xx} = -\frac{1}{\pi} \sum_{\alpha=x,y} \int d^2(r-r') \text{Tr} \left[j^\alpha G^R(0; \mathbf{r}, \mathbf{r}') j^\alpha G^R(0; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \right]. \quad (16)$$

Это выражение должно обращаться в ноль из-за калибровочной инвариантности, однако в действительности результат не равен нулю благодаря квантовой аномалии. Все диаграммы с примесями обращаются в ноль, в то время как вклад нулевого порядка по силе беспорядка остается конечным:

$$\sigma = -\frac{16e^2 v_0^2}{h} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\delta^2}{(v_0^2 p^2 + \delta^2)^2} = \frac{4e^2}{\pi h}. \quad (17)$$

Любые поправки к этому значению экспоненциально малы по силе беспорядка и не могут быть найдены по теории возмущений.

В случае C_0 киральности аналогичное рассуждение не срабатывает, поэтому беспорядок может давать пертурбативные поправки к минимальной проводимости начиная с квадратичного порядка. Непосредственное вычисление всех диаграмм с двумя примесями дает

$$\delta\sigma^{(2)} = \frac{e^2}{\pi h} (\beta_0 - \beta_z)^2. \quad (18)$$

Более высокие члены разложения по малой силе беспорядка также конечны, а полный ряд таких поправок сходится. Истинное значение минимальной проводимости по-прежнему близко к $4e^2/\pi h$.

В разделе 2.2 рассмотрен случай беспорядка, не перемешивающего долины. Для его описания выведена эффективная сигма-модель и показано, что особенности дираковского гамильтониана приводят к появлению топологического члена в действии, который принимает значения из гомотопической группы π_2 многообразия сигма-модели.

В случае нарушенной симметрии по обращению времени получается сигма-модель унитарного класса с топологическим членом типа Праускена [30] и с коэффициентом $\theta = \pi/2$:

$$S[Q] = \frac{1}{4} \int d^2r \text{Str} \left[-\frac{\sigma_{xx}}{2} (\nabla Q)^2 + \left(\sigma_{xy} + \frac{1}{2} \right) Q \nabla_x Q \nabla_y Q \right]. \quad (19)$$

Это приводит к тому, что графен оказывается в критическом состоянии, характерном для перехода квантового эффекта Холла, без всякого магнитного поля.

Если симметрия по обращению времени не нарушена, получается сигма-модель симплектического класса, в действии которой также присутствует топологический член типа \mathbb{Z}_2 . Он определяет мнимую часть действия и в случае минимальной модели может быть записан в следующем явном виде:

$$\text{Im} S[Q] = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{8} \int d^2r \text{Str} [(\Lambda \pm 1) \tau_2 u_\alpha u_\beta]. \quad (20)$$

Здесь $\mathbf{u} = T \nabla T^{-1}$, $Q = T^{-1} \Lambda T$, а матрица τ_2 действует в пространстве частица–дырка, связанном с симметрией по обращению времени. Вывод сигма-модели с топологическим членом такого вида проделан впервые. Также доказано, что наличие этого члена предотвращает локализацию при сколь угодно сильном беспорядке. В обоих случаях унитарного и симплектического класса топологический член модифицирует скейлинговую функцию для проводимости как показано на рис. 3.

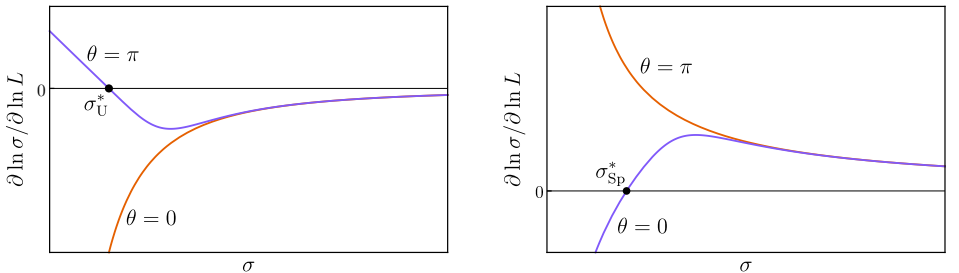


Рис. 3 — Схематические скейлинговые функции $\partial \ln \sigma / \partial \ln L$ в унитарном (левая панель) и симплектическом (правая панель) классах.

В разделе 2.3 показано, что особый вклад $\theta = \pi/2$ в коэффициент перед топологическим членом также сохраняется и при наличии внешнего магнитного поля. Это приводит к сдвигу на $1/2$ положений плато квантового эффекта Холла в графене с перемешанными долинами и тем самым объясняет нечетное квантование холловской проводимости.

Слабое перемешивание долин соответствует релевантному члену в действии сигма-модели

$$S[Q_K, Q_{K'}] = S[Q_K] + S[Q_{K'}] + \frac{\hbar\rho}{\tau_{\text{mix}}} \text{Str} Q_K Q_{K'}. \quad (21)$$

Этот член приводит к тому, что на больших масштабах матрицы $Q_{K,K'}$ в двух долинах оказываются равными, а аномальный член $\theta = \pi/2$ сокращается. В итоге возникают четные плато холловской проводимости, ширина которых, однако, может быть параметрически меньше, чем у четных. Ренорм-групповой поток продольной и холловской проводимости, а также зависимость последней от концентрации носителей, проиллюстрированы на рис. 4.

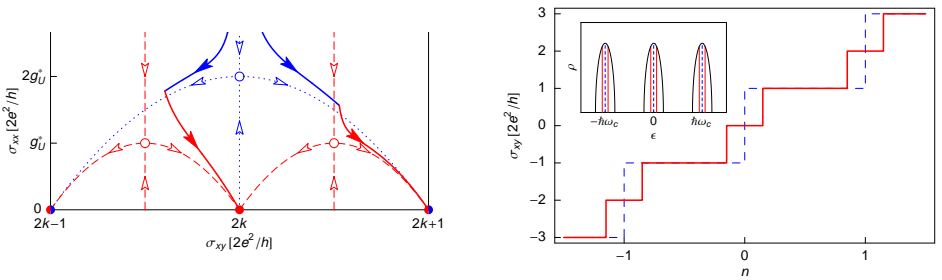


Рис. 4 — Левая панель: ренорм-групповой поток в координатах σ_{xx} и σ_{xy} в графене с разделенными (пунктирные линии) или перемешанными (штриховые линии) долинами. Сплошные линии показывают возможное направление потока к четному и нечетному плато. Правая панель: холловская проводимость как функция фактора заполнения. Вставка: уровни Ландау и делокализованные состояния.

Также показано, что в случае кирального беспорядка нулевой уровень Ландау остается вырожденным. При этом зависимость холловской проводимости от концентрации носителей имеет классический линейный характер в области заполнения этого уровня.

Третья глава посвящена изучению полной статистики переноса заряда в двухконтактном баллистическом образце графена.

В разделе 3.1 получена полная функция распределения коэффициентов прохождения в чистом графене при произвольной энергии и подробно проанализированы ее асимптотики на больших и малых энергиях. Оказывается, что на нулевой энергии (в дираковской точке), эта функция распределения по форме в точности воспроизводит распределение Дорохова [57], характерное

для неупорядоченных металлических проволок. Такое совпадение свойств чистого графена и грязного металла кажется случайным. Тем не менее поведение чистого графена в дираковской точке принято называть псевдодиффузным.

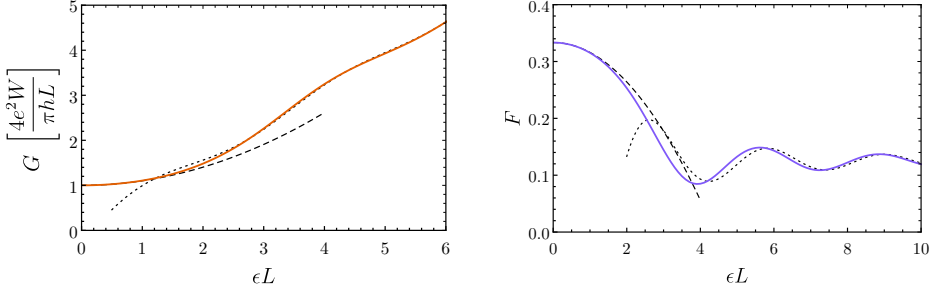


Рис. 5 — Зависимость кондактанса (левая панель) и фактора Фано (правая панель) чистого графена от энергии в пределе $W \gg L$. Асимптотики малых (22) и больших (24) энергий показаны штриховыми и пунктирными линиями.

Кондактанс и фактор Фано чистого образца длины L и ширины W показаны на рис. 5. Непосредственное решение уравнения Дирака на маленьких энергиях позволяет найти асимптотики этих величин

$$G = \frac{4e^2}{\pi h} \frac{W}{L} [1 + c_1(\epsilon L)^2], \quad c_1 = \frac{35\zeta(3)}{3\pi^2} - \frac{124\zeta(5)}{\pi^4} \approx 0.101, \quad (22a)$$

$$F = \frac{1}{3} [1 + c_2(\epsilon L)^2], \quad c_2 = -\frac{28\zeta(3)}{15\pi^2} - \frac{434\zeta(5)}{\pi^4} + \frac{4572\zeta(7)}{\pi^6} \approx -0.052. \quad (22b)$$

Функция распределения прозрачностей при малых энергиях имеет вид

$$P(T) = \frac{W}{2\pi L} \frac{1}{T\sqrt{1-T}} \left[1 + (\epsilon L)^2 \left(\frac{\sqrt{1-T}}{\operatorname{arch}^3(1/\sqrt{T})} - \frac{1+T}{2\operatorname{arch}^2(1/\sqrt{T})} \right) \right]. \quad (23)$$

В противоположном пределе больших энергий также можно вывести асимптотические выражения

$$G = \frac{e^2}{h} W \epsilon \left[1 + \frac{\sin(2\epsilon L - \pi/4)}{2\sqrt{\pi}(\epsilon L)^{3/2}} \right], \quad F = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{9\sin(2\epsilon L - \pi/4)}{2\sqrt{\pi}(\epsilon L)^{3/2}} \right], \quad (24)$$

$$P(T) = W \epsilon \left[\frac{K(T) - E(T)}{\pi^2 T \sqrt{1-T}} - \frac{\sin(2\epsilon L \sqrt{T} + \pi/4)}{\pi^{3/2} T^{1/4} (1-T) \sqrt{\epsilon L}} \right]. \quad (25)$$

В разделе 3.2 изучен металлический эффект близости — модификация плотности состояний в графене вблизи контакта с нормальным металлом. В образце конечной ширины наблюдается рост плотности состояний вблизи обоих

контактов, как показано на левой панели рис. 6. Для полубесконечного образца (или образца большой длины) плотность состояний вблизи металлического края описывается универсальной функцией параметра ϵx , составленного из энергии ϵ и расстояния x до границы с металлом.

$$\rho(\epsilon, x) = \frac{\epsilon}{2\pi} \left[1 - J_0(2\epsilon x) - Y_1(2\epsilon x) \right] = \begin{cases} (2\pi^2 x)^{-1}, & \epsilon x \ll 1, \\ \frac{\epsilon}{2\pi} \left[1 + \frac{\cos(2\epsilon x + \pi/4)}{4\sqrt{\pi}(\epsilon x)^{3/2}} \right], & \epsilon x \gg 1. \end{cases} \quad (26)$$

На малых расстояниях плотность состояний растет обратно пропорционально x . На больших расстояниях наблюдаются слабые фриделевские осцилляции на фоне средней плотности состояний в чистом графене для заданной энергии ϵ .

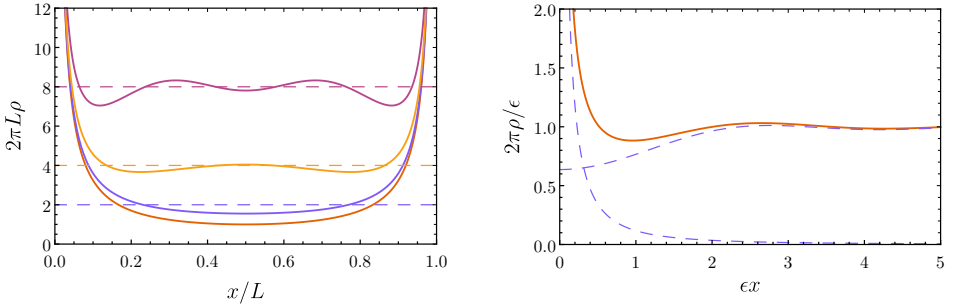


Рис. 6 — Левая панель: плотность состояний (сплошные линии) в образце чистого графена ширины L для энергий $\epsilon L = 0, 2, 4, 8$. Штриховые линии показывают плотность состояний $\rho = \epsilon/2\pi$ в бесконечном образце. Правая панель: плотность состояний в полубесконечном образце графена вблизи контакта с металлом (26).

В разделе 3.3 вводится понятие матричной функции Грина с источниками и вычисляется полная статистики переноса заряда на ее основе. Матричная функция Грина определяется уравнением

$$\begin{pmatrix} \epsilon - \hat{H} + i0 & -\sin(\phi/2)\hat{v}\delta(x - x_L) \\ -\sin(\phi/2)\hat{v}\delta(x - x_R) & \epsilon - \hat{H} - i0 \end{pmatrix} \check{G}(x, x') = \delta(x - x')\check{\mathbb{1}}. \quad (27)$$

Свободная энергия $\Omega = \text{Tr} \ln \check{G}$ позволяет вычислить функцию распределения прозрачностей $T = \text{ch}^{-2} \lambda$ в терминах ляпуновских экспонент λ

$$P(\lambda) = \frac{2}{\pi} \text{Re} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \right|_{\phi=\pi+2i\lambda}. \quad (28)$$

Непосредственное решение уравнения (27) с дираковским гамильтонианом позволяет найти явное выражение для матричной функции Грина в графене.

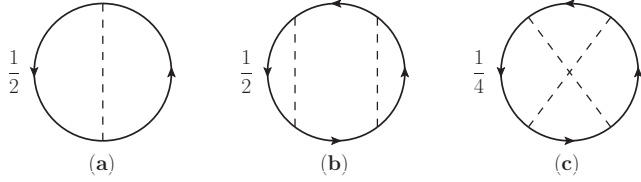


Рис. 7 — Диаграммы (a) первого и (b, c) второго порядка для поправок к свободной энергии Ω от гауссового беспорядка.

В **разделе 3.4** вычисляются поправки к функции распределения прозрачностей в первом и втором порядке по силе беспорядка. Эти поправки выражаются диаграммами рис. 7 с матричными функциями Грина. Для свободной энергии получается выражение

$$\Omega = \frac{W\phi^2}{4\pi L} \left[1 + \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z + (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_z)^2 \omega_1(\phi) + (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_z)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z) \omega_2(\phi) \right], \quad (29)$$

$$\omega_1(\phi) = -\psi(\phi/\pi) - \psi(-\phi/\pi), \quad \omega_2(\phi) = \pi^2 \frac{\phi \operatorname{ctg} \phi - 1}{\phi^2}, \quad (30)$$

где $\tilde{\alpha}_{0,z}$ — перенормированные параметры силы беспорядка. Соответствующие поправки к функции распределения ляпуновских экспонент имеют вид

$$P(\lambda) = \frac{W}{\pi L} \left[1 + \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z + (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_z)^2 p_1(\lambda) + (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_z)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z) p_2(\lambda) \right], \quad (31)$$

$$p_1(\lambda) = -2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lambda \psi \left(\frac{2i\lambda}{\pi} \right) \right], \quad p_2(\lambda) = \frac{\pi^2}{2 \operatorname{sh}^2(2\lambda)}. \quad (32)$$

Они показаны на левой панели рис. 8. Баллистическая поправка к фактору Фано во втором порядке оказывается отрицательной:

$$F = \frac{1}{3} - \frac{16\zeta(3)}{\pi^2} (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_z)^2 + \frac{8\pi^2}{45} (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_z)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z). \quad (33)$$

В **разделе 3.5** полная функция распределения прозрачностей найдена в диффузном пределе. Для этого выведена нелинейная сигма-модель с источниками и вычислены квазиклассический вклад (дороховское распределение) и ведущие квантовые поправки. В терминах ляпуновских экспонент результат имеет вид

$$P(\lambda) = \frac{W}{L} [\tilde{\sigma} + p(\lambda)], \quad p(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{Re} \frac{\pi + 2i\lambda}{\sqrt{\pi^2 n^2 - (\pi + 2i\lambda)^2}} - \frac{1}{n} \right]. \quad (34)$$

Эта функция показана на правой панели рис. 8. Она, также как в баллистическом случае, приводит к относительному подавлению дробового шума

$$F = \frac{1}{3} - \frac{2\zeta(3)}{\pi^3 \tilde{\sigma}} = \frac{1}{3} - \frac{0.244}{\ln(L/l)}. \quad (35)$$

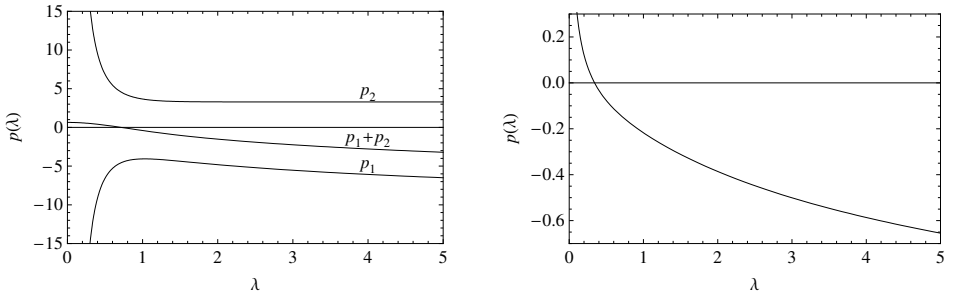


Рис. 8 — Левая панель: функции p_1 и p_2 , входящие в выражение для поправки к функции распределения ляпуновских экспонент (31). В случае беспорядка типа скалярного потенциала (α_0), поправка пропорциональна сумме $p_1 + p_2$. Правая панель: поправка к функции распределения ляпуновских экспонент в диффузном пределе (34).

Баллистический и диффузный результат можно изобразить на общем графике, рис. 9, если выразить фактор Фано как функцию проводимости. В кроссовере между этими двумя режимами мощность шума достигает минимума. Мы сравнили полученные аналитические результаты с численными данными из работы [58]. В диффузном пределе найдено хорошее согласие теории с численными результатами. В то же время в баллистическом режиме совпадение не наблюдается, потому что результат существенно зависит от коррелятора беспорядка, как и предсказывает построенная нами теория.

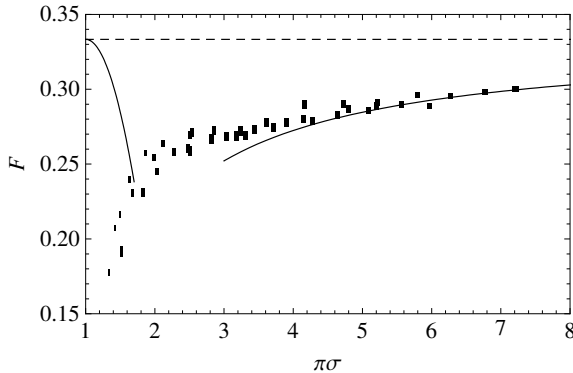


Рис. 9 — Фактор Фано как функция проводимости. Сплошные линии показывают баллистический (33) и диффузный (35) результат. Штриховая линия соответствует асимптотическому значению $F = 1/3$, которое достигается в обоих пределах. Черными прямоугольниками показаны численные данные работы [58].

В **четвертой главе** при помощи выведенной ранее матричной функции Грина с источниками изучаются транспортные свойства графена с сильными примесями.

Раздел 4.1 посвящен сильным потенциальным примесям, рассеивающим в пределах одной долины. Единственная сильная примесь, расположенная в точке с координатой x_0 , дает поправку к свободной энергии

$$\delta\Omega = -2 \ln \left[1 - \frac{\ell^2}{16L^2} \left(\frac{\phi^2}{\pi^2} - \sin^{-2} \frac{\pi x_0}{L} \right) \right]. \quad (36)$$

Здесь ℓ обозначает длину рассеяния дираковских электронов на примеси в s -канале. В простейшем случае, когда примесь имеет потенциал прямоугольного профиля с амплитудой u_0 и радиусом a , длина рассеяния равна $\ell = 2\pi a J_1(u_0 a) / J_0(u_0 a)$. Поправка к кондактансу от такой примеси имеет вид

$$\delta G = \frac{32e^2}{\pi^2 h} \left[\sin^{-2} \frac{\pi x_0}{L} + \frac{16L^2}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (37)$$

На левой панели рис. 10 сравнивается результат (37) с численным расчетом из работы [59], основанным на моделировании дираковского гамильтониана. Наблюдается великолепное совпадение аналитических и численных результатов для резонансов в s -канале. Более сложный расчет позволяет также включить в нашу модель p -волновое рассеяние. Соответствующий результат показан на правой панели рис. 10.

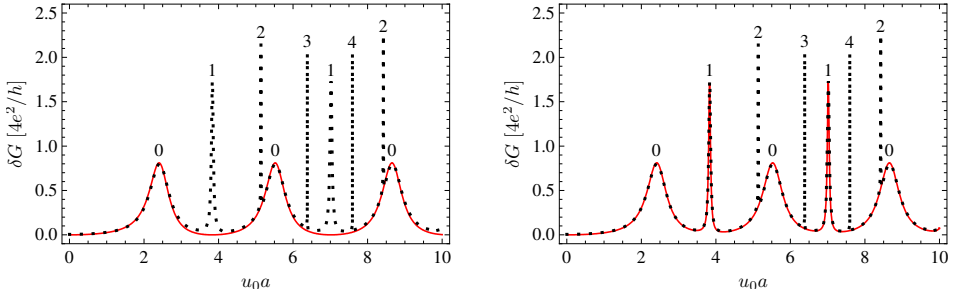


Рис. 10 — Поправка к кондактансу от круглой потенциальной примеси, расположенной в центре образца, как функция $u_0 a$. Левая панель: аналитический результат (37) с учетом рассеяния в s -канале (сплошная линия). Правая панель: аналитический результат с учетом рассеяния в s - и p -каналах. Пунктирная линия: численный результат [59] с параметрами $a/L = 0.2$, $W/L = 6$.

При небольшой концентрации сильных примесей (баллистический предел) из результата (36) можно вывести первый член вириального разложения

кондактанса и фактора Фано:

$$G = \frac{4e^2W}{\pi hL} \left[1 + \frac{n_{\text{imp}}\ell^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{16L^2 + \ell^2}} \right) \right], \quad (38)$$

$$F = \frac{1}{3} - \frac{n_{\text{imp}}\ell^4}{8\pi^3L^2} \left[1 - \frac{\ell(24L^2 + \ell^2)}{(16L^2 + \ell^2)^{3/2}} \right]. \quad (39)$$

В пределе s -волнового резонанса $\ell \rightarrow \infty$ каждая примесь дает в среднем универсальную поправку к кондактансу $\delta G = 16e^2/\pi^2h$. Поправка к функции распределения ляпуновских экспонент от таких примесей имеет вид

$$P(\lambda) = \frac{W}{\pi L} [1 + n_{\text{imp}}L^2 p_s(\lambda)], \quad (40)$$

$$p_s(\lambda) = -\frac{8\pi}{4\lambda^2 + \pi^2} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{Re} \frac{\pi - 2i\lambda}{\sqrt{\lambda - i\pi}} \right]. \quad (41)$$

Она поправка показана на рис. 11 вместе с аналогичной поправкой для p -волновых резонансов.

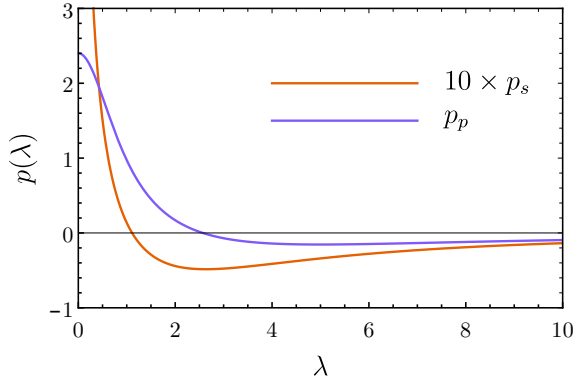


Рис. 11 — Поправка к функции распределения ляпуновских экспонент за счет малой концентрации резонансных примесей в s -канале (41) и p -канале. Для наглядности масштаб первой из этих функций увеличен в десять раз.

Также выведен следующий член вириального разложения, учитывающий относительно редкие события, когда две сильные примеси оказываются близко друг к другу. В случае s -волнового резонанса такое разложение дает

$$G = \frac{4e^2W}{\pi hL} \left[1 + \frac{4}{\pi} n_{\text{imp}}L^2 - 0.811 n_{\text{imp}}^2 L^4 \right], \quad (42)$$

$$F = \frac{1}{3} - \frac{12}{\pi^3} n_{\text{imp}}L^2 + 0.8623 n_{\text{imp}}^2 L^4. \quad (43)$$

При большой концентрации сильных примесей проводимость графена становится диффузной. Для произвольной конфигурации N примесей, расположенных в точках \mathbf{r}_i , можно вывести общую формулу, выражающую поправку к свободной энергии:

$$\delta\Omega = -\ln \det [1 - \hat{\ell}\hat{G}_{\text{reg}}], \quad (\hat{G}_{\text{reg}})_{mn} = \begin{cases} \check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_m), & m = n, \\ \check{G}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n), & m \neq n. \end{cases} \quad (44)$$

Входящий сюда детерминант размера $4N$ включает диагональную матрицу $\hat{\ell}$, содержащую длины рассеяния отдельных примесей. Матрица \hat{G} составлена из блоков, соответствующих матричным функциям Грина между заданными положениями примесей. Диагональные блоки определяются формулой

$$\check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \left[\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{i}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]. \quad (45)$$

Мы называем выражение (44) для поправки к свободной энергии представлением развернутой функции Грина. На его основе можно построить чрезвычайно эффективный алгоритм для вычисления любых транспортных характеристик неупорядоченного графена, полностью учитывая эффекты квантовой интерференции.

В пределе резонансных примесей неупорядоченный графен оказывается в сверхпроводящем классе симметрии DIII, для которого характерна антилокализация. В этом случае мы можем еще больше упростить формулу (44) и свести вычисление кондактанса к задаче об обращении матрицы размера $2N$

$$G = \frac{4e^2}{\pi h} \frac{W}{L} + \frac{16e^2}{\pi^2 h} \text{Tr}(M^{-1}M^{-T}). \quad (46)$$

Явное выражение для матричных элементов удобно записать в терминах безразмерных комплексных координат примесей $z = (\pi/2L)(x + iy)$

$$M_{mn} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin^{-1}(z_m + z_n^*) & \sin^{-1}(z_m - z_n) \\ -\sin^{-1}(z_m^* - z_n^*) & -\sin^{-1}(z_m^* + z_n) \end{pmatrix}, & m \neq n, \\ \begin{pmatrix} \sin^{-1}(2 \text{Re } z_m) & 0 \\ 0 & -\sin^{-1}(2 \text{Re } z_m) \end{pmatrix}, & m = n. \end{cases} \quad (47)$$

Мы также разработали быстрый алгоритм обращения матрицы M , который позволяет добавлять примеси по одной и использовать вычисленную на предыдущем шаге обратную матрицу. Таким образом сложность вычисления составляет всего $O(N^2)$ операций в среднем на каждую конфигурацию беспорядка. Эффективность метода развернутых функций Грина существенно превосходит любые численные алгоритмы, основанные на моделировании микроскопического гамильтониана на решетке.

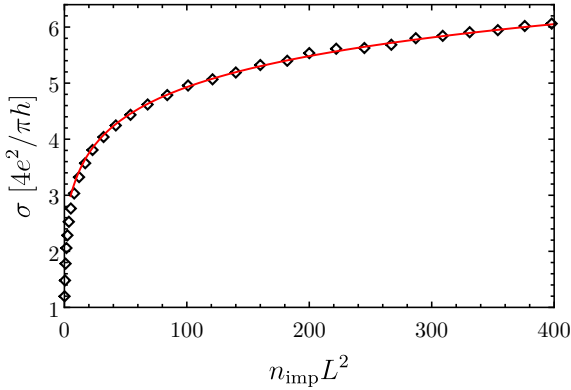


Рис. 12 — Средняя проводимость графена как функция концентрации резонансных потенциальных примесей. Черными ромбами показаны численные результаты, полученные по формуле (46). Сплошная красная линия показывает зависимость (48), полученную перенормировкой сигма-модели класса DIII.

На основе точной формулы (46) численно найдена зависимость проводимости графена от концентрации резонансных примесей, рис. 12. При больших концентрациях наблюдается хорошая металлическая проводимость. Ее поведение согласуется с предсказанием теории слабой антилокализации для класса DIII

$$\sigma = \frac{4e^2}{\pi h} \left(\ln n_{\text{imp}} L^2 - \ln \ln n_{\text{imp}} L^2 \right). \quad (48)$$

В разделе 4.2 изучаются транспортные свойства графена с вакансиями. Оказывается, что благодаря блоховским осцилляциям T -матрицы вакансий принимают шесть различных значений в зависимости от того, к какой из шести подрешеток принадлежит удаленный узел. Метод развернутых функций Грина можно обобщить для описания транспорта в графене с вакансиями. Кондактанс выражается при помощи обращения матрицы размера N

$$G = \frac{8e^2}{h} \left\{ \frac{W}{2\pi L} + \text{Tr} \left[M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \phi^2} - \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \phi} \right)^2 \right]_{\phi=0} \right\}, \quad (49)$$

$$M_{mn} = \text{Re} \frac{\exp [i(\theta_m - \theta_n)/2 + i\phi(y_m - y_n)/2L]}{\sin [\pi(\zeta_m x_m + \zeta_n x_n + iy_m - iy_n)/2L]}. \quad (50)$$

Здесь параметры θ_i соответствуют фазам блоховских волн на узлах \mathbf{r}_i , а факторы $\zeta_i = \pm 1$ различают две подрешетки А или В.

При помощи общей формулы (49) мы проанализировали предел малой концентрации вакансий. Одна вакансия не дает вклад в кондактанс, а в случае двух вакансий поправка зависит от их относительного расположения. На рис.

13 показана зависимость кондактанса от расстояния \bar{y} между вакансиями в вертикальном направлении (перпендикулярно току). Вакансия в подрешетке А зафиксирована в центре образца, вторая вакансия в подрешетке В имеет координаты $(2L/3, -\bar{y})$. С изменением расстояния \bar{y} кондактанс переключается на масштабе периода решетки между тремя гладкими кривыми, соответствующими разным значениям блоховской фазы.

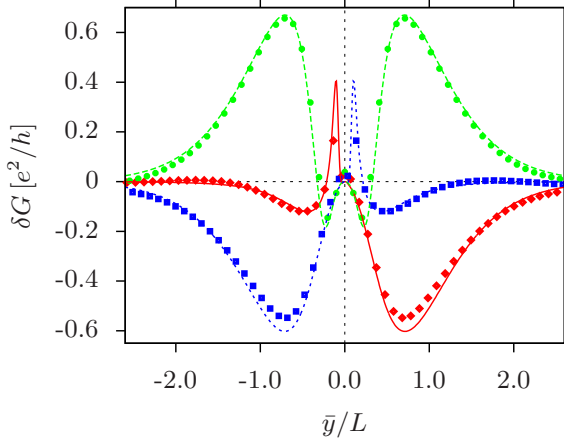


Рис. 13 — Кондактанс образца графена с двумя вакансиями (А и В). Численные данные (точки), полученные методом рекурсивных функций Грина [60–62], хорошо согласуются с аналитическим результатом (кривые).

На основе аналитической формулы мы также вывели первый член вириального разложения кондактанса по степеням концентрации вакансий n

$$\sigma = \frac{4e^2}{\pi h} \left[1 + \kappa n^2 L^4 + O(n^3 L^6) \right]. \quad (51)$$

Параметр $\kappa \approx 0.0043$ испытывает слабые ($\sim 10^{-5}$) осцилляции в зависимости от ориентации кристаллической решетки.

В диффузном пределе большой концентрации вакансий кондактанс существенно зависит от распределения дефектов по шести подрешеткам, соответствующим разным фазам блоховских волн. При равномерном распределении кондактанс очень мало отличается от $4e^2/\pi h$. Если же все вакансии расположены в узлах с одинаковой фазой, наблюдается интересное критическое поведение в зависимости от распределения по подрешеткам А и В, рис. 14. Численные данные показывают существование неустойчивой критической точки, характеризующейся значением проводимости $\sigma \approx 6.4e^2/\pi h$, в случае когда все вакансии помещены в одну подрешетку. Вблизи этой критической точки наблюдается скейлинговое поведение с определенным критическим индексом по мере

добавления вакансий из другой подрешетки. Когда имеются вакансии в обеих подрешетках, проводимость стремится к устойчивому значению $\sigma \approx 4e^2/\pi h$.

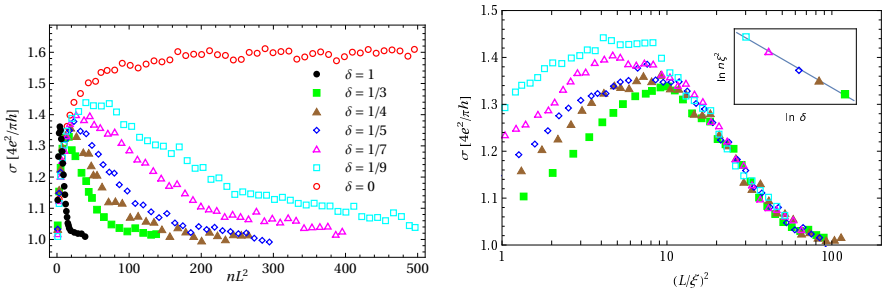


Рис. 14 — Левая панель: средняя проводимость как функция полной концентрации вакансий $n = n_A + n_B$ для различных значений дисбаланса $\delta = (n_A - n_B)/n$. Правая панель: те же данные в логарифмическом масштабе, сдвинутые так, чтобы лечь на одну универсальную кривую. Вставка: зависимость корреляционной длины от дисбаланса δ .

В разделе 4.3 рассмотрено поведение графена в диффузном режиме с сильными примесями при наличии внешнего магнитного поля. В дираковской точке матричная функция Грина выражается при помощи неунитарного калибровочного преобразования

$$\check{G}_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-\sigma_z \chi(\mathbf{r})} \check{G}_{B=0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-\sigma_z \chi(\mathbf{r}')}, \quad \chi = \frac{eB}{2c} x(L - x). \quad (52)$$

В итоге магнитное поле можно свести к калибровке T -матриц примесей. При помощи метода развернутых функций Грина продемонстрировано возможное поведение проводимости в зависимости от силы магнитного поля, а также амплитуды и концентрации примесей различного типа. В частности, получены режимы полной локализации и критическое состояние типа перехода квантового эффекта Холла. Типичная картина изменения проводимости с ростом концентрации примесей показана на рис. 15. В случае примесей одного знака наблюдается полная локализация. Если потенциал примесей имеет случайный знак система приходит в критическое состояние квантового Холла с проводимостью $\approx 0.5 e^2/h$. Причем в отличие от всех изучавшихся ранее систем, критическое значение достигается снизу.

Также обнаружен особый режим транспорта в очень сильных магнитных полях, когда количество квантов магнитного потока в образце превышает количество примесей. В таком случае проводимость оказывается по сути баллистической, а мезоскопические флуктуации кондактанса экспоненциально подавляются.

Раздел 4.4 посвящен численному и аналитическому изучению транспортных свойства графена в случае, когда точечные примеси случайно размещены

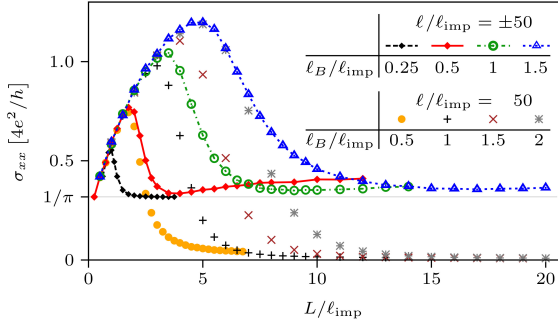


Рис. 15 — Проводимость графена со скалярными примесями в дираковской точке как функция длины образца при различных значениях магнитного поля.

только в каждом третьем ряду шестиугольной решетки, как показано на левой панели рис. 16. Такое расположение соответствует узлам с одинаковой фазой блоховской волны. Оказывается, что в этом пределе проводимость имеет резко анизотропный и супердиффузный характер. Продольная проводимость растет пропорционально квадратному корню из длины образца, в то время как поперечная проводимость демонстрирует обычное диффузное поведение и от размера не зависит, правая панель рис. 16.

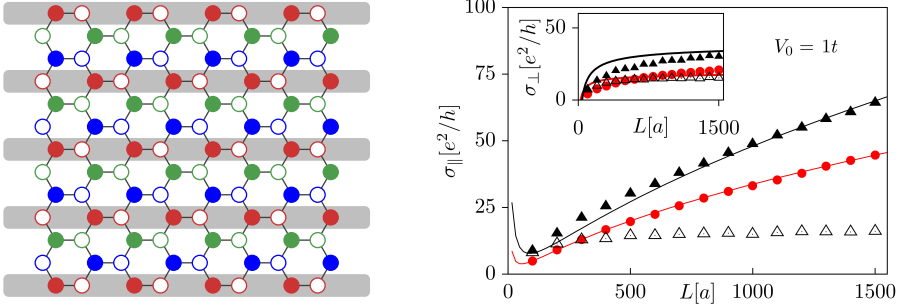


Рис. 16 — Левая панель: красные узлы имеют одинаковую фазу блоховской волны. Правая панель: проводимость графена с точечными примесями в зависимости от длины образца L при фиксированной концентрации примесей $n_{\text{imp}} = 0.1/a^2$. Черные треугольники и красные кружки: все примеси расположены в красных узлах. Белые треугольники: примесей распределены по всем узлам. Сплошные линии: квазиклассический результат (53). Вставка: поведение поперечной проводимости σ_{\perp} .

Теоретически это поведение можно описать в рамках простой квазиклассической модели на основе метода самосогласованной T -матрицы. При таком подходе получаются следующие выражения для продольной и поперечной

проводимости:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{4e^2}{\pi h} \left[\frac{A}{2} \sqrt{\frac{\gamma L}{\kappa}} - B + \frac{7C}{8} \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma L}} + O[(\gamma/L)^{-3/2}] \right], \quad (53)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{4e^2}{\pi h} \left[B - C \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma L}} + O[(\gamma/L)^{-3/2}] \right]. \quad (54)$$

Коэффициенты в этом разложении зависят от отношения $z = \epsilon/\gamma$, где γ — самосогласованное значение обратного времени свободного пробега,

$$A(z) = \operatorname{Re}[(1 - 2iz)\sqrt{1 + iz}], \quad B(z) = 1 + z \operatorname{arctg} z, \quad C(z) = \operatorname{Re} \frac{1 + 2iz}{\sqrt{1 + iz}}. \quad (55)$$

Единственный подгоночный параметр в этих формулах — коэффициент κ порядка единицы.

Мы также изучили квантовые поправки к проводимости и показали, что в сильно анизотропном случае они всегда остаются малы.

Пятая глава посвящена общим вопросам локализации в двумерных киральных металлах. Ее результаты имеют более широкое применение и позволяют понять не только свойства неупорядоченного графена, но и других систем с аналогичной симметрией. Мы изучили возможные механизмы локализации в неупорядоченном металле с киральной симметрией на основе репличной нелинейной сигма-модели.

Действие сигма-модели кирального класса

$$S[Q] = - \int \frac{d^2 r}{8\pi s} [\sigma \operatorname{Tr}(Q^{-1} \nabla Q)^2 + c(\operatorname{Tr} Q^{-1} \nabla Q)^2] \quad (56)$$

имеет дополнительный член Гаде. Он возникает благодаря тому, что детерминант матрицы Q в таких моделях может отличаться от единицы. Если представить $Q = e^{i\phi} U$, где $\det U = 1$, действие принимает вид

$$S[Q] = \int \frac{d^2 r}{8\pi s} [N(\sigma + Nc)(\nabla\phi)^2 + \sigma \operatorname{Tr}(\nabla U^{-1} \nabla U)]. \quad (57)$$

Поскольку коэффициент перед членом $(\nabla\phi)^2$ не перенормируется, в репличном пределе $N \rightarrow 0$ отсутствует также и перенормировка проводимости [26; 27].

Этот широко известный результат однако может измениться, если учесть возможность возникновения особых сингулярных топологических возбуждений — вихрей фазы ϕ . В таком случае возможна перенормировка сигма-модели по механизму Березинского—Костерлица—Таулесса (БКТ) [63—66], которая дает конечный вклад в проводимость из-за флуктуирующих диполей вихря-антивихря.

В отличие от обычных вихрей в абелевой $U(1)$ теории, вихри в сигма-модели характеризуются также дополнительной степенью свободы, которая живет в соответствующем проективном пространстве. Из-за неабелевой

структуры вихрей перенормировка сигма-модели оказывается более сложной, чем в стандартной теории БКТ, и включает три параметра:

$$\frac{\partial y}{\partial \ln L} = (2-K)y, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \ln L} = -\sigma y^2, \quad \frac{\partial K}{\partial \ln L} = \begin{cases} \frac{1}{4} - 2Ky^2, & \text{AIII,} \\ \frac{1}{8} - 2Ky^2 + \frac{\sigma y^2}{16}, & \text{CII,} \\ \frac{1}{2} - 2Ky^2 - \frac{\sigma y^2}{4}, & \text{BDI.} \end{cases} \quad (58)$$

Величина K соответствует жесткости для градиентов ϕ

$$K = \begin{cases} (\sigma + c)/4, & \text{AIII,} \\ (\sigma + c)/8, & \text{CII,} \\ (\sigma + 2c)/4, & \text{BDI.} \end{cases} \quad (59)$$

Параметр y называется летучестью («fugacity») вихрей и обычно экспоненциально мал в пределе хорошего металла $y \propto e^{-\sigma}$.

Для случая кирального унитарного класса AIII уравнения для K и y отделяются, поэтому можно построить двумерный ренорм-групповой поток, как показано на рис. 17. Этот поток стремится к одной из двух устойчивых фаз. Область низкой летучести и большой жесткости соответствует металлической фазе, в которой перенормировка проводимости останавливается на некотором конечном значении, а вихри объединяются в диполи малого размера. Над критической линией летучесть y неограниченно растет, что означает распаривание вихрей. Эта фаза соответствует состоянию изолятора, в котором проводимость перенормируется в ноль.

Таким образом мы показали, что механизм распаривания вихрей приводит к фазовому переходу в сигма-модели, который соответствует локализационному переходу металл-изолятор. Причем, в отличие от БКТ, получается обычный переход второго рода.

Также было изучено возможное влияние топологических членов, которые возникают в сигма-модели для неупорядоченного дираковского гамильтониана, на вихри. Оказывается, что в моделях с топологическими членами вихри приобретают дополнительную внутреннюю степень свободы $U(1)$ или $O(1) = \mathbb{Z}_2$ типа. Благодаря усреднению по флуктуациям этой внутренней степени свободы, вклад вихрей в статистическую сумму в точности зануляется, если в действии сигма-модели есть дополнительный топологический член. Тем самым доказано, что нетривиальная топология исходного гамильтониана делает механизм локализации на основе распаривания вихрей неэффективным. Как следствие неупорядоченные дираковские киральные металлы не испытывают локализации даже при сильном беспорядке, в соответствии с результатами раздела 2.1.

В **шестой главе** рассматривается задача о плотности состояний в двумерном киральном металле с вакансиями. Если концентрация вакансий в двух

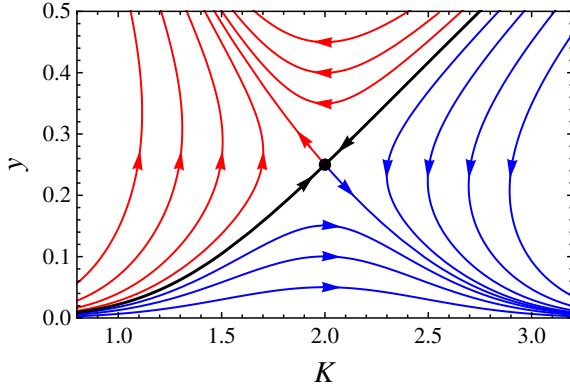


Рис. 17 — Схематическое изображение потока ренорм-группы около перехода металл-изолятор в киральном унитарном классе АIII согласно уравнениям (58).

подрешетках различна, $n_A \neq n_B$, в квазиклассической плотности состояний возникает щель $\Delta = (n_A - n_B)/(2\pi\nu)$, где ν — обычная плотность состояний без учета вакансий. Также на нулевой энергии появляется дельта-функция из-за конечной плотности нулевых мод,

$$\rho(\epsilon) = 2\nu \left[\pi|\Delta| \delta(\epsilon) + \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{\epsilon^2}} \right]. \quad (60)$$

В сбалансированном случае $n_A = n_B$ классические флуктуации вакансий в пространстве также приводят к тому, что дисбаланс может возникать локально. Такие флуктуации можно учесть в рамках нелинейной сигма-модели при помощи дополнительных членов в действии $S = S_\sigma + S_\epsilon + S_V$, где

$$S_\sigma = \int \frac{d^2r}{8\pi} \left[\sigma \text{Tr}(\nabla Q^\dagger \nabla Q) - c (\text{Tr} Q^\dagger \nabla Q)^2 \right], \quad (61)$$

$$S_\epsilon = i\pi\nu\epsilon \int d^2r \text{Tr}(Q^\dagger + Q), \quad (62)$$

$$S_V = \int d^2r \left[2\pi\nu\Delta \ln \det Q - \frac{n}{2} (\ln \det Q)^2 \right]. \quad (63)$$

Уравнения ренорм-группы для такой сигма-модели в репличном пределе имеют вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln L} = \frac{\partial \Delta}{\partial \ln L} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \ln L} = 1, \quad \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln L} = \frac{c + 4\pi n L^2}{\sigma^2}. \quad (64)$$

Член S_V придает массу $U(1)$ степени свободы и эффективно понижает симметрию модели по аналогии с квантовой аномалией. Это приводит к новому

типу критического поведения в центре зоны. В сбалансированном случае $\Delta = 0$ корреляционная длина расходится как $|\ln \epsilon|^{1/2}$, а в плотности состояний появляется сингулярность

$$\rho(\epsilon) \sim \frac{\nu}{\epsilon \tau_n} |\ln(\epsilon \tau)|^{-3/2}, \quad \tau_n = \frac{\nu \sigma}{n}. \quad (65)$$

Эти предсказания подтверждаются масштабными численными экспериментами для графена с вакансиями, выполненными в работе [67].

При слабом дисбалансе $\Delta \tau_n \ll 1$ плотность состояний обращается в ноль линейно

$$\rho(\epsilon) \propto \nu \left[\sqrt{\frac{\Delta}{\tau_n}} \delta(\epsilon) + \epsilon \sqrt{\frac{\tau_n}{\Delta}} e^{1/\tau_n \Delta} \right]. \quad (66)$$

Схематическое поведение плотности состояний показано на рис. 18.

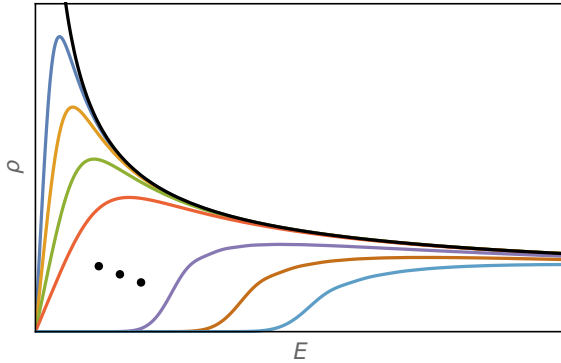


Рис. 18 — Схематическое поведение плотности состояний кирального металла с вакансиями как функции энергии при разных значениях дисбаланса Δ .

Также рассмотрен предел сильного среднего дисбаланса $\Delta \tau_n \gg 1$. В этом случае в средней плотности состояний возникает щель, а флуктуации распределения вакансий создают экспоненциально убывающий подщелевой «хвост». Для его описания нужно найти седловую точку действия (инстантон), которая нарушает репличную симметрию. Несмотря на то, что аналитическое решение седловых уравнений в этом случае не представляется возможным, удалось получить точное выражение для действия инстантона, справедливое при любых энергиях,

$$S_{\text{inst}} = 4\Delta \tau_n \left[\text{arch}(\Delta/\epsilon) - \sqrt{1 - \epsilon^2/\Delta^2} \right]. \quad (67)$$

На основе этого результата можно с экспоненциальной точностью найти подцелевую плотность состояний

$$\rho \propto e^{-S_{\text{inst}}} \propto \begin{cases} \exp \left[-\frac{4}{3} \Delta \tau_n (2c)^{3/2} \right], & c = 1 - \frac{\epsilon}{\Delta} \ll 1, \\ (\epsilon/\Delta)^{4\Delta\tau_n}, & \epsilon \ll \Delta. \end{cases} \quad (68)$$

На самых малых энергиях плотность состояний обращается в ноль по степенному закону с показателем, который пропорционален средней силе дисбаланса.

В двух **приложениях** описаны двухпетлевая баллистическая перенормировка слабого потенциального беспорядка в графене и изложены алгоритмы обращения матриц, используемые для эффективного вычисления транспортных свойств графена с сильными примесями методом развернутых функций Грина.

Публикации автора по теме диссертации

1. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Electron transport in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 235443.
2. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Quantum criticality and minimal conductivity in graphene with long-range disorder](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, p. 256801.
3. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Conductivity of disordered graphene at half filling](#) // Eur. Phys. J. Spec. Top., 2007, vol. 148, pp. 63–72.
4. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Theory of anomalous quantum Hall effects in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 77, p. 195430.
5. *A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Analytic theory of ballistic transport in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2009, vol. 79, p. 075405.
6. *M. Titov, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. Schuessler, A. D. Mirlin*, [Charge transport in graphene with resonant scatterers](#) // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 104, p. 076802.
7. *M. Titov, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi*, [Metallic proximity effect in ballistic graphene with resonant scatterers](#) // Semicond. Sci. Technol., 2010, vol. 25, p. 034007.
8. *A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Full counting statistics in disordered graphene at the Dirac point: From ballistics to diffusion](#) // Phys. Rev. B, 2010, vol. 82, p. 085419.
9. *P. M. Ostrovsky, M. Titov, S. Bera, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Diffusion and criticality in undoped graphene with resonant scatterers](#) // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 105, p. 266803.

10. *J. Schelter, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, B. Trauzettel, M. Titov*, **Color-dependent conductance of graphene with adatoms** // Phys. Rev. Lett., 2011, vol. 106, p. 166806.
11. *E. J. König, P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, A. D. Mirlin*, **Metal-insulator transition in two-dimensional random fermion systems of chiral symmetry classes** // Phys. Rev. B, 2012, vol. 85, p. 195130.
12. *S. Gattenlöhner, W.-R. Hanne, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, M. Titov*, **Quantum Hall criticality and localization in graphene with short-range impurities at the Dirac point** // Phys. Rev. Lett., 2014, vol. 112, p. 026802.
13. *P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, E. J. König, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, M. A. Skvortsov*, **Density of states in a two-dimensional chiral metal with vacancies** // Phys. Rev. Lett., 2014, vol. 113, p. 186803.
14. *S. Gattenlöhner, I. V. Gornyi, P. M. Ostrovsky, B. Trauzettel, A. D. Mirlin, M. Titov*, **Lévy flights due to anisotropic disorder in graphene** // Phys. Rev. Lett., 2016, vol. 117, p. 046603.

Список литературы

1. *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov*, **Electric field effect in atomically thin carbon films** // Science, 2004, vol. 306, pp. 666–669.
2. *K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, A. K. Geim*, **Two-dimensional atomic crystals** // PNAS, 2005, vol. 102, pp. 10451–10453.
3. *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov*, **Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene** // Nature, 2005, vol. 438, pp. 197–200.
4. *Y. B. Zhang, Y. W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim*, **Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene** // Nature, 2005, vol. 438, pp. 201–204.
5. *Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small, M. S. Purewal, Y. W. Tan, M. Fazlollahi, J. D. Chudow, J. A. Jaszczak, H. L. Stormer, P. Kim*, **Landau-level splitting in graphene in high magnetic fields** // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, p. 136806.
6. *K. S. Novoselov, E. McCann, S. V. Morozov, V. I. Fal'ko, M. I. Katsnelson, U. Zeitler, D. Jiang, F. Schedin, A. K. Geim*, **Unconventional quantum Hall effect and Berry's phase of 2π in bilayer graphene** // Nat. Phys., 2006, vol. 2, pp. 177–180.
7. *S. V. Morozov, K. S. Novoselov, M. I. Katsnelson, F. Schedin, L. A. Ponomarenko, D. Jiang, A. K. Geim*, **Strong suppression of weak localization in graphene** // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 016801.

8. *Y.-W. Tan, Y. Zhang, H. L. Stormer, P. Kim*, [Temperature dependent electron transport in graphene](#) // Eur. Phys. J. Spec. Top., 2007, vol. 148, pp. 15–18.
9. *K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S. V. Morozov, H. L. Stormer, U. Zeitler, J. C. Maan, G. S. Boebinger, P. Kim, A. K. Geim*, [Room-temperature quantum Hall effect in graphene](#) // Science, 2007, vol. 315, p. 1379.
10. *A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim*, [The electronic properties of graphene](#) // Rev. Mod. Phys., 2009, vol. 81, pp. 109–162.
11. *P. R. Wallace*, [The band theory of graphite](#) // Phys. Rev., 1947, vol. 71, pp. 622–634.
12. *F. Schedin, A. K. Geim, S. V. Morozov, E. W. Hill, P. Blake, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov*, [Detection of individual gas molecules adsorbed on graphene](#) // Nat. Mater., 2007, vol. 6, pp. 652–655.
13. *A. K. Geim, K. S. Novoselov*, [The rise of graphene](#) // Nat. Mater., 2007, vol. 6, pp. 183–191.
14. *A. K. Geim*, [Graphene: Status and prospects](#) // Science, 2009, vol. 324, pp. 1530–1534.
15. *K. S. Novoselov*, [Nobel lecture: Graphene: Materials in the flatland](#) // Rev. Mod. Phys., 2011, vol. 83, pp. 837–849.
16. *A. K. Geim*, [Nobel lecture: Random walk to graphene](#) // Rev. Mod. Phys., 2011, vol. 83, pp. 851–862.
17. *P. W. Anderson*, [Absence of diffusion in certain random lattices](#) // Phys. Rev., 1958, vol. 109, pp. 1492–1505.
18. *N. F. Mott, W. D. Twose*, [The theory of impurity conduction](#) // Adv. Phys., 1961, vol. 10, pp. 107–163.
19. *D. J. Thouless*, [Maximum metallic resistance in thin wires](#) // Phys. Rev. Lett., 1977, vol. 39, pp. 1167–1169.
20. *E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, T. V. Ramakrishnan*, [Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions](#) // Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 42, pp. 673–676.
21. *Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий*, [Проводимость частицы в двумерном случайном потенциале](#) // Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 248–252.
22. *S. Hikami, A. I. Larkin, Y. Nagaoka*, [Spin-orbit interaction and magnetoresistance in the two-dimensional random system](#) // Prog. Theor. Phys., 1980, vol. 63, pp. 707–710.
23. *F. Wegner*, [The mobility edge problem: Continuous symmetry and a conjecture](#) // Z. Phys. B: Condens. Mat., 1979, vol. 35, pp. 207–210.

24. *M. R. Zirnbauer*, [Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory](#) // J. Math. Phys., 1996, vol. 37, pp. 4986–5018.
25. *A. Altland, M. R. Zirnbauer*, [Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures](#) // Phys. Rev. B, 1997, vol. 55, pp. 1142–1161.
26. *R. Gade, F. Wegner*, [The \$n = 0\$ replica limit of \$u\(n\)\$ and \$u\(n\)/so\(n\)\$ models](#) // Nucl. Phys. B, 1991, vol. 360, pp. 213–218.
27. *R. Gade*, [Anderson localization for sublattice models](#) // Nucl. Phys. B, 1993, vol. 398, pp. 499–515.
28. *K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper*, [New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance](#) // Phys. Rev. Lett., 1980, vol. 45, pp. 494–497.
29. [The Quantum Hall Effect](#) / ed. by R. E. Prange, S. M. Girvin, New York: Springer, 1990.
30. *A. M. M. Pruisken*, [On localization in the theory of the quantized Hall effect: A two-dimensional realization of the \$\theta\$ -vacuum](#) // Nucl. Phys. B, 1984, vol. 235, pp. 277–298.
31. *D. E. Khmel'nitskii*, [Quantum Hall effect and additional oscillations of conductivity in weak magnetic fields](#) // Phys. Lett. A, 1984, vol. 106, pp. 182–183.
32. *C. L. Kane, E. J. Mele*, [\$Z_2\$ topological order and the quantum spin Hall effect](#) // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, p. 146802.
33. *C. L. Kane, E. J. Mele*, [Quantum spin Hall effect in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, p. 226801.
34. *L. Sheng, D. N. Sheng, C. S. Ting, F. D. M. Haldane*, [Nondissipative spin Hall effect via quantized edge transport](#) // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, p. 136602.
35. *B. A. Bernevig, T. L. Hughes, S.-C. Zhang*, [Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells](#) // Science, 2006, vol. 314, pp. 1757–1761.
36. *M. Onoda, Y. Avishai, N. Nagaosa*, [Localization in a quantum spin Hall system](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, p. 076802.
37. *M. König, S. Wiedmann, C. Bruene, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, S.-C. Zhang*, [Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells](#) // Science, 2007, vol. 318, pp. 766–770.
38. *D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava, M. Z. Hasan*, [A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase](#) // Nature, 2008, vol. 452, p. 970.
39. *M. Z. Hasan, C. L. Kane*, [Colloquium: Topological insulators](#) // Rev. Mod. Phys., 2010, vol. 82, pp. 3045–3067.

40. *X.-L. Qi, S.-C. Zhang*, [Topological insulators and superconductors](#) // *Rev. Mod. Phys.*, 2011, vol. 83, pp. 1057–1110.
41. *A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig*, [Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions](#) // *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 78, p. 195125.
42. *A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig*, [Classification of Topological Insulators and Superconductors](#) // *AIP Conference Proceedings*, vol. 1134 / ed. by V. Lebedev, M. Feigelman, 2009, pp. 10–21, Landau Memorial Conference on Advances in Theoretical Physics, Chernogolovka, Russia, June 22–26, 2008.
43. *A. Kitaev*, [Periodic table for topological insulators and superconductors](#) // *AIP Conference Proceedings*, vol. 1134 / ed. by V. Lebedev, M. Feigelman, 2009, pp. 22–30, Landau Memorial Conference on Advances in Theoretical Physics, Chernogolovka, Russia, June 22–26, 2008.
44. *V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven*, [Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices](#) // *Science*, 2012, vol. 336, pp. 1003–1007.
45. *A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, H. Shtrikman*, [Zero-bias peaks and splitting in an Al-InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions](#) // *Nat. Phys.*, 2012, vol. 8, pp. 887–895.
46. *A. A. Nersisyan, A. M. Tsvetlik, F. Wenger*, [Disorder effects in two-dimensional \$d\$ -wave superconductors](#) // *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 72, pp. 2628–2631.
47. *A. A. Nersisyan, A. M. Tsvetlik, F. Wenger*, [Disorder effects in two-dimensional Fermi systems with conical spectrum: exact results for the density of states](#) // *Nucl. Phys. B*, 1995, vol. 438, pp. 561–588.
48. *A. Altland, B. D. Simons, M. R. Zirnbauer*, [Theories of low-energy quasiparticle states in disordered \$d\$ -wave superconductors](#) // *Phys. Rep. Rev. Sec. Phys. Lett.*, 2002, vol. 359, pp. 283–354.
49. *P. J. Hirschfeld, P. Wölfle, D. Einzel*, [Consequences of resonant impurity scattering in anisotropic superconductors - thermal and spin relaxation properties](#) // *Phys. Rev. B*, 1988, vol. 37, pp. 83–97.
50. *A. C. Durst, P. A. Lee*, [Impurity-induced quasiparticle transport and universal-limit Wiedemann-Franz violation in \$d\$ -wave superconductors](#) // *Phys. Rev. B*, 2000, vol. 62, pp. 1270–1290.
51. *C. Chamon, C. Mudry*, [Density of states for dirty \$d\$ -wave superconductors: A unified and dual approach for different types of disorder](#) // *Phys. Rev. B*, 2001, vol. 63, p. 100503.
52. *A. G. Yashenkin, W. A. Atkinson, I. V. Gornyi, P. J. Hirschfeld, D. V. Khveshchenko*, [Nesting symmetries and diffusion in disordered \$d\$ -wave superconductors](#) // *Phys. Rev. Lett.*, 2001, vol. 86, pp. 5982–5985.

53. *P. J. Hirschfeld, W. A. Atkinson, Pi a la node: Disordered d -wave superconductors in two dimensions for the random masses* // J. Low Temp. Phys., 2002, vol. 126, pp. 881–900.
54. *A. Altland, Spectral and transport properties of d -wave superconductors with strong impurities* // Phys. Rev. B, 2002, vol. 65, p. 104525.
55. *V. M. Loktev, Y. G. Pogorelov, Validity of self-consistent T -matrix for doped d -wave superconductors* // Phys. Lett. A, 2004, vol. 320, pp. 307–311.
56. *A. V. Balatsky, I. Vekhter, J.-X. Zhu, Impurity-induced states in conventional and unconventional superconductors* // Rev. Mod. Phys., 2006, vol. 78, pp. 373–433.
57. *О. Н. Дорохов, Локализация электрона в многоканальной проволоке* // ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 1040–1058.
58. *J. Tworzydło, C. W. Groth, C. W. J. Beenakker, Finite difference method for transport properties of massless Dirac fermions* // Phys. Rev. B, 2008, vol. 78, p. 235438.
59. *J. H. Bardarson, M. Titov, P. W. Brouwer, Electrostatic confinement of electrons in an integrable graphene quantum dot* // Phys. Rev. Lett., 2009, vol. 102, p. 226803.
60. *D. J. Thouless, S. Kirkpatrick, Conductivity of the disordered linear chain* // J. Phys. C: Solid State Phys., 1981, vol. 14, pp. 235–245.
61. *P. A. Lee, D. S. Fisher, Anderson localization in two dimensions* // Phys. Rev. Lett., 1981, vol. 47, pp. 882–885.
62. *A. MacKinnon, The calculation of transport properties and density of states of disordered solids* // Z. Phys. B: Condens. Mat., 1985, vol. 59, pp. 385–390.
63. *В. Л. Березинский, Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. II. Квантовые системы* // ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1144.
64. *J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, Long-range order and metastability in two-dimensional solids and superfluids* // J. Phys. C: Solid State Phys., 1972, vol. 5, p. L124.
65. *J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, Ordering, metastability, and phase transitions in two-dimensional systems* // J. Phys. C: Solid State Phys., 1973, vol. 6, pp. 1181–1203.
66. *J. M. Kosterlitz, Critical properties of two-dimensional XY model* // J. Phys. C: Solid State Phys., 1974, vol. 7, pp. 1046–1060.
67. *V. Häfner, J. Schindler, N. Weik, T. Mayer, S. Balakrishnan, R. Narayanan, S. Bera, F. Evers, Density of states in graphene with vacancies: Midgap power law and frozen multifractality* // Phys. Rev. Lett., 2014, vol. 113, p. 186802.