На правах рукописи

Лункин Алексей Владимирович

СТРУКТУРА НЕ-ФЕРМИЖИДКОСТНОГО ОТКЛИКА В МОДЕЛИ САЧДЕВА-ЙЕ-КИТАЕВА С ВОЗМУЩЕНИЕМ

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Черноголовка — 2022

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН и Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Фейгельман Михаил Викторович**
Официальные оппоненты:	**Рубцов Алексей Николаевич,** Доктор физико-математических наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор
	Тарнопольский Григорий Михайлович , кандидат физико-математических наук, Университет Карнеги Меллон, Питтсбург, США
Ведущая организация:	ФТИ им. А.Ф. Иоффе

Защита состоится 24 июня 2022 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д.002.207.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау» Российской академии наук по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, проспект академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета http://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/.

Автореферат разослан «___» ______________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.002.207.01, д-р физ.-мат. наук Всеволод Эдуардович Адлер

Общая характеристика работы

Началом теории электронных многочастичных систем можно считать работу Энрико Ферми [1]. В работе Ферми описана термодинамика системы состоящей из большого числа невзаимодействующих частиц, находящихся в ограниченном объёме. При этом частицы удовлетворяли определённой квантовой статистике: никакие две частицы не могли занимать одно и то же квантовое состояния. В последствии эта модель получила название модель "Ферми-газа" т.к. в модели рассматриваются невзаимодействующие частицы а сами частицы получили название "фермионы". Самый известный фермион – электрон. Термодинамические свойства этой модели совпадают с термодинамическими свойствами многих металлов при низкой температуре. Эта модель легла в основу модели Зомерфельда [2], благодаря которой была объяснена проводимость и теплопроводность металлов. Тем не менее, несмотря на всю предсказательную силу, модель Ферми имеет существенный недостаток: в ней не учтено взаимодействие электронов друг с другом, которое неминуемо имеется т.к. электрон заряженная частица.

Следующее существенное продвижение в теории электронных систем было получено в работе Льва Ландау [3]. Он показал, что низко-энергетическое возбуждение системы с отталкивающим взаимодействием, может быть представлено как сумма элементарных возбуждений. Эти элементарные возбуждения обладают всеми свойствами частиц поэтому их назвали квазичастицы. Таким образом Ландау показал, что даже в присутствии взаимодействия многие свойства системы похожи на свойства невзаимодействующей системы. Модель Ландау получила название "Ферми-жидкость" т.к. учитывала взаимодействие. Основным свойством ферми-газа, которое позволило Ландау построить теорию ферми-жидкости является наличие большой (больше чем все другие энергетические масштабы задачи) энергии Ферми. Энергия Ферми для ферми-газа определена следующим образом: эта изменение энергии основного состояния при добавление к системе ещё одного фермиона.

Теория ферми-жидкости применима, как было отмечено выше, только при отталкивающем взаимодействие. Притягивающее взаимодействие сильно меняет свойства системы, приводя к фазовому переходу в сверхпроводящее состояние при низких температурах. Первая модель, которая описала это явление была предложена Бардином, Купером и Шриффером в работе [4]. Для их модели также важно то, что энергия ферми превосходит другие масштабы в задаче.

Теория Ландау и теория Бардина, Купера, Шриффера (БКШ) легли в основу теории металлов. Однако, со временем, были обнаружены сверхпроводники с аномально высокой температурой перехода в сверхпроводящее состояние [5]. Свойства этих веществ выше температуры перехода напоминают металлические, но не могут быть описаны в рамках теории ферми-жидкости. Например, сопротивление этих веществ линейной зависит от температуры, в то время как для ферми-жидкости эта зависимость квадратичная. При этом такое поведение не может быть объяснено взаимодействием с фононами.

К сожалению, полноценной модели, предсказывающей свойства таких веществ, пока не существует. Очевидно, лишь то, что взаимодействие должно играть решающую роль в такой модели. Однако, далеко не все модели со взаимодействием допускают аналитическое решение. Одной из моделей с сильным взаимодействием и с возможностью аналитического описания является модель Сачдева-Йе-Китаева (SYK).

Модель SYK была предложена Алексеем Китаевым в 2015г. на устном докладе, [6] работа появилась несколько позже. В модели рассматривается нульмерный объект (квантовая точка), в которой существует $N \gg 1$ врожденных одночастичных уровня, которые могу занимать майорановские фермионы. Таким образом взаимодействие полностью определяет динамику системы. В этой модели матричные элементы взаимодействия представляются случайными независимыми гауссовыми величинами с нулевым средним и масштабом дисперсии J. При нулевой температуре, можно выделить два важных интервала времён: 1) короткие времена $1 \ll J\tau \ll N$ и 2) длинные $N \ll J\tau$. На коротких временах, для описания модели можно воспользоваться средне-полевым подходом. На длинных временах, флуктуации становятся важны. Не-ферми-жидкостное поведение модели выражено в поведении функции Грина. Которая, в случае коротких времён ведёт себя как $G(\tau) \sim \tau^{-1/2}$; в случае длинных $G(\tau) \sim \tau^{-3/2}$ (см. [7]).

Естественным шагом, с точки зрения исследования систем с сильным взаимодействием, выглядит рассмотрение модели с возмущением, которое бы приводило к снятию вырождения одночастичных состояний. Ранее мы рассматривали такое возмущение с характерным энергетическим масштабом Г.

Нами было показано [8] что при $N\Gamma \ll J$ свойства модели не изменяются. При увеличении силы возмущения происходит фазовый переход и флуктуационные эффекты сильно подавляются, из-за этого на временах, таких что $\Gamma^2\tau \gg J$, функция Грина демонстрирует поведения свойственное ферми-жидкости: $G(\tau) \sim \tau^{-1}$ (см. [8]). Возникает вопрос, определено ли поведение системы только её седловыми уравнениями или же флуктуации тоже нужно учитывать? Ответ на этот вопрос получен в данной работе.

Другой аспект, с точки зрения которого модель SYK интересна для изучения, являются её хаотичные свойства. Хаотичные свойства классической системы проявляются в неустойчивости траектории движения по отношению к малым изменениям начальных условий. Чувствительность системы к начальным условиям была отмечена А.Пуанкаре при изучении неустойчивости в задаче трёх тел. Позднее эта задача изучалась А. Ляпуновым. Термин "Эффект бабочки" был предложен Э. Лоренцом, который обнаружил подобную неустойчивость, при моделировании атмосферных явлений. Эффект выражен в том, что расстояние между изначально очень близкими траекториями системы со временем растёт экспоненциально т.е.

$$\{q(t),p(0)\} = \frac{\partial q(t)}{\partial q(0)} \sim e^{\lambda_L t}. \tag{1}$$

Выше $\{\ldots,\ldots\}$-скобка Пуассона для данной системы, p и q канонически сопряжённые импульс и координата соответственно. Показатель λ_L называют экспонентой Ляпунова. Эта формула также может быть обобщена на случай квантовых систем. В таком случае экспонента Ляпунова может быть получена, по аналогии, из коррелятора следующего вид:

$$\langle [q(t),p(0)]^2 \rangle \sim e^{\lambda_L t}. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что для вычисления экспоненты Ляпунова нам необходимо вычислять корреляторы аномально упорядоченные во времени. В английской литературе их называют out-of-time ordered correlator (OTOC). Связь подобных корреляторов с хаотичным поведением системы была впервые отмечена в работе [9]. В общем случае мы можем рассматривать не только сопряжённые пары операторов но и корреляторы вида:

$$F(t_1,t_2,t_3,t_4) = \langle X_1(t_1)X_2(t_2)X_3(t_3)X_4(t_4)\rangle, \tag{3}$$

где X_i-произвольные операторы. Мы будем полагать, что $t_1 \approx t_3 > t_2 \approx t_4$. Изучение таких корреляторов позволяет характеризовать хаотичные свойства системы а также понять распространение информации в квантовой системе [10; 11].

Для экспериментального изучения OTOC нам нужно "переместиться" в прошлое, создать возмущение и посмотреть к чему оно приведёт по сравнению с тем, что мы видели до этого. Подобный опыт, для классической системы, был описан в рассказе Р. Брэдбери "И грянул гром", главные герои которого, отправившись в далёкое прошлое и убив там бабочку, увидели разительное отличие в их мире по возвращению назад. Оказывается, что подобный "эксперимент"может быть реализован. Современные управляемые квантовые системы, имеющие большое число степеней свободы, позволяют изучать подобные корреляторы. Полностью контролируя систему, мы можем изменить знак Гамильтониана, определяющего эволюцию. После такой замены, система эффективно начнёт двигаться назад во времени. Подобный эксперимент был поставлен группой Google Quantum Ai [12].

Для достаточно большого класса систем указанный коррелятор (3) обладает универсальным поведением. А именно:

$$\frac{F(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\langle X_1(t_1)X_3(t_3)\rangle\langle X_2(t_2)X_4(t_4)\rangle} \approx 1 - \frac{1}{C}e^{\lambda_L(t_1-t_2)}. \tag{4}$$

Где как и раньше параметр λ_L– экспонента Ляпунова данной квантовой системы. При этом $C \gg 1$. Для таких систем можно получить общую оценку на экспоненту Ляпунова (далее $\hbar = 1$):

$$\lambda_L \leq 2\pi T. \tag{5}$$

Это оценка была получена в работе [13]. Одним из примеров, для которой эта оценка насыщается, является модель SYK.

Следующую вопрос, который естественно задать: как ведёт себя этот коррелятор в случае $t_1 - t_2 \sim \lambda_L^{-1}\ln C$? Время $t_E = \lambda_L^{-1}\ln C$ называют временем Эренфеста. В случае модели SYK ответ на этот вопрос был получен в работе [14] в которой было показано, что при $t-t_E \gg \lambda_L^{-1}$ коррелятор F стремится к 0. В работе [15] было рассмотрено поведение OTOC для нульмерных фермионных систем на временах больших чем время Эренфеста. В работе было показано, что такой коррелятор может быть вычислен универсальным способом, исходя из поведение коррелятора на малых временах (4) и парных корреляционных функций .

В общем случае для нульмерных систем мы можем отметить, что на временах $t \ll t_E$, коррелятор изменяется экспоненциально, но этот рост подавлен фактором C^{-1}, таким образом, несмотря на быстрый рост, коррелятор слабо отличается от единицы. Мы будем говорить, что на таких временах хаотичные свойства слабо развиты. На временах $t-t_E \gg \lambda_L^{-1}$ хаотичные свойства проявляются полностью.

Что следует ожидать для системы с ненулевой пространственной размерностью? Предположим, что операторы X_2 и X_4 действуют в точке $\mathbf{r}_2$. Точку $\mathbf{r}_1$ и время приложение операторов X_1 и X_3 мы будем менять, вычисляя при этом OTOC. В результате, при фиксированной разнице времени $t_1 - t_2$ мы можем разделить систему на две области: 1) область развивающегося хаоса с $F = const$ и 2) область развитого хаоса с $F \to 0$. В частности, точки на достаточно большом удалении относятся к области 1. Область 2 появляется только при $t_1 - t_2 \geq t_E$. Эти области разделяет граница (фронт), которая со временем движется с некоторой скоростью, что приводит к увеличению области 2. Скорость этого движения, вообще говоря, зависит от направления т.к. информация о возмущении в системе распространяется баллистически. Подобный сценарий распространения информации для систем с локальным гамильтонианом был описан в [10], при этом наличие подобного фронта встречалось и в других моделях, например [16; 17].

В данной работе мы исследуем поведение системы, состоящей из гранул, динамика в каждой из них описывается гамильтонианом модели SYK; при этом существует туннелирование между гранулами. Мы покажем что сценарий, упомянутый выше, применим для описания поведения OTOC в нашей системе. Нами также впервые вычислена скорость распространения фронта в обобщении модели SYK. Предложенный способ вычисления может быть также применён и к другим моделям основанным на модели SYK.

Целью данной работы является изучения свойств не-ферми-жидкостной модели связанных с диссипацией, кинетикой и квантовым хаосом.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построить действие для мягких мод для задачи с возмущением, амплитуда которого зависит от времени.
2. Исходя из полученного действия построить квадратичной действие определяющие пропагатор флуктуаций и различные функции отклика.
3. Исходя из выведенного действия, найти восприимчивость системы на модуляцию гамильтониана.
4. Для случая моделей с ненулевой размерностью построить уравнения непрерывности и найти выражение для токов, вызванных источниками.
5. Изучить поведение восприимчивости в различных режимах.
6. Изучить поведение аномально упорядоченной корреляционной функции, определяющей хаотичные свойства изучаемой модели

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Вычислена восприимчивость в модели Сачдева-Йе-Китаева с возмущением при модуляции амплитуды квадратичного возмущения. Показано, что мнимая часть восприимчивости имеет резонансное поведение с положением резонанса равной частоте перехода между уровнями эффективного гамильтониана флуктуаций.
2. Получены транспортные коэффициенты для обобщения модели Сачдева-Йе-Китаева на случай системы с ненулевой размерностью. Изучены свойства теплопроводности, проводимости и коэффициента Зеебека.
3. Изучено поведение аномально упорядоченного коррелятора, в том числе на временах больших чем время Эренфеста, для обобщения модели Сачдева-Йе-Китаева на случай системы с ненулевой размерностью. Исходя из свойств коррелятора вычислена скорость распространения информации в системе о приложенном возмущении.

Научная новизна:

1. Впервые получено выражение для поглощения энергии в модели SYK с квадратичным возмущением при модуляции амплитуды возмущения.
2. Впервые вычислены кинетические коэффициенты как функции произвольного импульса и частоты в обобщении модели SYK на случай систем с ненулевой размерности. Обнаружены существование медленно затухающих возбуждений с большой энергией.
3. Впервые исследовано поведение аномально-упорядоченного во времени коррелятора в обобщении модели SYK на случай систем с ненулевой размерностью. А также впервые вычислена скорость распространения информации в системе.

Актуальность исследования, и его научная и практическая значимость.

Модель Сачдева-Йе-Китаева представляет живой интерес с точки зрения изучения свойств не-ферми-жидкостной системы а также квантового хаоса. Обе затронутые темы активно изучаются в научном сообществе в течение последних лет; поэтому изучения роли флуктуаций в этих процессах являются актуальной и интересной задачей.

Изучение роли флуктуаций мотивировано их центральным местом в описании не-ферми-жидкостных явления в модели SYK.

Изучение хаотичных свойств в обобщении модели SYK мотивировано тем, что сама по себе модель SYK является исключительной в этом вопросе: она является максимально хаотичной. С другой стороны, современные технологии позволяют изучать свойства распространения информации на искусственных квантовых системах.

Достоверность и апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

– Конференция *Landau Days 2021*, Черноголовка, Россия, 28 июня – 01 июля 2021 г.; доклад «Non-equilibrium Sachdev-Ye-Kitaev model with quadratic perturbations»

Кроме этого, все результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

Личный вклад. Все результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

1. *Lunkin A., Feigel'man M.* Non-equilibrium Sachdev-Ye-Kitaev model with quadratic perturbation // SciPost Physics. — 2022. — янв. — т. 12, № 1. — с. 031. — DOI: 10.21468/SciPostPhys.12.1.031.
2. *Лункин А.* Эффект бабочки в системе квантовых точек в модели Сачдева-Йе-Китаева // Письма в ЖЭТФ. — 2022. — февр. — т. 115, № 5. — с. 328. — DOI: 10.31857/S123456782205010X.
3. *Lunkin A., Feigel'man M.* High-frequency transport and zero-sound in an array of SYK quantum dots // arXiv:2112.11500. — 2021.

Работы изданы в 2 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена введению в модель SYK. Гамильтониан который имеет вид:

$$H = \frac{1}{4!}\sum_{ijkl=0}^{N} J_{ijkl}\chi_i\chi_j\chi_k\chi_l \tag{6}$$

Здесь χ_i -фермионные операторы, $N \gg 1$. Матричные элементы взаимодействия случайны, гауссовы, с нулевым средним и дисперсией:

$$\overline{J_{ijkl}^2} = \frac{6J^2}{N^3} \tag{7}$$

В этой главе представлено вычисление функции Грина на седловом уровне а также с учётом сильных флуктуаций. В дальнейшем флуктуации будут играть центральную роль в этой работе.

Во **второй главе** введена модель с квадратичным возмущением и описана его роль в подавлении флуктуаций. Это подавление происходит за счёт появление локализованных уровней в эффективном гамильтониане флуктуаций. **Первая и вторая глава** служат введением в предмет, описанные в них результаты не выносятся на защиту.

В **третьей главе** описано влияние флуктуаций на поглощение энергии системы при модулировании амплитуды квадратичного возмущения. Скорость поглощения $W(\omega)$ при модуляции на частоте ω может быть выражена как:

$$W(\Omega) = \tfrac{\Omega}{2}\Im\chi(\Omega)\,; \qquad \chi(\Omega) = -\tfrac{i}{2}\tfrac{\delta^2 Z_\Phi}{\delta f^q_\Omega \delta f^{cl}_\Omega} \qquad Z_\Phi = \textstyle\int \mathcal{D}\phi e^{iS} \tag{8}$$

Где S - действие нашей модели в формализме Келдыша а $f(t)$ модуляция амплитуды возмущения. Мы показываем, что восприимчивость $\chi(\Omega)$ как функция частоты $\Omega = \frac{\omega}{2\pi T}$, T-температура системы, и флуктуационный пропагатор мягких мод связаны как:

$$\chi(\Omega) = -\frac{2g}{\varepsilon_0}\psi(-\Omega)\left[1 + \frac{g}{2\varepsilon_0}\Omega^2\mathcal{G}^R_\Omega\psi(-\Omega)\right] \tag{9}$$

Здесь величина $g \sim N\frac{\Gamma^2}{JT}$ и $\varepsilon_0 \sim N\frac{T}{J}$. Γ-характерный масштаб матричных элементов. Функция $\mathcal{G}^R_\Omega$ - запаздывающая функция Грина для мягких мод. В задаче с возмущением и без накачки она имеет вид:

$$\begin{gathered}\left[\mathcal{G}^R(\Omega)\right]^{-1} = \Omega^2\left(\varepsilon_0\left(\Omega^2+1\right) - \tfrac{g}{2\varepsilon_0}\psi(\Omega)\right)\,; \\ \psi(\Omega) = \Psi\left(\tfrac{1}{2} - i\Omega\right) - \Psi\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \Psi(z) = \partial_z \ln\Gamma(z)\end{gathered} \tag{10}$$

Тут $\Gamma(z)$ - гамма функция Эйлера.

При $g \gg \varepsilon_0^2 \Leftrightarrow T \ll \Gamma$ функция Грина $\mathcal{G}(\Omega)$ демонстрирует "резонансное" поведение с частотой резонанса $\pm\Omega_R$ и шириной Ω_W. Эти параметры определены уравнением:

$$\Omega_R^2 = \tfrac{g}{2\varepsilon_0^2}\ln(\Omega_R)\,; \qquad \tfrac{\Omega_W}{\Omega_R} \approx \tfrac{\pi}{4\ln(\Omega_R)} \qquad \tfrac{g}{2\varepsilon_0^2} \sim \left(\tfrac{\Gamma}{T}\right)^2 \tag{11}$$

В результате, восприимчивость имеет резонансный вид, с частотой резонанса Ω_R равной переходу между уровнями в эффективном гамильтониане флуктуаций. Нами также исследовалось поглощение системы при наличии накачки на резонансной частоте с амплитудой A

Важно отметить, что накачка приводит к тому что наша система постоянно поглощает энергию, поэтому для достижения равновесия необходимо учитывать также связь с внешней тепловой баней. Мы применим другой подход: рассмотрим накачку конченой длительности t_{pump} такой, что полная энергия, которую поглотила наша система$E_{\text{abs}} = W(\omega)A^2 t_{\text{pump}}$ достаточно мала т.е. изменение температуры системы ΔT относительно мало, $\Delta T \ll T$.

В нашем подходе мы изучаем отклик системы в квази-стационарном положении на частоте ω ограниченной условием $\omega \gg 1/t_{\text{pump}}$. Увеличение температуры системы определяется выражением $\Delta T = E_{\text{abs}}/C(T)$ где $C(T)$ это теплоёмкость нашей системы. Главный вклад в теплоёмкость $C(T)$ в интересном для нас области $T \ll \Gamma$ связан с квадратичным возмущением в действии. Теплоёмкость $C(T)$ может быть вычислена в седловом приближении; Соответствующее вычисление энтропии было сделано в работе [18], однако в ней не было замечено что в области $T < \Gamma$ доминирующий вклад в теплоёмкость $C(T)$ ведёт себя как $\sqrt{4\pi} N\Gamma^2/JT$. В результате, мы находим следующую цепочку неравенств на амплитуду накачки A и частоту ω:

$$\omega_R A^2 \ln^2 \frac{\omega_R}{T} \ll \frac{1}{t_{\text{pump}}} \ll \omega \tag{12}$$

Основной эффект от наличия накачки сводится к поправке действия низкочастотных флуктуаций. В результате, функция Грина этих флуктуаций имеет вид:

$$\left[\mathcal{G}^R(\Omega)\right]^{-1} = \Omega^2 \left(\varepsilon_0 \left(\Omega^2 + 1\right) - \tfrac{g}{2\varepsilon_0}\psi(-\Omega)\right) + \tfrac{i\pi\, g\, \Omega_P}{\varepsilon_0}\Omega \left(\tfrac{A}{2}\right)^2. \tag{13}$$

Это приводит к тому, что при достаточно низких частотах скорость поглощения имеет вид:

$$W(\omega) = \frac{\omega}{2}\Im\chi(\omega) = \frac{A^2}{2} N\pi^{3/2}\omega_R \frac{\Gamma^2}{J} \tag{14}$$

Удивительным образом эта величина не зависит ни от частоты накачки ни от температуры. Мы назвали этот режим поглощения "сухим трением".

В **четвёртой главе** мы расширяем модель на случай системы с ненулевой размерностью и исследуем кинетические коэффициенты. Мы изучаем систему квантовых точек. Гамильтониан модели имеет вид:

$$H = \sum_{\mathbf{r}} \left\{ H_{\mathbf{r}} + \sum_{\delta\mathbf{r}} \sum_{i,j} \left(t_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} \psi^{\dagger}_{\mathbf{r},i} \psi_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} + h.c. \right) \right\}$$
$$H_{\mathbf{r}} = \frac{1}{2!} \sum_{i,j,k,l} J_{i,j;k,l;\mathbf{r}} \; \mathcal{A}\left\{ \psi^{\dagger}_{\mathbf{r},i} \psi^{\dagger}_{\mathbf{r},j} \psi_{\mathbf{r},k} \psi_{\mathbf{r},l} \right\} + \sum_{0<i,j\leq N} \Gamma_{i,j,\mathbf{r}} \psi^{\dagger}_{\mathbf{r},i} \psi_{\mathbf{r},j} \tag{15}$$

Здесь $\psi_{\mathbf{r},i}$ оператор уничтожения $i-$ого фермиона в точке с радиус вектором $\mathbf{r}$. Первый член в первой строке представляет собой гамильтониан внутри точки в то время как второй член описывает туннелирование между соседними точками. Радиус вектор $\delta\mathbf{r}$ - вектор между соседними точками (без ограничения общности, мы предполагаем, что точки образуют квадратную решётку). Матричные элементы туннелирования – случайные гауссовы величины, с нулевым средним, и дисперсией определённой как:

$$\overline{t^2_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j}} = \frac{w^2}{N} \tag{16}$$

Для вычисления электрической и тепловой проводимости нам необходимо ввести источники, которые описывают приложенный электрический потенциал и потенциал Латинжера. В таком случае гамильтониан имеет вид:

$$H_S(t) = H + \sum_{\mathbf{r}} \left(\mathcal{Q}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r},t) + L(\mathbf{r},t) \mathcal{H}_{\mathbf{r}} \right) \tag{17}$$

Где $\mathcal{Q}_{\mathbf{r}}$ и $\mathcal{H}_{\mathbf{r}}$ плотность заряда и энергии.

Нами были найдены выражения связывающую токи в системе и источники они имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} j^{(Q),\alpha}_{\mathbf{p},\omega} \\ j^{(E),\alpha}_{\mathbf{p},\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(\mathbf{p},\Omega) e^2 & -2\pi\mathcal{E} e \sigma(\mathbf{p},\Omega) \\ -2\pi\mathcal{E} e T \sigma(\mathbf{p},\Omega) & \tilde{\kappa}(\mathbf{p},\Omega) + (2\pi\mathcal{E})^2 T \sigma(\mathbf{p},\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ip^{\alpha} U_{\mathbf{p},\omega} \\ -ip^{\alpha} T L^{(cl)}_{\mathbf{p},\omega} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Здесь e заряд фермиона, $\mathcal{E}$-параметр связный с электрон-дырочной ассимитрией; напомним также что $\Omega = \omega/2\pi T$. Левый верхний угол матрицы в выражении (18) показывает что проводимость системы как функция частоты и импульса определяется функцией $e^2\sigma(\omega,p)$ (полное выражение для которой написано в тексте диссертации, ниже мы разберём два предельных случая). Выражения для теплопроводности (нижний правый элемент в матрице в выражении (18)) содержит два члена. Первый из них описывает транспорт тепла в отсутствии транспорта заряда (далее мы будем называть его "внутренним").

Существует два режима поведения системы. При низких частотах, много меньших температуры, в системе наблюдается локальное равновесие и транспорт системы диффузный. Это проявляется в том, что проводимость и теплопроводность имеют следующий вид:

$$\sigma(\mathbf{p},\Omega) = (2\pi)^2\tilde{\sigma}\frac{-i\Omega C_Q}{-iC_Q\Omega+(2\pi)^2\tilde{\sigma}p^2} \qquad \tilde{\kappa}(\mathbf{p},\Omega) = (2\pi)^2\tilde{\sigma}T\frac{\pi^2}{8}\frac{-i\Omega\left[C_E+2\tilde{C}\right]}{-i(C_E+\tilde{C})\Omega+\frac{\tilde{\sigma}\pi^2}{8}p^2} \tag{19}$$

Константы, стоящие в этих выражениях связаны с термодинамическими свойствами всей системы. Как мы видим закон дисперсии проводимости и теплопроводности как функции импульса и частоты показывает диффузное поведение с коэффициентами диффузии (зарядовой и энергетической соответственно):

$$D_e = \sigma_0\left[\frac{\partial Q}{\partial\mu}\right]^{-1} \propto \frac{1}{T} \tag{20}$$

$$D_T = T\sigma_0\frac{\pi}{16}\left[C_E+\tilde{C}\right]^{-1} \propto T \quad \text{at}\, T \ll \Gamma, \tag{21}$$

Число Лоренца L, определённое отношением теплопроводности к проводимости и температуре, в пределе нулевой частоты и импульса даётся следующей формулой:

$$L = \frac{\tilde{\kappa}(\mathbf{0},0)}{T\sigma(\mathbf{0},0)} + (2\pi\mathcal{E})^2 = \frac{\pi^2}{8}\frac{C_E+2\tilde{C}}{C_E+\tilde{C}} + (2\pi\mathcal{E})^2 = \frac{\pi^2}{8}\frac{\alpha_s+\sqrt{b}\frac{\Gamma^2+4dw^2}{(2\pi T)^2}}{\alpha_s+\frac{\sqrt{b}}{2}\frac{\Gamma^2+4dw^2}{(2\pi T)^2}} + (2\pi\mathcal{E})^2 \tag{22}$$

Здесь α_S и b -некоторый численные константы. При относительно высоких температурах $T \geq \Gamma$ теплоёмкость системы мало отличается от теплоёмкости модели SYK, в этом пределе $C_E \gg C_\Gamma$, и отношение Лоренца совпадают с результатами работы [19], $L = \pi^2/8 + (2\pi\mathcal{E})^2$. Однако, при низких температурах $T \ll \Gamma$ теплоёмкость определяется вкладом связанным с квадратичным возмущением и туннелированием $C_\Gamma \gg C_E$, в таком случае отношение Лоренца имеет вид:

$$L = \frac{\pi^2}{4} + (2\pi\mathcal{E})^2 \tag{23}$$

Таким образом изменение отношения Лоренца происходит при температурах $T \sim \Gamma \gg T_{FL}$. При таких температурах изменение седлового решение малое и весь найденный нами эффект связан с флуктуациями мягкой моды. При низких температурах $T \leq T_{FL}$ это отношение принимает вид характерный для ферми жидкости: $L_{FL} = \frac{\pi^2}{3}$.

В случае больших частот, превосходящих температуру, в системе могут существовать возбуждения с медленным затуханием. В частности при достаточно больших частотах проводимость имеет вид:

$$\sigma(\mathbf{p},\Omega) = 8\tilde{\sigma} C_Q \frac{i\Omega\psi(\Omega)}{C_Q\Omega^2 - 8\tilde{\sigma}p^2\psi(\Omega)} \qquad \psi(\Omega) \approx \ln(|\Omega|) - i\frac{\pi}{2} sign(\Omega) \tag{24}$$

При $\Omega \gg 1$ вещественная часть функции $\psi(\Omega)$ намного большой мнимой, в результате затухание волн, спектр которых определяется полюсом проводимости из выражения (24), мало. Уравнения на спектр этих волн имеет вид:

$$\omega^2(p) = s^2 p^2 \ln\left(\frac{sp}{T}\right) \qquad s = T\sqrt{8\frac{\sigma_0}{C_Q}} \tag{25}$$

Характерная скорость волн s не зависит от температуры:

$$s = \frac{2b^{1/4}}{K^{1/2}} a w \tag{26}$$

Для выполнения условия $\omega \sim sp \gg T$, температура системы должна быть достаточно малой, $T \ll w$. Отметим также что скорость s не зависит от наибольшего масштаба энергии J в системе.

В **пятой главе** мы исследуем хаотичный свойства обобщения модели SYK. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид:

$$H = \sum_{\mathbf{r}} \left\{ H_{\mathbf{r}} + i \sum_{\delta\mathbf{r}} \sum_{i,j} w_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} \chi_{\mathbf{r},i} \chi_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} \right\},$$
$$H_{\mathbf{r}} = \tfrac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l}^{N} J_{i,j,k,l;\mathbf{r}} \chi_{\mathbf{r},i} \chi_{\mathbf{r},j} \chi_{\mathbf{r},k} \chi_{\mathbf{r},l}. \qquad (27)$$

Он аналогичен гамильтониану из предыдущей главы, но для простоты мы рассматриваем здесь майорановские фермионы. Предметом изучения этой главы является аномально упорядоченный во времени коррелятор. Основным методом работы с ним является техника Келдыша (однако, контур должен состоять из 4х частей две из которых идут впрёд во времени и две назад) , используя которую, мы можем записать коррелятор как:

$$F(t_1,t_2,t_3,t_4) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,i'} \langle T_{\mathcal{C}} \chi^{(1)}_{\mathbf{r}_1,i}(t_1) \chi^{(2)}_{\mathbf{r}_2,i'}(t_2) \chi^{(3)}_{\mathbf{r}_1,i}(t_3) \chi^{(4)}_{\mathbf{r}_2,i'}(t_4) \rangle \qquad (28)$$

Здесь $T_{\mathcal{C}}$ - обозрачает упорядочение вдоль контура, а верхний индекс у оператора - часть контура на которой мы его рассматриваем. В работе мы нашли поведения коррелятора F в данной модели (точнее $\tilde{F}$, который отличается от F нормировкой на парные корреляционное функции). Поведение этого коррелятора имеет следующий вид:

$$\tilde{F}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{U\left(2\Delta,1,\frac{1}{z}\right)}{z^{2\Delta}} = \begin{cases} 1 - 4z\Delta^2 & z \ll 1 \\ \frac{\ln(z)}{z^{2\Delta}\Gamma(2\Delta)} & z \gg 1 \end{cases}. \qquad (29)$$

Здесь U-вырожденная гипергеометрическая функция, однозначно определённая своими асимптотиками. Выражение для z имеет вид:

$$z \equiv \frac{i}{4} \frac{f_\alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{C_J + \sum\limits_{\delta\mathbf{r}} C_w \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)} \frac{\sinh\left(\frac{u_4+u_2-u_1-u_3}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{u_4-u2}{2}\right)\sinh\left(\frac{u_3-u1}{2}\right)}, \qquad (30)$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}) \equiv \int_{BZ} \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{r}\mathbf{p}}}{1+\alpha\sum_{\delta\mathbf{r}}\sin^2\left(\frac{\mathbf{p}\delta\mathbf{r}}{2}\right)}, \tag{31}$$

$$\alpha \equiv \frac{\sum\limits_{\delta\mathbf{r}} C_w \frac{\pi^2}{8}}{C_J + \sum\limits_{\delta\mathbf{r}} C_w\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)} = \left[\frac{8\alpha_S}{d\pi^2}\left(\frac{2\pi T}{w}\right)^2 + (1-\frac{8}{\pi^2})\right]^{-1}. \tag{32}$$

Здесь d-размерность нашей системы.

Во-первых, при $C_w = 0$ мы получаем ответ для OTOC в модели SYK, это выражение совпадает с формулой (6.10) работы [14] и совпадает с результатом применения метода из статьи [20] к модели SYK. Отметим, что предложенный нами метод вычисления отличается от методов в упомянутых работах, совпадение результатов – указание на возможность применение метода описанного в работе.

Во-вторых, интеграл $f_\alpha(\mathbf{r})$ определяет зависимость от расстояния между операторами в корреляторе. Этот интеграл экспоненциально затухает с расстоянием, но вид затухание зависит не только от модуля $\mathbf{r}$ но и направления, при не очень больших α (при больших α интеграл набирается на малых p и эта зависимость пропадает). Таким образом мы делаем вывод, что информация о возмущение в системе распространяется баллистически, что качественно совпадает с поведением других систем [10; 16; 17].

В-третьих, из формулы (29) следует, что в области с $z \gg 1$ коррелятор – мал, $\tilde{F} \approx 0$, мы будем говорить что точки из этой области "знают" о приложенном возмущении; область с $z \ll 1$ "не знает" о возмущении и в ней $\tilde{F} \approx 1$. Остановимся подробнее на области с $z \sim 1$. Зафиксировав направление, мы можем отметить, что $z \propto e^{\lambda_L(|t_{12}|-\frac{r_{12}}{v})-\ln(N)}$, тут $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg 1$ и $t_{12} = t_1 - t_2 \approx t_3 - t_4$, v-некоторый параметр с размерностью скорости. Из этого вида мы можем сказать, что со временем область $z \sim 1$ распространяется со скоростью v, вдоль зафиксированного ранее направления.

Рассмотрим зависимость скорости от температуры. Скорость распространения определяется параметром α (см. (31,32)). Отметим, что α не зависит от J и определяется только параметром $\frac{T}{w}$. При достаточно высоких температурах $T \gg w$, $\alpha \sim \left(\frac{w}{T}\right)^2 \ll 1$ -зависит от температуры. При малых α скорость распространения сильно зависит от направления. В противоположном случае $w \gg T$ параметр $\alpha \approx \alpha_0 = \frac{\pi^2}{\pi^2-8}$ принимает универсальное значение которое не зависит ни от параметров системы ни от температуры. Стоит отметить, что $\alpha_0 \approx 5.27$ и мы можем считать что $\alpha_0 \gg 1$. В таком случае интеграл в выражении (31) набирается на малых импульсах, а скорость распространения почти не зависит от направления. При $w \gg T$ скорость распространения $v_f = 2\pi T\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}a$-зависит только от температуры и длины ребра решётки. Отметим, что несмотря на то, что вклад с w в седловое уравнение не существенен при $T \gg T_{FL} \sim \frac{w^2}{J}$ свойства системы сильно меняются при $T \sim w$.

Наконец, в **заключении** приведены основные результаты и выводы данной работы. Некоторые технические детали вынесены в **приложения А** соответственно.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Lunkin A.*, *Feigel'man M.* Non-equilibrium Sachdev-Ye-Kitaev model with quadratic perturbation // SciPost Physics. — 2022. — янв. — т. 12, № 1. — с. 031. — DOI: 10.21468/SciPostPhys.12.1.031.

A2. *Лункин А.* Эффект бабочки в системе квантовых точек в модели Сачдева-Йе-Китаева // Письма в ЖЭТФ. — 2022. — февр. — т. 115, № 5. — с. 328. — DOI: 10.31857/S123456782205010X.

A3. *Lunkin A.*, *Feigel'man M.* High-frequency transport and zero-sound in an array of SYK quantum dots // arXiv:2112.11500. — 2021.

Список литературы

1. *Fermi E.* Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases // Zeitschrift für Phys. — 1926. — т. 36, № 11/12. — DOI: 10.1007/BF01400221.

2. *Sommerfeld A.* Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik // Zeitschrift für Phys. — 1928. — т. 47, № 1/2. — DOI: 10.1007/bf01391052.

3. *Landau L.* The Theory of a Fermi Liquid // JETP. — 1956. — т. 3, № 6. — с. 920—925.
4. *Bardeen J.*, *Cooper L. N.*, *Schrieffer J. R.* Theory of superconductivity // Phys. Rev. — 1957. — т. 108, № 5. — DOI: 10.1103/PhysRev.108.1175.
5. *Martin S.*, *Fiory A. T.*, *Fleming R. M.*, *Schneemeyer L. F.*, *Waszczak J. V.* Normal-state transport properties of Bi2+xSr2-yCuO6+ crystals // Phys. Rev. B. — 1990. — т. 41, № 1. — DOI: 10.1103/PhysRevB.41.846.
6. *Kitaev A.*, *Suh S. J.* The soft mode in the Sachdev-Ye-Kitaev model and its gravity dual // J. High Energy Phys. — 2018. — т. 2018, № 5. — DOI: 10.1007/JHEP05(2018)183.
7. *Bagrets D.*, *Altland A.*, *Kamenev A.* Sachdev–Ye–Kitaev model as Liouville quantum mechanics // Nucl. Phys. B. — 2016. — т. 911. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.08.002.
8. *Lunkin A.*, *Kitaev A.*, *Feigel'man M.* Perturbed Sachdev-Ye-Kitaev Model: A Polaron in the Hyperbolic Plane // Phys. Rev. Lett. — 2020. — т. 125, № 19. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.196602.
9. *Larkin A.*, *Ovchinnikov Y. N.* Quasiclassical method in the theory of superconductivity // Sov Phys JETP. — 1969. — т. 28, № 6. — с. 1200—1205.
10. *Aleiner I. L.*, *Faoro L.*, *Ioffe L. B.* Microscopic model of quantum butterfly effect: Out-of-time-order correlators and traveling combustion waves // Ann. Phys. (N. Y). — 2016. — т. 375. — DOI: 10.1016/j.aop.2016.09.006.
11. *Sekino Y.*, *Susskind L.* Fast scramblers // J. High Energy Phys. — 2008. — т. 2008, № 10. — DOI: 10.1088/1126-6708/2008/10/065.
12. *Mi X.*, *Roushan P.*, *Quintana C.*, *Mandrà S.*, *Marshall J.*, *Neill C.*, *Arute F.*, *Arya K.*, *Atalaya J.*, *Babbush R.*, *Bardin J. C.*, *Barends R.*, *Basso J.*, *Bengtsson A.*, *Boixo S.*, *Bourassa A.*, *Broughton M.*, *Buckley B. B.*, *Buell D. A.*, *Burkett B.*, *Bushnell N.*, *Chen Z.*, *Chiaro B.*, *Collins R.*, *Courtney W.*, *Demura S.*, *Derk A. R.*, *Dunsworth A.*, *Eppens D.*, *Erickson C.*, *Farhi E.*, *Fowler A. G.*, *Foxen B.*, *Gidney C.*, *Giustina M.*, *Gross J. A.*, *Harrigan M. P.*, *Harrington S. D.*, *Hilton J.*, *Ho A.*, *Hong S.*, *Huang T.*, *Huggins

W. J., Ioffe L. B., Isakov S. V., Jeffrey E., Jiang Z., Jones C., Kafri D., Kelly J., Kim S., Kitaev A., Klimov P. V., Korotkov A. N., Kostritsa F., Landhuis D., Laptev P., Lucero E., Martin O., McClean J. R., McCourt T., McEwen M., Megrant A., Miao K. C., Mohseni M., Montazeri S., Mruczkiewicz W., Mutus J., Naaman O., Neeley M., Newman M., Niu M. Y., O'Brien T. E., Opremcak A., Ostby E., Pato B., Petukhov A., Redd N., Rubin N. C., Sank D., Satzinger K. J., Shvarts V., Strain D., Szalay M., Trevithick M. D., Villalonga B., White T., Yao Z. J., Yeh P., Zalcman A., Neven H., Aleiner I., Kechedzhi K., Smelyanskiy V., Chen Y. Information scrambling in quantum circuits // Science (80-.). — 2021. — т. 374, № 6574. — DOI: 10.1126/science.abg5029.

13. *Maldacena J., Shenker S. H., Stanford D.* A bound on chaos // J. High Energy Phys. — 2016. — т. 2016, № 8. — DOI: 10.1007/JHEP08(2016)106.

14. *Maldacena J., Stanford D., Yang Z.* Conformal symmetry and its breaking in two-dimensional nearly anti-de Sitter space // Prog. Theor. Exp. Phys. — 2016. — т. 2016, № 12. — DOI: 10.1093/ptep/ptw124.

15. *Gu Y., Kitaev A., Zhang P.* A two-way approach to out-of-time-order correlators // arXiv preprint. — 2021. — ArXiv:2111.12007.

16. *Nahum A., Vijay S., Haah J.* Operator Spreading in Random Unitary Circuits // Phys. Rev. X. — 2018. — т. 8, № 2. — DOI: 10.1103/PhysRevX.8.021014.

17. *Von Keyserlingk C. W., Rakovszky T., Pollmann F., Sondhi S. L.* Operator Hydrodynamics, OTOCs, and Entanglement Growth in Systems without Conservation Laws // Phys. Rev. X. — 2018. — т. 8, № 2. — DOI: 10.1103/PhysRevX.8.021013.

18. *Song X. Y., Jian C. M., Balents L.* Strongly Correlated Metal Built from Sachdev-Ye-Kitaev Models // Phys. Rev. Lett. — 2017. — т. 119, № 21. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.216601.

19. *Davison R. A., Fu W., Georges A., Gu Y., Jensen K., Sachdev S.* Thermoelectric transport in disordered metals without quasiparticles: The Sachdev-Ye-Kitaev models and holography // Phys. Rev. B. — 2017. — т. 95, № 15. — DOI: 10.1103/PhysRevB.95.155131.

20. *Gu Y.*, *Kitaev A.*, *Sachdev S.*, *Tarnopolsky G.* Notes on the complex Sachdev-Ye-Kitaev model // J. High Energy Phys. — 2020. — т. 2020, № 2. — DOI: 10.1007/jhep02(2020)157.