

На правах рукописи

Антоненко Даниил Сергеевич

**ЭФФЕКТЫ ТОПОЛОГИИ И
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В
НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ
СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Черноголовка — 2020

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Скворцов Михаил Андреевич

Официальные оппоненты: **Горный Игорь Викторович**,
доктор физико-математических наук,
профессор РАН,
ФГБУН Физико-технический институт имени
А. Ф. Иоффе РАН,
старший научный сотрудник

Шапиро Дмитрий Сергеевич,
кандидат физико-математических наук,
ФГУП Всероссийский научно-исследовательский
институт автоматизации им. Н. Л. Духова,
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГАОУВО «Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»

Защита состоится 25 декабря 2020 г. в _____ на заседании диссертаци-
онного совета Д.002.207.01 на базе Федерального государственного бюджет-
ного учреждения науки «Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук» по адресу: 142432, Московская обл., г. Черного-
ловка, просп. Академика Семенова, д. 1-А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической
физики им Л. Д. Ландау РАН или на сайте диссертационного совета [http:
//www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/](http://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/).

Автореферат разослан _____ 2020 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д.002.207.01, д-р физ.-мат. наук

Всеволод Эдуардович Адлер

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности. В диссертации производится теоретическое исследование электронных подсистем в твердых телах с беспорядком. Беспорядок практически всегда присутствует в реальных образцах, так как при их изготовлении неизбежны дефекты кристаллической решетки. Его влияние на физику электронов изучается на протяжении многих лет [1]. Известно, что при наличии достаточной степени электронной когерентности, беспорядок приводит к ряду квантовых эффектов, модифицирующих квазиклассическое описание системы [2]; так, например, хорошо известна слаболокализационная поправка к проводимости [3]. Помимо последней, известно и много других мезоскопических проявлений беспорядка [2], при этом большинство из них впервые изучалось в режиме диффузионного движения электронов. Позднее стало понятно, что такие эффекты могут иметь продолжение в (квази)баллистическую область [4; 5]. В диссертации изучается такое продолжение на примере баллистической поправки к туннельной плотности состояний в трехмерном металле и сдвига критической температуры сверхпроводящей пленки, вызванных усилением электронного взаимодействия беспорядком, широко известным в диффузионной области [6]. Второй пример является особенно важным, так как имеется большой массив экспериментальных работ [7], посвященных неупорядоченным сверхпроводящим пленкам мезоскопической толщины, которые также имеют важное практическое применение в ультрачувствительных детекторах электромагнитных волн. Вместе с тем вклад трехмерной баллистической области в сдвиг температуры сверхпроводящего перехода недооценивался и подробно не изучался, хотя, как показано в диссертации, он в действительности является главным во многих экспериментальных реализациях, где превосходит хорошо известный вклад двумерной диффузии [8–10].

В диссертации также изучаются транспортные свойства неупорядоченных одномерных топологических [11] сверхпроводников класса симметрии D, которые активно исследуются в последние годы. Интерес к ним связан с тем, что согласно теоретическим предсказаниям, в них могут возникать майорановские квазичастицы, работа с которыми является одним из перспективных направлений в области квантовых вычислений и обработки информации [12]. Предпринимались попытки пронаблюдать майорановские состояния экспери-

ментально [13]. Известно [14], что критический режим между двумя различными топологическими фазами характеризуется нетривиальным поведением среднего кондактанса на больших длинах $\langle g \rangle \propto \sqrt{\xi/L}$, вместе с тем старшие моменты кондактанса и другие более сложные характеристики не изучались ранее при произвольной длине провода. В диссертации разрабатывается этот вопрос с помощью техники нелинейной суперсимметричной сигма-модели [15] с двумя репликами. Развитие этого подхода с математической точки зрения сопряжено с важными новыми результатами в радиальном Фурье-анализе на суперсимметрических пространствах старшего ранга.

Целью данной диссертации является изучение роли электрон-электронного взаимодействия и эффектов топологии в неупорядоченных системах, главным образом, в присутствии сверхпроводимости.

С учетом проведенного обзора и поставленной цели было решено сосредоточиться на следующих **задачах**:

1. Детальный анализ вызванной беспорядком и взаимодействием поправки к туннельной плотности состояний в нормальном металле в режиме баллистического движения электронов.
2. Вычисление вклада трехмерной баллистической области в эффект подавления температуры сверхпроводящего перехода, вызванный совместным влиянием беспорядка и примесей. Подробный анализ существующих экспериментальных данных по подавлению T_c в сверхпроводящих пленках и сравнение их с теоретическими предсказаниями вкладов 3D баллистической и 2D диффузионной области.
3. Вычисление старших моментов кондактанса и Фано фактора в неупорядоченной майорановской проволоке в критическом режиме между тривиальной и топологической фазой.
4. Разработка математического аппарата, подходящего для решения этой проблемы (нелинейная суперсимметричная сигма-модель старшего ранга и Фурье-анализ на ее многообразии).

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут применяться как для дальнейших теоретических исследований в области неупорядоченных и топо-

логических сверхпроводников, так и в практических исследованиях, посвященных сверхпроводящим пленкам с беспорядком (в частности при создании ультрачувствительных фотонных детекторов) и топологическим сверхпроводящим нанопроволокам, которые могут быть использованы для квантовых вычислений на майорановских фермионах.

Методология и методы исследования. В первой и второй главах использовалась примесная диаграммная техника, вычисления производились в основном в координатном представлении. В третьей главе использовалась суперсимметричная нелинейная сигма-модель ранга два ($n = 2$), статистическая сумма которой находилась с помощью трансфер-матричного метода, что потребовало построения собственного базиса оператора Лапласа-Бельтрами на супермногообразии сигма-модели с помощью параметризации Ивасава.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказана важность вклада баллистического движения электронов при изучении мезоскопических эффектов, связанных с взаимодействием и беспорядком
2. Поправка Альтшулера-Аронова к туннельной плотности состояний в трехмерных системах существенно пересмотрена с упором на роль баллистического вклада. Получено точное пертурбативное выражение для трехмерного баллистического вклада в рамках выбранной модели нормального металла (параболическая дисперсия, точечное взаимодействие, и т. д.), а также универсальное выражение для излома поправки на уровне Ферми.
3. Формула Овчинникова-Финкельштейна для вклада области двумерной диффузии в эффект уменьшения критической температуры сверхпроводящей пленки критически переосмыслена в свете большого массива экспериментальных данных. Показано, что она имеет ограниченную применимость, когда используется, как независимое предсказание, а не как формула для фиттирования данных.
4. Вычислен вклад области трехмерной баллистики в сдвиг критической температуры сверхпроводника и продемонстрировано, что он является главным в ситуации многих известных экспериментов.
5. Впервые были получены результаты для ряда транспортных

характеристик квазичастиц в диффузионных майорановских проволоках (класса симметрии D) в критическом режиме: второй и третий момент кондактанса, Фано фактор и дисперсия топологического индекса при произвольной длине провода.

6. Достигнуто новое понимание структуры радиального собственного базиса на многообразии суперсимметричной сигма-модели старшего ранга. Показано наличие трех семейств собственных функций лапласиана для $n = 2$ сигма-модели в классе D. Сформулирована гипотеза об общей иерархической структуре радиального базиса на суперсимметрических пространствах.

Научная новизна:

1. Изучена баллистическая поправка к туннельной плотности состояний в трехмерном металле во всем диапазоне энергий.
2. Впервые подробно исследован кроссовер поправки к критической температуре сверхпроводника из диффузионной области в баллистическую.
3. Впервые изучены старшие моменты кондактанса и старшие транспортные моменты в топологических сверхпроводах класса симметрии D при произвольной длине провода в диффузионной области.
4. Впервые построен радиальный базис и описана иерархическая структура собственных функций лапласиана на неприводимом супермногообразии второго ранга.

Достоверность и апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- Конференции *Strongly disordered and inhomogeneous superconductor*, 21 — 23 November 2016, Grenoble, France, Доклад: «Superconductivity suppression in disordered films: 3D vs 2D»
- Школе и конференции *Fundamentals on Quantum Transport*, Trieste, ICTP, July 31 — August 11, 2017, Стендовый доклад: «Distribution of conductance of disordered topological superconductors»
- Конференции *The Challenge of 2-Dimensional Superconductivity*, Leiden, Lorentz center, Netherlands, 8 — 12 July, 2019, Стендовый доклад: «Mesoscopic conductance fluctuations of class D superconducting wires»

Также все результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН.

Личный вклад. Все новые результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Публикации. Работы автора по теме диссертации изложены в 3 публикациях, 2 из которых изданы в печатных изданиях в журналах, рекомендованных ВАК. Третья работа представлена в виде препринта и получила одобрительный отзыв из научного журнала, рекомендованного ВАК, в котором будет опубликована в ближайшее время. Список публикаций автора по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и семи приложений. Полный объем диссертации составляет **125** страниц текста с **20** рисунками и двумя таблицами. Список литературы содержит **140** наименований.

Содержание работы

Во введении производится достаточно подробный обзор научной области диссертации, обосновывается актуальность исследований, формулируются цель и задачи работы.

Первая глава посвящена изучению баллистической части поправки к туннельной плотности состояний в трехмерном металле, вызванной совместным эффектом беспорядка и электрон-электронного взаимодействия.

Влияние электрон-электронного взаимодействия на одночастичную плотность состояний в металлах с беспорядком изучалось в основополагающих работах Альтшулера и Аронова [16; 17]. Они вычислили пертурбативную (по силе взаимодействия) поправку к туннельной плотности состояний, предполагая, что движение электронов является диффузионным. Полученное выражение имеет особенность при энергии E , равной энергии Ферми E_F . Эта особенность является логарифмической в случае двумерных систем и корневой в трехмерном случае:

$$\frac{\delta\nu_{\text{diff}}(E)}{\nu_0} = \frac{c_d\lambda\sqrt{|E - E_F|\tau}}{(k_F l)^2}, \quad |E - E_F| \ll \frac{1}{\tau}, \quad (1)$$

где ν_0 , τ и $l = v_F\tau$ — это, соответственно, плотность состояний в невзаимодействующей системе (на одну проекцию спина), время и длина свободного пробега упругого рассеяния на энергии Ферми (скорость Ферми v_F); λ является безразмерной постоянной электрон-электронного взаимодействия, а c_d — численный коэффициент, зависящий от пространственного профиля взаимодействия (постоянная Планка $\hbar = 1$).

Теоретический анализ Альтшулера и Аронова [6] был подтвержден в ряде экспериментальных работ, как в двумерной, так и в трехмерной геометрии. В работах [18; 19] было произведено непertурбативное вычисление, обобщающее поправку Альтшулера-Аронова первого порядка. При увеличении силы беспорядка происходит переход из металлического режима в режим изолятора, при этом поправка Альтшулера-Аронова превращается в полноценную кулоновскую щель.

Изначально предполагалось, что поправка от взаимодействия должна обрезаться на границе диффузионной области, при $|E - E_F| \sim 1/\tau$. Одна-

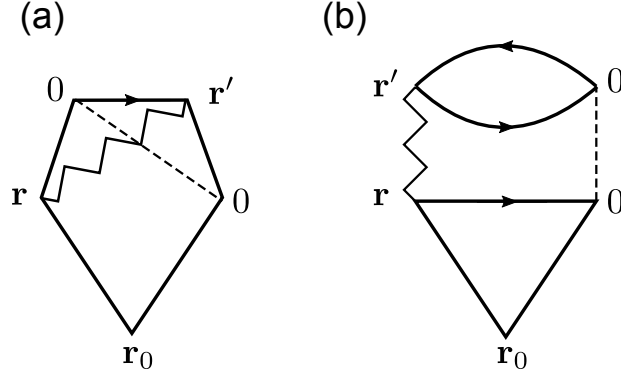


Рис. 1 — (a) фоковская (обменная) и (b) хартриевская диаграммы для средней плотности состояний (в точке \mathbf{r}_0) в неупорядоченном металле с взаимодействием в баллистическом окне энергий $|E - E_F| \gg 1/\tau$. Сплошными, зигзагообразными и пунктирными линиями обозначены электронная функция Грина, электрон-электронное взаимодействие и корреляционная функция беспорядка, соответственно.

ко позднее Рудиным, Алейнером и Глазманом было показано [5], что в действительности эта поправка продолжается в квазibalлистическую область, $|E - E_F| \gg 1/\tau$, где она может быть интерпретирована, как эффект рассеяния на эффективном потенциале Фриделевских осцилляций, вызванных отдельной примесью. В двумерной геометрии это приводит к логарифмическому поведению $\delta\nu(E)$, как и в диффузионной области. Попытка обобщить этот результат на трехмерную геометрию была предпринята Кулаковым [20], который рассмотрел сингулярную часть обменного вклада (член Фока) и предсказал линейное поведение поправки в квазibalлистическом режиме:

$$\frac{\delta\nu_{\text{ball}}^{(\text{Koul})}(E)}{\nu_0} \sim \frac{\lambda}{k_F l} \frac{|E - E_F|}{E_F}, \quad \frac{1}{\tau} \ll |E - E_F|. \quad (2)$$

В диссертации рассматривается баллистический вклад в туннельную плотность состояний в трехмерном металле с короткодействующим электрон-электронным взаимодействием в рамках первого порядка теории возмущений по силе взаимодействия, который соответствует диаграммам, изображенным на Рис. 1. При этом был учтен вклад Хартри, который не учитывался в работе [20] и была аккуратно прослежена зависимость поправки от энергии во всей баллистической области $|E - E_F| \gg 1/\tau$. Как и для большинства баллистических вкладов, поведение поправки к плотности состояний зависит как от

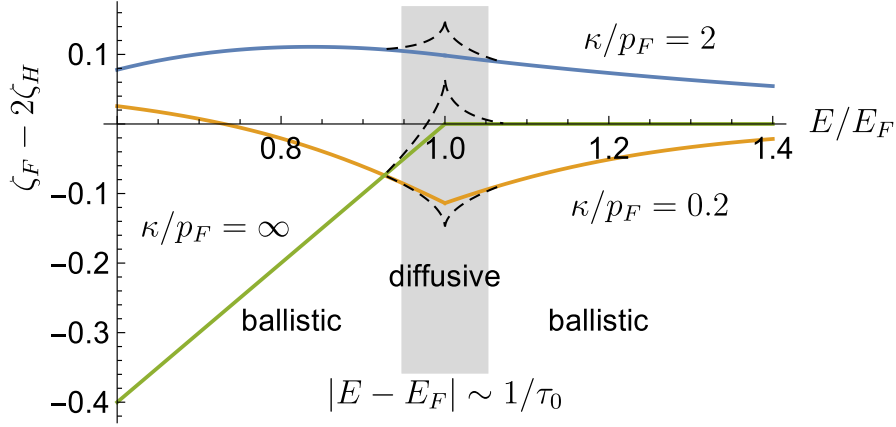


Рис. 2 — Энергетическая зависимость баллистической поправки (3) в туннельную плотность состояний для взаимодействия Юкавы (4) для различных волновых векторов экранировки $\kappa/p_F = 0.2, 2, \infty$ (точечное взаимодействие). Пунктиром схематично обозначен диффузионный вклад (1), имеющий корневое поведение вблизи энергии Ферми.

деталей взаимодействия, так и от дисперсии электронов. Полученная зависимость $\delta\nu(E)$ в общем случае является асимметричной относительно энергии Ферми. Эта асимметрия более всего выражена в случае точечного взаимодействия и параболического спектра, при этих условиях поправка к плотности состояний отсутствует при $E > E_F$. В общем случае, выражение имеет вид

$$\frac{\delta\nu_{\text{ball}}(E)}{\nu_0} = \frac{\pi\lambda}{4p_E l} [\zeta_F(E) - 2\zeta_H(E)], \quad (3)$$

где p_E — это импульс, соответствующий энергии E (при заданной дисперсии электронов), а $\zeta_F(E)$ и $\zeta_H(E)$ представляют собой вклад фоковских (обменных) и хартриевских диаграмм в безразмерных единицах (типичное значение порядка единицы). На Рис. 2 отображен результат расчета таких поправок для случая параболической дисперсии и взаимодействия Юкавы с разными параметрами экранировки κ :

$$V_r = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\kappa^2}{2\nu_0} \frac{e^{-\kappa r}}{r}. \quad (4)$$

Как было упомянуто выше, поправка $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ существенно зависит от деталей взаимодействия и дисперсии, однако расчет показывает, что скачок ее производной при $E = E_F$ (см. Рис. 2) является универсальным, то

есть зависит только от свойств системы на поверхности Ферми и потенциала взаимодействия в импульсном представлении:

$$\frac{\partial[\delta\nu_{\text{ball}}(E)/\nu_0]}{\partial(p_E/p_F)} \Big|_{E_F-0}^{E_F+0} = \frac{\pi\nu_0[V(0) - 2V(2p_F)]}{k_F l}, \quad (5)$$

где два слагаемых соответствуют фоковскому (обменному) и хартриевскому вкладу, соответственно. На самом деле именно этот скачок был получен Кулаковым [20], который учитывал только вклад Ферми-поверхности и поэтому получил только неаналитическую часть баллистической поправки. Скачок производной, посчитанный по выражению Кулакова (2) полностью совпадает с уравнением (5) в пренебрежении вкладом Хартри.

В терминах пространственных масштабов, поправка к плотности состояний (3) содержит информацию как о малых масштабах $r \sim 1/k_F$, так и о больших $r \sim v_F/|E - E_F|$ (где r — это расстояние между примесью и точкой взаимодействия). Поэтому она не является универсальной. Скачок производной, напротив, определяется большими пространственными масштабами $r \gg 1/k_F$ и описывается компактной формулой (5).

Во **второй главе** изучается эффект подавления сверхпроводимости в разупорядоченных пленках, вызванный совместным влиянием отталкивательного электрон-электронного взаимодействия и беспорядка.

Одной из главных характеристик сверхпроводника является критическая температура T_c , при которой происходит фазовый переход в сверхпроводящее состояние. Обычно считается, что эта величина не зависит от формы образца, однако ряд экспериментов [7] свидетельствует о том, что в неупорядоченных пленках имеется зависимость T_c от толщины пленки, причем в подавляющем большинстве случаев критическая температура уменьшается по мере уменьшения толщины пленки d . Этот эффект, как правило, проявляется при толщинах порядка десятка нанометров, а для еще более тонких пленок возможен квантовый фазовый переход в изолирующее состояние.

Физика подавления сверхпроводимости в тонких пленках обсуждалась в различных работах на протяжении последних пятидесяти лет. В настоящее время считается, что подавление T_c происходит либо по фермионному, либо бозонному механизму, в зависимости от структуры материала. Бозонный механизм реализуется в гранулярных и/или сильно неупорядоченных сверхпро-

водниках, в которых при понижении температуры в первую очередь происходит образование локализованных куперовских пар без глобальной фазовой когерентности, а при критической температуре возникает глобальная сверхпроводящая когерентность. При фермионном сценарии, который реализуется в равномерно разупорядоченных пленках без какой-либо структуры, подавление T_c является следствием того, что беспорядок изменяет эффективное электрон-электронное взаимодействие. Известно, что это приводит к усилению кулоновского отталкивания и уменьшению эффективной константы взаимодействия в куперовском канале λ_{BCS} , отвечающей за сверхпроводимость.

Несмотря на одинаковый физический принцип подавления T_c беспорядком, способ описания фермионного механизма в трехмерных и двумерных системах существенно отличается. В *трехмерной (3D) геометрии* за усиление отталкивания при движении в потенциале дефектов отвечают малые расстояния, не превосходящие длины пробега l . В результате, весь эффект может быть описан изменением константы куперовского взаимодействия. В работе Андерсона, Мутталиба и Рамакришнана [21] изучался фермионный механизм для сильно неупорядоченного 3D сверхпроводника вблизи порога андерсоновской локализации ($k_F l \sim 1$, где k_F — импульс ферми). Там же была дана оценка поправки к голой константе электрон-электронного взаимодействия λ в случае слабого беспорядка ($k_F l \gg 1$): $\delta\lambda/\lambda \sim 1/(k_F l)^2$. Приведенную оценку легко получить, обрезав 3D диффузионный вклад на ультрафиолетовом пределе $r \sim l$. Однако, как показали Белитц и Киркпатрик на примере слабо-локализационной поправки к проводимости [4], в 3D геометрии диффузионные вклады протягиваются в баллистическую область вплоть до расстояний порядка длины волны и имеют относительный порядок $1/(k_F l)$, а не $1/(k_F l)^2$.

Белитц предпринял попытку одновременно учесть примесные поправки как к кулоновскому, так и к электрон-фононному взаимодействию и их влияние на T_c с помощью техники точных собственных функций, а также путем решения полных уравнений Горькова в режиме сильной связи [22]. Часть его результатов может быть интерпретирована, как поправка к голой константе электрон-электронного взаимодействия $\delta\lambda/\lambda \sim 1/k_F l$. Однако достоверность выводов Белитца была поставлена под сомнение Финкельштейном [10], который указал, что упругие диаграммы, связанные с поправкой к тун-

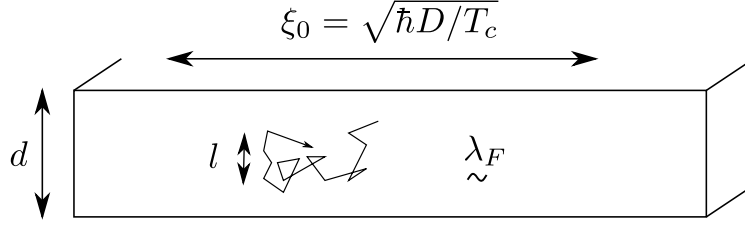


Рис. 3 — Соотношение масштабов длин в изучаемой неупорядоченной сверхпроводящей пленке.

нельной плотности состояний [9], на важности которых настаивал Белитц, не дают вклада в ведущую поправку к сдвигу T_c .

Главное отличие *двумерной (2D) геометрии* от 3D случая заключается в том, что эффект перенормировок не может быть сведен к независящему от энергии сдвигу константы λ , а требует суммирования главных логарифмов. Общепринятое описание эффекта подавления T_c в тонких сверхпроводящих пленках существенно использует представление о *2D диффузионном* характере движения электронов, что основывается на следующей экспериментально значимой иерархии масштабов длин: $\lambda_F \ll l \ll d \ll \xi_0$, см. рис. 3. (Здесь λ_F — фермиевская длина волны, $\xi_0 = \sqrt{\hbar D/T_c}$ — сверхпроводящая длина когерентности в грязном пределе, D — коэффициент диффузии.) В таком подходе усиление беспорядка с уменьшением d связано с увеличением сопротивления на квадрат R_\square .

На пертурбативном уровне эффект совместного влияния беспорядка и кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость был изучен Овчинниковым [8] и другими авторами [9], в которых был вычислен вклад двумерных диффузионных масштабов длины (больших, чем длина свободного пробега l):

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{6\pi g} \log^3 \frac{\hbar}{T_{c0}\tau_*}, \quad (6)$$

где T_{c0} — критическая температура трехмерного сверхпроводника, $g = \hbar/e^2 R_\square = (2/3\pi)(k_F l)(k_F d) \gg 1$ — безмерный кондактанс пленки на квадрат, λ — безразмерная константа электрон-электронного взаимодействия, а $\tau_* = \max\{\tau, \tau_d\}$, где τ — это время упругого рассеяния, а $\tau_d = (l/d)^2 \tau$ — характерное время диффузии на толщине пленки [8].

Выражение (6), полученное в первом порядке теории возмущений, было позже обобщено Финкельштейном на случай произвольно сильного по-

давления T_c с помощью ренорм-группового суммирования ведущих логарифмов [10]. Аналогичный результат можно получить, решая уравнение само-согласования с зависящей от энергии вершиной куперовского притяжения $\lambda_{E,E'} = \lambda_{\text{BCS}} - \gamma_g^2 \log[1/\max(E,E')\tau_*]$. В случае экранированного кулоновского взаимодействия ($\lambda = 1/2$) непertурбативное выражение для критической температуры как функции безразмерного кондактанса пленки, описывающее сверхпроводимость вплоть до ее полного подавления, имеет вид:

$$\log \frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma_g} \log \frac{\gamma + \gamma_g}{\gamma - \gamma_g}, \quad (7)$$

где $\gamma_g = 1/\sqrt{2\pi g}$ и $\gamma = 1/\log(\hbar/T_{c0}\tau_*)$. Выражение (7), где параметр γ рассматривается как подгоночный, было использовано Финкельштейном [10] для описания экспериментальных данных по зависимости T_c пленок MoGe от толщины, напрямую связанной с безразмерным кондактансом g . С тех пор такой способ объяснения экспериментальных данных по подавлению сверхпроводимости в неупорядоченных пленках стал фактически общепринятым.

Однако интерпретация экспериментальных данных по зависимости $T_c(d)$ с помощью формулы (7) сталкивается с рядом принципиальных трудностей. Первая связана с несостоятельностью подхода, в котором γ рассматривается как свободный подгоночный параметр. Как следует из анализа большого числа экспериментальных данных, проведенного в диссертации, типичные значения γ_{fit}^{-1} , полученные из подгонки зависимости $T_c(d)$ под выражение (7), находятся в интервале $7 \div 9$. Проблема заключается в том, что данные значения значительно превосходят теоретическую оценку $\gamma^{-1} = \ln(\hbar/T\tau_d)$, а в половине случаев превосходят также и величину $\ln(\hbar/T\tau)$. С учетом того, что пертурбативный сдвиг T_c , согласно уравнению (6), пропорционален кубу этого логарифма, расхождение между микроскопической теорией и результатом фита по формуле (7) оказывается очень большим. Можно попытаться спасти положение, сказав, что γ_{fit}^{-1} содержит также вклад 3D диффузии, но в таком случае остается непонятным статус уравнений (6) и (7), полученных в предположении 2D диффузии. Кроме того, против применимости этих формул свидетельствует результат обзора [7], в котором было показано, что T_c зависит в первую очередь от трехмерной объемной проводимости $\sigma \propto k_F^2 l$, а не от двумерного кондактанса $g \propto k_F^2 l d$.

В диссертации показывается, что имеющиеся экспериментальные данные по подавлению T_c в тонких пленках могут быть удовлетворительно объяснены в предположении, что основной вклад происходит от процессов *трехмерного баллистического* движения электронов с типичным расстоянием между точкой взаимодействия и местом примесного рассеяния в несколько длин волн. Наш основной результат состоит в корректировке пертурбативной формулы (6) для сдвига T_c :

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\alpha}{k_F l} - \frac{\lambda}{3\pi g} \log^3 \frac{\hbar}{T_{c0} \tau_d}, \quad (8)$$

где добавленный первый член отвечает вкладу трехмерной баллистической области.

Для этого рассматривается простая модель s -волнового сверхпроводника в модели Бардина-Купера-Шиффера (БКШ), в предположении о том, что электрон-электронное притяжение по фононному механизму с потенциалом $V_{\text{ph}}(\mathbf{r}) = -(\lambda_{\text{ph}}/2\nu)\delta(\mathbf{r})$, эффективное в полосе энергий порядка ω_D вокруг энергии Ферми и короткодействующее отталкивание с потенциалом $V(\mathbf{r}) = (\lambda/2\nu)\delta(\mathbf{r})$ ($\lambda_{\text{ph}} \ll \lambda \ll 1$). Беспорядок описывается гауссовым белым шумом с коррелятором $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2\pi\nu\tau$, где ν — плотность состояний на одну проекцию спина. Предполагается соотношение между параметрами $T_c < E_d < \omega_D < \tau^{-1} < E_F$, выполняющееся для большинства экспериментов, описанных в литературе [7].

В теории БКШ

$$T_{c0} = \omega_D \exp(-1/\lambda_{\text{BCS}}), \quad (9)$$

где эффективная константа связи дается выражением

$$\lambda_{\text{BCS}} = \lambda_{\text{ph}} - \lambda/(1 + \lambda \log E_F/\omega_D). \quad (10)$$

Здесь последнее слагаемое, известное, как “кулоновский псевдопотенциал” или “толмачевский логарифм” соответствует вкладу электрон-электронного отталкивания, которое частично подавляется перенормировкой в куперовском канале [23].

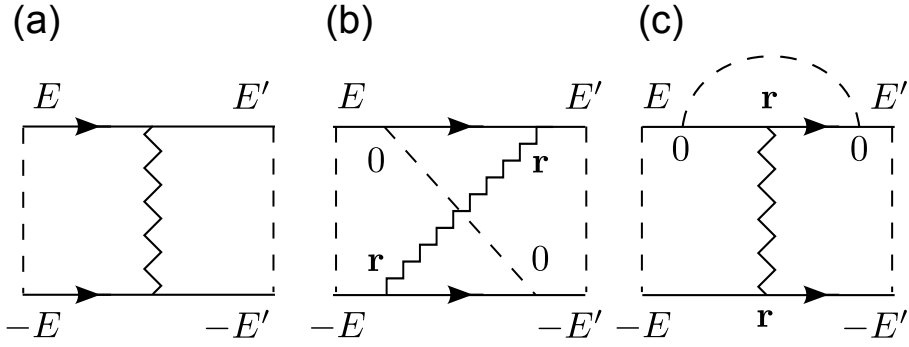


Рис. 4 — (a) Вершина взаимодействия в куперовском канале окруженная началом куперонной лестницы (b), (c) Диаграммы, отвечающие ведущей баллистической поправке в отталкивательную вершину λ . У обеих диаграмм есть зеркальные аналоги.

С помощью обобщения выражений для диффузонов из куперонов на квазибаллистическую область, в диссертации показывается, что поправка (6) протягивается в баллистическую область. Последняя требует отдельного аккуратного рассмотрения, что удобно сделать, вычислив диаграммы, изображенные на Рис. 4, в координатном представлении. Это вычисление приводит к выражению для поправки к голой (неперенормированной) константы отталкивания в куперовском канале

$$\delta\lambda = \frac{\pi\nu\lambda}{2\tau} \int \frac{d\mathbf{r}}{(k_F r)^2} \left(\frac{\sin k_F r}{k_F r} \right)^2 = \frac{\pi\lambda}{2k_F l}, \quad (11)$$

которое будучи подставлено в (10) приводит в приближении БКШ к поправке вида

$$\frac{\delta T_c^{(\text{ball})}}{T_{c0}} = -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{k_F l} \left[\frac{\log \frac{\omega_D}{T_{c0}}}{1 + \lambda \log \frac{E_F}{\omega_D}} \right]^2. \quad (12)$$

Это выражение является главным результатом второй главы. Оно является неуниверсальным, однако есть все основания считать, что в реальных пленках имеется вклад такой же природы, описываемый Ур. (8) с $\alpha \sim 1$. Как упоминалось выше, для большинства известных пленок он превышает широко известный вклад (6). В диссертации иллюстрируется применение трехмерной баллистической части формулы (8) с помощью фиттирования экспериментальных данных по зависимости T_c от параметра $k_F l$ на примере трех различных материалов, при этом теория вполне соответствует эксперименту (см. Рис. 5).

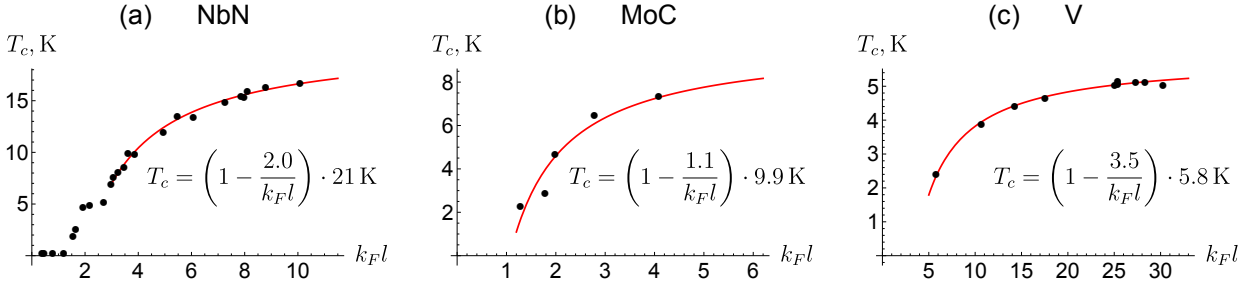


Рис. 5 — Экспериментальные данные по зависимости T_c от $k_F l$ (точки) и их подгонка с помощью формулы $T = T_{c0}(1 - \alpha/k_F l)$ (сплошная линия) для сверхпроводящих пленок различной толщины и разного состава: (a) NbN, (b) MoC, (c) V .

В третьей главе изучаются топологические сверхпроводящие многоканальные проволоки класса симметрии D в критическом режиме между топологической и тривиальной фазой в присутствии случайного потенциала (длина свободного пробега l). С помощью нелинейной суперсимметричной сигма-модели вычисляется дисперсия квазичастичного кондактанса g , его третий кумулянт, фактор Фано и дисперсия топологического индекса для произвольных длин проволоки на протяжении перехода из режима диффузионного друдевского транспорта в режим больших длин, характеризующийся несамоусредняющимся поведением кондактанса с корневым убыванием его среднего $\langle g \rangle \sim 1/\sqrt{L}$.

Класс симметрии D соответствует сверхпроводнику без каких-либо дополнительных симметрий гамильтониана (в частности, без симметрии по обращению времени и повороту спина). Согласно общей классификации, в этом классе существуют две фазы гамильтониана: тривиальная и топологическая, так что он описывается \mathbb{Z}_2 -топологическим числом (принимаяющим значения $q = 1$ и $q = -1$, соответственно). В обеих фазах имеется щель в спектре элементарных возбуждений (регулируемая контролирующим параметром μ). На краях образца топологической фазы неизбежно возникает пара майорановских состояний на близкой к нулю энергии (экспоненциально малой по длине провода) [24]. В чистой, трансляционно-инвариантной системе топологический инвариант q может быть вычислен через значения пфаффиана блоховского гамильтониана в центре и на краю зоны Бриллюэна [24].

Беспорядок, который в той или иной степени всегда присутствует в эксперименте имеет несколько следствий в рамках изучаемой задачи. Во-

первых, он может сдвигать границу между тривиальной и топологической фазой в пространстве параметров гамильтониана. Во-вторых, он нарушает трансляционную инвариантность, что затрудняет классификацию топологических фаз с помощью импульсного представления. Однако, фаза все равно может быть определена с помощью транспортных свойств системы в координатном представлении для любой фиксированной реализации беспорядка: топологический вариант определяется через матрицу отражения квазичастиц по формуле $q = \text{sign det } r$ [25]. Таким образом, в критическом режиме перехода между топологической и тривиальной фазами имеется полностью открытый канал прохождения. Третье следствие беспорядка заключается в том, что топологическое число q зависит не только от средних по ансамблю характеристик беспорядка, но меняется от реализации к реализации. Поэтому топологическое число (при фиксированной длине провода L и силе беспорядка) требует статистического описания [14]. Его среднее $\langle q \rangle$ плавно интерполирует между -1 и 1 при изменении контролирующего параметра μ , переводящем топологическую фазу в тривиальную. Только в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ топологический переход становится резким, при этом также происходит Андерсоновская локализация квазичастиц, что является еще одним проявлением эффектов беспорядка.

Транспортные свойства квазичастиц в квантовых проволоках класса D не могут быть описаны электрическим кондактансом, так как гамильтониан Боголюбова – де Жена (БдЖ), используемый для описания сверхпроводящего состояния не сохраняет их число. Вместо этого имеет смысл вычислять тепловой кондактанс [26]. Используя стандартную величину кванта теплового кондактанса, $G_0 = \pi k_B^2 T / 6\hbar$, введем безразмерный тепловой кондактанс $g = G/G_0$, имеющий стандартное представление Ландауэра в виде суммы прозрачностей каналов прохождения $g = \sum T_n$.

В работе [27] было показано в рамках подхода Дорохова-Мелло-Перейра-Кумара (DMPK) [28; 29], что поведение многоканальных проводов на больших длинах $L \gg \xi$ (корреляционная длина $\xi = Nl$) эквивалентно поведению в одноканальном случае, так как все каналы за исключением, быть может, одного, подвергаются Андерсоновской локализации и их вклад экспоненциально подавляется. В настоящей работе мы исследуем критический режим, при котором на больших длинах ляпуновская экспонента λ , отвеча-

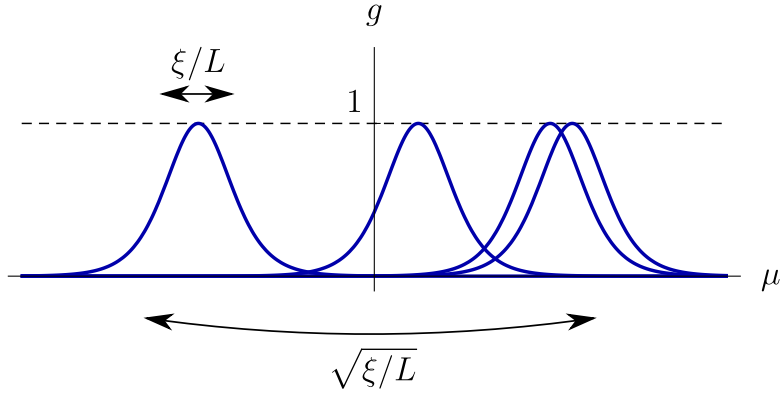


Рис. 6 — Схематичное изображение зависимости безразмерного кондактанса g проволоки длины $L \gg \xi$ от контролирующего параметра μ для нескольких реализаций беспорядка. Каждый пик имеет высоту 1, ширину, которая зависит от длины проволоки, как $1/L$, в то время, как распределение центров пиков имеет характерную ширину $1/\sqrt{L}$

ющая каналу с наибольшей прозрачностью $T = 1/\cosh^2 \lambda$, распределена по гауссовому распределению с центром в нуле, что эквивалентно следующему распределению для прозрачности (и, следовательно, кондактанса):

$$P(T) = \frac{\langle g \rangle}{2} \frac{1}{T\sqrt{1-T}}, \quad (13)$$

где подразумевается обрезка распределения на малых T , а

$$\langle g \rangle = \sqrt{\frac{\xi}{\pi L}}, \quad \text{var } g = \frac{2}{3} \langle g \rangle. \quad (14)$$

Это распределение формально совпадает с бимодальной плотностью прозрачностей в обычном металле, полученной Дороховым [28].

Подход ДМРК позволяет получить результат на больших длинах, но его затруднительно использовать при $L \leq \xi$, поэтому в настоящей работе, целью которой было исследовать переходный режим из диффузного металла на малых длинах в описанный выше режим больших длин, использовался комплементарный подход нелинейной сигма-модели в ее суперсимметричном варианте [15], применимой в диффузионном режиме в пределе $N \gg 1$. Ее действие имеет вид

$$S[Q] = -\frac{\xi}{16} \int_0^L dx \text{str}(\nabla Q)^2, \quad Q = T^{-1} \Lambda T,$$

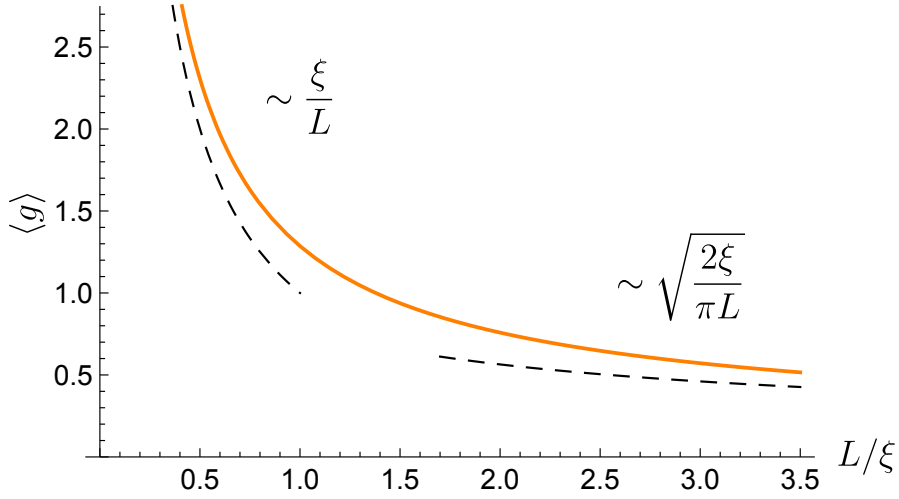


Рис. 7 — Усредненный по беспорядку кондактанс квантовых проволок класса симметрии D в критическом режиме, как функция длины провода L . Пунктиром обозначены ведущие асимптотики на малых и больших длинах.

где Q — матричное поле в пространствах Бозе-Ферми, Намбу (пространство гамильтониана BdG) и пространстве реплик в количестве n штук. Вследствие частично-дырочной симметрии гамильтониана BdG, Q -матрица удовлетворяет соотношению $\bar{Q} = C^T Q C = -Q$. Она принимает значения на седловом супермногообразии, которое в классе D представляет собой симметрическое пространство $\text{SpO}(n, n|2n)/U(n|n)$. Такая модель изучалась в работах [14; 30] для случая $n = 1$, что позволило получить выражения для среднего кондактанса, как функции длины провода. В связи с тем, что в классе D с одной репликой ($n = 1$) фермион-фермионный сектор сигма-модели является вырожденным, для вычисления мезоскопических флуктуаций кондактанса требуется рассмотреть модель с $n = 2$, что и было произведено в настоящей работе.

Для вычисления моментов кондактанса при усреднении по беспорядку требуется вычислить статистическую сумму

$$Z[\theta_i] = \int_{Q(L=0)=\Lambda}^{Q(L)=Q(\theta_i)} \mathcal{D}[Q(x)] e^{-S[Q]}$$

тогда усредненные транспортные характеристики могут быть получены ее дифференцированием по переменным Картана-Ефетова θ_i [30]:

$$\langle g \rangle = -4 \left. \frac{\partial^2 Z(\theta_i)}{\partial \theta_{B1}^2} \right|_0, \quad \langle g^2 \rangle = 16 \left. \frac{\partial^4 Z(\theta_i)}{\partial \theta_{B1}^2 \partial \theta_{B2}^2} \right|_0.$$

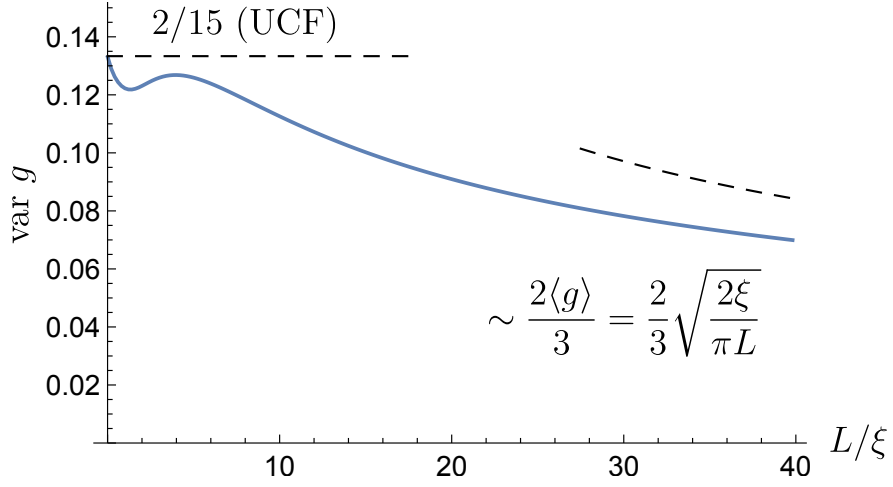


Рис. 8 — Зависимость дисперсии кондактанса из-за мезоскопических флуктуаций в критическом режиме класса D от длины провода L . Пунктиром обозначены ведущие асимптотики на малых и больших длинах.

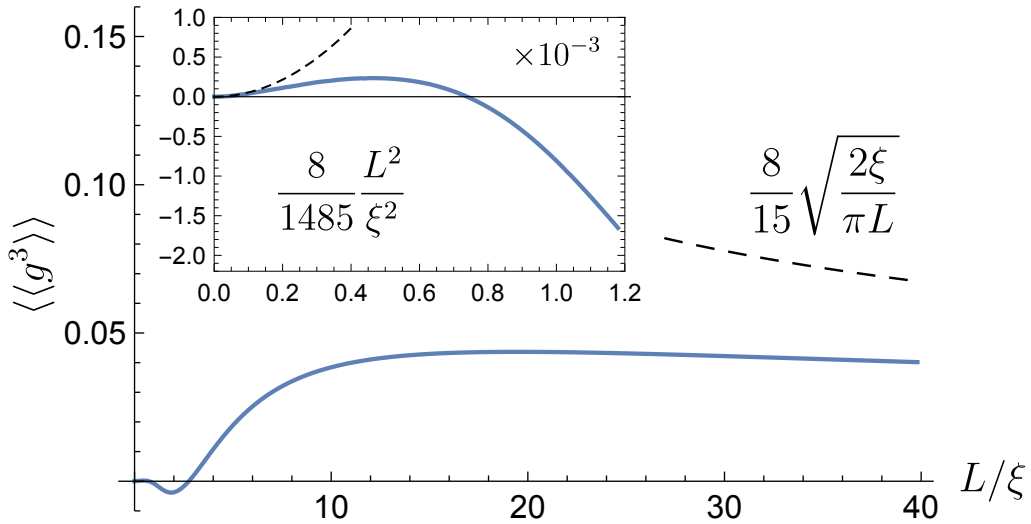


Рис. 9 — Зависимость третьего кумулянта $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$ кондактанса в классе симметрии D в критическом режиме от длины провода L . Врезка: зависимость на коротких длинах. Пунктиром показаны асимптотики на больших и малых длинах провода.

Для непертурбативного вычисления статистической суммы используется трансфер-матричный метод, который сводится к решению уравнения Шредингера, в котором роль мнимого времени играет пространственная координата:

$$Z[\theta_i] = \psi(Q_L(\theta_i), x = L),$$

где ядро теплопроводности ψ удовлетворяет уравнению

$$\xi \partial_x \psi(Q, x) = -\hat{H} \psi(Q, x), \quad \psi(Q, x = 0) = \delta_{\text{SUSY}}(Q, \Lambda)$$

Гамильтониан представляет собой радиальный оператор Лапласа-Бельтрами на супермногообразии сигма-модели:

$$\hat{H} = -\Delta = -\frac{1}{J} \partial_\alpha J g^{\alpha\beta} \partial_\beta,$$

где J — якобиан на супермногообразии. Для построения ядра теплопроводности достаточно найти собственный базис этого оператора, состоящий из волновых функций ϕ_ν с мерой μ_ν :

$$\Delta \phi_\nu(\theta_i) = -\epsilon_\nu \phi_\nu(\theta_i).$$

Тогда

$$\psi(Q, x) = \sum_\nu \mu_\nu \phi_\nu(\theta_i) e^{-\epsilon_\nu x / \xi},$$

Нахождение собственного базиса оператора Лапласа на супермногообразии является нетривиальной задачей. В настоящей работе она впервые была решена для супермногообразия ранга 2 с помощью метода, использующего параметризацию Ивасава [31]. Метод основан на том, что в координатах Ивасава плоские волны являются собственными функциями лапласиана. Для физических приложений необходимо осуществить переход к параметризации Картана-Ефетова, а так как в ядро теплопроводности входят только радиальные собственные функции, предлагается избавиться от зависимости от всех переменных, кроме углов Картана, путем изотропизации волновых функций:

$$\phi_p(\theta) = \langle e^{ipa(\theta, U)} \rangle_K \simeq \int_{U \in K} e^{ipa(\theta, U)}. \quad (15)$$

Обычно такая изотропизация производится при помощи интегрирования по «лишним» переменным. Интеграл имеет весьма громоздкий вид, так что даже получение асимптотических выражений на больших θ в замкнутом виде требует некоторого искусства в выборе параметризации переменных $U \in K$. Особенность суперсимметричного подхода состоит в том, что, если зависимость от некоторого числа грассмановых переменных уже отсутствует, то интеграл обратится в ноль. Именно поэтому собственная функция единица, всегда присутствующая в базисе, не может быть получена наивным применением приема Ивасава. В диссертации было показано, что для случая $n = 2$ сигма-модели с двумя репликами существует также дополнительное, однопараметрическое семейство волновых функций, получение которого из параметризации Ивасава требует модификации параметризации группы K , при котором каждый член в подынтегральном выражении в (15) перестает зависеть от одного и того же набора грассмановых переменных и тогда интегрирование по ним можно опустить. В результате собственный базис лапласиана в сигма-модели класса D с двумя репликами состоит из следующих радиальных волновых функций:

- трехпараметрические функции $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$, которые получаются усреднением по полной группе K (зануляются на “бозонной линии” $\theta_{B2} = \theta_F = 0$);
- однопараметрические функции $\phi_{q_1}(\theta)$, возникающие когда плоская волна (в координатах Ивасава) не зависит от некоторых грассмановых переменных (после перехода к параметризации Картана) и интегрирование по ним не производится (изотропизация); интересно, что это семейство тесно связано с собственными функциями трансфер-матричного гамильтониана сигма-модели класса D с одной репликой, как будет показано ниже (зануляются в “северном полюсе” $\theta_{B1} = \theta_{B2} = \theta_F = 0$);
- функция-единица 1, отвечающая тривиальной плоской волне в параметризации Ивасава, которую совсем не нужно интегрировать по грассмановым переменным.

В диссертации выдвинута гипотеза о том, что такая иерархическая структура базиса распространяется и на большее число реплик так, что старшие (с большим числом реплик) сигма-модели включают в себя радиальные собственные

функции всех младших сигма-моделей, которые должны быть правильным образом продолжены на многообразии большей размерности.

Собственные числа Лапласиана для двух нетривиальных семейств равны

$$\epsilon_{q_1} = q_1^2, \quad \epsilon_{q_1 q_2 l} = \frac{1}{4} + q_1^2 + q_2^2 + \frac{1}{2}l(l+1), \quad (16)$$

а единица является нулевой модой.

Построенный собственный базис позволяет записать ядро теплопроводности трансфер-матричного уравнения Шредингера сигма-модели и получить следующие выражения для среднего кондактанса, его второго и третьего моментов:

$$\langle g^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \mu_q P_q^{(k)} e^{-2\epsilon_q L/\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{q_1 q_2 l} R_{q_1 q_2 l}^{(k)} e^{-2\epsilon_{q_1 q_2 l} L/\xi}, \quad (17)$$

где собственные числа ϵ_q и $\epsilon_{q_1 q_2 l}$ перечислены в выражении (16), а меры μ_{q_1} и $\mu_{q_1 q_2 l}$ приведены в основном тексте диссертации. Многочлены $P_q^{(k)}$, определяющие вклад однопараметрического семейства собственных функций имеют вид:

$$P_q^{(1)} = 4q^2, \quad (18a)$$

$$P_q^{(2)} = \frac{8}{3}q^2(1+q^2), \quad (18b)$$

$$P_q^{(3)} = \frac{8}{15}q^2(1+q^2)(4+q^2). \quad (18c)$$

Вклад трехпараметрических собственных функций описывается многочленами $R_{q_1 q_2 l}^{(k)}$:

$$R_{q_1 q_2 l}^{(1)} = 0, \quad (19a)$$

$$R_{q_1 q_2 l}^{(2)} = \frac{64}{3} [4\epsilon_{q_1 q_2 l}(1+l)^2 + M], \quad (19b)$$

$$R_{q_1 q_2 l}^{(3)} = \frac{32}{5} [4\epsilon_{q_1 q_2 l}(1+l)^2 B_3 + M B_4], \quad (19c)$$

где $M = (l^2 + 4q_1^2)(l^2 + 4q_2^2)$ и $B_m = 5 + l(4 + ml) + 4q_1^2 + 4q_2^2$.

Полученное выражение для среднего кондактанса $\langle g \rangle$ совпадает с тем, которое получается из однорепличной сигма-модели [14; 30]. Однако в нашем

случае это выражение получено из более сложной двухрепличной сигма-модели. Таким образом, тот факт, что ожидаемое совпадение действительно имеет место быть, служит подтверждением корректности нашего рассмотрения двухрепличной теории.

Асимптотическое поведение моментов кондактанса *в пределе большой длины провода*, $L \gg \xi$, определяется первым слагаемым в Ур. (17), так как трехпараметрическое семейство, в отличие от однопараметрического, содержит щель в спектре. Вычисляя интеграл по q_1 методом перевала, получим

$$\frac{\langle g \rangle}{g_L} = 1 + \frac{\pi^2 \xi}{12L} - \frac{\pi^4 \xi^2}{240L^2} + \dots, \quad (20a)$$

$$\frac{\langle g^2 \rangle}{g_L} = \frac{2}{3} + \frac{(3 + \pi^2)\xi}{18L} + \frac{\pi^2(15 - \pi^2)\xi^2}{360L^2} + \dots, \quad (20b)$$

$$\frac{\langle g^3 \rangle}{g_L} = \frac{8}{15} + \frac{(15 + 4\pi^2)\xi}{90L} + \dots, \quad (20c)$$

где $g_L = \sqrt{2\xi/\pi L}$. Ведущая асимптотика в уравнениях (20) согласуется с результатами подхода ДМПК [27] и может быть получена из распределения Дорохова (13).

В пределе короткого провода, $L \ll \xi$, оба семейства радиальных собственных функций дают вклад в $\langle g^2 \rangle$ и $\langle g^3 \rangle$. Как обсуждалось в работе [31], проще получить аналитические выражения для асимптотики на коротких длинах провода не из общей формулы (17), а при помощи непосредственного пертурбативного решения уравнения Шредингера для ядра теплопроводности [31], что выполнено в приложении к диссертации. Еще одним способом изучения этого режима является вычисление флуктуационного детерминанта вблизи квазиклассической траектории [30]. Было обнаружено, что общий численный результат согласуется с обоими вышеперечисленными аналитическими методами, что является сильным аргументом в пользу того, что базис был построен правильно. Полученные выражения для $\langle g \rangle$, $\text{var } g = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$

и $\langle\langle g^3 \rangle\rangle = \langle g^3 \rangle - 3\langle g^2 \rangle \langle g \rangle + 2\langle g \rangle^3$ имеют вид:

$$\langle g \rangle = \frac{\xi}{L} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} \frac{L}{\xi} + \frac{2}{63} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots, \quad (21a)$$

$$\text{var } g = \frac{2}{15} - \frac{8}{315} \frac{L}{\xi} + \frac{136}{4725} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots, \quad (21b)$$

$$\langle\langle g^3 \rangle\rangle = \frac{8}{1485} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots \quad (21c)$$

В процессе вычисления $\text{var } g$, два ведущих слагаемых, пропорциональных $1/L^2$ и $1/L$ полностью сокращаются, как и ожидается в теории универсальных флуктуаций кондактанса. Неожиданным является тот факт, что третий кумулянт оказывается пропорциональным L^2 , а не L , как можно было бы ожидать из скейлинга $\langle\langle g^k \rangle\rangle \propto L^{k-2}$, предположенного в работе. Подобные сокращения ведущих членов в $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$ в слаболокализационном режиме являются характерной особенностью (квази)одномерных систем.

На произвольной длине провода L приходится вычислять средний кондактанс и его дисперсию численно. Результаты представлены на Рис. 7, 8 и 9, которые иллюстрируют переход из режима Друде в критический режим на больших длинах L . Достаточно неожиданно, $\text{var } g$ и $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$ выходят на асимптотики (20) гораздо медленнее, чем сам $\langle g \rangle$.

В диссертации также изучался фактор Фано квазичастиц и дисперсия топологического индекса.

Наконец, в **заключении** подводятся итог проделанной работы, объясняется ее значение для научной области и возможное направление развития. Некоторые технические детали вынесены в соответствующие **приложения**.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Antonenko D., Skvortsov M.* Ballistic correction to the density of states in an interacting three-dimensional metal // Phys. Rev. B. — 2020. — февр. — т. 101, вып. 6. — с. 064204. — DOI: [10.1103/PhysRevB.101.064204](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.064204).
2. *Antonenko D. S., Skvortsov M. A.* Superconductivity Suppression in Disordered Films: Interplay of Two-dimensional Diffusion and Three-dimensional Ballistics // JETP Letters. — 2020. — сент. — т. 112, вып. 7. — с. 466. — DOI: [10.1134/S0021364020190017](https://doi.org/10.1134/S0021364020190017).
3. *Antonenko D. S., Khalaf E., Ostrovsky P. M., Skvortsov M. A.* Mesoscopic conductance fluctuations and noise in disordered Majorana wires // submitted to Phys. Rev. B. — — arXiv:2007.10815.

Список литературы

1. *Mahan G. D.* Many-Particle Physics. — New York : Plenum Press, 1990.
2. *Akkermans E., Montambaux G.* Mesoscopic physics of electrons and phonons. — Cambridge University Press, 2007.
3. *Gorkov L. P., Larkin A. I., Khmel'nitsky D. E.* Particle conductivity in a two-dimensional random potential // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 248 (1979) [Sov. Phys. JETP Lett. **30**, 228 (1979)]. —
4. *Kirkpatrick T. R., Belitz D.* Nonanalytic behavior of ultrasonic attenuation in disordered electronic systems // Phys. Rev. B. — 1986. — авг. — т. 34, вып. 4. — с. 2168. — DOI: [10.1103/PhysRevB.34.2168](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.34.2168).
5. *Rudin A. M., Aleiner I. L., Glazman L. I.* Tunneling zero-bias anomaly in the quasiballistic regime // Phys. Rev. B. — 1997. — апр. — т. 55, вып. 15. — с. 9322. — DOI: [10.1103/PhysRevB.55.9322](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.9322).
6. *Altshuler B. L., Aronov A. G.* Electron-electron Interaction in Disordered System / под ред. М. П. А. Л. Efros. — Amsterdam : North-Holland, 1985.

7. *Ivry Y., Kim C.-S., Dane A. E., De Fazio D., McCaughan A. N., Sunter K. A., Zhao Q., Berggren K. K.* Universal scaling of the critical temperature for thin films near the superconducting-to-insulating transition // *Phys. Rev. B.* — 2014. — дек. — т. 90, вып. 21. — с. 214515. — DOI: [10.1103/PhysRevB.90.214515](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.214515).
8. *Ovchinnikov Y. N.* Fluctuation shift of the transition temperature of thin superconducting films // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1973. — т. 64, № 2. — с. 719. — [Sov. Phys. JETP **37**, 366 (1973)].
9. *Maekawa S., Fukuyama H.* Localization Effects in Two-Dimensional Superconductors // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1982. — т. 51. — с. 1380.
10. *Finkel'stein A. M.* Suppression of superconductivity in homogeneously disordered systems // *Physica B: Cond. Mat.* — 1994. — т. 197, № 1. — с. 636. — DOI: [10.1016/0921-4526\(94\)90267-4](https://doi.org/10.1016/0921-4526(94)90267-4).
11. *Hasan M. Z., Kane C. L.* Colloquium: Topological insulators // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — нояб. — т. 82, вып. 4. — с. 3045. — DOI: [10.1103/RevModPhys.82.3045](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.3045).
12. *Beenakker C. W. J.* Search for Majorana Fermions in Superconductors // *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* — 2013. — т. 4, № 1. — с. 113. — DOI: [10.1146/annurev-conmatphys-030212-184337](https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-030212-184337).
13. *Gül Ö., Zhang H., Bommer J. D. S., Moor M. W. A. de, Car D., Plissard S. R., Bakkers E. P. A. M., Geresdi A., Watanabe K., Taniguchi T., Kouwenhoven L. P.* Ballistic Majorana nanowire devices // *Nature Nanotechnology.* — 2018. — март. — т. 13, № 3. — с. 192.
14. *Altland A., Bagrets D., Kamenev A.* Topology versus Anderson localization: Nonperturbative solutions in one dimension // *Phys. Rev. B.* — 2015. — февр. — т. 91, вып. 8. — с. 085429. — DOI: [10.1103/PhysRevB.91.085429](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.085429).
15. *Efetov K. B.* *Supersymmetry in Disorder and Chaos.* — Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996.
16. *Altshuler B. L., Aronov A. G.* Contribution to the theory of disordered metals in strongly doped semiconductors // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **77**, 2028 (1979) [Sov. Phys. JETP **50**, 968 (1979)]. —

17. *Altshuler B. L., Aronov A. G.* Zero bias anomaly in tunnel resistance and electron-electron interaction // Solid State Commun. — 1979. — т. 30. — с. 115.
18. *Finkelstein A. M.* Electron Liquid in Disordered Conductors // Soviet scientific reviews. т. 14 / под ред. I. M. Khalatnikov. — Harwood Academic Publishers, Glasgow, 1990.
19. *Levitov L. S., Shytov A. V.* Semiclassical theory of Coulomb anomaly // Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **66**, 200 (1997) [JETP Lett. **66**, 214 (1997)]. —
20. *Koulakov A. A.* Quasiballistic correction to the density of states in three-dimensional metal // Phys. Rev. B. — 2000. — сент. — т. 62, вып. 11. — с. 6858. — DOI: [10.1103/PhysRevB.62.6858](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.6858).
21. *Anderson P. W., Muttalib K. A., Ramakrishnan T. V.* Theory of the “universal” degradation of T_c in high-temperature superconductors // Phys. Rev. B. — 1983. — июль. — т. 28, вып. 1. — с. 117. — DOI: [10.1103/PhysRevB.28.117](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.28.117).
22. *Belitz D.* Theory of disorder-induced increase and degradation of superconducting T_c // Physical Review B. — 1987. — т. 36, № 1. — с. 47.
23. *Morel P., Anderson P. W.* Calculation of the Superconducting State Parameters with Retarded Electron-Phonon Interaction // Phys. Rev. — 1962. — февр. — т. 125, вып. 4. — с. 1263. — DOI: [10.1103/PhysRev.125.1263](https://doi.org/10.1103/PhysRev.125.1263).
24. *Kitaev A. Y.* Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Physics-Uspekhi. — 2001. — т. 44, 10S. — с. 131.
25. *Akhmerov A. R., Dahlhaus J. P., Hassler F., Wimmer M., Beenakker C. W. J.* Quantized Conductance at the Majorana Phase Transition in a Disordered Superconducting Wire // Phys. Rev. Lett. — 2011. — янв. — т. 106, вып. 5. — с. 057001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.057001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.057001).
26. *Read N., Green D.* Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect // Phys. Rev. B. — 2000. — апр. — т. 61, вып. 15. — с. 10267. — DOI: [10.1103/PhysRevB.61.10267](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.10267).

27. *Gruzberg I. A., Read N., Vishveshwara S.* Localization in disordered superconducting wires with broken spin-rotation symmetry // Phys. Rev. B. — 2005. — июнь. — т. 71, вып. 24. — с. 245124. — DOI: [10.1103/PhysRevB.71.245124](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.245124).
28. *Dorokhov O. N.* Transmission coefficient and the localization length of an electron in N bound disordered chains // Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **36**, 259 (1982) [Sov. Phys. JETP Lett. **36**, 318 (1982)]. —
29. *Mello P. A., Pereyra P., Kumar N.* Macroscopic approach to multichannel disordered conductors // Ann. Phys. — 1988. — т. 181, № 2. — с. 290.
30. *Khalaf E.* PhD Thesis “Mesoscopic Phenomena in Topological Insulators, Superconductors and Semimetals”. — Stuttgart, 2016.
31. *Mirlin A. D., Mullergroeling A., Zirnbauer M. R.* Conductance Fluctuations of Disordered Wires: Fourier Analysis on Supersymmetric Spaces // Ann. Phys. — 1994. — т. 236, № 2. — с. 325. — DOI: <https://doi.org/10.1006/aphy.1994.1115>.