Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

На правах рукописи

УДК 530.145 51-71 512.54

Алексеев Олег Вадимович

Физические состояния в некоторых точно решаемых моделях двумерной квантовой теории поля

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Белавин Александр Абрамович

Черноголовка 2012

Оглавление

Введение

Эта работа посвящена изучению некоторых вопросов, касающихся двумерных точно решаемых моделей квантовой теории поля. Обсуждаемые вопросы связаны с тремя конкретными моделями: двумерной Лиувиллевской гравитацией, двумерной теорией Тоды для аффинной алгебры $A_{L-1}^{(1)}$ и моделью Буллоу-Додда. Нами будет рассматриваться задача о классификации физических состояний в этих трех моделях. В частности, решение данной задачи является необходимым шагом для вычисления корреляционных функций в рассматриваемых теориях. Отметим, что рассматриваемые нами теории представляют собой как безмассовые (Лиувиллевская гравитация), так и массивные (теория Тоды и модель Буллоу-Додда) примеры точно решаемых двумерных моделей квантовых теорий поля. Однако, и в том и в другом случае задача определения пространства физических состояний и вычисления корреляционных функций для этих состояний является крайне нетривиальной.

Двумерная теория гравитации и двумерные интегрируемые модели квантовой теории поля являются темами, привлекающими постоянный интерес на протяжении последних 20 лет. Обе эти темы оказываются связанными с конформными моделями квантовой теории поля. Например, ультрафиолетовый предел интегрируемых моделей может рассматриваться как конформная теория поля, возмущенная некоторым 'интегрируемым' релевантным оператором, в то время как теория гравитации в рассматриваемой нами формулировке представляет собой тензорное произведение трех конформных теорий поля, взаимодействующих в силу условия сокращения конформной аномалии. Приведем кратко основные сведения из теории Лиувиллевской гравитации и теории интегрируемых моделей, которые будут использоваться в дальнейшем.

Теория Лиувиллевской гравитации

Начиная с Эйнштейна, под гравитацией динамическая теория метрики пространства-времени. Такая динамика может изучаться как на классическом уровне, так и квантовом, в последнем случае мы можем говорить о квантовой теории гравитации. Основными динамическим переменными являются компоненты метрического тензора g_{ab}.

Теория гравитации довольно сложная теория не только с математической точки зрения, но и с концептуальной. Даже в классической гравитации уравнения движения для метрики оказываются не линейными и приводят к решениям, которые обычно имеют особенности, в которых пространство-время крайне искривлено. Классическая теория Эйнштейна сама по себе не способна описывать физику вблизи таких сингулярностей. В квантовой гравитации ситуация даже хуже, особенно с точки зрения интерпретации. С потерей классического жесткого пространства-времени, наблюдатель сталкивается с необходимостью искать новые средства интерпретации наблюдений. Наиболее простая возможность состоит в том, чтоб забыть о координатах и сосредоточить внимание только на координатно-независимых наблюдаемых. Такой подход, который можно назвать топологической гравитацией в некотором расширенном смысле, достаточно последователен, но страдает только от одной проблемы: как его совместить с квазиклассическим пределом, в котором, не должно оставаться ничего от топологической гравитации. Так или иначе, проблема интерпретации, проблема правильного выбора наблюдаемых так и остаются одними из важнейших задач квантовой теории гравитации.

С этой точки зрения, любая упрощенная модель, которая смягчает строгие математические проблемы гравитации, но сохраняет актуальными проблемы интерпретации, может рассматриваться как полезная и заслуживающая изучения. Мы будем рассматривать гравитацию в двумерном пространстве-времени.

Двумерная теория гравитации

С этого момента мы будем рассматривать двумерные многообразия с метрикой g_{ab}. Кроме того, мы ограничимся только так называемой евклидовой гравитацией, в которой метрика предполагается положительно определенной $g > 0$. Основные отличия двумерной гравитации от гравитации в другом числе измерений состоят в том, что, во-первых, в двумерии Риманова кривизна полностью описывается скалярной кривизной и, во-вторых, метрика g_{ab} содержит только три независимые компоненты. Как следствие, выбором подходящей системы координат (двух параметрическая свобода), она может описываться только одной динамической компонентой. Например, локально всегда можно выбрать такую систему координат, в которой метрический тензор пропорционален символу Кронекера

$$g_{ab} = e^{\sigma(x)}\delta_{ab}$$

и поле $\sigma(x)$ полностью описывает метрическую структуру на многообразии.

Функционал действия

Для построения классической ковариантной теории гравитации необходимо, прежде всего, выбрать действие, которое должно быть ковариантным функционалом от метрики $S[g_{ab}]$. На первый взгляд, кажется естественным выбрать локальное действие, т.е. действие в которой плотность является локальной функцией от метрики и ее производных. Требование ковариантности показывает, что эта плотность должна строиться из координатных тензоров, таких как метрика и Риманова кривизна, например

$$S[g_{ab}] = \mu \int \sqrt{g} d^2x + k \int R\sqrt{g} d^2x + \dots,$$

где под многоточием понимаются члены более высокой степени по кривизне R и ее производных. Первый член в этом выражении является просто двумерным объемом поверхности. Поэтому, константа связи μ называется космологической константой связи. Второй член представляет собой обычное Эйнштейновское действие. Отметим, что Эйнштейновское действие в двух измерениях не приводит к какой бы то ни было локальной динамики метрического тензора. Действительно, теорема Гауса-Боннэ позволяет редуцировать Эйнштейновское действие к числу, которое полностью определяется топологическими характеристиками многообразия. В принципе, возможно рассмотреть следующие члены с более высокими степенями по кривизне и ее производным. Но, во-первых, эти члены играют незначительную роль при рассмотрении больших поверхностей и, во-вторых, представляется более естественным получить действие для гравитации как действие, индуцированное некоторыми полями материи, находящимися на многообразии.

Конформная материя

Среди двумерных релятивистских теорий поля существует класс безмассовых теория, которые являются масштабно ковариантны, т.е. они не обладают каким-либо выделенным масштабом и ведут себя одинаковым образом при изменении масштаба. Обычно, такие теории обладают, помимо обычной релятивистской и масштабной ковариантности, более высокой конформной симметрией, которая в двух измерениях может быть расширена до бесконечно-мерной симметрии алгебры Вирасоро. Такие теории называются конформными теориями. Примерами таких теорий могут являться теории свободного бозонного или фермионного полей в двух измерениях. Однако, существуют нетривиальные взаимодействующие конформные теории. Благодаря существованию бесконечно мерной конформной симметрии в двух измерениях, такие теории изучены гораздо более полно, чем обычные релятивистские теории поля [3].

Все конформные теории характеризуются некоторым числом c, называемым центральным зарядом, и набором локальных наблюдаемых, которые называются примарными полями Φ_{Δ_i}, где Δ_i — конформная размерность соответствующего поля. Эти размерности описывают вариации поля Φ_Δ при масштабных преобразованиях. Одной из важнейших особенностей конформных теории поля является очень просто и явный способ их взаимодействия с искривленным пространством-временем и их простая реакция на вариацию метрики.

Действие Лиувилля

Простая и универсальная реакция конформных теорий поля на вариации метрики приводит к простой и универсальной форме эффективного действия для гравитации, генерируемого конформной материей, которое называется действием Лиувилля [1]. Если мы выберем некоторую фиксированную метрику $\hat{g}_{ab}$, то

$$S_{\text{eff}}[g] = S_{\text{eff}}[\hat{g}] + S_L[\sigma, \hat{g}]$$

где

$$S_L[\sigma, \hat{g}] = -\frac{c}{96\pi} \int \left(\hat{g}^{ab} \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma - 2\sigma \hat{R} \right) \sqrt{\hat{g}} d^2x + \mu \int e^\sigma \sqrt{\hat{g}} d^2x$$

Необходимо отметить, что эффективное действие, будучи действием для безмассовой теории поля, является не локальным. Однако, Вейлевские фактор σ входит в эффективное действие формально локальным образом. Следовательно, появляется возможность интерпретации эффективного действия как локальной теории поля. Во-вторых, метрика $\hat{g}$ для любой заданной комплексной структуры может быть выбрана произвольным образом, в частности, в некоторых случаях она обладает дополнительными симметриями, упрощающими изучение модели. Например, в случае сферического многообразия, метрика $\hat{g}$ может быть выбрана максимально симметричной метрикой на сфере. Другой удобной возможностью является то, что сферу (за исключением одной точки) можно глобально отобразить на бесконечную плоскость, где метрику можно выбрать плоской $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$. Хотя это отображение и сингулярно в одной точке, плоская метрика открывает возможности использования методов теории поля в плоском пространстве.

Квантование гравитации

Введя необходимые понятия, мы можем перейти к квантованию двумерной гравитации. Рассмотрим следующий функционал

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}g\mathcal{D}X}{\mathrm{vol}(Diff)} e^{-S_M(X,g)},$$

где S_M — конформно инвариантное действие для полей материи, взаимодействующее с гравитацией. В этом функционале мы символически поделили меру интегрирования на объем группы диффеоморфизмов двумерного многообразия. Для определения этого функционала необходимо определить меру интегрирования по полям X и метрики g. Можно определить такие меры, которые будут инвариантными при действии группы диффеоморфизмов, но они не будут инвариантными, относительно конформных преобразований $g_{ab} \to e^{\sigma} g_{ab}$. Так как подынтегральное выражение инвариантно относительно группы диффеоморфизмов, для вычисления функционального интеграла необходимо воспользоваться процедурой фиксации калибровки. Тогда мера интегрирования } распадется на интегрирование по модулям, интегрирование по конформному фактору и на интегрирование по диффеоморфизмам. Для фиксации калибровки обычно используется метод Фадеева-Попова. Таки образом, в рассматриваемой системе возникают духовые поля $b(x)$ и и $c(x)$, причем теория поля для этих полей является конформной. Опуская подробности процедуры фиксации калибровки, приведем итоговое выражение для статсуммы [2]

$$Z = \int \mathcal{D}_{\hat{g}}\sigma \mathcal{D}_{\hat{g}}(gh) \mathcal{D}_{\hat{g}} X e^{-S_M(X,\hat{g}) - S(b,c,\bar{b},\bar{c},\hat{g}) - S_L(\sigma,\hat{g})},$$

где $g = e^{\sigma}\hat{g}$, σ — Вейлевский фактор, а $\hat{g}$ — некоторая фиксированная метрика, для которой определены меры интегрирования. Требование инвариантности этого функционала относительно действия группы дифеоморфизмов, приводит к соотношению центральных зарядов трех конформных теории поля, известному как условие сокращения конформной аномалии

$$c_{\text{matter}} + c_{\text{Liouv}} + g_{\text{ghost}} = 0.$$

Интегрируемые модели квантовой теории поля

Интегрируемые квантовые теории поля характеризуются бесконечным числом сохраняющихся зарядов. В классической механике, существование достаточного большого числа интегралов движения позволяло перейти от начальных координат и импульсов к переменным действие-угол и, как следствие, найти точные решения интегралов движения в квадратурах. Аналогично, если в квантовой теории поля существует бесконечное число сохраняющихся законов, можно получить точный спектр масс модели, вычислить S-матрицу процессов рассеяния, корреляционные функции, термодинамические величины и т.д. Стоит отметить, что нетривиальные интегрируемые квантовые теории поля могут существовать только в двух измерениях. В более высоких измерениях они оказываются либо свободными теориями, либо теориями с нелокальным взаимодействием.

Аналитическая теория рассеяния

С релятивистской точки зрения, теория S-матрицы является обобщением теории рассеяния квантовой механики. Целью этой теории является выявление общих условий для амплитуд перехода процессов рассеяния, включающих многочастичные асимптотические состояния. В результате удается произвести вычисление этих величин без отсылки к лежащему в основе Лагранжеву формализму.

Для применения формализма S-матрицы для описания процессов рассеяния необходимо предположить, что взаимодействие является короткодействующим, так что начальные и конечные состояния, в которых частицы находятся довольно далеко друг от друга, состоят из свободно-частичных состояний. Эти многочастичные состояния могут быть заданы набором импульсов, входящих в них частиц, а так же другими возможными квантовыми числами.

Асимптотические состояния

Рассмотрим релятивистскую теорию рассеяния, содержащую n сортов частиц A_a, $a = 1, \ldots, n$ с массами m_a. Для каждой частицы из спектра теории мы введем обозначение $A_a(\theta)$, где θ — быстрота, которая полностью определяет импульс частицы в двух измерениях, а именно

$$p_a^0 = m_a \cosh \theta_a, \quad p_a^1 = m_a \sinh \theta_a.$$

В дальнейшем мы будем говорить о процессах рассеяния скалярных частиц. Так как мы рассматриваем процессы рассеяния физических частиц, импульсы частиц лежат на массовой оболочке

$$p_\mu p^\mu = m^2.$$

Тогда n-частичные асимптотические состояния мы будем обозначать следующим образом

$$|A_{a_1}(\theta_1), A_{a_2}(\theta_2)\dots A_{a_n}(\theta_n)\rangle$$

В массивных теориях теориях взаимодействие предполагается короткодействующим и, как следствие, асимптотические состояния представляют собой набор свободных частиц, взаимодействующих только в моменты перекрытия волновых пакетов.

Начальные асимптотические состояния даются набором свободных частиц при $t \to -\infty$. Будем определять начальное состояние как асимптотическое состояние, в котором быстроты расположены в порядке убывания $\theta_a \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$. Конечные асимптотические состояния определяются аналогичным образом, только в этом случае частоты предполагаются расположенными в порядке возрастания $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$.

Сохраняющиеся заряды

Существование бесконечного количества сохраняющихся зарядов $\mathcal{Q}_{\pm s}$, находящихся в инволюции, является существенным следствием процессов рассеяния. Локальные сохраняющиеся заряды могут быть классифицированы значением спина s и могут быть представлены в виде интегралов от плотностей, т.е.

$$\mathcal{Q}_s = \int [T_{s+1}(z,\bar{z})dz + \Theta_{s-1}(z,\bar{z})d\bar{z}], \quad s \geq 1,$$

где $T_{s+1}(z,\bar{z})$ и $\Theta(z,\bar{z})$ — некоторые локальные поля, удовлетворяющие закону сохранения

$$\bar{\partial} T_{s+1} = \partial \Theta_{s-1}.$$

Аналогичным образом, мы можем определить сохраняющиеся заряды с отрицательным спином, обозначаемые как $\mathcal{Q}_s$, с помощью локальных полей $\bar{T}_{s+1}$ и $\bar{\Theta}_{s-1}$, которые удовлетворяют закону сохранения $\partial \bar{T}_{s+1} = \bar{\partial}\bar{\Theta}_{s-1}$. Отметим, что интегралы $\mathcal{Q}_{\pm 1}$ совпадают с компонентами импульса в координатах светового конуса.

Так как эти заряды коммутируют друг с другом, их можно диагонализовать одновременно. Спектр возможных значений спинов s сохраняющихся величин зависит от модели и связан со структурой связных состояний. Действие интегралов движения на асимптотических состояниях имеет вид

$$Q_s|A_{a_1}(\theta_1)A_{a_2}(\theta_2)\dots A_{a_n}(\theta_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \chi_s^{(a_i)} e^{s\theta_i} |A_{a_1}(\theta_1)A_{a_2}(\theta_2)\dots A_{a_n}(\theta_n)\rangle,$$

где $\chi_s^{(a)}(\theta)$ называется собственным значением интеграла $\mathcal{Q}_s$ для частицы сорта a.

Матрица рассеяния

Матрица рассеяния, или S-матрица, определяется как унитарное преобразование, связывающее связывающее начальные и конечные асимптотические состояния. Мы ограничимся только случаем диагонального рассеяния. Тогда S-матрица диагональна в базисе асимптотических состояний, т.е.

$$|A_{a_1}(\theta_1), \ldots A_{a_n}(\theta_n)\rangle_{in} = S_{a_1 \ldots a_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n)|A_{a_1}(\theta_1), \ldots A_{a_n}(\theta_n)\rangle_{out},$$

Вследствие бесконечное числа интегралов движения в интегрируемых теориях поля, процессы рассеяния в них являются полностью упругими, т.е. конечное состояние содержит такое же количество частиц с теми же импульсами, что и начальное. Следовательно, n-частичные амплитуды рассеяния могут быть факторизованы в произведения $n(n-1)/2$ двух-частичных,

$$S_{a_1 \ldots a_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \prod_{i<j} S_{a_i a_j}(\theta_i, \theta_j).$$

Амплитуды $S_{ab}(\theta_1, \theta_2)$ являются мероморфными функциями, зависящими от разности быстрот $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$. Условие унитарности и кроссинг-симметрии теории рассеяния могут быть выражены следующими уравнениями для матрицы рассеяния,

$$S_{ab}(\theta) = S_{ab}(\mathrm{i}\pi - \theta), \quad S_{ab}(\theta)S_{ab}(-\theta) = 1.$$

Из этих уравнений следует, что амплитуды $S_{ab}(\theta)$ являются $2\pi\mathrm{i}$-периодическими функциями, которые полностью определяются положением своих нулей и полюсов в ‘физической полосе’ $0 \leq \mathrm{Im}\ \theta \leq \pi$.

Бутстрапный принцип

Уравнения унитарности и кроссинг-симметрии не определяют положение полюсов матрицы рассеяния. Для определения этих полюсов необходимо воспользоваться дополнительными динамическими условиями, или бутстрапным принципом. Рассмотрим S-матрицу с входящими частицами A_a и A_b, которая имеет простой полюс в s-канале при $\theta = \mathrm{i}u_{ab}^c$. Вблизи этого полюса матрица рассеяния принимает вид

$$S_{ab}(\theta \simeq \mathrm{i}u_{ab}^c) \simeq \frac{\mathrm{i}(\Gamma_{ab}^c)^2}{\theta - \mathrm{i}u_{ab}^c},$$

где Γ^c_{ab} называется трех-частичной константой связи. Бутстрапный принцип заключается в том, что связные состояния рассматриваются на тех же основаниях, что и асимптотические. Как следствие, амплитуды рассеяния, которые включают в себя связные состояния, могут быть выражены посредством амплитуд асимптотических состояний и наоборот. Как следствие этого принципа, мы получаем: если $\theta = \mathrm{i}u^c_{ab}$ — полюс в процессе рассеяния частиц A_a и A_b, то масса связного состояния может быть выражена следующим уравнением

$$m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \cos u^c_{ab}, \quad u^c_{ab} \in (0, \pi),$$

Кроме того, условие бутстрапа приводит к дополнительному уравнению, которому должны удовлетворять амплитуды рассеяния, а именно

$$S_{a\bar{b}}(\theta) = S_{ac}(\theta + \mathrm{i}\bar{u}^d_{cb}) S_{ad}(\theta - \mathrm{i}\bar{u}^c_{bd}),$$

где

$$\bar{u}^c_{ab} = \pi - u^c_{ab}.$$

Таким образом, полюса S-матрицы в физической полосе расположены при $\mathrm{Re}\ \theta = 0$. Простые полюса с положительными вычетами соответствуют связным состояниям в s-канале $A_a A_b$ рассеяния, в то время как полюса с отрицательными вычетами соответствуют связным состояниям в u-канале.

Форм факторы и корреляционные функции

Поведение интегрируемых моделей вне массовой поверхности может быть изучено в рамках форм факторного подхода. Для локального оператора $\mathcal{O}(x)$ мы рассмотрим его матричные элементы в базисе асимптотических состояний,

$${}_{a'_1 \dots a'_m}\langle \theta'_1, \dots, \theta'_m | \mathcal{O}(0) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle_{a_1 \dots a_n}.$$

Условие кроссинг симметрии S-матрицы приводит к тому, что все эти матричные элементы могут быть выражены в терминах следующих матричных элементов

$$F^{\mathcal{O}}_{a_1 \dots a_n}(\theta_1 \dots \theta_n) \ = \ \langle vac | \mathcal{O}(0) | \theta_1 \dots \theta_n \rangle_{a_1 \dots a_n},$$

которые мы будем называть форм факторами. Здесь мы ввели обозначение $\langle vac|$ для вакуумного состояния, т.е. состояния без частиц, теории рассеяния.

Если форм факторы рассматриваемого оператора вычислены, то его корреляционные функции могут быть представлены в виде спектрального ряда, используя условие полноты многочастичных состояний

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{a_k\}} \int \frac{d\theta_1 \dots d\theta_n}{n!(2\pi)^n} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{a_1 \dots a_n} \cdot {}_{a_1 \dots a_n}\langle \theta_1, \dots, \theta_n|.$$

Например, двух-частичные корреляционные функции оператора $\mathcal{O}(x)$ могут быть представлены в виде

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d\theta_1 \dots d\theta_n}{n!(2\pi)^n} |F^{\mathcal{O}}_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)|^2 e^{-|x| \sum m_i \cosh \theta_i} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{a_k\}} \int \frac{d\theta_1 \dots d\theta_n}{n!(2\pi)^n} \langle vac|\mathcal{O}(x)|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{a_1 \dots a_n} \cdot {}_{a_1 \dots a_n}\langle \theta_1, \dots, \theta_n|\mathcal{O}(0)|vac\rangle.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующую нормировку для форм факторов, а именно

$$F^{\mathcal{O}}_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_N) = \langle \mathcal{O}(x)\rangle \cdot f^{\mathcal{O}}_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_N),$$

где $\langle \mathcal{O}(x)\rangle$ — это вакуумное среднее локального оператора $\mathcal{O}(x)$. Функцию $f^{\mathcal{O}}_{a_1, \dots, a_n}(\theta_1, \dots, \theta_N)$ мы будем называть ненормированным форм фактором.

Форм факторные аксиомы

Форм факторы удовлетворяют определенному набору условий, которые являются следствием общих требований, налагаемых на рассматриваемую теорию. Например, для любого скалярного оператора $\mathcal{O}(x)$, условие релятивистской инвариантности подразумевает, что его форм фактор зависит только от разности быстрот $\theta_i - \theta_j$, в то время как форм факторы спина s удовлетворяют следующим уравнениям

$$F^{\mathcal{O}}_{a_1 \dots a_n}(\theta_1 + \Lambda, \dots, \theta_n + \Lambda) = e^{s\Lambda} F^{\mathcal{O}}_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n).$$

Кроме того, форм факторы удовлетворяют набору условий, называемых форм факторными аксиомами [19, 20, 21], а именно

1. Теорема Ватсона

$$F^{\mathcal{O}}_{\dots a_k a_{k+1} \dots}(\theta_1, \dots, \theta_k \theta_{k+1}, \dots \theta_n) = S(\theta_{k+1} - \theta_k) F^{\mathcal{O}}_{\dots a_{k+1} a_k \dots}(\theta_1, \dots, \theta_{k+1}, \theta_k, \dots \theta_n).$$

2. Условие кроссинг симметрии

$$F^{\mathcal{O}}_{a_1 a_2 \ldots a_n}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = F^{\mathcal{O}}_{a_2 \ldots a_n a_1}(\theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_1 + 2\pi i).$$

3. Условие на кинематический полюс

$$-i \lim_{\theta' \to \theta} (\theta' - \theta) F^{\mathcal{O}}_{a a a_1 \ldots a_n}(\theta' + i\pi, \theta, \theta_1, \ldots, \theta_n) =$$
$$= \Big(1 - \prod_{j=1}^{n} S_{a a_j}(\theta - \theta_j)\Big) F^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots a_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n).$$

4. Условие на полюс связного состояния

$$-i \lim_{\theta' \to \theta} (\theta' - \theta) F^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots bc \ldots a_n}(\theta_1, \ldots, \theta' + i\bar{u}^c_{bd}, \theta - i\bar{u}^b_{cd}, \ldots, \theta_n) =$$
$$= \Gamma^d_{bc} F^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots d \ldots a_n}(\theta_1, \ldots, \theta, \ldots, \theta_n).$$

Среди всех возможных решений данного набора аксиом необходимо отобрать такое, которое соответствует рассматриваемому оператору $\mathcal{O}(x)$. Легко видеть, что форм факторные аксиомы совершенно не зависят от того, какой оператор рассматривается. Как следствие, необходимы некоторые дополнительные условия для отождествления форм факторов некоторого оператора среди всех решений форм факторных аксиом.

Дополнительные требования для форм факторов

В общем случае задача определения этих требований является нетривиальной. Однако, существуют два полезных критерия. Первый критерий, предложенный в работе [67], ограничивает асимптотическое поведение форм факторов. Для оператора $\mathcal{O}(x)$ скейлинговой размерности $2\Delta_{\mathcal{O}}$ рост форм фактора при больших значениях быстрот ограничен требованием

$$F^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots a_n}(\theta_1, \ldots, \theta_N) \leq e^{\Delta_{\mathcal{O}} |\theta_i|}, \qquad \text{as } |\theta_i| \to \infty.$$

Второй критерий является свойством кластерной факторизации форм факторов экспоненциальных операторов, установленным в работе [68], и может быть представлен в виде следующего соотношения

$$f^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots a_n}(\theta_1 + \Lambda, \ldots, \theta_m + \Lambda, \theta_{m+1}, \ldots \theta_N) = f^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots a_m}(\theta_1, \ldots, \theta_m) f^{\mathcal{O}}_{a_{m+1} \ldots a_n}(\theta_{m+1} \ldots \theta_n),$$

при $\Lambda \to \infty$ для всех $m \in (0, \ldots, n)$. Выполнение этого свойства для форм факторов экспоненциальных операторов проверено во многих моделях. Свойство кластерной факторизации, как предполагается, является отличительным свойством экспоненциальных операторов.

Минимальные форм факторы

Решение первой пары уравнений форм факторных аксиом может быть представлено в удобном виде с использованием так называемых двух-частичных минимальных форм факторов. Двух-частичный минимальный форм фактор, обозначаемый как $R_{ab}(\theta)$, — это аналитическая функция в области $0 \leq \mathrm{Im}\theta \leq \pi$, являющаяся решением первых двух уравнений системы форм факторных аксиом для $n = 2$, без нулей и полюсов в полосе $0 < \mathrm{Im} < \pi$ и обладающая хорошим поведением при $|\theta| \to \infty$. Эти требования определят двух-точечный минимальный форм фактор однозначно, с точностью до нормировочного множителя.

Используя двух-частичные минимальные форм факторы, n-частичный форм фактор, удовлетворяющий форм факторным аксиомам, может быть представлен в следующем виде

$$f^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots a_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = J^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots a_n}(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_n}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} R_{a_i a_j}(\theta_i - \theta_j).$$

Здесь функция $J^{\mathcal{O}}_{a_1 \ldots a_n}(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_n})$ — это симметричная, $2\pi i$-периодичная функция, зависящая от переменных θ_i, имеющая кинематические полюса и полюса связных состояний, которые предписываются второй парой форм факторных аксиом. Эта функция представляет собой решение второй пары форм факторных аксиом. В дальнейшем мы будем называть эти уравнения бутстрапными уравнениями. Полный набор форм факторов может быть однозначно определен форм факторами, которые содержат только фундаментальные частицы. Мы называем частицу A_1 фундаментальной, если все остальные частицы в модели A_a, $a = 1, \ldots, n$ могут быть получены как связные состояния некоторого количества A_1. Поэтому, мы ограничим наше внимание вычислением таких много-частичных форм факторов.

Содержание работы

Целью первой главы будет изучение пространства состояний для теории гравитации, которая представлена тремя различными конформными теориями поля: Минимальной конформной теорией поля $M(2,3)$ [3], системой духов и теорией Лиувилля, которые взаимодействуют между собой в силу условия сокращения конформной аномалии. Такая теория известна как теория чистой гравитации, так как минимальная модель $M(2,3)$ содержит единственное тривиальное представление и ее центральный заряд $c=0$. За последние 20 лет был достигнут большой прогресс в изучении минимальной Лиувиллевской гравитации. В частности, для простейших состояний были найдены трех и четырех-точечные корреляционные функции [4, 5].

Отметим, что существует два разных типа теорий Лиувиллевской гравитации. В первом варианте гравитационный сектор представлен теорией свободного скалярного поля. С математической точки зрения можно сказать, что пространство состояний в гравитационном секторе представлено прямой суммой модулей Фейгина-Фукса [7]. В этом случае, операторная алгебра может быть изучена в общем виде [8]. Во втором варианте Лиувиллевской гравитации пространство состояний гравитационного сектора представлено неприводимыми модулями алгебры Вирасоро.

Как было показано в работе [6], эти два варианта Лиувиллевской гравитации обладают совершенно различными пространствами физических состояний. В первой главе этой работы рассматривается именно второй тип Лиувиллевской гравитации. Для квантования теории удобно использовать процедуру БРСТ квантования. Следует отметить, что для алгебры Вирасоро можно рассматривать как абсолютные, так и относительные когомлогии. Относительные когомлогии изучены более полно, например их размерности известны [6]. Однако, как мы покажем, структура ассоциативной операторной алгебры существует только на пространстве абсолютных когомлогий.

В первой главе мы изучаем абсолютные когомлогии и находим их размерности в минимальной Лиувиллевской гравитации $M(2,3)$. Кроме того, изучается операторная алгебра, образованная абсолютными когомлогиями.

Бутстрапная структура двумерных интегрируемых квантовых теорий поля позволяет точно вычислять форм факторы в этих моделях, путем нахождения решений системы разностных уравнений, известной как форм факторные аксиомы [19, 20, 21]. Любое решение этих уравнений соответствует определенному локальному оператору теории. Хотя довольно общий подход для решения форм факторных аксиом был предложен Смирновым [21], задача об идентификации операторов, определяемых решением бутстрапных уравнений, и полей, определяемых в обычном Лагранжевом формализме, остается решенной не полностью. Более того, решения, предложенные Смирновым, имеют интегральный вид, что усложняет изучение полученных решений.

Во второй главе мы рассмотрим двумерные теории Тоды для аффинной алгебры $A_{L-1}^{(1)}$ [22]. Эти модели являются моделями с $(L-1)$-компонентным действительным скалярным полем $\varphi(x)$ с экспоненциальным взаимодействием. В частном случае $L=2$, т.е. для модели синус-Гордона, предлагались весьма разнообразные подходы к изучению форм факторов [21, 23, 24, 25, 26, 27]. Для общих значений L в работе [28] был предложен общий вид решений системы форм факторных аксиом, в данном случае, в интегральном виде. Мы предлагаем решение в виде конечных сумм, основываясь на Лукьяновском свободно-полевом формализме для форм факторов [29]. Лукьянов нашел решения для бутстрапных уравнений, которые соответствуют экспоненциальным операторам $e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(x)}$ и полностью классифицировал найденные решения [30]. Действуя по схеме, предложенной в работе [27], мы найдем свободно-полевое представление для форм факторов так называемых операторов потомков, т.е. операторов вида $(\partial_{\mu_1}^{k_1}\varphi_{i_1})\ldots(\partial_{\mu_r}^{k_r}\varphi_{i_r})e^{\mathrm{i}\alpha\varphi}$. Эти операторы могут рассматриваться как элементы Фоковского пространства, порождаемого действием мод поля $\varphi(x)$ на экспоненциальные операторы в формализме радиального квантования. Хотя мы не можем идентифицировать эти операторы с решениями бутстрапных уравнений, мы можем идентифицировать некоторые пространства решений с Фоковскими модулями для экспоненциальных операторов. Кроме того, для так называемых киральных операторов потомков мы можем точно указать соответствующие им операторы в уровневых подпространствах Фоковского модуля.

Одной из важных особенностей аффинных теорий Тоды является существование в них так называемых отражательных соотношений между операторами теории [31, 32, 33, 34]. Эти соотношения связывают между собой операторы с различными значениями параметра a. Мы докажем существование таких отражательных соотношений для найденных нами решений. Более того, мы покажем существование аналитического по параметру a семейства Вейль инвариантных базисов в Фоковских пространствах. Мы надеемся, что это доказательство является шагом в направлении к решению задачи идентификации.

Как известно, двумерные статистические модели в своих критических точках описываются так называемыми минимальными моделями конформной теории поля [3]. Вне критических точек, скейлинговая область может быть описана релевантными возмущениями действия в фиксированной точке. Соответствующие модели могут быть названы возмущенными минимальными моделями. Возмущения разрушают дальнодействующие корреляции критической модели и соответствующие квантовые теории поля обычно являются массивными. Однако в некоторых случаях бесконечное количество интегралов движения сохраняется. В частности, минимальные модели возмущенные одним из следующих примарных операторов $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{2,1}$, $\Phi_{1,3}$, как известно, являются интегрируемыми [46, 47]. Кроме того, в [48] показано, что $\Phi_{1,5}$ возмущение не унитарной минимальной модели так же интегрируемо. Минимальные модели, возмущенные оператором $\Phi_{1,3}$ тесно связаны с моделью синус-Гордона [49, 50]. Остальные случаи связаны с некоторым квантово-групповым усечением модели Жибера-Михаилова-Шабата [51, 52, 48].

Поведение вне массовой поверхности этих моделей может быть изучено в рамках форм факторного подхода [21]. В частности, корреляционные функции могут быть вычислены с помощью спектрального представления. Быстрый радиус сходимости спектральных серий для всех масштабов [53] позволяет вычислять их достаточно точно, игнорируя много-частичные форм факторы. В последнее время развивается применение форм факторного подхода для изучения специфического класса двухмерных не интегрируемых теорий поля. Не интегрируемые теории поля могут рассматриваться как особые возмущения интегрируемых теорий [54] и вычисление много-частичных форм факторов для таких моделей представляет особый интерес. Одним из примеров является Модель Изинга, чье поведение в окрестности критической точки может рассматриваться с помощью двух различных интегрируемых моделей. Некоторые важные результаты при изучении теории возмущений для модели Изинга при некритической температуре были найдены недавно [55]. Теория возмущений в окрестности другой интегрируемой точки исследовалась в работах [56, 57, 58].

Упомянутая связь между разными интегрируемыми моделями обуславливает эффективный метод вычисления форм факторов в возмущенных минимальных моделях. Например, S-матрица частиц в $\Phi_{1,3}$ возмущенной минимальной модели получается из S-матрицы бризеров модели синус-Гордона, поведение которой вне массовой поверхности изучено довольно хорошо [23, 59]. Однако, для $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{2,1}$ и $\Phi_{1,5}$ возмущенных минимальных моделей ситуация несколько иная, поскольку S-матрица модели Жибера-Михаилова-Шабата имеет сложную структуру [51, 52].

В третьей главе мы рассмотрим очень узкий класс форм факторов, которые могут быть получены из форм факторов модели Буллоу-Додда [60, 61, 62]. Удобным методом вычисления много-частичных форм факторов является Лукьяновское свободно-полевое представление [29]. Этот метод успешно применялся для нахождения много-частичных форм факторов во многих интегрируемых моделях [24, 30, 63]. Свободно-полевое представления для модели Буллоу-Додда было предложено в [64, 65]. Мы предложим некоторое обобщение свободно полевого представления. В работе [27] этот метод применялся для нахождения форм факторов операторов потомков. В данной работе мы рассматриваем его другую особенность. А именно, это представление обладает простыми аналитическими свойствами и может использоваться для получения удобного свободно-полевого представления для форм факторов легчайших частиц в $\Phi_{1,2}$ возмущенных минимальных моделях. Мы получим рекуррентные соотношения между форм факторами экспоненциальных операторов и докажем отражательные свойства для форм факторов экспоненциальных операторов [33]. Мы докажем, что форм факторы удовлетворяют квантовым уравнениям движения.

Кроме того, мы рассмотрим модель Буллоу-Додда с мнимой константой связи, которая, при некоторых дополнительных условиях, соответствуют минимальной модели конформной теории поля, возмущенной одним из операторов $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{1,5}$ или $\Phi_{2,1}$ возмущениям [51, 52, 48]. Мы рассмотрим только первую возможность и предложим свободно-полевое представление для форм факторов легчайших частиц в этой модели.

В качестве примера, мы рассмотрим модель Изинга в магнитном поле. Эта модель соответствует минимальной модели $\mathcal{M}_{3,4}$, возмущенной оператором $\Phi_{1,2}$, и связана с алгеброй E_8 [47]. Связь между моделью Изинга в магнитном поле и моделью Буллоу-Додда была установлена в работе [64, 65]. Мы получим свободно-полевое представление для форм факторов легчайших частиц в этой модели.

Основные результаты диссертации изложены в работах [18, 45, 70].

Я выражаю благодарность А. А. Белавину, М. Ю. Лашкевичу и А. Б. Замолодчикову за постановку задач и постоянный интерес к работе. Я признателен М. А. Берштейну, А. В. Пугаю, Г. М. Тарнопольскому и Я. П. Пугаю за полезные обсуждения и поддержку.

Глава 1

Минимальная Лиувиллевская гравитация $M(2,3)$

В этой главе изучается пространство физических состояний в минимальной Лиувиллевской гравитации $M(2,3)$. Простейшими состояниями с духовым числом, равным 1, являются вектора старшего веса материального сектора, 'одетые' специальными векторами старшего веса теории Лиувилля, так что полная конформная размерность такого состояния оказывается равной 0. Простая структура этих состояний позволяет полностью изучить их операторную алгебру.

Одноако, Лиан и Цукерман показали [6], что для данного вектора старшего веса из материального сектора существует бесконечное множество дополнительных состояний с духовым числом, отличным от 1. Изучение именно этих дополнительных состояний посвящена данная глава.

Напомним, что мы рассматриваем такую Лиувиллевскую гравитацию, в которой пространство состояний гравитационного сектора представлено неприводимыми представлениями алгебры Вирасоро. Для квантования модели, мы используем процедуру БРСТ квантования, где физические состояния определяются как классы БРСТ когомологий. Обычно, классы относительных когомологий носят название 'физических' состояний. Ниже мы покажем, что данные классы могут быть построены с помощью некоторой рекуррентной процедуры. Эта процедура является обобщением процедуры, предложенной в работе [9].

Мы покажем, что определение 'физических' состояний, как классов относительных когомологий, не является полностью удовлетворительным. Сложность заключается в том, что операторная алгебра таких состояний оказывается не ассоциативной. Для того, чтобы избежать этих сложностей, мы расширим пространство состояний и рассмотрим абсолютные когомологии. Удобно начать именно с относительных когомологий и получить абсолютные когомологии с помощью явной процедуры. Далее, мы рассмотрим некоторые операторы, действующие на пространстве когомологий. Эти операторы позволят нам построить пространство абсолютных когомлогий и установить их операторную алгебру.

1.1 Обозначения

Удобным способом квантования теории минимальной Лиувиллевской гравитации со связью $c_{matter} + c_{Liouv} + c_{ghost} = 0$ является процедура БРСТ квантования. Введем так называемую (b, c)-систему духов, которая определяется с помощью действия

$$S^{gh} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\overline{\partial}c + \overline{b}\partial\overline{c}).$$

Поля $b(z)$ и $c(z)$ являются фермионными полями с конформными размерностями 2 и -1 соответственно. Эти поля могут быть разложены в ряд Лорана, а именно

$$b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}}, \qquad c(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n-1}},$$

где коэффициенты разложения b_n и c_n образуют алгебру со следующим антикоммутационным соотношением

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n,0}.$$

Фоковский модуль для системы духов мы будем обозначать как Λ^{bc}. Определим вакуумный вектор $|0\rangle_g$ в этом Фоковском модуле с помощью следующих условий

$$b_m|0\rangle_g = 0,\ m \geq -1, \qquad c_n|0\rangle_g = 0,\ n \geq 2.$$

Этот вакуумный вектор является $SL(2, C)$ инвариантным, причем его конформная размерность равна 0. Этому вектору мы поставим в соответствие духовое число равное 0. Действие духового поля b уменьшает духовое число на 1, в то время как действие духового поля c увеличивает духовое число на 1. Удобно определить вакуумный вектор $|v^g\rangle = c_1|0\rangle_g$ с конформной размерностью -1 и духовым числом 1.

Рассмотрим конформную теорию поля с центральным зарядом $c = 26$. Мы будем рассматривать только ее киральную часть. Пусть $T(z)$ — голоморфный тензор энергии импульса, который может быть разложен в ряд Лорана

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}.$$

Моды этого разложения L_n являются генераторами алгебры Вирасоро с коммутационными соотношениями

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n+m,0}\frac{n^3-n}{12}c$$

Пространство состояний конформной теории поля является пространством представлений алгебры Вирасоро. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое представление алгебры Вирасоророю. Рассмотрим Гильбертово пространство

$$C^{\text{abs}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \Lambda^{bc}.$$

Пусть $C_k^{\text{abs}}(\mathcal{M})$ — это подпространство с определенным духовым числом k. Здесь верхний индекс 'abs' отражает тот факт, что пространство $C^{\text{abs}}(\mathcal{M})$ образует абсолютный БРСТ комплекс по отношению к действию БРСТ оператора

$$\begin{aligned} Q = \oint : \Big(T(z) + \frac{1}{2}T^{gh}(z)\Big)c(z) : -\frac{c_0}{2} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{-n}c_n - \frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{n+m} : -\frac{c_0}{2}, \end{aligned}$$

где $T^{gh}(z)$ — это тензор энергии импульса системы духов, а $: \ldots :$ — нормальное упорядочивание. Хорошо известно, что $Q^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $c_{\mathcal{M}} = 26$. Мы обозначим когомологии пространства $C^{\text{abs}}(\mathcal{M})$ как $H^{\text{abs}}(\mathcal{M})$.

Рассмотрим подкомплекс

$$C^{\text{rel}}(\mathcal{M}) = \{w \in C^{\text{abs}}(\mathcal{M}) \mid b_0 w = (L_0 + L_0^{gh})w = 0\}.$$

Этот подкомплекс называется БРСТ комплексом относительных когомологий. Обозначим когомологии этого комплекса как $H^{\text{rel}}(\mathcal{M})$.

Далее мы будем рассматривать только $M(2,3)$ минимальную Лиувиллевскую гравитацию, в которой материальный сектор представлен минимальной моделью конформной теорией поля $M(2,3)$ с центральным зарядом $c_M = 0$. Единственным примарным полем в этой конформной теории поля является обладает конформной размерностью, равной 0, а единственным представлением в пространстве состояний модели является тривиальное представление $\mathbb{I}$. Можно сказать, что материальный сектор рассматриваемой модели тривиален. Гравитационный сектор, в свою очередь, представлен прямой суммой неприводимых модулей алгебры Вирасоро $\mathcal{L}_\Delta$ с центральным зарядом $c_L = 26$ и старшими весами $\Delta \in \mathbb{C}$. Поэтому, представление

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{C}} (\mathbb{I} \otimes \mathcal{L}_\Delta) = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{C}} \mathcal{L}_\Delta$$

соответствует $M(2,3)$ минимальной гравитации Лиувилля.

Пусть $|\mathcal{L}_\Delta\rangle$ — это вектор со старшим весом в неприводимом модуле $\mathcal{L}_\Delta$ алгебры Вирасоро. Удобно определить вакуумный вектор в $C^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ и

$$C^{\text{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$$

как

$$\Psi_\Delta = |\mathcal{L}_\Delta\rangle \otimes |v_g\rangle. \tag{1.1}$$

При процедуре БРСТ квантования физические состояния определяются как классы БРСТ когомологий, то есть состояния, которые удовлетворят соотношению $Qw = 0$, но при этом не являются БРСТ точными состояниями.

1.2 БРСТ комплекс относительных когомологий

1.2.1 Теоремы Лиана-Цукермана

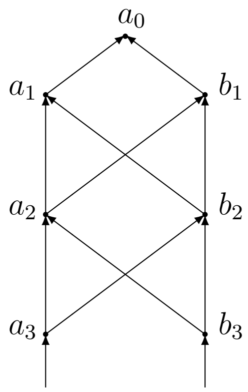
Для начала, мы сформулируем теорему Лиана-Цукермана для неприводимых представлений алгебры Вирасоро. Рассмотрим комплекс относительных БРСТ когомологий $C^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$, где $\mathcal{L}_\Delta$ — это неприводимый модуль алгебры Вирасоро со старшим весом Δ. Когомлогии $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ зависят от значения старшего веса Δ. Точнее, относительные когомлогии $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ не тривиальны при значениях Δ, принадлежащих некоторому счетному множеству комплексных чисел $E = \{a_n, b_n\}$. Эти числа удобно записать используя обычную параметризацию для конформных размерностей, а именно

$$\Delta_{r,s} = \frac{25 - (3r+2s)^2}{24}.$$

Тогда в этих обозначениях множество размерностей $E = \{a_n, b_n\}$ может быть записан в виде

$$a_n = \Delta_{1,1+3(n-1)},\ n \geq 0, \quad b_n = \Delta_{1,2+3(n-1)},\ n \geq 1. \tag{1.2}$$

как показано в [10], это множество размерностей возникает при изучении структуры модулей Верма при $c = 26$, Пусть V_Δ — это модуль Верма со старшим весом Δ и центральным зарядом $c = 26$. Модуль Верма V_{a_0} является неприводимым, т.е. $V_{a_0} = \mathcal{L}_{a_0}$. В то же время, модули Верма V_{a_1} и V_{b_1} имеют особый вектора с конформной размерностью $\Delta = a_0$. Это значит, что оба модуля, V_{a_1} и V_{b_1}, содержат модуль V_{a_0} как подмодуль. Эту структуру можно продолжить далее. В результате мы получим бесконечную лестницу модулей Верма V_{a_k}, V_{b_k}, $k = 1, 2, \ldots$, которые содержат модули $V_{a_{k-1}}$ и $V_{b_{k-1}}$ в качестве подмодулей. Эта структура модулей может быть представлена с помощью следующей диаграммы вложений [10]:



Уровнем вложения модулей V_{a_k} и V_{b_k} мы будем называть значение k. Стрелка диаграммы, соединяющая две точки $\Delta \to \Delta'$ подчеркивает тот факт, что модуль $V_{\Delta'}$ является подмодулем модуля V_Δ. В этом случае, вектор старшего веса $|V_{\Delta'}\rangle$, как вектор в модуле V_Δ, является особым вектором вида $D_{\Delta',\Delta}|V_\Delta\rangle$, причем оператор $D_{\Delta',\Delta}$ является линейной комбинацией произведений генераторов алгебры Вирасоро L_{-k}, $k > 0$.

Лиан и Цукерман доказали [6], что классы относительных БРСТ когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ не тривиальны тогда и только тогда, когда $\Delta \in E$. Для любого $\Delta \in E$ размерность пространства когомологий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ дается следующим выражением

$$\dim H_k^{rel}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim H_k^{rel}(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n+1,\ n+1, \\ 2, & k = -n+3,\ -n+5, \ldots,\ n-1, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где мы предположили, что $n > 0$. В случае $n = 0$ размерность пространства относительных БРСТ когомологий равна

$$\dim H_k^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1}.$$

в дальнейшем нам понадобится теорема Лиана-Цукермана для модулей Верма. Рассмотрим относительный БРСТ комплекс $C^{\mathrm{rel}}(V_\Delta)$. В этом случае, как было доказано в [6], пространство относительных когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(V_\Delta)$ не тривиально тогда и только тогда, когда $\Delta \in E$. В этом случае, размерности пространств относительных когомлогий имеют несколько другие значения, а именно

$$\dim H_k^{\mathrm{rel}}(V_{a_n}) = \dim H_k^{\mathrm{rel}}(V_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = n+1, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Для любого значения Δ существует отображение $V_\Delta \to \mathcal{L}_\Delta$ из модуля Верма со старшим весом Δ в неприводимый модуль алгебры Вирасоро с тем же значением старшего веса. Это отображение индуцирует отображения $C^{\mathrm{rel}}(V_\Delta) \to C^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ и $H^{\mathrm{rel}}(V_\Delta) \to H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Сравнивая духовые числа, мы заключаем, что, при таком отображении, образ единственного класса из $H^{\mathrm{rel}}(V_\Delta)$ является классом когомлогий с наибольшим возможным духовым числом в $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Класс БРСТ когомлогий с наибольшим духовым числом из пространства относительных когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ будет в дальнейшем называться старшей когомлогией.

Как мы отмечали, в другом варианте двумерной Лиувиллевской гравитации, пространство состояний в гравитационном секторе представлено модулями Фейгина-Фукса. Пространством физических состояний в этом случае является $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — это модуль Фейгина-Фукса с центральным зарядом $c_L = 26$. В случае, когда $c \geq 25$, модуль Фейгина-Фукса изоморфен либо модулю Верма, либо контргградиентному модулю Верма. В первом случае пространство классов относительных когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{F}) = H^{\mathrm{rel}}(V_\Delta)$ соответствует старшим когомлогиям из $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Можно показать, что во втором случае когомлогии $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{F})$ соответствуют младшим когомлогиям из $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Это наблюдение позволяет сравнивать результаты, полученные нами, с результатами работ [8, 11, 12].

1.2.2 Процедура рекуррентного построения базисных состояний

Мы полагаем, что существует связь между явными выражениями для физических состояний и видом соответствующих особых векторов. Эта связь приводит к явной рекуррентной процедуре построения классов БРСТ когомлогий. Точнее, мы покажем, что все классы когомлогий однозначным образом определяются только старшими когомлогиями.

Классы старших БРСТ когомлогий

Процедура построения старших классов когомлогий упрощается в силу следующего предложения

Предложение 1. *Все старшие классы когомологий могут быть получены применением операторов $c_{-1}, c_{-2}, \ldots$ к вакуумным векторам Ψ_Δ, которые мы ввели в*(1.1).

Это предположение легко следует из Предложения 1.11 работы [13]. Важной частью доказательства этого предложения является следующая конструкция классов старших когомлогий. Пусть K^n — это векторное пространство всех (возможно бесконечных) линейных комбинаций антисимметричных мономов

$$c_{-i_1,\ldots,-i_n} = c_{-i_1} c_{-i_2} \cdots c_{-i_n}. \tag{1.5}$$

Пусть $d(c_{-i_1,\ldots,-i_n}) = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ — это степень монома (1.5). Определим дифференциал $\delta : K^n \to K^{n+1}$ следующим образом

$$\delta(c_{-i}) = \sum_{\alpha+\beta=i} (\alpha - \beta) c_{-\alpha,-\beta}, \qquad \delta(c_{-i_1,\ldots,-i_n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} d(c_{-i_j}) c_{-i_1,\ldots,-\hat{i}_j,\ldots,-i_n}.$$

Легко доказать, что $\delta^2 = 0$. Пространство когомлогий этого комплекса мы обозначим как $H(K)$. Этот комплекс изоморфен стандартному комплексу БРСТ когомлогий алгебры Ли $Vir_{>0} = \langle L_1, L_2, \ldots \rangle$. Теорема Гончаровой [14] утверждает, что размерности пространств когомлогий $H^n(K)$ даются следующими числами

$$\dim H^n(K) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n > 0. \end{cases}$$

Каждое пространство когомлогий $H^n(K)$ $(n > 0)$ порождается двумя векторами u_n, v_n со степенями однородности

$$d(u_n) = \frac{3n^2 - n}{2}, \qquad d(v_n) = \frac{3n^2 + n}{2}. \tag{1.6}$$

Например,

$$H^1(K) = \langle c_{-1}, c_{-2} \rangle, \quad H^2(K) = \langle c_{-1} c_{-4}, c_{-2} c_{-5} - 3 c_{-3} c_{-4} \rangle.$$

Вектора u_n и v_n определены с точностью δ точных членов.

Вернемся к построению классов старших БРСТ когомологий для неприводимых модулей алгебры Вирасоро $\mathcal{L}_{a_n}$. Рассмотрим вектор

$$u_n \Psi_{a_n} = |\mathcal{L}_{a_n}\rangle \otimes u_n |v^g\rangle$$

с духовым числом $n+1$ и конформной размерностью 0 (так как $a_n + d(u_n) - 1 = 0$, где a_n определено в (1.2), а $d(u_n)$ определено в (1.6)). Очевидно, что вектор $u_n \Psi_{a_n}$ является БРСТ замкнутым. Более того, можно показать, что этот вектор не является БРСТ точным. Поэтому, состояние

$$O^{a_n}_{a_n} = u_n \Psi_{a_n}$$

является представителем классов относительных когомологий $H^{\mathrm{rel}}_{n+1}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Старшие классы когомологий любого неприводимого модуля Верма $\mathcal{L}_{b_n}$ могут быть построены подобным образом. Мы приведем явный вид некоторых старших классов когомлогий

$$\begin{aligned} &O^{a_1}_{a_1} = H^{a_1}_{a_1} \Psi_{a_1} = c_{-1} \Psi_{a_1}, \quad O^{a_2}_{a_2} = H^{a_2}_{a_2} \Psi_{a_2} = c_{-1} c_{-4} \Psi_{a_2}, \\ &O^{b_1}_{b_1} = H^{b_1}_{b_1} \Psi_{b_1} = c_{-2} \Psi_{b_1}, \quad O^{b_2}_{b_2} = H^{b_2}_{b_2} \Psi_{b_2} = (c_{-2} c_{-5} - 3 c_{-3} c_{-4}) \Psi_{b_2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2.3 Рекуррентные уравнения

В этом разделе мы будем использовать следующие обозначения. Рассмотрим BRST комплекс $C(V_\Delta)$, где V_Δ — это Верма модуль со старшим весом Δ. Пусть $|V_\Delta\rangle$ — это вектор со старшим весом в этом модуле Верма. Мы определим вакуумный вектор в этом комплексе следующим образом

$$\Psi^V_\Delta = |V_\Delta\rangle \otimes |v^g\rangle.$$

Для того, чтобы подчеркнуть разницу между этим вакуумным вектором и вакуумным вектором, определенным в (1.1), мы будем обозначать последний как $\Psi^{\mathcal{L}}_\Delta$.

Классы когомлогий, за исключением старших классов когомлогий, могут быть построены рекуррентно. Смысл этой процедуры в следующем. Мы берем резольвенту неприводимого модуля алгебры Вирасоро, состоящую из модулей Верма, и вычисляем БРСТ когомлогии с коэффициентами в этой резольвенте. Тогда когомологии неприводимых модулей Вирасоро можно получить с помощью спектральной последовательности, которая вырождается в первом члене. Эта конструкция позволяет находить явные выражения для классов когомлогий, относящихся к векторам старшего веса в модулях Верма диаграммы вложений, одно за другим, начиная с вершины и спускаясь все ниже. Ниже мы представим несколько первых шагов явно. Затем, мы опишем n-ый шаг.

Уровень вложения 0

Вершина диаграммы вложений соответствует старшему весу $a_0 = 1$. Размерность пространства когомлогий равна $\dim H^{\mathrm{rel}}_k(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1}$. Нахождение представителей классов когомлогий является прямолинейной задачей. Однако, мы приведем процедуру вычисления этих представителей явно, так как в дальнейшем будем ссылаться на нее. Рассмотрим относительный БРСТ комплекс $C^{\mathrm{rel}}(V_{a_0})$. Легко проверить, что состояние

$$H^{a_0}_{a_0}\Psi^V_{a_0} = \Psi^V_{a_0} \tag{1.8}$$

является одним из представителей классов относительных когомлогий. Учитывая обсуждение в заключительной части раздела 1.2.1, можно проверить, что состояние

$$O^{a_0}_{a_0} = H^{a_0}_{a_0}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_0} = \Psi^{\mathcal{L}}_{a_0}. \tag{1.9}$$

является представителем классов когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_0})$. Это состояние является простейшим. Оператор, соответствующий этому состоянию, состоит из примарного поля в материальном секторе (в нашем случае это единичный оператор), одетого подходящим примарным полем Лиувиллевского сектора.

Уровень вложения 1

Точки на этом уровне диаграммы вложений соответствуют старшим весам $a_1 = 0$ и $b_1 = -1$. Рассмотрим пространство когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$, связанное с первым из весов. В силу результатов Лиана и Цукермана (1.3), мы заключаем, что нетривиальные классы когомологий принадлежат пространствам $H^{\mathrm{rel}}_0(\mathcal{L}_{a_1})$ и $H^{\mathrm{rel}}_2(\mathcal{L}_{a_1})$. Класс старших когомлогий $O^{a_1}_{a_1} \in H^{\mathrm{rel}}_2(\mathcal{L}_{a_1})$ приведен в (1.7). Классы когомлогий из пространства $H^{\mathrm{rel}}_0(\mathcal{L}_{a_1})$ могут быть построены с помощью следующей процедуры.

Шаг 1. Рассмотрим относительный БРСТ комплекс $C^{\mathrm{rel}}(V_{a_1})$. Модуль Верма V_{a_1} содержит особый вектор на первом уровне. Этот особый вектор имеет вид $D_{a_0,a_1}|V_{a_1}\rangle$, причем $D_{a_0,a_1} = L_{-1}$. Определим состояние

$$O^{a_0}_{a_0|a_1} = H^{a_0}_{a_0} D_{a_0,a_1}\Psi^V_{a_1} \in C^{\mathrm{rel}}(V_{a_1}). \tag{1.10}$$

Отметим, что модули Верма со старшими векторами $D_{a_0,a_1}|V_{a_1}\rangle$ и $|V_{a_0}\rangle$ эквивалентны, так как оба модуля имеют один и тот же старший вес $a_0 = 1$. Поэтому, можно рассматривать состояние (1.10) как состояние $H^{a_0}_{a_0}\Psi^V_{a_0}$, определенное на предыдущем уровне (1.8). Соответственно, состояние (1.10) является БРСТ замкнутым, так как состояние (1.8) БРСТ замкнуто.

Шаг 2. Мы покажем, что состояние (1.10) так же является БРСТ точным. Действительно, согласно результатам Лиана и Цукермана (1.4), единственный нетривиальный класс БРСТ когомологий в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(V_{a_1})$ имеет духовое число, равное 2, в то время как состояние (1.10) имеет духовое число, равное 1. Следовательно, это состояние БРСТ точно. Поэтому, существует некоторый оператор $H^{a_0}_{a_1}$, такой что

$$Q(H^{a_0}_{a_1}\Psi^V_{a_1}) = O^{a_0}_{a_0|a_1}. \tag{1.11}$$

Правая часть этого уравнения полностью определяется классом когомлогий, определенным на предыдущем уровне, и структурой вложений модулей Верма. Поэтому, в дальнейшем это уравнение будет называться рекуррентным уравнением. Далее мы опишем, как решение этого уравнения, а именно, оператор $H^{a_0}_{a_1}$ будет использоваться для вычисления представителей классов когомлогий пространства $H^{\mathrm{rel}}_0(\mathcal{L}_{a_1})$.

Шаг 3. Мы утверждаем, что состояние $O^{a_0}_{a_1} = H^{a_0}_{a_1}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_1}$ является представителем классов когомлогий пространства $H^{\mathrm{rel}}_0(\mathcal{L}_{a_0})$. Действительно, согласно (1.11) и (1.10) мы получаем

$$Q(O^{a_0}_{a_1}) = H^{a_0}_{a_0}D_{a_0,a_1}|\mathcal{L}_{a_1}\rangle \otimes |v^g\rangle = 0.$$

Более того, можно показать, что состояние $O^{a_0}_{a_1}$ не является БРСТ точным. Поэтому, оно является представителем классов когомлогий.

Таким образом, мы получили все классы когомологий в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$ и показали связь между этими классами и особыми векторами в неприводимых модулях алгебры Вирасоро $\mathcal{L}_{a_1}$.

Классы когомлогий пространства $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{b_1})$ могут быть получены аналогичным образом. Классы старших когомлогий приведены в (1.7). Остальная часть процедуры точно такая же, которую мы использовали для пространства $H^{\mathrm{rel}}_0(\mathcal{L}_{a_1})$. Поэтому, мы приведем только результаты. В модуле Верма V_{b_1} на втором уровне существует особый вектор, который может быть представлен в виде $D_{a_0,b_1}|V_{b_1}\rangle$, причем $D_{a_0,b_1} = (L^2_{-1} + (2/3)L_{-2})$. Рекуррентное уравнение имеет вид

$$Q(H^{a_0}_{b_1}\Psi^V_{b_1}) = O^{a_0}_{a_0|b_1}, \qquad O^{a_0}_{a_0|b_1} = H^{a_0}_{a_0}D_{a_0,b_1}\Psi^V_{b_1}. \tag{1.12}$$

Решение этого уравнения позволяет нам найти оператор $H^{a_0}_{b_1}$ и, следовательно, представителей $O^{a_0}_{b_1} = H^{a_0}_{b_1}\Psi^{\mathcal{L}}_{b_1}$ классов когомлогий пространства $H^{\mathrm{rel}}_0(\mathcal{L}_{b_1})$.

Уровень вложений 2

Точки на этом уровне диаграммы вложений соответствуют старшим весам $a_2 = -4$ и $b_2 = -6$. Мы рассмотрим относительные когомологии $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Размерности и духовые числа классов когомлогий следуют из теоремы Лиана и Цукермана (1.3). Представитель старшего класса когомологий $O^{a_2}_{a_2}$ приведен в (1.7).

Рассмотрим пространство классов относительных когомлогий $H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Два базисных класса когомлогий могут быть построены способом, применявшимся на предыдущем уровне. Модуле Верма V_{a_2} содержит два особых вектора. Один из них, который может быть представлен как $D_{a_1,a_2}|V_{a_2}\rangle$, находится на уровне 4, а второй, представимый в виде $D_{b_1,a_2}|V_{a_2}\rangle$, находится на уровне 3. В этом случае рекуррентные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} &Q(H^{a_1}_{a_2}\Psi^V_{a_2}) = O^{a_1}_{a_1|a_2}, \qquad && O^{a_1}_{a_1|a_2} = H^{a_1}_{a_1} D_{a_1,a_2}\Psi^V_{a_2}, \\ &Q(H^{b_1}_{a_2}\Psi^V_{a_2}) = O^{b_1}_{b_1|a_2}, \qquad && O^{b_1}_{b_1|a_2} = H^{b_1}_{b_1} D_{b_1,a_2}\Psi^V_{a_2}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Операторы $H^{a_1}_{a_2}$ и $H^{b_1}_{a_2}$ однозначно определяют представителей $O^{a_1}_{a_2} = H^{a_1}_{a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}$ и $O^{b_1}_{a_2} = H^{b_1}_{a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}$ классов когомологий пространства $H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$.

Процедура построения классов когомлогий пространства $H_{-1}^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$ несколько хитрее.

Шаг 1. Рассмотрим относительный БРСТ комплекс $C^{\mathrm{rel}}(V_{a_2})$. Как обсуждалось ранее, модуль Верма V_{a_2} содержит два особых вектора. Рассмотрим состояния

$$O^{a_0}_{a_1|a_2} = H^{a_0}_{a_1} D_{a_1,a_2}\Psi^V_{a_2}, \quad O^{a_0}_{b_1|a_2} = H^{a_0}_{b_1} D_{b_1,a_2}\Psi^V_{a_2}.$$

Можно считать эти состояния эквивалентными состояниям $H^{a_0}_{a_1}\Psi^V_{a_1}$ и $H^{a_0}_{b_1}\Psi^V_{b_1}$, которые были определены на предыдущем уровне. Поэтому, используя соотношения (1.10), (1.11) и (1.12), мы получаем

$$Q(O^{a_0}_{a_1|a_2}) = H^{a_0}_{a_1} D_{a_0,a_1} D_{a_1,a_2}\Psi^V_{a_2}, \quad Q(O^{a_0}_{b_1|a_2}) = H^{a_0}_{b_1} D_{a_0,b_1} D_{b_1,a_2}\Psi^V_{a_1}. \tag{1.14}$$

Как обсуждалось выше, модули V_{a_1} и V_{b_1} содержат особые вектора конформной размерности $a_0 = 1$. Эти модули и, поэтому, сингулярные вектора содержаться в модуле Верма V_{a_2}. Так как модуль Верма V_{a_2} содержит только один сингулярный вектор со старшим весом a_0, мы получаем операторное тождество $D_{a_0,a_1}D_{a_1,a_2} = D_{a_0,b_1}D_{b_1,a_2}$. Следовательно, из (1.14) мы получаем

$$Q(H^{a_0}_{a_2}\Psi^V_{a_2}) = O^{a_0}_{a_1|a_2} - O^{a_0}_{b_1|a_2}, \tag{1.15}$$

и $O^{a_2}_{a_0} = H^{a_0}_{a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}$ — это представитель классов когомологий из пространства $H_{-1}^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Как мы видим, уравнение (1.15) позволяет определять классы когомологий на втором уровне, используя классы когомлогий на первом уровне.

Уровень вложения n Мы утверждаем, что можно получить рекуррентные уравнения, позволяющие вычислять когомлогии пространства $H(\mathcal{L}_{a_n})$. Базисные классы когомлогий и их духовые числа N^g могут быть представлены в виде следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & O_{a_n}^{a_1} & O_{a_n}^{a_2} & \dots & O_{a_n}^{a_{n-1}} & & \\ & & & & & O_{a_n}^{a_n} & \\ O_{a_n}^{a_0} & & & & & & \\ & O_{a_n}^{b_1} & O_{a_n}^{b_2} & \dots & O_{a_n}^{b_{n-1}} & & \end{array}$$

$$N^g = \; -n+1, \quad -n+3, \quad -n+5, \quad \dots \qquad n-1, \quad n+1.$$

Пусть γ_k и δ_k — это либо a_k или b_k. Введем следующую параметризацию для наборов классов когомлогий из пространства $H_{a_n}^{\gamma_k}$,

$$O_{a_n}^{\gamma_k} = H_{a_n}^{\gamma_k} \Psi_{a_n}^{\mathcal{L}}.$$

Эти операторы являются многочленами от образующих алгебры Вирасоро и духовых операторов c_n, b_n с $n < 0$. Рассмотрим набор состояний

$$O_{\delta_{n-1}|a_n}^{\gamma_j} = H_{\delta_{n-1}}^{\gamma_j} D_{\delta_{n-1},\ a_n} \Psi_{a_n}^{V}.$$

Эти состояния могут рассматриваться как состояния $H_{\delta_{n-1}}^{\gamma_j} \Psi_{\delta_{n-1}}^{V}$, т.е. как представители классов когомологий на предыдущем уровне $n-1$. Поэтому, согласно предположению о рекуррентном построении классов когомологий, набор операторов $H_{\delta_{n-1}}^{\gamma_j}$ предполагается уже определенным. Операторы $D_{\delta_{n-1},\ a_n}$ так же определены структурой вложения особых векторов в модуле Верма V_{a_n}. Теперь мы можем сформулировать следующее предложение.

Предложение 2. *Для классов когомологий из пространства $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ набор рекуррентных уравнений выглядит следующим образом:*

$$Q(H_{a_n}^{\gamma_j} \Psi_{a_n}^{V}) = \begin{cases} O_{a_{n-1}|a_n}^{\gamma_j} - O_{b_j|a_n}^{\gamma_j}, & j = 0, \dots, n-2 \\ O_{\gamma_{n-1}|a_n}^{\gamma_{n-1}}, & j = n-1 \\ 0, & j = n, \end{cases}$$

причем состояния $O_{a_n}^{\gamma_j} = H_{a_n}^{\gamma_j} \Psi_{a_n}^{\mathcal{L}}$ образуют базис в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Мы можем сформулировать аналогичное предложение для представителей классов когомлогий из пространства $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{b_n})$. Как следует из Предложения 2, все классы когомлогий могут быть определены, используя только старшие когомлогии и операторы $D_{\Delta',\Delta}$, явный вид которых найден в работе [15].

1.2.4 Операторы, действующие на пространстве относительных когомлогий

Ранее мы построили базис в пространстве относительных когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Для изучения операторной алгебры удобно выбрать другой набор представителей пространства когомлогий. Мы построим новый базис, используя некоторые операторы, действующие на пространстве когомлогий.

Рассмотрим следующие операторы

$$X = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nc_{-n}c_n, \quad X_+ = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^3 c_{-n}c_n.$$

Легко видеть, что эти операторы коммутируют с БРСТ зарядом Q. Действительно, оператор X эквивалентен коммутатору $[Q, c_0]$ и коммутирует с БРСТ зарядом в силу условия $Q^2 = 0$. Коммутация оператора X_+ с БРСТ зарядом может быть проверена напрямую. Таким образом, эти операторы действуют на пространстве относительных когомлогий, т.е. если w — это когомлогия с духовым числом k, то Xw и X_+w — это когомлогии с духовым числом $k + 2$ в том же пространстве.

Операторы X и X_+ удовлетворяют соотношению

$$X \cdot X_+ = 0$$

в пространстве относительных когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Это соотношение может быть проверено следующим образом. Рассмотрим оператор

$$\tilde{Y} = \frac{1}{12}\sum_{\substack{i+j+k=0,\\ i,j,k\neq 0}} (i-j)(j-k)(k-i)c_ic_jc_k. \tag{1.16}$$

Легко показать, что $X \cdot X_+ = [\tilde{Y}, Q]$. Поэтому, для любого представителя когомлогий w, мы имеем $XX_+w = [\tilde{Y}, Q]w = -Q\tilde{Y}(w)$, т.е. XX_+ действует нулем на пространстве когомлогий.

На пространстве полубесконечных когомлогий $H^{\infty/2}(Vir, Vir_0, \mathcal{L})$ действует алгебра обычных когомлогий $H(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$. Операторы X и X_+ образуют базис в двумерном пространстве $H^2(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$, где $Vir_0 = \langle L_0, c\rangle$. Вся алгебра $H(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$ порождается образующими X и X_+ с соотношением $X \cdot X_+ = 0$.

Операторы X и X_+, удовлетворяющие соотношению $XX_+ = 0$, образуют алгебру, действующую на пространстве относительных когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Кроме того, эти операторы могут быть использованы для явного построения представителей классов относительных когомлогий. Рассмотрим пространство $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Для краткости, класс когомологий с наименьшим духовым числом $O_{a_n}^{a_0}$ мы будем обозначать как O_{a_n}. Базис в этом пространстве когомлогий может быть построен с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Следующие классы когомлогий*

$$O_{a_n}, \qquad XO_{a_n},\ X^2O_{a_n},\dots X^nO_{a_n}, \qquad X_+O_{a_n},\ X_+^2O_{a_n},\dots X_+^{n-1}O_{a_n}$$

образуют базис в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Эту теорему можно проиллюстрировать следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
 & XO_{a_n} \arrow[r, "X"] & X^2O_{a_n} \arrow[r, "X"] & \dots \arrow[r, "X"] & X^{n-1}O_{a_n} \arrow[dr, "X"] & \\
O_{a_n} \arrow[ur, "X"] \arrow[dr, "X_+"'] & & & & & X^nO_{a_n} \\
 & X_+O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & X_+^2O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & X_+^{n-1}O_{a_n} \arrow[ur, "X_+"'] &
\end{tikzcd}$$

$$N^g = \ -n+1, \quad -n+3, \quad -n+5, \quad \dots \quad n-1, \quad n+1.$$

Аналогичную теорему можно сформулировать для классов когомлогий из пространства $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{b_n})$. Покажем, каким образом данная теорема позволяет находить классы когомлогий в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Используя явный вид когомлогий, приведенный в разделе 1.4, мы получаем

$$\begin{aligned}
&X(O_{a_2}^{a_0}) = -\frac{5}{3}\cdot O_{a_2}^{b_1} - O_{a_2}^{a_1}, \quad && X_+(O_{a_2}^{a_0}) = \frac{7}{3}\cdot O_{a_2}^{b_1} - O_{a_2}^{a_1},\\
&X^2(O_{a_2}^{a_0}) = 240\cdot O_{a_2}^{a_2}, && X_+^2(O_{a_2}^{a_0}) = -3696\cdot O_{a_2}^{a_2}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Отсюда следует, что классы когомлогий $O_{a_2}, XO_{a_2}, X^2O_{a_2}, X_+O_{a_2}$ образуют базис в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Отметим, что базис, построенный с помощью Теоремы 1, отличается от базиса, построенного с помощью Предложения 2. Из Теоремы 1, помимо прочего, следует, что $O_{a_n}^{a_n} = \lambda X^n O_{a_0}^{a_n}$, где $\lambda \neq 0$, т.е. старшие классы когомлогий могут быть получены из когомологий с наименьшим духовым числом с помощью действия оператора X.

Напомним, что все классы когомлогий, за исключением старших, могут быть построены из представителей классов когомлогий на предыдущем уровне диаграммы вложений. С другой стороны, как следует из Теоремы 1, все классы когомлогий (включая старшие когомлогии) пространства $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ могут быть построены из классов когомлогий с наименьшим духовым числом O_{a_n} с помощью действия операторов X и X_+. Поэтому, все когомлогии могут быть найдены, начиная с простейшей $O_{a_0}^{a_0} \in H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_0})$.

1.2.5 Операторная алгебра

Используя соответствие состояние-оператор, мы можем определить операторы, которые соответствуют найденным ранее представителям когомлогических классов. Любому состояний из Гильбертова пространства теории соответствует некоторый локальный оператор. Например, Лиувиллевскому вектору со старшим весом соответствует Лиувиллевское примарное поле определенной конформной размерности.

Каждому представителю классов когомологий O мы можем поставить в соответствие некоторый локальный оператор $O(z)$, который коммутирует с БРСТ зарядом Q. Этот оператор не зависит от точки z по модулю БРСТ точных членов. Действительно,

$$\partial O(z) = L_{-1}O(z), \quad L_{-1}O = [Q, b_{-1}]O = Qb_{-1}O.$$

Хорошо известно, что любой нетривиальный класс БРСТ когомлогий имеет конформную размерность, равную 0. Доказательство следующее. Предположим, что $L_0O = \Delta O$ и $\Delta \neq 0$. Поэтому, мы имеем

$$O = \Delta^{-1}L_0O = \Delta^{-1}[Q, b_0]O = Q(\Delta^{-1}b_0O).$$

Операторным разложением называется следующее предположение. Рассмотрим два локальных оператора $O_1(z)$ и $O_2(w)$. Тогда при стремлении $z \to w$ их произведение можно рассматривать как некоторый новый оператор в точке $z = w$, т.е.

$$O_1(z)O_2(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(w)(z-w)^n,$$

где коэффициенты разложения $A_n(w)$ — это некоторые операторы конформной размерности n. Так как операторы $O_1(z)$ и $O_2(w)$ коммутируют с БРСТ зарядом Q, коэффициенты разложения $A_n(w)$ так же коммутируют с БРСТ зарядом. Так как не существует БРСТ когомлогий с отличной от нуля конформной размерностью, только оператор $A_0(z)$ может соответствовать некоторому нетривиальному представителю классов когомлогий. Обозначим $A_0(w)$ как $O_3(w)$. Мы установили, таким образом, что операторное разложение обладает структурой кольца, определенной посредством соотношения

$$O_1(z)O_2(0) = O_3(0) + [Q, \ldots],$$

которое в дальнейшем будет обозначаться как

$$O_1 \cdot O_2 = O_3. \tag{1.18}$$

Это кольцо должно быть коммутативно и ассоциативно. Мы утверждаем, что операторная алгебра классов относительных когомологий не является ассоциативной. Рассмотрим простейший нетривиальный пример и покажем, что

$$(O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_1}^{a_1}) \cdot O_{a_2}^{a_0} \neq O_{a_1}^{a_1} \cdot (O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_2}^{a_0}). \tag{1.19}$$

Левая часть этого неравенства равна 0 в пространстве когомлогий. Действительно, из правил слияния для полей теории Лиувилля и закона сохранения духового числа следует, что произведение $O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_1}^{a_1}$ находится в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$ и имеет духовое число, равное 4. Согласно результатам Лиана и Цукермана (1.3), мы получаем, что $H_4^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_1}) = 0$. Поэтому, $O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_1}^{a_1}$ равно 0 по модулю БРСТ точных членов и, следовательно, вся левая часть (1.19) равна 0 по модулю БРСТ точных членов.

Правая часть неравенства (1.19) может быть вычислена с помощью явного вида операторов, приведенного в разделе 1.4. Правая часть, как можно показать, равна $240 \cdot O_{a_2}^{a_2}$. Это вычисление показывает, что операторная алгебра представителей классов относительных когомлогий не является ассоциативной.

Отсутствие ассоциативности операторной алгебры крайне нежелательно. Рассмотрим эту проблему подробно. До сих пор мы обсуждали классы относительных когомлогий w, по модулю Qw', где оба элемента w и w' зануляются при действии b_0. Отметим, что существуют состояния вида $Q\tilde{w}$, такие что $b_0\tilde{w} \neq 0$. Например, состояние $O_{a_1}^{a_1}$ имеет такой вид,

$$O_{a_1}^{a_1} = Q\left(c_0 b_{-1} \Psi_{a_1}\right).$$

Любая корреляционная функция, которая содержит такие состояния равна нулю. Можно сказать, что эти состояния не являются физическими. Поэтому, нам следует исключить такие состояния из рассмотрения. Для этого, мы рассмотрим абсолютный БРСТ комплекс.

1.3 Абсолютные когомологии

1.3.1 Базис в пространстве когмологических классов

Мы рассмотрим абсолютный БРСТ комплекс $C^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Как показали Лиан и Цукерман , когомлогические классы пространства $H^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$ нетривиальны тогда и только тогда, когда параметр Δ принадлежит некоторому множеству значений $\Delta \in E$. Напомним, что E — это набор старших весов, которые появляются на диаграмме вложений модулей Верма (1.2). Возможно несколько расширить утверждение теорем Лиана и Цукермана и сформулировать следующую теорему

Теорема 2. *Если $\Delta \in E$, то размерность пространства абсолютных когомлогий $H^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$ имеет следующие значения*

$$\dim H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n+1,\ -n+3, \ldots,\ n-1, \\ 1, & k = -n+4,\ -n+6, \ldots,\ n+2, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

где предполагается, что $n > 0$. В случае $n = 0$ размерность подпространства дается следующим значением

$$\dim H_k^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1} + \delta_{k,2}.$$

Мы докажем эту теорему для подпространства $H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$, потому что остальные случаи могут быть рассмотрены подобным образом. Следуя логике работы [13, 6], мы рассмотрим длинную точную последовательность, связывающую относительные и абсолютные когомлогии

$$\ldots \xrightarrow{\gamma_{k-1}} H_{k-2}^{\mathrm{rel}} \xrightarrow{\alpha_{k-1}} H_k^{\mathrm{rel}} \xrightarrow{\beta_k} H_k^{\mathrm{abs}} \xrightarrow{\gamma_k} H_{k-1}^{\mathrm{rel}} \xrightarrow{\alpha_k} H_{k+1}^{\mathrm{rel}} \xrightarrow{\beta_{k+1}} H_{k+1}^{\mathrm{abs}} \xrightarrow{\gamma_{k+1}} \ldots \tag{1.20}$$

Из точности этой последовательности следует, что

$$\dim H_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim \mathrm{im}(\gamma_k) + \dim \mathrm{im}(\beta_k) = \dim \ker(\alpha_k) + \dim H_k^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) - \dim \mathrm{im}(\alpha_{k-1}).$$

Так как размерности пространств $\dim H_k^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ известны (1.3), достаточно изучить отображения α_k.

Отображение $\alpha_k \ :\ H_{k-1}^{\mathrm{rel}} \to H_{k+1}^{\mathrm{rel}}$ определено как композиция действия духового оператора c_0 и БРСТ заряда Q. Отметим, что $[Q, c_0] = X$. Поэтому, отображение α_k эквивалентно действию оператора X. Из теоремы 1 следует, что ядро оператора α_k порождается классами когомлогий вида $X_+^j O_{a_n}$, где $(1 \leq j < n)$ и $X^n O_{a_n}$. Образ этого отображения порождается классами когомлогий вида $X^j O_{a_n}$ $(1 \leq j \leq n)$. Из этих рассуждений мы легко получаем искомые размерности классов когомлогий.

Смысл длинной точной последовательности заключается в следующем. Любой класс абсолютных когомологий может быть либо классом из $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$, либо может быть представлен в виде $c_0 w + w'$, где $w \in H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ и $w' \in C^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Некоторые классы относительных когомлогий не являются классами абсолютных когомлогий. Действительно, рассмотрим действие БРСТ оператора на состояние вида $c_0 w + w'$

$$Q(c_0 w + w') = Xw + Qw'. \tag{1.21}$$

Поэтому, любой класс относительных БРСТ когомлогий вида Xw является БРСТ точным в пространстве абсолютных когомлогий. Из Теоремы 1 следует, что следующие представители классов относительных когомологий

$$O_{a_n}, \quad X_+ O_{a_n}, \quad X_+^2 O_{a_n}, \quad \dots \quad X_+^{n-1} O_{a_n}$$

не представимы в виде Xw и, поэтому, образуют базис в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Для того, чтобы дополнить набор (1.22) до базиса, нам потребуются состояния вида $c_0 w + w'$, где $w \in H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ и $w' \in C^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Из (1.21) следует, что если $Q(c_0 w + w') = 0$, то $Xw = 0$ на пространстве относительных когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. В силу Теоремы 1, такие состояния w являются линейными комбинациями следующих классов когомлогий $X_+ O_{a_n},\ X_+^2 O_{a_n},\ \dots\ , X_+^{n-1} O_{a_n}, X^n O_{a_n}$. Тогда, все дополнительные базисные состояния имеют вид $c_0 X_+ O_{a_n},\ c_0 X_+^2 O_{a_n},\ \dots\ , c_0 X_+^{n-1} O_{a_n},\ c_0 X^n O_{a_n}$ по модулю $C^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Рассмотрим следующий оператор

$$Y = \frac{1}{12} \sum_{i+j+k=0} (i-j)(j-k)(k-i) c_i c_j c_k,$$

который имеет духовое число 3. Легко проверить, что этот оператор коммутирует с БРСТ зарядом Q и, следовательно, действует на пространстве когомологий. Более того, если $w \in H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$, то $Yw = c_0 X_+ w + w'$, где $w' \in C^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Набор элементов (1.22) может быть расширен до базиса в пространстве абсолютных когомлогий $H^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ добавлением элементов

$$YO_{a_n},\ YX_+O_{a_n},\ YX_+^2O_{a_n},\ \dots\ YX_+^{n-1}O_{a_n}.$$

Действительно, $YO_{a_n} = c_0X_+O_{a_n},\ YX_+O_{a_n} = c_0X_+^2O_{a_n}, \dots, YX_+^{n-2}O_{a_n} = c_0X_+^{n-1}O_{a_n}$ по модулю $C^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Таким образом, процедура построения абсолютных когомлогий, которая рассматривалась выше, может быть представлена в виде следующей диаграммы

$$N^g = \ -n+1, \quad -n+3, \quad -n+5, \quad \dots \quad n-1.$$

$$\begin{tikzcd}
O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] \arrow[dr, "Y"'] & X_+O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & X_+^2O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & X_+^{n-1}O_{a_n} & \\
& YO_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & YX_+O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & YX_+^{n-1}O_{a_n}
\end{tikzcd}$$

$$N^g = \qquad -n+4, \quad -n+6, \quad \dots \quad n+2.$$

Пусть γ_n — это либо a_n, либо b_n. Удобно выбрать базисные элементы для классов АБСОЛЮТНЫХ когомлогий следующим образом

$$O^i_{\gamma_n} = (n-i-1)!X_+^iO_{\gamma_n}, \quad N^i_{\gamma_n} = (n-i-1)!YX_+^iO_{\gamma_n}, \quad (0 \le i < n). \tag{1.22}$$

Как мы увидим далее, такой выбор базисных элементов упрощает вид структурных констант операторной алгебры. Действие оператора X_+ на этих когомологиях имеет вид

$$X_+O^i_{\gamma_n} = (n-i-1)O^{i+1}_{\gamma_n}, \quad X_+N^i_{\gamma_n} = (n-i-1)O^{i+1}_{\gamma_n}, \tag{1.23}$$

причем духовые числа этих классов когомлогий имеют вид

$$N^g(O^i_{\gamma_n}) = 2i-n+1, \qquad N^g(O^i_{\gamma_n}) = 2i-n+4.$$

1.3.2 Операторная алгебра

Как обсуждалось ранее, операторное алгебра имеет структуру кольца (1.18) на пространстве абсолютных когомлогий. Предполагается, что это кольцо является ассоциативным и коммутативным. В этом кольце содержится единичный элемент, а именно тождественный оператор $O^0_{a_1}(z) = \mathbb{I}(z)$.

Как мы покажем далее, операторная алгебра в пространстве абсолютных когомлогий почти определяется с помощью операторов X_+ и Y. Поэтому, мы рассмотрим сначала эти операторы. Согласно соответствию операторов и состояний, любой оператор, действующий на Гильбертовом пространстве состояний, имеет образ, действующий на пространстве локальных операторов. Можно показать, что образ оператора X_+ может быть представлен в виде следующего контурного интеграла

$$X_+ = -\oint dz c(z)\partial^3 c(z), \tag{1.24}$$

где мы опустили БРСТ точные члены. Как следствие такого представление, мы заключаем, что оператор X_+ дифференцирует произведение любых двух локальных операторов, то есть

$$X_+(O_1 \cdot O_2) = (X_+ O_1) \cdot O_2 + O_1 \cdot (X_+ O_2). \tag{1.25}$$

Теперь рассмотрим оператор Y. Легко проверить, что действие этого оператора эквивалентно взятию нулевой моды операторного разложения с $\frac{1}{2}: c\partial c\partial^2 c:$, т.е.

$$YO(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Res}_{z=0}\left(\frac{:c(z)\partial c(x)\partial^2 c(z): O(0)}{z}\right)$$

по модулю БРСТ точных членов. Отметим, что оператор $\frac{1}{2}{:}c\partial c\partial^2 c{:}$ — это локальный оператор, соответствующий представителю классов когомлогий $N^0_{a_1}$:

$$N^0_{a_1} = \frac{1}{2}{:}c\partial c\partial^2 c{:}.$$

Поэтому, на пространстве когомологий мы имеем

$$YO = N^0_{a_1} \cdot O. \tag{1.26}$$

Рассмотрение операторной алгебры упрощается благодаря правилам слияния. Рассмотрим операторы вида $O^i_{a_n}$. Соответствующие им состояния образуют базис в пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Учитывая правила слияния для вырожденных представлений алгебры Вирасоро [3] и условие сохранения духового числа, мы получаем

$$O^i_{a_{k+1}} \cdot O^j_{a_{l+1}} = \sum_{n=0}^{i+j} \lambda^{i,j}_{k,l,n} O^{i+j-n}_{a_{k+l+1-2n}}, \tag{1.27}$$

с некоторыми структурными константами $\lambda^{i,j}_{k,l,n}$.

Операторы X_+ и Y почти определяют структурные константы операторной алгебры благодаря двум следующим предложениям

Предложение 3. *Предположим, что*

$$O^0_{a_{k+1}} \cdot O^0_{a_{l+1}} = O^0_{a_{k+l+1}}. \tag{1.28}$$

Тогда подкольцо $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ *изоморфно кольцу многочленов от* $O^0_{a_2}$ *и* $O^1_{a_2}$*. Более того,*

$$O^i_{a_{n+1}} = (O^0_{a_2})^{n-i}(O^1_{a_2})^i \tag{1.29}$$

В этом предложении мы предполагаем, что операторное произведение не вырождено, а коэффициент в этом операторном разложении всегда может быть положен равным 1 подходящей перенормировкой когомлогий с наименьшим духовым числом O_{a_n}.

Для доказательства этого Предложения достаточно доказать соотношение (1.29). Для $n = 0$ уравнение (1.29) эквивалентно тому, что $O^0_{a_1}$ — это единичный элемент. Для $n = 1$ уравнение (1.29) очевидно выполняется. Из Предположения (1.28) следует, что

$$O^0_{a_{n+1}} = O^0_{a_n} \cdot O^0_{a_2} = O^0_{a_{n-1}} \cdot O^0_{a_2} \cdot O^0_{a_2} = \ldots = (O^0_{a_2})^n \tag{1.30}$$

Применяя оператор X_+ к обеим частям это равенства и используя (1.25) и (1.25), мы получаем

$$nO^1_{a_{n+1}} = n(O^0_{a_2})^{n-1} \cdot O^1_{a_2}, \quad O^1_{a_{n+1}} = (O^0_{a_2})^{n-1} \cdot O^1_{a_2}.$$

Повторно применяя X_+ к обеим частям этого равенства, мы получим

$$(n-1)O^2_{a_{n+1}} = (n-1)(O^0_{a_2})^{n-2} \cdot O^1_{a_2} \cdot O^1_{a_2}, \quad O^2_{a_{n+1}} = (O^0_{a_2})^{n-2} \cdot (O^1_{a_2})^2.$$

Таким образом, применяя оператор X_+ i раз к обеим частям (1.30), мы получим (1.29).

Интересно сравнить эти результаты с результатами Канно и Сармади [8], где вместо неприводимых модулей алгебры Вирасоро в Лиувиллевском секторе рассматриваются модули Фейгина-Фукса. Как отмечалось, классы когомлогий из работы [8] соответствуют рассматриваемым нами классам когомлогий с наименьшими и наибольшими духовыми числами. Например, w^n в их обозначениях соответствует элементу $O^0_{a_{n+1}}$ с $n \geq 0$. Результаты работы [8] подтверждают, что произведение представителей классов когомлогий вида $O^0_{a_{n+1}}$ является невырожденным и, поэтому, предположение, которое мы сделали в Предложении 3, выполняется.

Структурные константы операторной алгебры на пространстве $\oplus_{n>0} H^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ определяются с помощью следующего предложения.

Предложение 4. *При условии выполнения предположения о невырожденности операторного произведения из Предложения 3, мы имеем*

$$O^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot O^{l-j}_{a_{l+1}} = O^{k+l-i-j}_{a_{k+l+1}}, \quad N^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot O^{l-j}_{a_{l+1}} = N^{k+l-i-j}_{a_{k+l+1}}, \quad N^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot N^{l-j}_{a_{l+1}} = 0. \tag{1.31}$$

Докажем это Предложение. Первое равенство очевидным образом следует из (1.29). Теперь умножим первое равенство на $N^0_{a_1}$ с обеих сторон. Из (1.26) и (1.22), мы получаем

$$N^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot O^{l-j}_{a_{l+1}} = N^0_{a_1} \cdot O^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot O^{l-j}_{a_{l+1}} = N^0_{a_1} \cdot O^{k+l-i-j}_{a_{k+l+1}} = N^{k+l-i-j}_{a_{k+l+1}}.$$

Последнее равенство из (1.31) очевидно следует из соотношений $N^{k-i}_{a_{k+1}} = YO^{k-i}_{a_{k+1}} = N^0_{a_1} \cdot O^{k-i}_{a_{k+1}}$ и $N^0_{a_1} \cdot N^0_{a_1} = YN^0_{a_1}(z) = 0$.

Мы рассматриваем операторную алгебру состояний из подпространства $\oplus_{n>0} H^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Этого оказывается достаточным, так как существует изоморфизм между пространствами $H^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ и $H^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{b_n})$. Этот изоморфизм реализуется с помощью оператора

$$O^0_{b_1}(z) = (\partial + \frac{2}{3} : bc :)\Phi_{b_1}(z),$$

где $\Phi_{b_1}(z) = \Phi_{1,2}(z)$ — это Лиувиллевской примарное поле, соответствующее состоянию $|\mathcal{L}_{b_1}\rangle$. Действительно, из правил слияния для вырожденных представлений алгебры Вирасоро в Лиувиллевском секторе и из закона сохранения духового числа, мы получаем

$$O^0_{b_1} \cdot O^i_{a_{n+1}} = \lambda^i_{b_1,a_{n+1}} O^i_{b_{n+1}}, \quad O^i_{b_1} \cdot O^i_{b_{n+1}} = \lambda^i_{b_1,b_{n+1}} O^i_{a_{n+1}}, \tag{1.32}$$

где $\lambda^i_{b_1,a_{n+1}}$ и $\lambda^i_{b_1,b_{n+1}}$ — это структурные константы. Для того, чтобы показать, что эти константы не равны 0, мы умножим обе части первого уравнения в (1.32) на оператор $O^0_{b_1}$. Учитывая ассоциативность операторной алгебры, мы получаем

$$(O^0_{b_1})^2 \cdot O^i_{a_{n+1}} = \lambda^i_{b_1,a_{n+1}} O^0_{b_1} \cdot O^i_{b_{n+1}} = \lambda^i_{b_1,a_{n+1}} \lambda^i_{b_1,b_{n+1}} O^i_{a_{n+1}}$$

Так как

$$(O^0_{b_1})^2 = -14/9 C^{(1,1)}_{(1,2),(1,2)} \mathbb{I}(z), \tag{1.33}$$

где $C^{(1,1)}_{(1,2),(1,2)}$ — это структурная константа теории Лиувилля [16, 31], мы заключаем, что

$$\lambda^i_{b_1,a_{n+1}}\lambda^i_{b_1,b_{n+1}} = -14/9C^{(1,1)}_{(1,2),(1,2)} \neq 0.$$

Мы можем перенормировать локальные операторы $O^0_{b_n}$ таким образом, что

$$O^0_{b_1} \cdot O^0_{a_{n+1}} = O^0_{b_{n+1}}.$$

Применяя операторы X_+ и Y к обеим частям этого равенства, мы получаем

$$O^0_{b_1} \cdot O^i_{a_{n+1}} = O^i_{b_{n+1}}, \qquad O^0_{b_1} \cdot N^i_{a_{n+1}} = N^i_{b_{n+1}} \tag{1.34}$$

Используя Предложение 4 и выражения (1.33), (1.34) можно легко вычислить операторные произведения любых двух локальных полей.

1.4 Некоторые представители классов когомлогий

В этом разделе мы приведем явные выражения для некоторых представителей классов относительных когомлогий. Явные выражения для старших классов когомлогий были приведены ранее (1.7). Для нахождения остальных состояний мы будем использовать рекуррентную процедуру, описанную ранее.

Уровень вложения 1. Рассмотрим пространство когомологий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$. Легко проверить, что представитель классоа когомлогий с духовым числом 0 может быть представлен в следующем виде

$$O^{a_0}_{a_1} = H^{a_0}_{a_1}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_1} = b_{-1}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_1}$$

Можно показать, что $Q(O^{a_0}_{a_1}) = L_{-1}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_1} = 0$, так как $L_{-1}|V_{a_1}\rangle$ — это особый вектор в модуле Верма V_{a_1} и, следовательно, в неприводимом модуле $L_{-1}|\mathcal{L}_{a_1}\rangle = 0$.

В пространстве $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{b_1})$ представителем классов когомлогий с духовым числом 0 может быть выбрано следующее состояние

$$O^{a_0}_{b_1} = H^{a_0}_{b_1}\Psi^{\mathcal{L}}_{b_1} = \left(b_{-1}L_{-1} + \frac{2}{3}b_{-2}\right)\Psi^{\mathcal{L}}_{b_1}$$

Легко проверить, что $Q(O^{a_0}_{b_1}) = (L^2_{-1} + (2/3)L_{-2})\Psi^{\mathcal{L}}_{b_1} = 0$, так как $(L^2_{-1} + (2/3)L_{-2})|V_{b_1}\rangle = 0$ — это особый вектор в модуле Верма V_{b_1} и, поэтому, в неприводимом модуле $(L^2_{-1} + (2/3)L_{-2})|\mathcal{L}_{b_1}\rangle = 0$.

Уровень вложения 2. На этом уровне мы рассмотрим только пространство когомлогий $H^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Явный вид представитель класса старших когомлогий приведен в (1.7). Рассмотрим остальные состояния.

Легко проверить, что следующие состояния являются представителями классов когомлогий с духовым числом 1

$$
\begin{aligned}
O^{a_1}_{a_2} = H^{a_1}_{a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2} = \Big(&-c_{-1}b_{-1}L^3_{-1} - \frac{20}{3}c_{-1}b_{-2}L^2_{-1} - 4c_{-1}b_{-2}L_{-2} - \frac{52}{3}c_{-1}b_{-3}L_{-1} + 3c_{-2}b_{-1}L^2_{-1}+\\
&+\frac{64}{3}c_{-3}b_{-1}L_{-1} - \frac{76}{3}c_{-1}b_{-4} + 20c_{-3}b_{-2} + \frac{44}{3}c_{-4}b_{-1}\Big)\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}\\
O^{b_1}_{a_2} = H^{b_1}_{a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2} = \big(&-c_{-2}b_{-1}L^2_{-1} - 6c_{-2}b_{-2}L_{-1} + 4c_{-3}b_{-1}L_{-1} - 12c_{-2}b_{-3} + 16c_{-4}b_{-1}\big)\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}.
\end{aligned}
$$

Действительно, можно проверить, что $Q(O^{a_1}_{a_2}) = D_{b_1,a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2} = 0$ and $Q(O^{b_1}_{a_2}) = D_{b_1,a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2} = 0$. Явный вид операторов D_{a_1,a_2} и D_{b_1,a_2} можно найти в работе [10].

Представитель класса когомологий с духовым числом -1 имеет вид

$$
O^{a_0}_{a_2} = \left(-\frac{2}{3}b_{-2}b_{-1}(L^2_{-1} + 6L_{-2}) + \frac{2}{3}b_{-3}b_{-1}L_{-1} - \frac{4}{3}b_{-4}b_{-1} + 4b_{-3}b_{-2}\right)\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}. \tag{1.35}
$$

Можно проверить, что

$$
Q(O^{a_0}_{a_2}) = H^{a_0}_{a_1}D_{a_1,a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2} - H^{a_0}_{b_1}D_{b_1,a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2} = 0,
$$

что согласуется с результатам рекуррентной процедуры.

Глава 2

Форм факторы локальных операторов в теория Тоды для аффинной алгебры $A_{L-1}^{(1)}$

Эта глава построена следующим образом. В разделе 2.1 мы кратко опишем двумерную теорию Тоды для аффинной алгебры $A_{L-1}^{(1)}$, введем используемые в дальнейшем обозначения и напомним основные результаты Лукьяновского свободно-полевого представления. В разделе 2.3 мы представим вспомогательную коммутативную алгебру, которая позволит построить свободно-полевое представление для форм факторов операторов потомков. Мы обозначим некоторые основные следствия этой конструкции и произведем подсчет операторов потомков, определяемых с помощью полученных решений. В разделе 2.4 мы рассмотрим альтернативное свободно-полевое представление, которое является важным элементом при доказательстве отражательных соотношений в разделах 2.4.1, 2.5. В разделе 2.4.1 мы используем некоторые рекуррентные соотношения для доказательства отражательных соотношений для экспоненциальных операторов, а в разделе 2.5 эти соотношения используются для доказательства отражательных соотношений для форм факторов операторов потомков. В явном виде отражательные соотношения рассмотрены в разделе 2.6 для операторов потомков на первом уровне.

2.1 Теория Тоды для аффинной алгебры Ли $A_{L-1}^{(1)}$

Пусть $\mathfrak{h}$ — это $(L-1)$-мерная Картанова подалгебра простой алгебры Ли A_{L-1}. Дуальную подалгебру обозначим как $\mathfrak{h}^*$. Определим скобку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ как форму Киллинга, ограниченную либо на подалгебру $\mathfrak{h}$, либо на дуальную ей подалгебру $\mathfrak{h}^*$. Обозначим простые корни алгебры как $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$, $i = 1, \ldots, L-1$. Эти корни удовлетворяют следующим соотношениям $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$. Обозначим аффинный корень как $\alpha_0 = -\sum_{i=1}^{L-1} \alpha_i$. Пусть ρ – это полусумма положительных корней, которая может быть представлена в виде $\rho = \sum_{i=1}^{L-1} \frac{i(L-i)}{2} \alpha_i$ и, кроме того, $\langle \rho, \alpha_i \rangle = 1$, $i > 0$. Обозначим H_s, $s = 1, \ldots, L$ набор весов первого фундаментального представления π_1 алгебры, $\langle \alpha_i, H_s \rangle = \delta_{is} - \delta_{i,s-1}$, причем $\alpha_i = H_i - H_{i+1}$.

Рассмотрим $(L-1)$-компонентное действительное поле $\varphi(x) \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ с действием

$$S[\varphi] = \int d^2x \left(\frac{\langle \partial_\mu \varphi, \partial^\mu \varphi \rangle}{8\pi} - \frac{\mu}{2} \sum_{i=0}^{L-1} e^{b\alpha_i \varphi} \right). \tag{2.1}$$

Подчеркнем, что сумма в правой части идет по всем простым корням аффинной алгебры Ли $A_{L-1}^{(1)}$, включая аффинный корень α_0. Описываемая этим действием теория называется *аффинной теорией поля* связанной с алгеброй Ли $A_{L-1}^{(1)}$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения

$$\omega = e^{2i\pi/L}, \quad Q = b + b^{-1}, \quad b = \sqrt{\frac{p}{1-p}}, \tag{2.2}$$

где предполагается, что параметр p является иррациональным числом. Кроме того, мы будем использовать координаты светового конуса и производные по этим координатам, то есть

$$z = x^1 - x^0, \quad \bar{z} = x^1 + x^0, \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Спектр рассматриваемой модели содержит из $L-1$ различных частиц, причем массы этих частиц могут быть найдены точно [22]

$$M_k = [k] M_1, \qquad k = 1, \ldots, L-1. \tag{2.3}$$

В этом выражении мы использовали общепринятые q-числовые обозначения

$$[k] = \frac{\omega^{k/2} - \omega^{-k/2}}{\omega^{1/2} - \omega^{-1/2}} = \frac{\sin \frac{\pi k}{L}}{\sin \frac{\pi}{L}}. \tag{2.4}$$

Масса легчайшей частицы M_1 пропорциональна $\mu^{1/2(1-b^2)}$. Точное соотношение между массой M_1 и μ было установлено в работе [35].

Пространство локальных операторов рассматриваемой модели состоит из экспоненциальных операторов

$$V_a(x) = e^{Q(a+\rho)\varphi(x)} \tag{2.5}$$

и их потомков, т.е. линейной комбинации полей

$$(\alpha_{i_1}\partial^{l_1}\varphi)\cdots(\alpha_{i_r}\partial^{l_r}\varphi)(\alpha_{j_1}\bar{\partial}^{\bar{l}_1}\varphi)\cdots(\alpha_{j_s}\bar{\partial}^{\bar{l}_s}\varphi)e^{Q(a+\rho)\varphi}(x) \tag{2.6}$$

для любых целых чисел $r, s \geq 0$ и $l_1, \ldots, \bar{l}_s > 0$. Пару чисел $(l, \bar{l})$, определенных следующим образом

$$l = \sum_{p=1}^{r} l_p, \qquad \bar{l} = \sum_{p=1}^{s} \bar{l}_p, \tag{2.7}$$

мы будем называть уровнем оператора потомка, в то время как числа l и $\bar{l}$ по отдельности будут называться киральными уровнями. Разность $s = l - \bar{l}$ — это Лоренцевый спин оператора, в то время как сумма $\Delta = Q^2\langle a+\rho, a+\rho\rangle + l + \bar{l}$ — его скейлинговая размерность в ультрафиолетовой области. Операторы потомки с $\bar{l} = 0$ будут называться киральными потомками, в то время как операторы потомки с $l = 0$ будут называться антикиральными.

В формализме радиального квантования, любому оператору в какой-нибудь точки, например $x = 0$, ставится в соответствие вектор из вспомогательного векторного пространства. А именно, поле $\varphi(x)$ может быть разложено в некоторое подобие ряда Лорана в окрестности точки рассматриваемой точки[1],

$$\alpha_i\varphi(x) = \mathbf{Q}_i - i\mathbf{P}_i \log z\bar{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{\mathbf{a}_{in}}{in} z^{-n} + \sum_{n\neq 0} \frac{\bar{\mathbf{a}}_{in}}{in} \bar{z}^{-n}. \qquad i = 1, \ldots, L-1, \tag{2.8}$$

причем операторы $\mathbf{Q}_i$, $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{a}_{in}$ и $\bar{\mathbf{a}}_{in}$ образуют алгебру Гейзенберга со следующими коммутационными соотношениями

$$[\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j] = -i\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle, \quad [\mathbf{a}_{im}, \mathbf{a}_{jn}] = m\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\delta_{m+n,0}, [\bar{\mathbf{a}}_{im}, \bar{\mathbf{a}}_{jn}] = m\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\delta_{m+n,0}. \tag{2.9}$$

В формализме радиального квантования экспоненциальный оператор $V_a(0)$ соответствует вектору со старшим весом $|a\rangle_{rad}$, который определяется с помощью следующих соотношений

$$\mathbf{a}_{in}|a\rangle_{rad} = \bar{\mathbf{a}}_{in}|a\rangle_{rad} = 0 \quad (m > 0), \quad \mathbf{P}_i|a\rangle_{rad} = Q\langle\alpha_i, a+\rho\rangle|a\rangle_{rad}, \quad |a\rangle_{rad} = e^{ia\mathbf{Q}}|vac\rangle_{rad} \tag{2.10}$$

[1] конечно, это разложение справедливо только для малой окрестности рассматриваемой точки, $|z|, |z'| \ll M_1^{-1}$, в которой поле $\varphi(x)$ может рассматриваться как безмассовый свободный бозон

с точностью до некоторого числового множителя, операторы потомки (2.6) соответствуют векторам

$$\mathbf{a}_{i_1,-l_1}\dots\mathbf{a}_{-i_r,-l_r}\bar{\mathbf{a}}_{j_i,-\bar{l}_1}\dots\bar{\mathbf{a}}_{j_s,-\bar{l}_s}|a\rangle_{rad}\quad(0<n_1\leq\dots\leq n_r,0<\bar{n}_1\leq\dots\leq\bar{n}_s).\tag{2.11}$$

Эти вектора образуют линейную оболочку модулей Фока с вектором старшего веса $|a\rangle_{rad}$. Этот модуль может быть представлен в виде тензорного произведения $\mathcal{F}_a\otimes\bar{\mathcal{F}}_a$ двух киральных компонент. Модуль $\mathcal{F}_a$ — это Фоковский модуль натянутый на вектора (2.11) с $\bar{l}=0$. Аналогично, модуль $\bar{\mathcal{F}}_a$ — это Фоковский модуль натянутый на вектора с $l=0$. В свою очередь, каждый из этих модулей может быть разложен в прямую сумму уровневых подпространств, например, $\mathcal{F}_a\simeq\bigoplus_{l=0}^{\infty}\mathcal{F}_{a,l}$, где каждое подпространство $\mathcal{F}_{a,l}$ натянуто на вектора кирального уровня l. Размерности пространств $\mathcal{F}_{a,l}$ даются хорошо известной производящей функцией

$$\sum_{l=0}^{\infty}q^l\dim\mathcal{F}_{a,l}=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^m)^{L-1}}.\tag{2.12}$$

Кроме того, существует естественный изоморфизм: $T:\mathcal{F}_a\to\bar{\mathcal{F}}_a$, вследствие отображения $\mathbf{a}_{in}\to\bar{\mathbf{a}}_{in}$. Этот изоморфизм сохраняет уровень $T:\mathcal{F}_{a,l}\to\bar{\mathcal{F}}_{a,l}$.

Для любого вектора $v\in\mathcal{F}_a\otimes\bar{\mathcal{F}}_a$ мы определяем оператор $\Phi_a[v](x)$ как некоторый оператор, соответствующий состоянию $v|a\rangle_{rad}$.

Гипотеза об отражательной симметрии [31, 32, 33, 34] утверждает следующее свойство экспоненциальных операторов. Пусть $\mathcal{W}$ — это группа Вейля простой алгебры Ли A_{L-1}. Тогда, для параметра a в общем положении и для любого элемента $w\in\mathcal{W}$ существует отображение $R_a(w):\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}\to\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}$, такое что

$$\Phi_{wa}[v](x)=\Phi_a[R_a(w)v](x).\tag{2.13}$$

Так как это свойство следует из конформной теории поля, оно сохраняет уровни операторов

$$R_a(w)\mathcal{F}_{al}\otimes\bar{\mathcal{F}}_{a,\bar{l}}=\mathcal{F}_{wa,l}\otimes\mathcal{F}_{wa,\bar{l}}.$$

Кроме того, рассматриваемое отображение факторизуется в прямое произведение киральных компонент

$$R_a(w)=r_a(w)\otimes Tr_a(w)T_{-1},\quad r_a(w):\mathcal{F}_a\to\mathcal{F}_{wa}.\tag{2.14}$$

Существует другое биективное отображение между $\mathcal{F}_a$ и $\bar{\mathcal{F}}_{a'}$, которое естественно с точки зрения форм факторного формализма. Пусть $w_* \in \mathcal{W}$ — это элемент, определяемый соотношением

$$w_*\alpha_i = -\alpha_{L-i} \quad \Leftrightarrow \quad w_*H_s = H_{L+1-s}. \tag{2.15}$$

Как известно, группа Вейля порождается отражениями w_i, такими что

$$w_i a = a - \langle a, \alpha_i \rangle \alpha_i, \qquad i = 1, \ldots, L-1.$$

Используя эти генераторы, элемент w_* может быть представлен в виде

$$w_* = w_1(w_2w_1)(w_3w_2w_1)\cdots(w_{L-1}w_{L-2}\cdots w_1).$$

Так как $w_*^2 = 1$, то можно определить автоморфизм группы Вейля

$$\widetilde{w} = w_*ww_*, \tag{2.16}$$

такой что

$$\widetilde{w}_i = w_{L-i}.$$

Для общих значений параметра a существует биективное отображение $T_a^* : \mathcal{F}_{w_*a} \to \bar{\mathcal{F}}_a$, сохраняющее уровень $T_a^*\mathcal{F}_{w_*a,l} = \bar{\mathcal{F}}_{a,l}$, так что свойство факторизации для отражательного оператора принимает вид

$$R_a(w) = r_a(w) \otimes T_{wa}^* r_{w_*a}(\widetilde{w}) T_a^{*-1}. \tag{2.17}$$

Данное соответствие, которое кажется на первый взгляд весьма неестественным с точки зрения Лагранжевого формализма, оказывается симметрией, которой обладают форм факторы.

Рассмотрим экспоненциальные операторы. Так как $\dim \mathcal{F}_0 = 1$ мы получаем

$$G_a^{-1}V_a(x) = G_{wa}^{-1}V_{wa}(x), \qquad \forall w \in \mathcal{W}, \tag{2.18}$$

где $G_a = \langle V_a(x) \rangle$ — это вакуумное ожидаемое экспоненциального оператора $V_a(x)$, которое известно точно [34].

2.2 Свободно-полевое представление для форм факторов локальных операторов

2.2.1 форм факторы экспоненциальных операторов

Теперь мы можем перейти к задаче о вычислении форм факторов. Напомним кратко свободно полевое представление для форм факторов, предложенное Лукьяновым [30] для модели (2.1). Рассмотрим набор экпоненциальных операторов $\Lambda_s(\theta)$, $s=1,\dots,L$ и определим для них двух-точечные следовые функции

$$\begin{aligned}\langle\langle\Lambda_s(\theta')\Lambda_s(\theta)\rangle\rangle &= R(\theta-\theta'),\\ \langle\langle\Lambda_{s'}(\theta')\Lambda_s(\theta)\rangle\rangle &= R(\theta-\theta')F\left(\theta-\theta'+\mathrm{sign}(s-s')\frac{i\pi}{L}\right),\end{aligned} \tag{2.19}$$

где $R(\theta)$ — двух-точечный минимальный форм фактор

$$\log R(\theta) = -4\int\frac{dt}{t}\,\frac{\sinh(L-1)t\,\sinh pt\,\sinh(1-p)t}{\sinh^2 Lt}\cosh\frac{L(\pi-i\theta)t}{\pi},$$

а функция $F(\theta)$ имеет вид

$$F\left(\theta\pm\frac{i\pi}{L}\right)=\frac{\sinh\left(\frac{\theta}{2}\pm\frac{i\pi p}{L}\right)\sinh\left(\frac{\theta}{2}\pm\frac{i\pi(1-p)}{L}\right)}{\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\left(\frac{\theta}{2}\pm\frac{i\pi}{L}\right)}. \tag{2.20}$$

Многоточечные функции вычисляются по теореме Вика, причем мы определим процедуру нормального упорядочивания следующим образом

$$\begin{gathered}\Lambda_{s_N}(\theta_N)\cdots\Lambda_{s_1}(\theta_1) =: \Lambda_{s_N}(\theta_N)\cdots\Lambda_{s_1}(\theta_1):\prod_{1\le m<n\le N}\langle\langle\Lambda_{s_n}(\theta_n)\Lambda_{s_m}(\theta_m)\rangle\rangle,\\ \langle\langle:\Lambda_{s_N}(\theta_N)\cdots\Lambda_{s_1}(\theta_1):\rangle\rangle=1.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Рассмотрим следующие операторы

$$\Lambda_{s_1\dots s_k}(\theta) =: \prod_{j=1}^{k}\Lambda_{s_j}\left(\theta+\frac{i\pi(n+1-2j)}{L}\right):,\qquad 1\le s_1<\dots<s_k\le L. \tag{2.22}$$

В частности,

$$\Lambda_{12\dots L}(\theta)=1. \tag{2.23}$$

Удобно ввести центральный элемент $\hat{a}$ для алгебры $\mathfrak{h}^*$ и рассмотреть следующие функции

$$\langle\langle X(\hat{a})\rangle\rangle_a = \langle\langle X(a)\rangle\rangle$$

определенные для любой операторной функции $X(a)$. В этих обозначениях Лукьяновские генераторы могут быть записаны в следующем виде

$$T_k(\theta) = \lambda_k' \sum_{1\le s_1<\dots<s_k\le L} \omega^{\langle \hat{a}, H_{s_1\dots s_k}\rangle} \Lambda_{s_1\dots s_k}(\theta), \qquad H_{s_1\dots s_k} = H_{s_1} + \dots + H_{s_k} \tag{2.24}$$

где нормировочная константа выбрана следующим образом

$$\lambda_k' = \sqrt{\frac{L}{2\sin\pi p}} \exp\int \frac{dt}{t} \frac{\sinh pt \,\sinh(1-p)t}{\sinh t\, \sinh^2 Lt}\Big(\sinh^2 kt + \sinh^2 (L-k)t\Big). \tag{2.25}$$

Форм факторы экспоненциальных операторов могут быть записаны как многоточечные функции Лукьяновских операторов [30], а именно

$$\langle vac|V_a(0)|k_1\theta_1, \dots, k_N\theta_N\rangle \equiv G_a f_a(\theta_1, \dots, \theta_N)_{k_1\dots k_N} = G_a \langle\langle T_{k_N}(\theta_N)\dots T_{k_1}(\theta_1)\rangle\rangle_a \tag{2.26}$$

Функции f_a являются аналитическими функциями параметров θ_n с довольно сложными аналитическими свойствами. Тем не менее, легко видеть, что они могут быть сведены к функциям с более простыми аналитическими свойствами. Действительно,

$$\begin{gathered} f_a(\theta_1, \dots, \theta_N)_{k_1\dots k_N} = J_{N,a}(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_N})_{k_1,\dots,k_N} \prod_{n=1}^{N} \lambda_{k_n}' \prod_{m<n}^{N} R_{k_m k_n}(\theta_m - \theta_n), \\ R_{kl}(\theta) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l} R\left(\theta + \frac{i\pi}{L}(k-l-2i+2j)\right). \end{gathered} \tag{2.27}$$

Функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)_{k_1\dots k_N}$ — это рациональные функции по переменным x_n и симметричные функции при перестановках пар (k_n, x_n). Мы полагаем, что форм факторы операторов потомков обладают похожей структурой с некоторыми другими J функциями.

Функции $J_{N,a}$ обладают следующим свойством

$$J_{N,a}(x_1^{-1}, \dots, x_N^{-1}) = J_{N,w_* a}(x_1, \dots, x_N) \tag{2.28}$$

где элемент w_* был определен в (2.15). Действительно, при подстановке $x_n \to x_n^{-1}$ для всех n, функции $F(\theta_m-\theta_n+i\pi/L)$ and $F(\theta_m-\theta_n-i\pi/L)$ просто меняются местами. Это эквивалентно подстановке $\Lambda_s(\theta)\to\Lambda_{L+1-s}(\theta)$. Для того, чтобы адаптировать множитель $\omega^{\langle a,H_{s_1\dots s_{k_i}}\rangle}$ для этого случая, мы можем использовать тождество $\langle a,H_s\rangle=\langle a,w_*H_{L+1-s}\rangle=\langle w_*a,H_{L+1-s}\rangle$. Конечно, в силу отражательных соотношений (2.18), которые будут доказаны в дальнейшем, элемент w_* может быть исключен из правой части этого соотношения, однако такой вид (2.28) будет удобен для обобщения отражательных соотношений на случай операторов потомков.

2.3 Форм факторы операторов потомков

Мы утверждаем, что форм факторы операторов потомков имеют свободно-полевое представление, которое очень похоже на Лукьяновское. Основной идеей в построении свободно-полевого представления является модификация Лукьяновских операторов (2.24). Рассмотрим коммутативную алгебру $\mathcal{A}=\oplus_{l=0}^{\infty}\mathcal{A}_l$, генераторами которой являются элементы $\langle\alpha_i c_{-n}\rangle$ с целыми положительными числами n. Мы будем работать с символами c_{-n} как с векторами из алгебры $\mathfrak{h}$. Каждое подпространство уровня l натянуто на вектора $\prod c_{-n_i}$, так что $\sum n_i=l$. В дальнейшем нам понадобится еще одна копия $\bar{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$, которая порождается компонентами вектора $\bar{c}_{-n}$. Канонический гомоморфизм между этими алгебрами определяется с помощью следующего соотношения: для любого элемента $h\in\mathcal{A}$ определим $\bar{h}\in\bar{\mathcal{A}}$ по следующему правилу $c_{-n}\to\bar{c}_{-n}$.

Определим на алгебре $\mathcal{A}$ скобку

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty}(u_nc_{-n})^{\mu_n},\prod_{n=1}^{\infty}(v_nc_{-n})^{\nu_n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n!\,\langle u_n,v_n\rangle^{\mu_n}\delta_{\mu_n\nu_n},\qquad\forall u_n,v_n\in\mathfrak{h}^*,\tag{2.29}$$

и рассмотрим следующие токи

$$a_s(z)=\exp\left(H_s\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\omega^{-\frac{L+1-2s}{2}n}z^n\right).\tag{2.30}$$

Пусть

$$a_{s_1\dots s_k}(z)=\prod_{j=1}^{k}a_{s_j}\left(\omega^{\frac{n+1-2s_j}{2}}z\right),\qquad 1\le s_1<\dots<s_k\le L.\tag{2.31}$$

и

$$b_{s_1\dots s_k}(z)=a_{L+1-s_k,\dots,L+1-s_1}(z).\tag{2.32}$$

Используя эти токи мы модифицируем Лукьяновские генераторы следующим образом

$$\mathcal{T}_k(\theta) = \lambda'_k \sum_{1\leq s_1<\cdots<s_k\leq L} \omega^{\langle \hat{a}, H_{s_1\ldots s_k}\rangle} \Lambda_{s_1\ldots s_k}(\theta) a_{s_1\ldots s_k}(e^{\theta})\bar{b}_{s_1\ldots s_k}(e^{-\theta}). \tag{2.33}$$

Для любого элемента $g \in \mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ рассмотрим функцию

$$f_a^g(\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k_1\ldots k_N} = (\langle\langle \mathcal{T}_{k_N}(\theta_N)\ldots\mathcal{T}_{k_1}(\theta_1)\rangle\rangle_a, g) \tag{2.34}$$

Легко проверить, что эта функция представляет собой решение системы форм факторных аксиом. Действительно, теорема Ватсона и условие кроссинг-симметрии выполняются очевидным образом, в то время как проверка условия кинематического и динамического полюсов прямолинейна. Следовательно, эта функция определяет форм фактор оператора из Фоковского пространства $(\mathcal{F}\otimes\bar{\mathcal{F}})V_a(x)$. Оператор потомок, который соответствует этой функции, будет обозначаться как $V_a^g(x)$, то есть

$$\langle vac|V_a^g(x)|k_1\theta_1,\ldots,k_N\theta_N\rangle = G_a f_a^g(\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k_1\ldots k_N}. \tag{2.35}$$

Набор всех функций $f_a^g(\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k_1\ldots k_N}$ с $N=0,1,2,\ldots$ будет обозначаться как f_a^g. Для явного вычисления форм факторов нам понадобится следующее тождество

$$\left(a_{s_1}(x_1)\ldots a_{s_N}(x_N), \prod_{n=1}^{\infty}(u_n c_{-n})^{\mu_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{N}\langle u_n, H_{s_j}\rangle\, \omega^{-\frac{L+1-2s_j}{2}n} x_j^n\right)^{\mu_n}. \tag{2.36}$$

Правила (2.19) – (2.21) и (2.36) достаточны, для явного вычисления форм факторов, определенных в (2.34). Из этих правил следует, что форм факторы могут быть представлены в следующем виде

$$f_a^g(\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k_1\ldots k_N} = J_{N,a}^g(e^{\theta_1},\ldots,e^{\theta_N})_{k_1,\ldots,k_N}\prod_{i=1}^{N}\lambda'_{k_i}\prod_{i<j}^{N}R_{k_ik_j}(\theta_i-\theta_j), \tag{2.37}$$

причем функции $J_{N,a}^g(x_1,\ldots,x_N)_{k_1\ldots k_N}$ являются рациональными функциями переменных $x_1,\ldots,x_N$ и симметричными функциями при перестановке пар (k_i,x_i). Очевидно, что $J_{N,a}^1 = J_{N,a}$. Хотя мы можем выписать этот набор функций явно, их явный вид довольно громоздкий и не слишком полезный. В дальнейшем мы получим свободно полевое представление, которое позволит изучать эти функции более эффективно.

Подведем некоторые итоги. В формализме свободно полевого представления мы представили набор решений форм факторных аксиом. Мы хотим показать, что этот набор может быть биективно отображен на пространство операторов потомков в Лагранжевом формализме. Другими словами, мы хотим доказать, то для любого оператора потомка в Лагранжевом формализме существует решение форм факторных аксиом, которое дается линейной комбинацией функций f_a^g.

Довольно сложной задачей является установка соответствия между состояниями из пространства $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ и состояниями из $\mathcal{F}\otimes\bar{\mathcal{F}}$. Для отождествления локального оператора с соответствующим ему форм фактором необходимы некоторые ограничения. Для экспоненциальных операторов эти ограничения известны. Достаточно потребовать правильное асимптотическое поведение форм факторов при больших значения быстрот и, кроме того, форм факторы должны обладать свойством кластерной факторизации. Однако, дополнительные условия необходимы для форм факторов операторов потомков. Эта задача остается нерешенной. Тем не менее, мы рассмотрим аналитические свойства предложенного набора функций.

Отметим, что определение (2.32) было выбрано таким образом, что получившиеся функции $J^g_{N,a}$ удовлетворяют соотношениям, очень похожим на (2.28) для функций $J_{N,a}$, а именно

$$J^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1^{-1},\dots,x_N^{-1}) = J^{h'\bar{h}}_{N,w_*a}(x_1,\dots,x_N) \tag{2.38}$$

для элементов $h,h'\in\mathcal{A}$. Хотя это свойство не является важным само по себе, оно будет полезно при получении соответствующих выражений для антикирального сектора из выражений для кирального.

Форм факторы f_a^g так же обладают двумя свойством периодичности. Пусть $A = \sum_{i=1}^{L-1} i\alpha_i$. Тогда

$$f^g_{a+A}(\theta_1,\dots,\theta_N)_{k_1\dots k_N} = \omega^{k_1+\dots+k_N} f^g_a(\theta_1,\dots,\theta_N)_{k_1\dots k_N}, \tag{2.39}$$

$$f^g_{a+L\alpha_0}(\theta_1,\dots,\theta_N)_{k_1\dots k_N} = f^g_a(\theta_1,\dots,\theta_N)_{k_1\dots k_N}. \tag{2.40}$$

Смысл этих свойств может быть прояснен в случае $g=1$. Рассмотрим преобразования группы Вейля $w_\pm$ такие что

$$w_+ = w_-^{-1} = w_1 w_2\cdots w_{L-1}. \tag{2.41}$$

Эти преобразования действуют на аффинных корнях алгебры α_i, $i=0,1,\dots,L-1$ как циклические перестановки, т.е. $w_\pm\alpha_i = \alpha_{i\pm1}$. Циклические перестановки являются симметричными преобразованиями действия (2.1), $S[w_+\varphi] = S[\varphi]$. Поэтому, под действием

w_+ форм факторы должны быть инвариантны

$$w_+(\langle 0|V_a(0)|k_1\theta_1\dots k_N\theta_N\rangle) = \langle 0|V_a(0)|k_1\theta_1\dots k_N\theta_N\rangle.$$

Бризерные состояния преобразуются следующим образом[2]

$$w_\pm(|k_1\theta_1\dots k_N\theta_N\rangle) = \omega^{\pm(k_1+\dots+k_N)}|k_1\theta_1\dots k_N\theta_N\rangle.$$

Это соотношение может быть получено, например, из квазиклассического предела в окрестности минимума потенциала $U(\varphi)=\frac{\mu}{2}\sum_{i=0}^{L-1}e^{b\alpha_i\varphi}$.

Легко проверить, что

$$w_+\rho = \rho + A + L\alpha_0, \qquad w_-\rho = \rho - A.$$

Поэтому,

$$w_+(V_a(x)) = e^{Q(a+\rho)(w_+\varphi(x))} = e^{Q(w_-(a+\rho))\varphi(x)} = e^{Q(w_-a-A+\rho)\varphi(x)} = V_{w_-a-A}(x).$$

Мы имеем

$$\omega^{k_1+\dots+k_N}\langle 0|V_{w_-a-A}(0)|k_1\theta_1\dots k_N\theta_N\rangle = \langle 0|V_a(0)|k_1\theta_1\dots k_N\theta_N\rangle.$$

Совместно с отражательным соотношением (2.18) для экспоненциальных операторов данные соотношения совместны с (2.39) и (2.40). Поэтому, свойства периодичности отражают, в некотором смысле, циклическую симметрию диаграммы Дынкина для группы $A_{L-1}^{(1)}$.

2.3.1 Интегралы движения

Рассмотрим следующий элемент алгебры

$$\iota_n = \sum_{i=1}^{L-1}\omega^{\frac{L-i}{2}n}[in](\alpha_i c_{-n}), \qquad \iota_{-n} = \overline{\iota_n}, \qquad n\in\mathbb{Z}_{>0}\setminus L\mathbb{Z}_{>0}. \tag{2.42}$$

Легко проверить, что, согласно (2.36), элемент ι_n приводит к появлению общего множителя во всех членах (2.34), связанных с выражением (2.33). В результате, мы получаем

$$f_a^{\iota_n g}(\theta_1,\dots,\theta_N)_{k_1\dots k_N} = \left(\sum_{m=1}^{N}\frac{[k_m n]}{[n]}e^{n\theta_m}\right) f_a^g(\theta_1,\dots,\theta_N)_{k_1\dots k_N}, \qquad n\in\mathbb{Z}\setminus L\mathbb{Z}. \tag{2.43}$$

[2] В действительности, в экспонентах от ω может быть выбран произвольно. Переопределение знака просто переопределяет $k_i\to L-k_i$.

для любого элемента $g \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$. Множитель в скобках этого выражения является собственным значением соответствующим образом нормированного интеграла движения I_n спина n. Это означает, что

$$V_a^{\iota_n g}(x) = [V_a^g(x), I_n]. \tag{2.44}$$

Эти результаты соответствуют результатам работ [36, 37]. Отметим так же, что набор интегралов движения I_n является естественной деформацией набора интегралов движения в безмассовом (конформном) пределе, а коммутаторы (2.44) добавляют значение n к спинам операторов и значение $|n|$ к киральным (антикиральным) уровням оператора потомка для $n > 0$ ($n < 0$). Это означает, что если мы могли бы установить соответствие между некоторым оператором V_a^g с некоторым оператором потомком в лагранжевом формализме, мы бы получили большое подпространство $\mathcal{F}_a \otimes \bar{\mathcal{F}}$, которое состояло бы из операторов, получаемых из V_a^g с помощью действия интегралов движения.

2.3.2 Свойство кластерной факторизации и асимптотическое поведение

Пусть $h, h' \in \mathcal{A}$. Рассмотрим асимптотическое поведение функции

$$f_a^{h\bar{h}'}(\theta_1, \ldots, \theta_M, \theta_{M+1} + \Lambda, \ldots, \theta_N + \Lambda)_{k_1 \ldots k_M k_{M+1} \ldots k_N}. \tag{2.45}$$

при $\Lambda \to \infty$. Легко проверить, что в этом пределе $F(\theta \pm \Lambda), R(\theta \pm \Lambda) \to 1$. Введем обозначение $\underline{s}_i = (s_i^{(1)}, \ldots, s_i^{(k_i)})$ для набора целых чисел $1 \le s_i^{(1)} < \cdots < s_i^{(k_i)} \le L$. Из выражения (2.36) мы немедленно получаем, что

$$\begin{gathered}(a_{\underline{s}_1}(x_1) \ldots a_{\underline{s}_M}(x_M) a_{\underline{s}_{M+1}}(x_{M+1}e^{\Lambda}) \ldots a_{\underline{s}_N}(x_N e^{\Lambda}), h) = (a_{\underline{s}_{M+1}}(x_{M+1}e^{\Lambda}) \ldots a_{\underline{s}_N}(x_N e^{\Lambda}), h), \\ (a_{\underline{s}_1}(x_1) \ldots a_{\underline{s}_M}(x_M) a_{\underline{s}_{M+1}}(x_{M+1}e^{-\Lambda}) \ldots a_{\underline{s}_N}(x_N e^{-\Lambda}), h) = (a_{\underline{s}_1}(x_1) \ldots a_{\underline{s}_M}(x_M), h)\end{gathered}$$

для любого элемента $h \in \mathcal{A}$. В результате, мы получаем следующее *свойство кластерной факторизации* [38]

$$\begin{aligned}&f_a^{h\bar{h}'}(\theta_1, \ldots, \theta_M, \theta_{M+1} + \Lambda, \ldots, \theta_N + \Lambda)_{k_1 \ldots k_M k_{M+1} \ldots k_N} \\ &\qquad = f_a^{h}(\theta_{M+1} + \Lambda, \ldots, \theta_N + \Lambda)_{k_{M+1} \ldots k_N} f_a^{\bar{h}'}(\theta_1, \ldots, \theta_M)_{k_1 \ldots k_M} \text{ as } \Lambda \to +\infty.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Это свойство означает, что всегда возможно выделить киральные части операторов потомков при помощи этой асимптотики. Из свойства факторизации, совместно с (2.38) мы немедленно получаем, что, если отражательное свойство выполняется для форм факторов локальных операторов, то оно должно иметь факторизованный вид (2.17). Другими словами, если возможно определить действие $R_a(w)$ на алгебре $\mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$, такое что $V_a^{R_a(w)h\bar{h}'}(x) = V_a^{h\bar{h}'}(x)$, то мы с необходимостью получаем

$$V_a^{h\bar{h}'}(x) = V_a^{(r_a(w)h)(\overline{r_{w*a}(\widetilde{w})h'})}(x), \tag{2.47}$$

где $r_a(w)$ – это ограничение $R_a(w)$ на $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$. Возможность определения такого действия будет доказана позднее в разделе 2.5.

Другое следствие свойства кластерной факторизации для форм факторов относится к задаче о построении соответствия между пространством решений форм факторных аксиом и пространством операторов потомков в Лагранжевом формализме. Для любого элемента $h \in \mathcal{A}_n$ и $h' \in \mathcal{A}_{\bar{n}}$ определим оператор $V_a^{h\bar{h}'}(x) = M_1^{n+\bar{n}} V_a^{h\bar{h}'}(x)$. Операторы V_a^h и $V_a^{\bar{h}'}$ являются операторами потомками на уровнях $(n, 0)$ и $(0, \bar{n})$ соответственно. Более того, они должны являться линейной комбинацией векторов вида (2.6) с μ-независимыми коэффициентами. Поэтому, форм факторы этих операторов пропорциональны $G_a M_1^n \propto M_1^{Q^2\langle\rho+a,\rho+a\rangle+n}$ и $G_a M_1^{\bar{n}} \propto M_1^{Q^2\langle\rho+a,\rho+a\rangle+\bar{n}}$. Из выражений (2.46) и (2.35) следует, что лидирующий член в операторе $V_a^{h\bar{h}'}$ пропорционален $G_a M_1^{n+\bar{n}} \propto M_1^{Q^2\langle\rho+a,\rho+a\rangle+n+\bar{n}}$. Это, в свою очередь, означает, что оператор $V_a^{h\bar{h}'}$ является суммой некоторого оператора потомка уровня $(n, \bar{n})$ и других операторов с меньшими размерностями.

2.3.3 Подсчет операторов потомков

Мы хотим доказать, что для общих значений параметра a, операторы V_a^g с различными значениями g различаются. Мы сперва докажем это предположение для некоторой асимптотики по параметру a. Далее, мы применим деформационный аргумент.

Пусть

$$a(\tau) = \frac{L\tau}{2\pi i}\rho, \qquad a(\tau)H_s = \frac{L\tau}{2\pi i}\left(\frac{L+1}{2} - s\right).$$

Рассмотрим предел $\tau \to +\infty$. Очевидно, что в этом пределе

$$\frac{2\pi i}{L\tau}a(\tau)H_{12\ldots k} = \frac{k(N-k)}{2}, \qquad \frac{2\pi i}{L\tau}a(\tau)H_{s_1 s_2 \ldots s_k} < \frac{k(N-k)}{2} \quad \text{for } s_k > k. \tag{2.48}$$

Поэтому

$$e^{-\tau\frac{k(L-k)}{2}} T_k(z)|_{\hat{a}=a(\tau)} = \Lambda_{12\ldots k}(z) + O(e^{-\tau}) \quad \text{as } \tau \to +\infty. \tag{2.49}$$

Поэтому, функции $J^g_{N,a}$ имеют следующую асимптотику

$$e^{-\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^N k_i(L-k_i)} J^g_{N,a}(x_1,\ldots,x_N)_{k_1\ldots k_N}\Big|_{\tau\to\infty} = P^g(X_1|\ldots|X_{L-1}), \qquad X_k = \{x_i|k_i=k\}. \tag{2.50}$$

Функции P^g являются полиномами, определяемыми следующими соотношениями

$$P^{g_1g_2} = P^{g_1}P^{g_2}, \qquad P^{C_1g_1+C_2g_2} = C_1P^{g_1} + C_2P^{g_2} \qquad (\forall g_1, g_2 \in \mathcal{A},\ C_1, C_2 \in \mathbb{C}). \tag{2.51a}$$

$$P^{\alpha_i c_{-n}}(X_1|\ldots|X_{L-1}) = \omega^{i-\frac{1}{2}}S_n(X_i) + \sum_{k=i+1}^{L-1}\omega^{i-\frac{1}{2}}(1-\omega)S_n(X_k), \tag{2.51b}$$

$$P^{\alpha_{L-i}\bar{c}_{-n}}(X_1|\ldots|X_{L-1}) = -\omega^{-i-\frac{1}{2}}S_{-n}(X_i) + \sum_{k=i+1}^{L-1}\omega^{k-i-\frac{1}{2}}(1-\omega)S_{-n}(X_k), \tag{2.51c}$$

Здесь мы ввели следующее обозначения для степенных сумм степени m

$$S_n(x_1,\ldots,x_N) = \sum_{i=1}^N x_i^n.$$

Произведения полиномов S_n для $n>0$ заданной степени образуют базис симметрических полиномов соответствующей степени для достаточно большого числа переменных.

Для начала, рассмотрим случай $g\in\mathcal{A}$. Так как мы интересуемся полным набором форм факторов, а не форм факторами с заданным числом частиц, мы можем рассматривать функции $z_{in} = S_n(X_i)$, $i=1,\ldots,L-1$ как независимые переменные. Заметим, что уравнение (2.51b) определяет отображение из алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру полиномов от переменных z_{in}. Это отображение является обратимым. Действительно, уравнение (2.51b) позволяет выразить любой моном z_{in} посредством полинома $P^{\alpha_i c_{-n}}$ и мономов z_{jn}, $j>i$. Применяя это уравнение рекуррентно, мы можем выразить любой моном z_{in} посредством линейной комбинации полиномов $P^{\alpha_j c_{-n}}$ с $j\geq i$. Поэтому, $z_{in} = P^{g_{in}}$, где $g_{in} = \sum_{j=i}^{L-1} A_j\alpha_j c_{-n}$ с некоторыми однозначно определенными коэффициентами A_j. Таким образом, данная конструкция определяет отображение из алгебры полиномов от переменных z_{in} в алгебру $\mathcal{A}$.

Следовательно, данное рассуждение доказывает, что различные элементы $g_1\neq g_2\in\mathcal{A}$ будут генерировать различные полиномы $P^{g_1}\neq P^{g_2}$ от переменных z_{kn}. В силу того, что форм факторы являются аналитическими функциями переменной a, эти элементы будут генерировать различные наборы форм факторов $f^{g_1}_a \neq f^{g_2}_a$.

Теперь предположим, что $g=\sum h_i\bar{h}'_i$, где $\{h_i\},\{h'_i\}\subset\mathcal{A}_l$ – это наборы линейно независимых элементов. Предположим, что $f^g_a=0$. Тогда, в силу свойства кластерной факторизации мы получаем

$$\sum f_a^{h_i}(\theta_1,\ldots,\theta_M)f_a^{\bar{h}'_i}(\theta'_1,\ldots,\theta'_N)=0.$$

Это противоречит тому, что форм факторы f^{h_i} являются линейно независимыми для общих значений a. Таким образом, мы доказали следующую теорему

Теорема 3. *Для общих значений параметра a линейное отображение $g\mapsto f_a^g$ из $\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ в пространство наборов функций является инъекцией, т.е. это обратимое отображение на свой образ.*

Немедленным следствием данной теоремы является следующее предложение

Предложение 5. *Для общих значений параметра a размерность пространства операторов V_a^g с $g\in\mathcal{A}_l\otimes\bar{\mathcal{A}}_{\bar{l}}$ совпадает с размерностью пространства Фока* $\dim(\mathcal{F}_l\otimes\mathcal{F}_{\bar{l}})=\dim\mathcal{F}_l\cdot\dim\mathcal{F}_{\bar{l}}$. *Размерности пространств операторов V_a^g с $g\in\mathcal{A}_l$ или $g\in\bar{\mathcal{A}}_l$ совпадают с размерностями соответствующих подпространств* $\dim\mathcal{F}_l$.

Для киральных (антикиральных) операторов Предложение 5 означает, что предположение, что киральные (антикиральные) операторы потомки – это операторы $V_a^g(x)$ с $g\in\mathcal{A}$ ($g\in\bar{\mathcal{A}}$), согласовано с подсчетом операторов в Лагранжевом формализме (2.6), (2.7).

2.4 Альтернативная процедура бозонизации

Для доказательства отражательных свойств для форм факторов операторов потомков нам понадобится свободно полевое представление для функций $J_{N,a}^g$, которые получаются из функций f_a^g с помощью отбрасывания множителя, состоящего из произведения минимальных форм факторов R. Данное свободно полевое представление в дальнейшем будет называться альтернативной бозонизацией. Это представление отличается от представления, рассмотренного в [29, 30], тем, что, во-первых, алгебра Гейзенберга порождается счетным набором генераторов, а не непрерывным набором, и, во-вторых, функции $J_{N,a}^g$ для всех $g\in\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ выражаются с помощью матричных элементов а не следов. Цена, которую приходится заплатить за эти преимущества, заключается в том, что вычеты в кинематических полюсах являются новыми вертексными операторами, а не просто некоторыми комплексными числами. Как мы увидим ниже, данные вертексные операторы будут играть важную роль при доказательстве отражательных свойств форм факторов.

Рассмотри алгебру Гейзенберга, порождаемую генераторами $d_n^{(s)}$, $s=1,\ldots,L$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq0$, со следующими коммутационными соотношениями

$$[d_m^{(s)},d_n^{(s)}]=0,\qquad [d_m^{(s')},d_n^{(s)}]=m\delta_{m+n,0}A_n^{\mathrm{sign}(s'-s)}\quad (s'\neq s) \tag{2.52}$$

где

$$A_n^{\pm} = (\omega^{\mp pn} - \omega^{\mp n})(1 - \omega^{\pm pn}). \tag{2.53}$$

Отметим важные соотношения для этих коэффициентов, которые мы будем использовать ниже

$$A_n^- = A_{-n}^+ = \omega^n A_n^+. \tag{2.54}$$

Введем дополнительный центральный элемент $\hat{a}$ и определим вакуумы $|1\rangle_a$ и ${}_a\langle 1|$ с помощью соотношений

$$d_n^{(s)}|1\rangle_a = 0, \quad \hat{a}|1\rangle_a = a|1\rangle_a, \quad {}_a\langle 1|d_{-n}^{(s)} = 0, \quad {}_a\langle 1|\hat{a} = {}_a\langle 1|a, \quad {}_a\langle 1|1\rangle_a = 1 \quad (n > 0) \tag{2.55}$$

и пусть $:\cdots:$ – это соответствующая процедура нормального упорядочивания. Мы так же будем писать

$$\langle \cdots \rangle_a \equiv {}_a\langle 1| \cdots |1\rangle_a. \tag{2.56}$$

Фоковское пространство, порождаемое операторами $d_n^{(s)}$, $n > 0$, из вакуума ${}_a\langle 1|$ будет обозначаться как $\mathcal{D}_a^R$, в то время, как Фоковское пространство, порождаемое генераторами $d_{-n}^{(s)}$, $n > 0$, из вакуума $|1\rangle_a$ будет обозначаться как $\mathcal{D}_a^L$. Эти пространства допускают естественную градуировку $\mathcal{D}_a^R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_{a,n}^R$, $\mathcal{D}_a^L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_{a,n}^L$, так что $\mathcal{D}_{a,m}^R d_n^{(s)} \subseteq \mathcal{D}_{a,m+n}^R$, $d_n^{(s)} \mathcal{D}_{a,m}^L \subseteq \mathcal{D}_{a,m-n}^L$.

Рассмотрим следующие экспоненциальные операторы

$$\lambda_s(z) = \exp \sum_{n \neq 0} \frac{d_n^{(s)}}{n} z^{-n}. \tag{2.57}$$

Отметим, что экспоненты в правой части этого выражения не нуждается в нормальном упорядочивании в силу того, что все элементы $d_n^{(s)}$ с данным s коммутируют друг с другом. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} &\lambda_s(z')\lambda_s(z) =: \lambda_s(z')\lambda_s(z) :, \\ &\lambda_{s'}(z')\lambda_s(z) = \lambda_s(z)\lambda_{s'}(z') = f\left(\frac{z}{z'}\right) : \lambda_{s'}(z')\lambda_s(z) :, \qquad s' > s, \quad \frac{z}{z'} \neq 1, \omega. \end{aligned} \tag{2.58}$$

В этих выражения мы вели следующую функцию

$$f(z) = F\left(\log z - \frac{i\pi}{L}\right) = \frac{(z - \omega^p)(z - \omega^{1-p})}{(z-1)(z-\omega)}, \qquad f(z) = f(\omega/z). \tag{2.59}$$

Пусть

$$\lambda_{s_1\dots s_k}(z) =: \prod_{m=1}^{k} \lambda_{s_m}\left(z\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}\right):, \qquad 1 \le s_1 < \dots < s_k \le L. \tag{2.60}$$

Отметим, что экспоненциальный оператор $\lambda_{12\dots L}(z)$ не равен единице и будет играть важную роль в дальнейшей конструкции. Его важным свойством является следующее соотношение

$$\lambda_{12\dots L}(z)\lambda_s(x) = \prod_{m=1}^{L-1} f\left(\frac{z}{x}\omega^{\frac{L+1-2m}{2}}\right) : \lambda_{12\dots L}(z)\lambda_s(x) : . \tag{2.61}$$

Необходимо подчеркнуть, что коэффициент в правой части этого выражения не зависит от s.

Теперь мы можем ввести альтернативные токи W алгебры, а именно

$$t_k(z) = \sum_{1\le s_1<\dots<s_k\le L} \omega^{\langle a, H_{s_1\dots s_k}\rangle}\lambda_{s_1\dots s_k}(z). \tag{2.62}$$

Очевидно, что

$$J_{N,a}(x_1,\dots,x_N)_{k_1\dots k_N} = \langle t_{k_N}(x_N)\dots t_{k_1}(x_1)\rangle_a. \tag{2.63}$$

Для того, чтобы получить функции $J^g_{N,a}$ для произвольного элемента g нам потребуется рассмотреть некоторую дополнительную конструкцию. Именно, рассмотрим два представления алгебры $\mathcal{A}$ в алгебре Гейзенберга, π_R и π_L, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi_R(\alpha_i c_{-n}) &= R_n^{(i)} = \frac{\omega^{-\frac{L+1-2i}{2}n}}{A_n^+}(d_n^{(i)} - d_n^{(i+1)}), \\ \pi_L(\alpha_i c_{-n}) &= L_n^{(i)} = \frac{\omega^{-\frac{L+1-2i}{2}n}}{A_n^+}(d_{-n}^{(L-i)} - d_{-n}^{(L+1-i)}). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Легко проверить, что эти оператор удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[\pi_R(\alpha_i c_{-n}), \lambda_s(z)] = \langle \alpha_i, H_s\rangle \omega^{-\frac{L+1-2s}{2}n} z^n \lambda_s(z), \tag{2.65a}$$

$$[\lambda_s(z), \pi_L(\alpha_i c_{-n})] = \langle \alpha_i, H_{L+1-s}\rangle \omega^{\frac{L+1-2s}{2}n} z^{-n} \lambda_s(z), \tag{2.65b}$$

$$[\pi_R(\alpha_i c_{-m}), \pi_L(\alpha_j c_{-n})] = m\delta_{mn}(A_m^+)^{-1}(\delta_{i+j,L-1} + \omega^m \delta_{i+j,L+1} - (1+\omega^m)\delta_{i+j,L}). \tag{2.65c}$$

Определим ‘физические’ вектора

$${}_a\langle h| = {}_a\langle 1|\pi_R(h), \qquad |h\rangle_a = \pi_L(h)|1\rangle_a. \tag{2.66}$$

Эти вектора мы называем ‘физическими’ в силу следующей причины. Рассмотрим функции

$$\tilde{J}^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1,\dots,x_N)_{k_1\dots k_N} = {}_a\langle h|t_{k_1}(x_1)\dots t_{k_N}(x_N)|h'\rangle_a. \tag{2.67}$$

Эти функции определяют форм факторы, которые мы будем обозначать как $\tilde{f}^{h\bar{h}'}_a$ в соответствие с теми же уравнениями (2.37). Легко видеть, что эти функции могут быть выражены посредством J функций. Действительно, мы можем пронести элемент $\pi_R(h)$, который входит в определение вектора ${}_a\langle h|$, направо, а элемент $\pi_L(h')$, который входит в определение вектора $|h\rangle_a$, налево. Вследствие коммутационных соотношений (2.65a) и (2.65b), мы получим те же функции, что появляются в правой части выражения (2.36). Единственная сложность заключается в том, что возникают некоторые дополнительные члены в соответствии с коммутационными соотношениями (2.65c).

Точное соотношение между функциями $\tilde{J}$ и J можно установить следующим образом. Введем два отображения

$$\pi_{LR}(h\bar{h}') = \pi_L(h')\pi_R(h), \qquad \pi_{RL}(h\bar{h}') = \pi_R(h)\pi_L(h'). \tag{2.68}$$

Эти отображения являются биекциями $\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ в подалгебру универсальных образующих алгебры Гейзенберга, порождаемую элементами $\pi_L(c_{-n})$ и $\pi_R(c_{-n})$, $n>0$. Тогда

$$\tilde{J}^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1,\dots,x_N)_{k_1,\dots,k_N} = J^{\pi^{-1}_{LR}\circ\pi_{RL}(h\bar{h}')}_{N,a}(x_1,\dots,x_N)_{k_1,\dots,k_N}. \tag{2.69}$$

Более явно данная конструкция может быть представлена следующим образом. Возьмем произведение $\pi_R(h)\pi_L(h')$ и пронесем эти два множителя друг через друга. Мы получим комбинации следующего вида

$$\pi_R(h)\pi_L(h') = \sum_i \pi_L(h'_i)\pi_R(h_i).$$

Тогда

$$\tilde{J}^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1,\dots,x_N)_{k_1,\dots,k_N} = \sum_i J^{h_i\bar{h}'_i}_{N,a}(x_1,\dots,x_N)_{k_1,\dots,k_N}.$$

Наиболее важной особенностью данного выражения является то, что функция $\tilde{J}^{h\bar{h}'}$ с $h\in\mathcal{A}_l$, $h'\in\mathcal{A}_{\bar{l}}$ выражается посредством функций $J^{h_i\bar{h}'_i}$ с $h_i\in\mathcal{A}_{l_i}$, $h'_i\in\mathcal{A}_{\bar{l}_i}$, таких что $l_i\le l$, $\bar{l}_i\le\bar{l}$ и наоборот. Это означает, в частности, что свойство кластерной факторизации (2.46) выполняется так же и для форм факторов, соответствующих функциям $\tilde{J}$.

Физические вектора образуют 'физические' подпространства в пространствах $\mathcal{D}^R_a$ и $\mathcal{D}^L_a$, а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_{a,n} &= \Big\{ {}_a\langle h| \Big| h \in \rfloor A_n \Big\}, \qquad \mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_{a} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_{a,n}, \\ \mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}_{a,n} &= \Big\{ |h\rangle_a \Big| h \in \mathcal{A}_n \Big\}, \qquad \mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}_{a} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}_{a,n}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Полезно будет ввести определение 'физических' подпространств $\mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}$, $\mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}$ как ядер некоторых операторов. Действительно, рассмотрим набор операторов D_n ($n \neq 0$), такой что

$$[D_n, \pi_R(h)] = [D_n, \pi_L(h)] = 0. \tag{2.71}$$

Эти операторы могут быть представлены следующим образом

$$D_n = \sum_{s=1}^{L} \omega^{-\frac{L+1-2s}{2}n} d_n^{(s)}. \tag{2.72}$$

Легко проверить, что они коммутируют друг с другом, то есть

$$[D_m, D_n] = 0. \tag{2.73}$$

Отметим, что

$$\lambda_{1\ldots L}(z) = \exp \sum_{n\neq 0} \frac{D_n z^{-n}}{n}. \tag{2.74}$$

Пусть ${}_a\langle U|$, $|V\rangle_a$ — это некоторые состояния из Фоковских модулей над ${}_a\langle 1|$ и $|1\rangle_a$. Можно показать, что

$$\begin{aligned} {}_a\langle U|D_{-n} = 0 \quad \forall n > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists h \in \mathcal{A}: \quad {}_a\langle U| = {}_a\langle 1|\pi_R(h), \\ D_n|V\rangle_a = 0 \quad \forall n > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists h \in \mathcal{A}: \quad |V\rangle_a = \pi_L(h)|1\rangle_a. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Поэтому, 'физические' подпространства также можно определить как

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_{a,n} &= \Big\{ {}_a\langle v| \in \mathcal{D}^R_a \;\Big|\; {}_a\langle v|D_{-m} = 0 \; \forall m > 0 \Big\}, \\ \mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}_{a,n} &= \Big\{ |v\rangle_a \in \mathcal{D}^L_a \;\Big|\; D_m|v\rangle_a = 0 \; \forall m > 0 \Big\}, \end{aligned} \tag{2.76}$$

2.4.1 Рекуррентные соотношения и отражательные свойства для форм факторов экспоненциальных операторов

Первым шагом в доказательстве отражательных свойств будет являться доказательство этих свойств для форм факторов экспоненциальных операторов. Так как выражения (2.26) и (2.63) не являются явным образом инвариантными относительно действия группы Вейля, нам понадобится другое представление для $J_{N,a}$ функций. Оказывается, что такое Вейль инвариантное представление может быть найдено в виде рекуррентных соотношений между форм факторами с различным числом частиц, причем начальные условия для этих соотношений окажутся явным образом инвариантными. Мы будем использовать следующие обозначения $I = (1, \dots, N)$, $X = (x_1, \dots, x_N)$. Кроме того, $\hat{I}_n = I \setminus \{n\}$, $\hat{X}_n = X \setminus \{x_n\}$.

В дальнейшем будет показано, что любая функция $J_{N,a}(\dots)_{k_1 \dots k_N}$ может быть выражена с помощью функций $J_{\sum k_i,a}(\dots)_{1\dots 1}$. Поэтому, достаточно получить рекуррентные соотношения для любого подмножества J функций, которое содержит функции с $k_1 = \dots = k_N = 1$. Мы выбираем такое подмножество, которое содержит функции с произвольным k_1 и фиксированными $k_2 = \dots = k_N = 1$. Именно, рассмотрим функцию

$$J_{k,N+1,a}(z;X) = \prod_{n=1}^{N} \prod_{m=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x_i}\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}\right) \langle t_k(z) t_1(x_1) \dots t_1(x_N) \rangle_a, \tag{2.77}$$

которые будут рассматриваться как аналитические функции, зависящие от переменной z, в то время, как остальные переменные X будут рассматриваться как параметры.

Общий множитель в этом выражении введен для сокращения лишних полюсов. Действительно, рассмотрим произведение двух экспоненциальных операторов $t_k(z)t_1(x)$. Это произведение имеет четыре простых полюса, расположенных в точках

$$z = x\omega^{\pm\frac{k+1}{2}}, x\omega^{\pm\frac{k-1}{2}}, \tag{2.78}$$

$(k-2)$ двойных полюса, расположенных в точках

$$z = x\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}, \quad m = 2, \dots, k-1, \tag{2.79}$$

и, наконец, $2(k-1)$ простых нулей в точках

$$z = x\omega^{\pm\left(p - \frac{k+1-2m}{2}\right)} \quad m = 1, \dots, k-1. \tag{2.80}$$

Другие простые полюса не имеют строго определенного местоположения и зависят от матричного элемента. Произведение

$$\prod_{m=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x}\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}\right) = \prod_{m=1}^{k-1} \frac{(z - x\omega^{\frac{k+1-2m}{2}})(z - x\omega^{-\frac{k+1-2m}{2}})}{(z - x\omega^{p-\frac{k+1-2m}{2}})(z - x\omega^{-p+\frac{k+1-2m}{2}})}$$

сокращает все фиксированные нули и все полюса, кроме тех, которые расположены в точках $z = x\omega^{\pm(k+1)/2}$. Поэтому, все полюса произведения

$$\prod_{m=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x}\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}\right) t_k(z) t_1(x)$$

расположены в точках $z = x\omega^{\pm(k+1)/2}$, а вычеты в этих полюсах пропорциональны $t_{k+1}(x)$:

$$\operatorname*{Res}_{z=x\omega^{\pm\frac{k+1}{2}}} \prod_{m=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x}\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}\right) t_k(z) t_1(x) = \pm x\omega^{\pm\frac{k+1}{2}} \kappa_p\, t_{k+1}(x\omega^{\pm\frac{k}{2}}), \tag{2.81}$$

где мы ввели обозначение

$$\kappa_p = \frac{(\omega^{1-p}-1)(\omega^p-1)}{\omega-1} = \frac{2i\sin\frac{\pi p}{L}\sin\frac{\pi(1-p)}{L}}{\sin\frac{\pi}{L}}. \tag{2.82}$$

Это означает, что общий множитель в выражении (2.77) существенно сокращает количество полюсов рассматриваемой функции.

При $k = L-1$ оба полюса совпадают, так как $x\omega^{\pm L/2} = -x$. С физической точки зрения, этот полюс соответствует кинематическому, а не динамическому полюсу форм фактора. Вычет в этом полюсе имеет вид

$$\operatorname*{Res}_{z=-x} \prod_{m=1}^{L-2} f^{-1}\left(-\frac{z}{x}\omega^{-m}\right) t_{L-1}(z) t_1(x) = x\kappa_p\left(t_L(-x\omega^{1/2}) - t_L(-x\omega^{-1/2})\right). \tag{2.83}$$

Таким образом, общий множитель в выражении (2.77) существенно упрощает аналитическую структуру функции $J_{k,N+1,a}(z;X)$. Единственными полюсами этой функции являются динамические полюса, расположенные в точках $z = x_i\omega^{\pm(k+1)/2}$. Уравнение (2.81) позволяет вычислить вычеты в этих полюсах

$$\operatorname*{Res}_{z=x_n\omega^{\pm\frac{k+1}{2}}} J_{k,N+1,a}(z;X) = \pm x_n\omega^{\pm\frac{k+1}{2}} R^{\pm}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n\omega^{\pm\frac{k}{2}}; \hat{X}_n), \tag{2.84}$$

где

$$R^{\pm}_{N,n}(X) = \kappa_p \prod_{m\in\hat{I}_n} f\left(\left(\frac{x_m}{x_n}\right)^{\pm 1}\right). \tag{2.85}$$

Для особого случая, а именно, для $k = L-1$ мы имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=-x_n} J_{L-1,N+1,a}(z;X) = x_n\left(R^{-}_{N,n}(X) - R^{+}_{N,n}(X)\right) J_{1,N-1,a}(\hat{X}_n), \tag{2.86}$$

так как $J_{L,N,a}(x;\hat{X}_n) = J_{1,N-1,a}(\hat{X}_n)$ согласно (2.61). К счастью, нет необходимости рассматривать этот случай отдельно при выводе рекуррентных соотношений. Он будет учитываться явным образом благодаря циклическому свойству этого набора функций (2.98), обсуждаемому далее.

Можно выделить вклад полюсов и регулярную часть функции, а именно

$$\begin{aligned} J_{k,N+1,a}(z;X) = J^{(\infty)}_{k,N+1,a}(z;X) & \\ + \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^{+}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) & \\ - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^{-}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n), & \end{aligned} \tag{2.87}$$

где функция $J^{(\infty)}_{k,N+1,a}(z;X)$ является регулярной функцией, зависящей от переменной z, во всех точках комплексной плоскости, кроме точек $z = 0, \infty$. Отметим, что сумма по полюсам функции имеет порядок $O(z^{-1})$ при $z \to \infty$. Поэтому, асимптотическое поведение функции $J_{k,N+1,a}(z;X)$, как функции аргумента z, полностью определяется регулярной частью $J^{(\infty)}_{k,N+1,a}(z;X)$:

$$J_{k,N+1,a}(z;X) - J^{(\infty)}_{k,N+1,a}(z;X) = O(z^{-1}) \quad \text{as } z \to \infty. \tag{2.88}$$

Мы можем рассмотреть разложение той же функции, но около другой точки, а именно

$$\begin{aligned} J_{k,N+1,a}(z;X) = J^{(0)}_{k,N+1,a}(z;X) & \\ - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{-1}\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z^{-1} - x_n^{-1}\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^{+}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) & \\ + \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{-1}\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z^{-1} - x_n^{-1}\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^{-}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n), & \end{aligned} \tag{2.89}$$

где функция $J^{(0)}_{k,N+1,a}(z;X)$ является регулярной на всей комплексной плоскости, кроме точек $z = 0, \infty$. Очевидно, что поведение функции $J_{k,N+1,a}(z,X)$ вблизи точки $z = 0$ определяется функцией $J^{(0)}_{k,N+1,a}(z;X)$, а именно

$$J_{k,N+1,a}(z;X) - J^{(0)}_{k,N+1,a}(z;X) = O(z) \quad \text{as } z \to 0. \tag{2.90}$$

В дальнейшем, мы будем использовать следующие обозначения

$$D_{k,N,a}(X) = \sum_{n=1}^{N} R^{+}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n \omega^{\frac{k}{2}}; \hat{X}_n) - \sum_{n=1}^{N} R^{-}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n \omega^{-\frac{k}{2}}; \hat{X}_n). \tag{2.91}$$

Из определений (2.87) и (2.89) легко получить следующее соотношение

$$J^{(0)}_{k,N+1,a}(z;X) - J^{(\infty)}_{k,N+1,a}(z;X) = D_{N,a}(X). \tag{2.92}$$

Это соотношение показывает, что обе рассматриваемые функции почти одинаковы, за исключением нулевой моды по z. Это, в свою очередь, означает, что достаточно вычислить сингулярные части $J^{(0)}$ и $J^{(\infty)}$ вблизи точек $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно и, кроме того, нулевую моду любой из этих функций.

Все вышесказанное равным образом относится как к форм факторам экспоненциальных операторов, так и форм факторам операторов потомков. Теперь мы ограничим внимание только на случай экспоненциальных операторов. Для того, чтобы однозначно определить функции $J^{(\infty)}_{k,N+1,a}(z;X)$ и $J^{(0)}_{k,N+1,a}(z;X)$, необходимо вычислить асимптотики функции $J_{k,N+1,a}(z;X)$ при $z \to 0$ и $z \to \infty$. Так как $f(0) = f(\infty) = 1$, эти асимптотики конечны в рассматриваемых пределах и мы имеем

$$J^{(0)}_{k,N+1,a}(z;X) = J^{(\infty)}_{k,N+1,a}(z;X) = K_{k,a} J_{1,N,a}(X), \tag{2.93}$$

где

$$K_{k,a} = J_{k,1,a}(0) = J_{k,1,a}(\infty) = \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_n \le L} \omega^{\langle a, H_{s_1 \ldots s_n} \rangle}. \tag{2.94}$$

Тот факт, что $D_{k,N,a} = 0$ для экспоненциальных операторов, приводит к нетривиальным тождествам

$$\sum_{n=1}^{N} R^{+}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n \omega^{\frac{k}{2}}; \hat{X}_n) = \sum_{n=1}^{N} R^{-}_{N,n}(X) J_{k+1,N,a}(x_n \omega^{-\frac{k}{2}}; \hat{X}_n). \tag{2.95}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме

Теорема 4. *Рекуррентные соотношения*

$$
\begin{aligned}
J_{k,N+1,a}(z;X) = K_{k,a}J_{1,N,a}(X) \\
+ \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^{+}_{N,n}(X)J_{k+1,N,a}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) \\
- \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^{-}_{N,n}(X)J_{k+1,N,a}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n),
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

совместно с начальными условиями

$$J_{k,0,a} = 1, \qquad J_{k,1,a}(z) = K_{k,a} \tag{2.97}$$

и свойством цикличности

$$J_{L,N+1,a}(z;X) = J_{1,N,a}(X) \tag{2.98}$$

однозначным образом определяют набор функций $J_{k,N,a}$.

Функции $R^{\pm}_{N,n}(X)$ *определены в* (2.85) *а множитель* $K_{k,a}$ *определен в* (2.94).

Согласно уравнению (2.81) любая функция $J_{N,a}(X)_{k_1,\ldots,k_N}$ с произвольными k_i может быть получена из некоторой функции (2.77) с помощью взятия вычета в динамических полюсах. Поэтому, соотношения (2.96)–(2.98) представляют собой некоторую общую конструкцию, позволяющую вычислять форм факторы экспоненциальных операторов.

Отметим что функция $K_{k,a}$ является ничем иным, как характером фундаментального представления π_k

$$K_{k,a} = \mathrm{tr}_{\pi_k}\omega^{\langle a,H\rangle}. \tag{2.99}$$

Далее мы будем использовать явную формулу

$$K_{k,\lambda\alpha_i-\rho} = 4\omega^{ik}[k]\sin\frac{\pi\lambda}{L}\sin\frac{\pi(\lambda-1)}{L}. \tag{2.100}$$

Теперь мы перейдем к доказательству отражательных свойств для форм факторов экспоненциальных полей. Отражательное свойство (2.18) является немедленным следствием следующей теоремы

Теорема 5. *Функции* $J_{k,N,a}$ *являются симметричными функциями относительно преобразований группы Вейля* $\mathcal{W}$ *алгебры Ли* A_{L-1}*:*

$$J_{k,N,a}(z;X) = J_{k,N,wa}(z,X) \qquad \forall w \in \mathcal{W} \tag{2.101}$$

или, что эквивалентно

$$J_{N,a}(x_1,\ldots,x_N)_{k_1,\ldots,k_N} = J_{N,wa}(x_1,\ldots,x_N)_{k_1,\ldots,k_N} \qquad \forall w \in \mathcal{W}. \tag{2.102}$$

Докажем эту теорему. Отметим, что параметр a входит в рекуррентные соотношения (2.96) и (2.97) только посредством функции $K_{k,a}$. Поэтому, достаточно доказать, что эта функция обладает отражательным свойством. Так как группа Вейля порождается элементарными отражениями w_i, достаточно доказать отражательное свойство по отношению к действию элемента w_i, то есть

$$K_{k,a} = K_{k,w_ia}.$$

Легко проверить из определений, что

$$\langle w_i a, H_s\rangle = \begin{cases} \langle a, H_{s+1}\rangle, & \text{if } s=i, \\ \langle a, H_{s-1}\rangle, & \text{if } s=i+1, \\ \langle a, H_s\rangle & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.103}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle w_i a, H_{s_1\ldots s_m\ldots s_k}\rangle &= \langle a, H_{s_1\ldots,s_m+1,\ldots s_k}\rangle, && \text{if } s_m=i,\ s_{m+1}>i+1, \\ \langle w_i a, H_{s_1\ldots s_m\ldots s_k}\rangle &= \langle a, H_{s_1\ldots,s_m-1,\ldots s_k}\rangle, && \text{if } s_m=i+1,\ s_{m-1}<i, \\ \langle w_i a, H_{s_1\ldots s_k}\rangle &= \langle a, H_{s_1\ldots s_k}\rangle && \text{otherwise.} \end{aligned} \tag{2.104}$$

Поэтому, любое элементарное отражение действует как перестановка в наборе $\{\langle a, H_{s_1\ldots s_k}\rangle\}$ функции от переменной a. Так как сумма в (2.94) идет по всему набору, функция $K_{k,a}$ является инвариантной по отношению к действию элементарных Вейлевских отражений.

Как пример применения полученных рекуррентных соотношений (2.96)—(2.98) мы докажем, что уравнения движения выполняются для форм факторов.

2.4.2 Уравнения движения

В этом приложении мы докажем, что форм факторы удовлетворяют уравнениями движения

$$\alpha_i\partial\bar{\partial}\varphi = \pi\mu\frac{b}{2}(2e^{b\alpha_i\varphi} - e^{b\alpha_{i-1}\varphi} - e^{b\alpha_{i+1}\varphi}).$$

Производные от полей приводят к умножению их форм факторов на соответствующие компоненты импульса, согласно обычному правилу $P_\mu \leftrightarrow i\partial_\mu$. Введем обозначения

$$S_n^k(z;X) = \frac{\sin\frac{\pi k n}{L}}{\sin\frac{\pi n}{L}} z^n + S_n(X).$$

Пусть $z = e^\theta$, $x_n = e^{\theta_n}$. Тогда компоненты импульса даются следующим выражением

$$P_z(\theta,\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k,1,\ldots,1} = -\frac{m}{2} S_1^k(z;X)$$
$$P_{\bar z}(\theta,\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k,1,\ldots,1} = \frac{m}{2} S_{-1}^k(z;X).$$

Пусть

$$a = \sum_{i=1}^{L-1} a_i \alpha_i, \qquad \nu_i = p\alpha_i - \rho.$$

Тогда мы получаем

$$\langle vac|\alpha_i \partial\bar\partial\varphi|\theta,\theta_1,\ldots,\theta_N\rangle_{k,1,\ldots,1} = \frac{m^2}{4Q} S_1^k(z;X) S_{-1}^k(z;X)\ \frac{d}{da_i} f_a(\theta,\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k1\ldots1}\Big|_{a=-\rho}$$

и

$$\langle vac|e^{b\alpha_i\varphi}|\theta,\theta_1,\ldots,\theta_N\rangle_{k1\ldots1} = \omega^{\mp(k+N)}\langle vac|e^{b\alpha_{i\pm1}\varphi}|\theta,\theta_1,\ldots,\theta_N\rangle_{k1\ldots1} = G_{\nu_i} f_{\nu_i}(\theta,\theta_1,\ldots,\theta_N)_{k1\ldots1}.$$

Все значения G_{ν_i} очевидным образом равны. Пусть

$$J'_{k,N+1,i}(z;X) = \frac{d}{da_i} J_{k,N+1,a}(z;X)\Big|_{a=-\rho}.$$

Уравнение движение может быть переписано в следующем виде

$$S_1^k(z;X) S_{-1}^k(z;X) J'_{k,N+1,i}(z;X) = A \sin^2\frac{\pi(k+N)}{L} J_{k,N+1,\nu_i}(z;X), \tag{2.105}$$

где

$$A = \frac{8\pi\mu G_{\nu_i}}{(1-p)m^2}.$$

Согласно [41] мы имеем

$$A = \frac{\pi}{L\sin\frac{\pi}{L}\sin\frac{\pi p}{L}\sin\frac{\pi(1-p)}{L}}. \tag{2.106}$$

Легко проверить уравнения (2.105) с (2.106) для $N = 0$ напрямую, используя (2.97) и (2.100). Для $N > 0$ мы построим доказательство по индукции.

Более удобным будет использовать не индукцию по числу частиц N, а индукцию по переменной $k+N$. Предположим, что уравнение (2.105) справедливо для некоторого значения $M = k+N$ для произвольных $k = 1,\ldots,L-1$. Вычисляя производные от обеих частей рекуррентного соотношения (2.96) мы получаем

$$J'_{k,N+1,i}(z;X) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^+_{N,n}(X) J'_{k+1,N,i}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) \\ - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^-_{N,n}(X) J'_{k+1,N,i}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n).$$

Умножая это выражение на $S^k_1(z,X)S^k_{-1}(z,X)$ и используя тождество (2.95) мы получим

$$\begin{aligned} S^k_1(z,X)S^k_{-1}(z,X)J'_{k,N+1}(z;X) &= \sum_{n=1}^{N}[k]x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}\, R^+_{N,n}(X)S^{k+1}_{-1}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n)J'_{k+1,N}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) \\ &+ \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^+_{N,n}(X)S^{k+1}_{1}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n)S^{k+1}_{-1}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n)J'_{k+1,N}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) \\ &- \sum_{n=1}^{N}[k]x_n\omega^{-k+\frac{1}{2}}\, R^-_{N,n}(X)S^{k+1}_{-1}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n)J'_{k+1,N}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n) \\ &- \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^-_{N,n}(X)S^{k+1}_{1}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n)S^{k+1}_{-1}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n)J'_{k+1,N}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n). \end{aligned} \tag{2.107}$$

В силу гипотезы индукции, мы имеем

$$S^{k+1}_1(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n)S^{k+1}_{-1}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n)J'_{k+1,N,i}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n) = A\sin^2\frac{\pi(k+N)}{L}J_{k+1,N,\nu_i}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n).$$

Поэтому, сумма первого и третьего члена в правой части уравнения (2.107) равна

$$\begin{aligned} A\sin^2\frac{\pi(k+N)}{L}\Big(&\sum_{n=1}^{N}\frac{[k]x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}{S^{k+1}_1(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n)}\, R^+_{N,n}(X)J_{k+1,N,\nu_i}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) \\ &- \sum_{n=1}^{N}\frac{[k]x_n\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{S^{k+1}_1(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n)}\, R^-_{N,n}(X)J_{k+1,N,\nu_i}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n)\Big) \\ &= -A\sin^2\frac{\pi(k+N)}{L}\,(J_{k,N+1,\nu_i}(-[k]^{-1}S_1(X);X) - K_{k,\nu_i}J_{1,N,\nu_i}(X)), \end{aligned}$$

в то время как для двух оставшихся членов мы получаем

$$A\sin^2\frac{\pi(k+N)}{L}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z - x_n\omega^{k+\frac{1}{2}}}\, R^+_{N,n}(X)J_{k+1,N,\nu_i}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n)$$

$$
- \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n \omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z - x_n \omega^{-k+\frac{1}{2}}} \, R^{-}_{N,n}(X) J_{k+1,N,\nu_i}(x_n \omega^{-\frac{k}{2}}; \hat{X}_n) \Big)
$$
$$
= A \sin^2 \frac{\pi(k+N)}{L} \left(J_{k,N+1,\nu_i}(z;X) - K_{k,\nu_i} J_{1,N,\nu_i}(X) \right).
$$

Собирая эти члены вместе мы получаем

$$
S_1^k(z;X) S_{-1}^k(z;X) J'_{k,N+1,i}(z;X) = A \sin^2 \frac{\pi(k+N)}{L} (J_{k,N+1,\nu_i}(z;X) - J_{k,N+1,\nu_i}(-[k]^{-1} S_1(X);X)).
$$

Это почти то, что нам нужно. Для доказательства уравнений движения для $k+N = M+1$ осталось доказать, что

$$
J_{k,N+1,\nu_i}(-[k]^{-1} S_1(X);X) = 0. \tag{2.108}
$$

Рассмотрим для начала случай $k=1$. Тогда функция $J_{1,N+1,\nu_i}(x_{N+1};x_1,\ldots,x_N)$ является симметричной функцией по отношению ко всем переменным $x_1,\ldots,x_{N+1}$. Поэтому, любая из этих переменных может быть выбрана в качестве z. Это значит, что

$$
J_{1,N+1,\nu_i}(-S_1(X);X) = J_{1,N+1,\nu_i}(-S_1(x_{N+1},\hat{X}_j);x_{N+1},\hat{X}_j).
$$

Левая часть этого выражения зависит от x_N, в то время как его правая часть не зависит от x_j. Это значит, что функция $J_{1,N+1,\nu_i}(-S_1(X);X)$ является константой для всех своих N переменных. Поэтому, достаточно доказать, что эта функция равна нулю, например при $x_N \to \infty$. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$
\begin{aligned}
J_{1,N+1,\nu_i}(-S_1(X);X) = {} & K_{1,\nu_i} J_{1,N,\nu_i}(X) \\
& + \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{S_1^2(x_n \omega^{\frac{1}{2}};\hat{X}_n)} \, R^{+}_{N,n}(X) J_{2,N,\nu_i}(x_n \omega^{\frac{1}{2}};\hat{X}_n) \\
& - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n \omega^{-1}}{S_1^2(x_n \omega^{-\frac{1}{2}};\hat{X}_n)} \, R^{-}_{N,j}(X) J_{2,N,\nu_i}(x_n \omega^{-\frac{1}{2}};\hat{X}_n).
\end{aligned}
$$

Так как левая часть этого выражения является константой, мы можем вычислить ее в пределе $x_N \to \infty$. В этом пределе единственными не исчезающими членами суммы в правой части являются те, для которых $n = N$. Учитывая, что

$$
R^{+}_{N,n}(X) = R^{-}_{N,n}(X) = -\frac{2\mathrm{i} \sin \frac{\pi p}{L} \sin \frac{\pi(1-p)}{L}}{\sin \frac{\pi}{L}} + O(x_N^{-1}),
$$

при $x_N \to \infty$, мы получаем

$$J_{1,N+1,\nu_i}(-S_1(X);X) \to \left((K_{1,\nu_i})^2 + 4\frac{\sin\frac{\pi}{L}\sin\frac{\pi p}{L}\sin\frac{\pi(p-1)}{L}}{\sin\frac{2\pi}{L}}K_{2,\nu_i}\right) J_{1,N-1,\nu_i}(\hat{X}_N) = 0.$$

Поэтому, $J_{1,M,\nu_i}(-S_1(X);X) = 0$. Теперь можно легко проверить соотношение (2.108), рассматривая операторное разложение токов t_1 в ток t_k. Именно поэтому мы рассматривали индукцию по переменной $k+N$, а не по переменной N.

2.5 Отражательные соотношения для форм факторов операторов потомков

Доказательство отражательного соотношения повторяет основные этапы доказательства в модели синус-Гордона [27]. Основная идея доказательства основывается на предположении, сделанном в работе [39], и далее развитом в [40]. Данное предположение утверждает, что все форм факторы могут быть получены из форм факторов примарных операторов, как коэффициенты разложения при больших значениях быстрот.

Теорема 6. *Для общих значений параметра a существует представление группы Вейля r_a на алгебре $\mathcal{A}$ такое, что для любых $h, h' \in \mathcal{A}$ выполняется следующее соотношение*

$$\tilde{J}^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1,\ldots,x_N)_{k_1\ldots k_N} = \tilde{J}^{(r_a(w)h)(\overline{r_{w_*a}(\widetilde{w})h'})}_{N,wa}(x_1,\ldots,x_N)_{k_1\ldots k_N}. \tag{2.109}$$

На первом этапе доказательства теоремы мы докажем, что все пространство Фок алгебры Гейзенберга (2.52) может быть натянуто на вектора, порождаемые произведением операторов $t_k(x)$, $1 \le k \le L$. Точнее, рассмотрим разложение

$${}_a\langle 1|t_{k_1}(\xi_1^{-1}z)\cdots t_{k_K}(\xi_K^{-1}z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\,{}_a\langle n; k_1\xi_1,\ldots,k_K\xi_K|. \tag{2.110}$$

Для краткости, мы будем писать $\Xi = (k_1,\xi_1,\ldots,k_K,\xi_K)$. Мы хотим доказать, что для общих значений параметра a и достаточно больших значений K мы можем выбрать набор $\Xi^{(i)}$, $i = 1,\ldots,\dim\mathcal{D}^R_n$, такой, что вектора ${}_a\langle n;\Xi^{(i)}|$ образуют базис в пространстве $\mathcal{D}^R_n$. Во-первых, докажем это утверждение в пределе $a = a(\tau)$, $\tau \to +\infty$, который уже рассматривался ранее в разделе 2.3.3. В этом пределе мы имеем

$$e^{-\tau\frac{k(L-k)}{2}} t_k(z)|_{\hat{a}=a(\tau)} = \lambda_{12\ldots k}(z) + O(e^{-\tau}) \quad \text{as } \tau \to \infty, \tag{2.111}$$

что есть полный аналог выражения (2.49). Поэтому,

$$\begin{aligned}e^{-\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^K k_i(L-k_i)}{}_{a(\tau)}\langle 1|t_{k_1}(\xi_1^{-1}z)\cdots t_{k_K}(\xi_K^{-1}z) &= {}_{a(\tau)}\langle 1|\lambda_{1\ldots k_1}(\xi_1^{-1}z)\cdots\lambda_{1\ldots k_K}(\xi_K^{-1}z)+O(e^{-\tau})\\ &= F(\xi_2/\xi_1,\ldots,\xi_K/\xi_1)_{a(\tau)}\langle 1|:\lambda_{1\ldots k_1}(\xi_1^{-1}z)\cdots\lambda_{1\ldots k_K}(\xi_K^{-1}z):+O(e^{-\tau}),\end{aligned}\tag{2.112}$$

где функция $F(z_2,\ldots,z_K)$ – это произведение функций f с подходящими аргументами. Точный вид этого произведения не важен в контексте рассматриваемой задачи. Вычислим состояния в последней строке

$${}_{a(\tau)}\langle 1|:\lambda_{1\ldots k_1}(\xi_1^{-1}z)\cdots\lambda_{1\ldots k_K}(\xi_K^{-1}z):={}_{a(\tau)}\langle 1|\exp\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{L}\frac{\kappa_n^{(s)}d_n^{(s)}z^{-n}}{n},\tag{2.113}$$

где

$$\kappa_n^{(s)}=\sum_{\substack{i=1\\k_i\geq s}}^{K}\omega^{\frac{k_i+1-2s}{2}n}\xi_i^n.\tag{2.114}$$

Рассмотрим разложение

$${}_{a(\tau)}\langle 1|:\lambda_{1\ldots k_1}(\xi_1^{-1}z)\cdots\lambda_{1\ldots k_K}(\xi_K^{-1}z):=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\,{}_{(-)}\langle n;\Xi|.$$

Тогда

$${}_{(-)}\langle n;\Xi|={}_{a(\tau)}\langle 1|\sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r>0\\n_1+\cdots+n_r=n}}C_{n_1\ldots n_r}\prod_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{L}\kappa_{n_j}^{(s)}d_{n_j}^{(s)}\tag{2.115}$$

с некоторыми положительными константами $C_{n_1\ldots n_r}$. Это означает, в частности, что все возможные произведения операторов $d_n^{(s)}$ возникаю в правой части этого выражения.

Для достаточно больших чисел $\#\{i|k_i=s\}$, $1\leq s\leq L$, функции $\kappa_{n'}^{(s)}$, $1\leq s\leq L$, $1\leq n'\leq n$ являются функционально независимыми и могут рассматриваться как независимые переменные. Кроме того, мономы $\kappa_{n_1}^{(s_1)}\cdots\kappa_{n_r}^{(s_r)}$ являются линейно независимыми. Поэтому, для любого, отличного от нуля набора чисел $A_{n_1\ldots n_r}^{s_1\ldots s_r}$, $r=1,\ldots,n$, $n_1,\ldots,n_r>0$, $n_1+\cdots+n_r=n$, мы имеем

$$\sum_r\sum_{\substack{s_1,\ldots,s_r\\n_1,\ldots,n_r}}\overline{A_{n_1\ldots n_r}^{s_1\ldots s_r}}\kappa_{n_1}^{(s_1)}\cdots\kappa_{n_r}^{(s_r)}\neq 0$$

для некоторых значений переменных $\kappa_{n'}^{(s)}$. Поэтому, вектор, порождаемый набором чисел $A_{n_1\ldots n_r}^{s_1\ldots s_r}$ не ортогонален по крайней мере хотя бы одному, порождаемому числами $\kappa_{n_1}^{(s_1)}\cdots\kappa_{n_r}^{(s_r)}$. Это означает, в свою очередь, что в $\mathcal{D}_n^R$ не существует вектора, ортогонального всем векторам, порождаемым произведениями $\kappa_{n_j}^{(s_j)}$. Это доказывает, что существует базис ${}_{(-)}\langle l;\Xi^{(I)}|$ в пространстве $\mathcal{D}^R_l$. Применяя деформационный аргумент, мы доказываем это утверждение для общих значений параметра a.

Теперь мы перейдем ко второму шагу доказательства. Пусть ${}_a\langle l;I| = {}_a\langle l;\Xi^{(I)}_l|$ – это базис в пространстве $\mathcal{D}^R_l$, связанный с любым частным набором значений параметров $\{\Xi^{(I)}_l|I=1,\ldots,\dim\mathcal{D}^R_l\}$. Из отражательных свойств для экспоненциальных операторов (2.102), мы немедленно заключаем, что для любых неотрицательных целых чисел $l,\bar{l}$ мы имеем

$$ {}_a\langle l;I|t_{k_1}(x_1)\ldots t_{k_N}(x_N)|\bar{l};J\rangle_a = {}_{wa}\langle l;I|t_{k_1}(x_1)\ldots t_{k_N}(x_N)|\bar{l};J\rangle_{wa} \qquad \forall w\in\mathcal{W}. $$

Это тождество порождает отображение $r_a(w):\mathcal{D}^R_l\to\mathcal{D}^R_l$, такое что $r_a(w)({}_a\langle l;I|) = {}_{wa}\langle l;I|$. Отметим, что левый индекс a в этих векторах важен, так как элемент пространства $\mathcal{D}^R_l$, порождаемый $\Xi^{(I)}_l$ зависит от его значения. Теперь нашей целью является доказательство того, что это отображение совместно с ограничением (2.75), которое отбирает ‘физические’ вектора, порождаемые (2.64).

Пусть вектора ${}_a\langle 1|\pi_R(h_{a,l,\mu}) = {}_a\langle\widetilde{l;\mu}| = \sum_I v^\mu_I(a)\,{}_a\langle l;I|$ образуют базис в подпространстве $\mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_{a,l}$. Аналогично, пусть let $\pi_L(h'_{a,\bar{l},\nu})|1\rangle_a = |\widetilde{\bar{l},\nu}\rangle_a = \sum_J \bar{v}^\nu_J|\bar{l},J\rangle_a$. В силу уравнения (2.74) мы имеем

$$ \begin{aligned} &{}_a\langle 1|t_{k_1}(x_1)\ldots t_{k_M}(x_M)D_n t_{k_{M+1}}(x_{M+1})\ldots t_{k_N}(x_N)|1\rangle_a \\ &\qquad = {}_{wa}\langle 1|t_{k_1}(x_1)\ldots t_{k_M}(x_M)D_n t_{k_{M+1}}(x_{M+1})\ldots t_{k_N}(x_N)|1\rangle_{wa}. \end{aligned} $$

Мы получаем

$$ 0 = {}_a\langle\widetilde{l;\mu}|D_{-n}|l-n;J\rangle_a = \sum_I v^\mu_I(a)\,{}_a\langle l;I|D_{-n}|l-n;J\rangle_a = \sum_I v^\mu_I(a)\,{}_{wa}\langle l;I|D_{-n}|l-n;J\rangle_{wa}. $$

Поэтому,

$$ \sum_I v^\mu_I(a)\,{}_{wa}\langle l;I|D_{-n} = 0 $$

и существует элемент $h^w_{wa,l,\mu}$, такой что

$$ {}_{wa}\langle 1|\pi_R(h^w_{wa,l,\mu}) = \sum_I v^\mu_I(a)\,{}_{wa}\langle l;I|. \tag{2.116} $$

Аналогично, существует элемент $h'^w_{wa,\bar{l},\nu}$, такой что

$$ \pi_L(h'^w_{wa,\bar{l},\nu})|1\rangle_{wa} = \sum_J \bar{v}^\nu_J(a)|\bar{l};J\rangle_{wa}. \tag{2.117} $$

Наконец, мы приходим к

$$
\begin{aligned}
&\langle\pi_R(h_{a,l,\mu})t(x_1)\dots t(x_N)\pi_L(h'_{a,\bar{l},\nu})\rangle_a = {}_a\langle\widetilde{l;\mu}|t_{k_1}(x_1)\dots t_{k_N}(x_N)|\widetilde{\bar{l},\nu}\rangle_a \\
&= \sum_{I,J} v_I^{\mu}(a)\bar{v}_J^{\nu}(a)_a\langle l;I|t_{k_1}(x_1)\dots t_{k_N}(x_N)|\bar{l},J\rangle_a = \sum_{I,J} v_I^{\mu}(a)\bar{v}_J^{\nu}(a)_{wa}\langle l;I|t_{k_1}(x_1)\dots t_{k_N}(x_N)|\bar{l},J\rangle_{wa} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \langle\pi_R(h^w_{wa,l,\mu})t_{k_1}(x_1)\dots t_{k_N}(x_N)\pi_L(h'^w_{wa,\bar{l},\nu})\rangle_{wa}.
\end{aligned}
$$

Поэтому, мы получили отображение $r_a(w)$ на подпространствах $\mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}$, $\mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}$

$$
r_a(w)({}_a\langle 1|\pi_R(h_{a,l,\mu})) = {}_{wa}\langle 1|\pi_R(h^w_{wa,l,\mu}), \qquad r_a(w)(\pi_L(h'_{a,\bar{l},\nu})|1\rangle_a) = \pi_L(h'^w_{wa,\bar{l},\nu})|1\rangle_{wa}. \tag{2.118}
$$

Сравнивая это выражение со свойством (2.38), которое выполняется как для $\tilde{J}$ функций, так и для J функция, мы можем определить

$$
r_a(w)h_{a,l,\mu} = h^w_{wa,l,\mu}, \qquad r_{w*a}(\widetilde{w})h'_{a,\bar{l},\nu} = h'^w_{wa,\bar{l},\nu}. \tag{2.119}
$$

Это, в свою очередь, снова доказывает факторизованный вид (2.17) отражательного отображения.

Альтернативная конструкция. Легко получить следующие коммутационные соотношения

$$
[D_n, t_k(z)] = A_n\frac{[kn]}{[n]}z^n t_k(z), \tag{2.120}
$$

где коэффициенты

$$
A_n = -A_n^+\sum_{s=2}^{L}\omega^{-\frac{L+1-2s}{2}n} = \begin{cases}(-)^n\omega^{n/2}A_n^+, & n\notin L\mathbb{Z},\\ (1-L)A_n^+, & n\in L\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{2.121}
$$

все не равны нулю для иррациональных значений p. Кроме того, отношение

$$
\frac{[kn]}{[n]} = \sum_{s=1}^{k}\omega^{\frac{k+1-2s}{2}n} \tag{2.122}
$$

хорошо определено (и равно k) для $n\in L\mathbb{Z}$.

Коммутационные соотношения (2.120) означают, что произведение (2.110) удовлетворяет соотношениям

$$
{}_a\langle 1|t_{k_1}(\xi_1^{-1}z)\dots t_{k_K}(\xi_K^{-1}z)D_{-n} = 0, \qquad 1\le n\le l, \tag{2.123}
$$

при выполнении следующих условий

$$\sum_{m=1}^{K} \frac{[k_m n]}{[n]}\, \xi_m^n = 0, \qquad 1 \le n \le l. \tag{2.124}$$

Поэтому,

$$_a\langle n; k_1\xi_1, \ldots, k_K\xi_K| D_{-n'} = 0, \qquad 1 \le n \le l, \qquad n' \ge 1. \tag{2.125}$$

Если мы так же определим

$$t_{\bar{k}_1}(\eta_1 z) \ldots t_{\bar{k}_{\bar{K}}}(\eta_K z)|1\rangle_a = \sum_{n=1}^{\infty} z^n |n; \bar{k}_1\eta_1, \ldots, \bar{k}_{\bar{K}}\eta_{\bar{K}}\rangle_a, \tag{2.126}$$

то мы получим

$$D_{n'}|n; \bar{k}_1\eta_1, \ldots, \bar{k}_{\bar{K}}\eta_{\bar{K}}\rangle_a = 0, \qquad 1 \le n \le \bar{l}, \qquad n' \ge 1, \tag{2.127}$$

при условии выполнения следующих уравнений

$$\sum_{m=1}^{\bar{K}} \frac{[\bar{k}_m n]}{[n]}\, \eta_m^n = 0, \qquad 1 \le n \le \bar{l}, \tag{2.128}$$

Мы заключаем, что эти вектора порождают Вейль инвариантные матричные элементы

$$\begin{aligned} &_a\langle n; k_1\xi_1, \ldots, k_K\xi_K| t_{\kappa_1}(x_1) \ldots t_{\kappa_M}(x_M) |n'; \bar{k}_1\eta_1, \ldots, \bar{k}_{\bar{K}}\eta_{\bar{K}}\rangle_a \\ &\quad = {}_{wa}\langle n; k_1\xi_1, \ldots, k_K\xi_K| t_{\kappa_1}(x_1) \ldots t_{\kappa_M}(x_M) |n'; \bar{k}_1\eta_1, \ldots, \bar{k}_{\bar{K}}\eta_{\bar{K}}\rangle_{wa}, \qquad w \in \mathcal{W}, \end{aligned} \tag{2.129}$$

которые являются форм факторами некоторых операторов потомков для $1 \le n \le l$, $1 \le n' \le \bar{n}$.

Теорема 7. *Для общих значений параметра a вектора* $_a\langle n; k_1\xi_1, \ldots, k_K\xi_K|$ *совместно с условиями* (2.124) *являются линейной оболочкой всего пространства* $\mathcal{D}_n^{R,\text{phys}}$ *for* $0 \le n \le l$,*в то время как вектора* $|n; \bar{k}_1\eta_1, \ldots, \bar{k}_{\bar{K}}\eta_{\bar{K}}\rangle_a$ *с* (2.128) *являются линейной оболочкой пространства* $\mathcal{D}_n^{L,\text{phys}}$ *for* $0 \le n \le \bar{l}$.

Действительно, рассмотрим бра-вектор. Учитывая (2.124), коэффициенты $\kappa_n^{(s)}$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_{s=1}^{L} \kappa_n^{(s)} = 0.$$

Это означает, что правая часть уравнения (2.115) содержит только разности $d_n^{(i+1)} - d_n^{(i)}$, как и должно быть. Кроме того, эта правая часть зависит только от $L-1$ параметров для заданного n, например $\kappa_n^{(i)}$, $i = 1, \ldots, L-1$. Теперь та же аргументация убеждает нас, что эти оставшиеся параметры κ могут рассматриваться как независимые переменные, и та же аргументация доказывает, что не существует вектора, ортогонального набору мономов. После чего, мы снова применяем деформационный аргумент. В результате, мы получаем следующую теорему

Теорема 8. *Для любых l существует аналитическое по параметру a семейство наборов $\{h^{\mathrm{inv}}_{a,l,\mu} \in \mathcal{A}_l\}_{\mu=1}^{\dim \mathcal{A}_l}$, которые являются базисами в $\mathcal{A}_l$ для общих значений параметра a, такими что $r_a(w) h^{\mathrm{inv}}_{a,l,\mu} = h^{\mathrm{inv}}_{wa,l,\mu}$.*

Альтернативная конструкция имеет два преимущества. Во-первых, она доказывает существование *аналитического* по параметру a Вейль инвариантного базиса в пространстве операторов V_a^g. Во-вторых, она обуславливает рецепт получения форм факторов этих базисных элементов *вне зависимости от представления.* Более того, легко видеть, что необязательно разрешать уравнения (2.124) и (2.128) в явном виде. Ниже мы покажем, что форм факторы могут быть представлены с помощью некоторого набора независимых переменных. Мы опишем конструктивный способ получения форм факторов, используя эти независимые переменные.

2.5.1 Решения для уравнений и форм факторы

Так как уравнения (2.124) и (2.128) имеют одинаковый вид, мы рассмотрим только то, которое включает в себя бра-вектора.

Так как ток $t_k(z)$ для $k = 2, \ldots, L-1$ может быть получен путем слияния достаточного количества токов $t_1(z)$ согласно (2.81), достаточно рассмотреть только токи $t_1(z)$ и $t_L(z)$ без потери всеобщности. Кроме того, так как разности $t_L(z\omega) - t_L(z)$ так же возникают в таких слияниях согласно (2.83), достаточно рассмотреть только 'симметризованную' версию тока $t_L(z)$, а именно

$$t_L^{\mathrm{sym}}(z) = \sum_{m=0}^{L-1} t_L(z\omega^m), \tag{2.130}$$

которая является операторнозначной функцией, зависящей от переменных z^L. Аналогично выражению (2.110), рассмотрим разложение

$${}_a\langle 1| t_1(\xi_1^{-1} z) \ldots t_1(\xi_r^{-1} z) t_L^{\mathrm{sym}}(\zeta_1^{-1/L} z) \ldots t_L^{\mathrm{sym}}(\zeta_s^{-1/L} z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \, {}_a\langle n; \xi_1, \ldots, \xi_r; \zeta_1, \ldots, \zeta_s|. \tag{2.131}$$

Уравнения (2.124) в данном случае сводятся к

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{r} \xi_m^n = 0, \qquad n \notin L\mathbb{Z}, \\
&\sum_{m=1}^{r} \xi_m^n = -L \sum_{m=1}^{s} \zeta_m^{n/L} = \Sigma_{n/L}, \qquad n \in L\mathbb{Z},
\end{aligned}
\tag{2.132}
$$

для $1 \leq n \leq l$. В этих выражениях мы ввели переменные Σ_ν, $\nu = 1, \ldots, \lambda = \lfloor l/L \rfloor$, которые будут удобны в дальнейшем. Согласно тождествам Ньютона-Жирара, для $1 \leq n \leq l$ величины σ_n^1 равны нулю, если $n \notin L\mathbb{Z}$, в то время как $\sigma_L^1, \sigma_{2L}^1, \ldots, \sigma_{\lambda L}^1$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\lambda$. Величины σ_n^L for $n = 1, \ldots, \lambda$ так же находятся во взаимно однозначном соответствии с $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\lambda$ и, поэтому, с $\sigma_L^1, \sigma_{2L}^1, \ldots, \sigma_{\lambda L}^1$.

форм факторы

$$
{}_a\langle n; \xi_1, \ldots, \xi_r; \zeta_1, \ldots, \zeta_s | t_{k_1}(x_1) \ldots t_{k_N}(x_N) | h' \rangle
$$

являются рациональными симметрическими функциями, зависящими от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$, то есть они являются отношениями симметричных полиномов. Поэтому, если мы сможем вычислять элементарные симметричные полиномы $\sigma_n^1 = \sigma_n(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $n = 1, \ldots, r$, и $\sigma_n^L = \sigma_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_s)$, $n = 1, \ldots, \lambda$ для решения уравнений (2.132), мы сможем вычислять и форм факторы.

Мы имеем $r + s$ переменных и l уравнений, то есть $r + s - l$ независимых переменных. Пусть $r_0 = r - l + \lambda$ и $s_0 = s - \lambda$ так что $r_0 + s_0 = r + s - l$. Возьмем $\xi_1, \ldots, \xi_{r_0}$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_{s_0}$ в качестве независимых переменных. Тогда переменные $\xi_1, \ldots, \xi_r$ and $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ являются решениями для уравнений

$$
\xi_m^r + \sum_{n=1}^{\lambda} (-)^{Ln} \sigma_{Ln}^1 \xi_m^{r-Ln} + \sum_{n=l+1}^{r} (-)^n \sigma_n^1 \xi_m^{r-n} = 0, \tag{2.133}
$$

$$
\zeta_m^s + \sum_{n=1}^{s} (-)^n \sigma_n^L \zeta_m^{r-n} = 0. \tag{2.134}
$$

Рассмотрим уравнения (2.133) для $m = 1, \ldots, r_0$ как систему r_0 линейно неоднородных уравнений для r_0 переменных $\sigma_L^1, \sigma_{2L}^1, \ldots, \sigma_{\lambda L}^1, \sigma_{l+1}^1, \sigma_{l+1}^1, \ldots, \sigma_r^1$. Для общих значений $\xi_1, \ldots, \xi_{r_0}$ эти уравнения являются не вырожденными и могут быть решены посредством полиномов Шура. Теперь, используя тождества Ньютона-Жирара, мы можем выразить $\sigma_1^L, \ldots, \sigma_\lambda^L$ как полиномы от переменных $\sigma_L^1, \ldots, \sigma_{\lambda L}^1$. Поэтому, уравнения (2.134) для $m = 1, \ldots, s_0$ становятся s_0 линейными неоднородными уравнениями для s_0 переменных $\sigma_{\lambda+1}^L, \ldots, \sigma_s^L$, которые так же могут быть решены с помощью использования полиномов Шура.

Наконец, мы выразили все симметричные полиномы σ_n^1, σ_n^L и, как следствие, форм факторы посредством рациональных функций независимых переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{r_0}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{s_0}$, что и требовалось доказать. Отметим, что хотя для простоты мы и не приводим некоторые явные формулы, процедура, описанная нами, является полностью конструктивной.

2.6 Операторы потомки на уровне $(1,0)$

Здесь мы рассмотрим форм факторы операторов потомков на уровне $(1,0)$. Для начала, мы получим рекуррентные соотношения для этих операторов и, после этого, мы построим Вейль инвариантные комбинации операторов с помощью первого из подходов, рассмотренных ранее. Отметим, что получение рекуррентных соотношений не обязательно для получения явного вида форм факторов, но, в то де время, рекуррентные соотношения часто оказываются полезными для доказательства теорем.

Как мы уже отмечали, все предложенное построение (2.84)–(2.92) справедливо для J функция, относящихся к произвольным операторам. Рассмотрим функцию

$$J_{k,N+1,a}^{\alpha_i c_{-1}}(z;X) = \prod_{n=1}^{N}\prod_{m=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x_n}\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}\right) {}_a\langle 1|\pi_R(\alpha_i c_{-1}) t_k(z) t_1(x_1)\ldots t_1(x_N)|1\rangle_a. \quad (2.135)$$

Эта функция допускает разложения в ряд (2.87) и (2.89) с подходящим образом выбранными функциями $J^{(0)}$ и $J^{(\infty)}$. Поэтому, для того, чтобы получить рекуррентные соотношения для этой функции достаточно вычислить ее асимптотики при $z \to 0$ или $z \to \infty$.

Перепишем выражение (2.135) в следующем виде

$$J_{k,N+1,a}^{\alpha_i c_{-1}}(z,X)\prod_{n=1}^{N}\prod_{m=1}^{k-1} f\left(\frac{z}{x_n}\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}\right) = {}_a\langle 1|[\pi_R(\alpha_i c_{-1}), t_k(z)] t_1(x_1)\ldots t_1(x_N)|1\rangle_a$$
$$+ {}_a\langle 1|t_k(z)\pi_R(\alpha_i c_{-1}) t_1(x_1)\ldots t_1(x_N)|1\rangle_a. \quad (2.136)$$

Из (2.65a) мы получаем

$$[\pi_R(\alpha_i c_{-1}), t_k(z)] = z\sum_{1\le s_1<\ldots<s_k\le L}\omega^{\langle a, H_{s_1,\ldots,s_k}\rangle}\sum_{n=1}^{k}\langle \alpha_i, H_{s_n}\rangle\,\omega^{-\frac{L-k-2(s_n-n)}{2}}\prod_{m=1}^{k}\lambda_{s_m}(z\omega^{\frac{k+1-2m}{2}}).$$

Так как $f(z) = 1 + O(z^{-1})$ при $z \to \infty$, линейные члены при разложении по z функции $J_{k,N+1,a}^{\alpha_j c_{-1}}(z,X)$ получаются только из первого члена в правой части выражения (2.136)

$$J_{k,N+1,a}^{\alpha_i c_{-1}}(z,X) = zK_{k,a}^{i} J_{1,N,a}(X) + O(z^0)$$

причем

$$K^i_{k,a} = \sum_{1\le s_1<\ldots<s_k\le L} \omega^{\langle a, H_{s_1,\ldots,s_k}\rangle} \sum_{n=1}^{k} \langle \alpha_i, H_{s_n}\rangle\, \omega^{-\frac{L-k-2(s_n-n)}{2}}. \tag{2.137}$$

Нахождение коэффициента разложения при z^0 является более трудной задачей. Однако, можно поступить другим образом. Именно, этот коэффициент является лидирующим членом разложения этой функции в другом пределе, а именно $z\to 0$. Из свойства кластерной факторизации мы немедленно получаем

$$J^{\alpha_i c_{-1}}_{k,N+1,a}(0,X) = K_{k,a} J^{\alpha_i c_{-1}}_{1,N,a}(X).$$

Наконец, мы получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} J^{\alpha_i c_{-1}}_{k,N+1,a}(z;X) = K_{k,a} J^{\alpha_i c_{-1}}_{1,N,a}(X) + zK^i_{k,a} J_{1,N,a}(X) \\ - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{-1}\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z^{-1}-x_n^{-1}\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^+_{N,n}(X) J^{\alpha_i c_{-1}}_{k+1,N,a}(x_n\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_n) \\ + \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{-1}\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z^{-1}-x_n^{-1}\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^-_{N,n}(X) J^{\alpha_i c_{-1}}_{k+1,N,a}(x_n\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_n). \end{aligned} \tag{2.138}$$

Совместно с начальными условиями и свойством цикличности

$$J^{\alpha_i c_{-1}}_{k,0,a} = 0, \qquad J^{\alpha_i c_{-1}}_{L,N+1,a}(z;X) = J^{\alpha_i c_{-1}}_{1,N,a}(X) \tag{2.139}$$

и с известными рекуррентными соотношениями для функций $J_{k,N,a}(z;X)$, данные рекуррентные соотношения однозначным образом определяют форм факторы операторов потомков на уровне $(1,0)$.

Следующим шагом будет нахождение комбинаций, инвариантных относительно действия группы Вейля. Очевидно, что достаточно найти Вейль инвариантные комбинации функций $K^i_{k,a}$, не зависящие от k. Однако, получение таких комбинаций напрямую является довольно сложной задачей. Поэтому, мы будем использовать конструкцию, описанную в первой части раздела 2.5. А именно, рассмотрим разложение произведения ${}_a\langle 1|t_k(z)$ в степенной ряд по переменной z при $z\to\infty$. Мы имеем

$${}_a\langle 1|t_k(z) = {}_a\langle 1|K_{k,a} + z^{-1}\,{}_a\langle 1;k| + O(z^{-2}) \tag{2.140}$$

где

$${}_a\langle 1;k| = \sum_{1\le s_1<\cdots<s_k\le L} \omega^{\langle a, H_{s_1\cdots s_k}\rangle} \sum_{m=1}^{k} \omega^{m-\frac{k+1}{2}}\, {}_a\langle 1|d_1^{(s_m)}. \tag{2.141}$$

Легко проверить, что

$$ {}_a\langle 1;k|D_{-1} = {}_a\langle 1|\omega^{1/2}A_1^+[k]K_{k,a}. $$

Рассмотрим состояние

$$ {}_a\langle C| = \frac{1}{\omega^{\frac{L+1}{2}}A_1^+}\left(\sum_{k=1}^{L-1}\frac{c_k}{[k]K_{k,a}}\,{}_a\langle 1;k| + c_L\,{}_a\langle 1;L|\right), \qquad C=(c_1,\ldots,c_L). \tag{2.142} $$

Это состояние является 'физическим', если выполняется условие ${}_a\langle C|D_{-1} = 0$. Данное условие выполняется, если

$$ \sum_{k=1}^{L-1} c_k = 0. \tag{2.143} $$

Это уравнение допускает $L-1$ независимых решений $C^{(\sigma)}$, $\sigma=1,\ldots,L-1$. Для того, чтобы соотнести эти решения с некоторыми элементами $\mathcal{A}$ нам потребуется записать элементы $d_1^{(s)}$, $s>1$ в виде

$$ d_1^{(s)} = d_1^{(1)} - \sum_{i=1}^{s-1}(d_1^{(i)} - d_1^{(i+1)}) = d_1^{(1)} - A_1^+\sum_{i=1}^{s-1}\omega^{\frac{L+1-2i}{2}}R_1^{(i)}. \tag{2.144} $$

После подстановки этих выражений в уравнения (2.141) и (2.142), коэффициент при элементе $d_1^{(1)}$ сокращается в силу условий (2.143).

Выпишем одно из решений

$$ c_1^{(L-1)} = \cdots = c_{L-1}^{(L-1)} = 0, \qquad c_L^{(L-1)} = 1. \tag{2.145} $$

Это решение соответствует интегралу движения

$$ {}_a\langle C^{(L-1)}| = {}_a\langle \iota_1|. \tag{2.146} $$

Теперь, пусть $C^{(\sigma)}$, $\sigma = 1,\ldots,L-2$ – это какой либо базис в подпространстве решений уравнения (2.143) с $c_L = 0$. Тогда ${}_a\langle C^{(\sigma)}| = {}_a\langle h_{1,a}^{(\sigma)}|$, где

$$ h_{1,a}^{(\sigma)} = -\sum_{i=1}^{L-1}\alpha_i c_{-1}\sum_{k=1}^{L-1}\frac{c_k^{(\sigma)}}{[k]K_{k,a}}\sum_{m=1}^{k}\omega^{m-i-\frac{k+1}{2}}\sum_{\substack{1\le s_1<\cdots<s_k\le L\\ s_m>i}}\omega^{\langle a,H_{s_1\ldots s_k}\rangle}, \qquad \sigma=1,\ldots,L-2. \tag{2.147} $$

В частности, $h_{1,a}^{(L-1)} = \iota_1$, предполагая (2.145).

Если мы допускаем только решения $C^{(\sigma)}$, не зависящие от параметра a, то коэффициенты в линейной комбинации (2.142) будут являться Вейль инвариантными. Таким образом, по построению,

$$
{}_{a}\langle h^{(\sigma)}_{1,a}|t_{k_1}(x_1)\dots t_{k_N}(x_N)|1\rangle_a = {}_{wa}\langle h^{(\sigma)}_{1,wa}|t_{k_1}(x_1)\dots t_{k_N}(x_N)|1\rangle_{wa} \quad \forall w\in\mathcal{W} \tag{2.148}
$$

для $\sigma = 1,\dots,L-1$.

Глава 3

Форм факторы локальных операторов в модели Буллоу-Додда

Эта глава организована следующим образом. В разделе 3.1 мы кратко опишем модель Буллоу-Додда и введем используемые в дальнейшем обозначения. В разделе 3.2 мы напомним Лукьяновское свободно-полевое представление для форм факторов экспоненциальных операторов. Мы представим свободно полевое представление для форм факторов операторов потомков и изучим их свойства. В разделе3.3 мы предложим альтернативную процедуру бозонизации, которая позволит получить рекуррентные соотношения между форм факторами экспоненциальных операторов. В разделе 3.6 мы рассмотрим аналитическое продолжение константы связи модели Буллоу-Додда и предложим свободно полевое представление для форм факторов легчайших бризеров в минимальных моделях, возмущенных оператором $\Phi_{1,2}$. В качестве примера предложенной конструкции, мы подробно рассмотрим форм факторы в модели Изинга в магнитном поле.

3.1 Модель Буллоу-Додда

В этом разделе мы кратко опишем теорию рассеяния модели Буллоу-Додда [60]. Эта модель является двумерной интегрируемой квантовой теорией поля, определяемой евклидовым действием

$$S_{BD} = \int d^2x \left(\frac{1}{16\pi} (\partial_\nu \varphi)^2 + \mu (e^{\sqrt{2}b\varphi} + 2e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\varphi}) \right), \tag{3.1}$$

где b — это константа связи и μ — регуляризованный массовый параметр, который связан с массой m единственной бозонной частицы A в спектре модели следующим образом,

$$m = \mu^{\frac{1}{2Qb}} \frac{2\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{b}{3Q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3Qb}\right)} \left(-\frac{\pi\Gamma(1+2b^2)}{\Gamma(-2b^2)}\right)^{\frac{1}{6Qb}} \left(-\frac{2\pi\Gamma(1+b^2/2)}{\Gamma(-b^2/2)}\right)^{\frac{1}{3Qb}}. \tag{3.2}$$

Далее мы будем использовать обозначения

$$Q = b + b^{-1}, \quad \omega = e^{i\pi/3}. \tag{3.3}$$

Кроме того, мы будем использовать обычные координат светового конуса и производные по ним, а именно

$$z = x^1 - x^0, \quad \bar{z} = x^1 + x^0, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Модель Буллоу-Додда обладает бесконечным количеством коммутирующих интегралов движения с нечетным спином s, исключая множители 3,

$$s = 6n \pm 1 \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.4}$$

Интегрируемость модели подразумевает, что все процессы рассеяния являются упругими. Поэтому, n-частичная S-матрица факторизуется в произведение $n(n-1)/2$ духчастичных амплитуд рассеяния,

$$S(\theta) = \frac{\tanh\frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi}{3})\tanh\frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi}{3bQ})\tanh\frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi b}{3Q})}{\tanh\frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi}{3})\tanh\frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi}{3Qb})\tanh\frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi b}{3Q})}. \tag{3.5}$$

Эта S-матрица инварианта при следующих преобразования $b \to b^{-1}$. Для действительных значений констант связи b, S-матрица имеет простые полюса при $\theta = 2i\pi/3$, которые соответствуют связным полюсам, отвечающие частице A в процессах рассеяния

$$A \times A \to A \to A \times A. \tag{3.6}$$

Рассмотрим операторный состав модели. Пространство локальных операторов модели состоит из экспоненциальных операторов

$$V_a(x) = e^{a\varphi(x)} \tag{3.7}$$

и их потомков, т.е. линейной комбинации следующих полей

$$\partial^{n_1}\varphi\ldots\partial^{n_r}\varphi\bar{\partial}^{\bar{n}_1}\varphi\ldots\bar{\partial}^{\bar{n}_s}\varphi\, e^{a\varphi(x)}. \tag{3.8}$$

Пара целых чисел $(n,\bar{n})$,

$$n=\sum_{i=1}^{r}n_i,\quad \bar{n}=\sum_{j=1}^{s}\bar{n}_j \tag{3.9}$$

называется уровнем оператора потомка. Числа n и $\bar{n}$ по отдельности будут называться киральными и антикиральными уровнями соответственно. Любой экспоненциальный оператор характеризуется своей конформной размерностью Δ_a в ультрафиолетовой области, которая зависит от значения параметра a экспоненциального оператора. Скелинговая размерность соответствующего оператора потомка на уровне $(n,\bar{n})$ определяется как $\Delta_a+n+\bar{n}$, в то время как спин такого оператора имеет вид $s=n-\bar{n}$.

Рассмотрим Гильбертово пространство модели в формализме радиального квантования вблизи некоторой точки евклидовой плоскости, например точки $x=0$. В окрестности этой точки поле $\varphi(x)$ может быть разложено в ряд Лорана

$$\varphi(x)=\mathbf{Q}-i\mathbf{P}\log z\bar{z}+\sum_{m\neq 0}\frac{\mathbf{a}_m}{im}z^{-m}+\sum_{m\neq 0}\frac{\bar{\mathbf{a}}_m}{im}\bar{z}^{-m}, \tag{3.10}$$

где операторы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{a}_m$ и $\bar{\mathbf{a}}_m$ образуют алгебру Гейзенберга со следующими коммутационными соотношениями

$$[\mathbf{P},\mathbf{Q}]=-i,\quad [\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_n]=m\delta_{m+n,0},\quad [\bar{\mathbf{a}}_m,\bar{\mathbf{a}_n}]=m\delta_{m+n,0}. \tag{3.11}$$

В процедуре радиального квантования, экспоненциальный оператор $V_a(0)$ соответствует вектору старшего веса $|a\rangle_{rad}$, который определяется с помощью следующих условий

$$\mathbf{a}_m|a\rangle_{rad}=\bar{\mathbf{a}}_m|a\rangle_{rad}=0\quad (m>0),\quad \mathbf{P}|a\rangle_{rad}=a|a\rangle_{rad},\quad |a\rangle_{rad}=e^{a\mathbf{Q}}|vac\rangle_{rad} \tag{3.12}$$

Пусть $\mathcal{F}_a$ — это Фоковский модуль натянутый на вектора, порождаемые действием генераторов $\mathbf{a}_{-m}$ $(m<0)$ на вектор старшего веса этого модуля $|a\rangle_{rad}$. Аналогично, пусть $\bar{\mathcal{F}}_a$ — это Фоковский модуль, натянутый на вектора, порождаемые действием операторов $\bar{\mathbf{a}}_{-m}$ $(m<0)$ на тот же самый вектор старшего веса. Очевидно, что модули $\mathcal{F}$ и $\bar{\mathcal{F}}$ изоморфны. Все пространство состояний является тензорным произведением $\mathcal{F}_a\otimes\bar{\mathcal{F}}_a$ кирального и антикирального Фоковских модулей. С точностью до некоторого числового множителя операторы потомки (3.8) соответствуют векторам

$$\mathbf{a}_{-n_1}\dots\mathbf{a}_{-n_r}\bar{\mathbf{a}}_{-\bar{n}_1}\dots\bar{\mathbf{a}}_{-\bar{n}_s}|a\rangle_{rad}\quad (0<n_1\leq\dots\leq n_r, 0<\bar{n}_1\leq\dots\leq\bar{n}_s). \tag{3.13}$$

Каждый модуль $\mathcal{F}_a$ имеет естественную градуировку по уровням $\mathcal{F}_a=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{a,n}$, где каждое уровневое подпространство $\mathcal{F}_{a,n}$ натянуто на вектора (3.13) с $\bar{n}=0$ и $\sum n_i=n$. Размерности этих подпространств следуют из производящей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\dim\mathcal{F}_{a,n}=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^m}. \tag{3.14}$$

Размерность пространства оператора потомков уровня $(n,\bar{n})$ равна произведению размерностей соответствующих киральных Фоковских модулей, а именно, $\dim\mathcal{F}_{a,n}\cdot\dim\bar{\mathcal{F}}_{a,\bar{n}}$.

3.2 Свободно-полевое представление для форм факторов локальных операторов

Опишем кратко Лукьяновское свободно-полевое представление для форм факторов экспоненциальных операторов для модели Буллоу-Додда [65]. Введем пару операторов $\Lambda^+(\theta)$ и $\Lambda^-(\theta)$ и определим двух-точечную следовую функцию $\langle\langle\dots\rangle\rangle$ следующим образом

$$\langle\langle\Lambda^{\sigma}(\theta)\rangle\rangle=1,\quad \langle\langle\Lambda^{\sigma'}(\theta')\Lambda^{\sigma}(\theta)\rangle\rangle=\left[R(\theta-\theta')\right]^{\sigma'\sigma},\quad \sigma',\sigma=\pm, \tag{3.15}$$

где $R(\theta)$ — это двухточечный минимальный форм фактор, который может быть представлен в виде [61]

$$R(\theta)=\exp\Big(-4\int_0^{\infty}\frac{dt}{t}\frac{\cosh\frac{t}{6}\sinh\frac{tb}{3Q}\sinh\frac{t}{3Qb}}{\sinh t\sinh\frac{t}{2}}\cosh(t-\frac{i\theta t}{\pi})\Big). \tag{3.16}$$

Много-точечные следовые функции функции могут быть вычислены с помощью теоремы Вика. Определим процедуру нормального упорядочивания $:\cdots:$ для операторов Λ с помощью следующих соотношений,

$$\Lambda^{\sigma_N}(\theta_N)\dots\Lambda^{\sigma_1}(\theta_1)=:\Lambda^{\sigma_N}(\theta_N)\dots\Lambda^{\sigma_1}(\theta_1):\prod_{1\leq i<j\leq N}\langle\langle\Lambda^{\sigma_j}(\theta_j)\Lambda^{\sigma_i}(\theta_i)\rangle\rangle. \tag{3.17}$$

Здесь и далее мы будем использовать следующее обозначение

$$\Lambda^0(\theta) =: \Lambda^+(\theta - \frac{i\pi}{3})\Lambda^-(\theta + \frac{i\pi}{3}) : .$$

Тогда, Лукьяновские генераторы могут быть представлены в следующем виде,

$$T(\theta) = \rho\,(e^{i\pi p}\,\Lambda^+(\theta) + e^{-i\pi p}\,\Lambda^-(\theta) + h\,\Lambda^0(\theta)), \tag{3.18}$$

где константы даются следующими выражениями

$$\begin{aligned}
h &= 2\sin\frac{\pi(b-b^{-1})}{6Q},\\
p &= \frac{4\sqrt{2}a - b + b^{-1}}{6Q} - \frac{1}{2},\\
\rho &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi b}{3Q}\sin\frac{2\pi}{3Qb}}}\exp\Big(2\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{\cosh\frac{t}{6}\sinh\frac{tb}{3Q}\sinh\frac{t}{3Qb}}{\sinh t\cosh\frac{t}{2}}\Big).
\end{aligned}$$

Отметим, что эти обозначения отличаются от обозначений в [65] заменой $b \to b^{-1}$. Предложенная свободно-полевая конструкция допускает преобразованием дуальности $b \leftrightarrow b^{-1}$, которое так же является симметрией S-матрицы. Однако, данная замена используется нами, чтобы адаптировать общепринятые обозначения, используемые в конформной теории поля.

Форм факторы экспоненциальных операторов могут быть представлены в виде многоточечной следовой функции Лукьяновских генераторов (3.18), а именно

$$F^a(\theta_1, \ldots, \theta_N) \equiv \langle e^{a\varphi}\rangle f^a(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \langle e^{a\varphi}\rangle\langle\langle T(\theta_N)\ldots T(\theta_1)\rangle\rangle, \tag{3.19}$$

Функции $f_a(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ являются аналитическими функциями аргументов θ_i, с довольно сложной аналитической структурой. С помощью соотношений (3.15) несложно показать, что эти функции могут быть представлены в виде

$$f_a(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \rho^N J_{N,a}(e^{\theta_1}\ldots, e^{\theta_N}) \prod_{i\le i<j\le N} R(\theta_i - \theta_j), \tag{3.20}$$

где функции $J_{N,a}(x_1, \ldots, x_N)$ — это симметрические рациональные функции аргументов x_i. Аналитическая структура полюсов этих функции определяется форм факторными аксиомами. Именно, полюса этой функции находятся при относительной разности быстрот $\theta_{ij} = i\pi$ и $\theta_{ij} = 2\pi i/3$ и, в дальнейшем, будут именоваться кинематическими и динамическими полюсами соответственно. Отметим, что в предложенном свободно-полевом представлении вычислении форм факторов сводится к комбинаторной процедуре.

Метод, предложенный в предыдущей главе для для построения свободно-полевого представления для форм факторов операторов потомков, легко применить для решения аналогичной задаче в модели Буллоу-Додда. Действуя в соответствии со схемой, предложенной в прошлой главе, мы рассмотрим две коммутативные алгебры $\mathcal{A} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n$ и $\bar{\mathcal{A}} = \oplus_{n=0}^{\infty}\bar{\mathcal{A}}_n$, порождаемые элементами $\{\alpha_{-n}\}$ и $\{\bar{\alpha}_{-n}\}$ $(n > 0)$ соответственно. Канонический гомоморфизм между этими алгебрами определяется следующим соотношением: $\alpha_{-n} \to \bar{\alpha}_{-n}$. Элемент $g = h\bar{h}'$ будет называться потомком уровня $(n, \bar{n})$, если $h \in \mathcal{A}_n$ и $\bar{h}' \in \bar{\mathcal{A}}_{\bar{n}}$.

Определим следующую скобку на алгебре $\mathcal{A}$

$$\left(\prod_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^{k_m}, \prod_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^{l_m}\right) = \prod_{m=1}^{\infty} k_m!\delta_{k_m,l_m} \tag{3.21}$$

и рассмотрим токи

$$\begin{aligned}
a(z) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}z^m\right),\\
b(z) &= \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}(-z)^m\right),\\
c(z) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}(\omega^{-m} - (-1)^m\omega^m)\alpha_{-m}z^m\right).
\end{aligned}$$

Используя эти токи, мы модифицируем Лукьяновские генераторы (3.18) следующим образом

$$\mathcal{T}(\theta) = \rho\big(e^{i\pi p}\, a(e^{\theta})\bar{b}(e^{-\theta})\Lambda^{+}(\theta) + e^{-i\pi p}\, b(e^{\theta})\bar{a}(e^{-\theta})\Lambda^{-}(\theta) + h\, c(e^{\theta})\bar{c}(e^{-\theta})\Lambda^{0}(\theta)\big). \tag{3.22}$$

Тогда легко показать, что для любого элемента $g \in \mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ функция

$$f_a^g(\theta_1, \ldots, \theta_N) = (\langle\langle\mathcal{T}(\theta_N), \ldots, \mathcal{T}(\theta_1)\rangle\rangle, g) \tag{3.23}$$

является решением форм факторных аксиом. Следовательно, эти функции определяют форм факторы операторов потомков из Фоковского пространства $(\mathcal{F}\otimes\bar{\mathcal{F}})V_a(x)$. Соответствующий этой функции оператор, мы будем обозначать как $V_a^g(x)$, т.е.

$$\langle vac|V_a^g(x)|\theta_1, \ldots, \theta_N\rangle = \langle e^{a\varphi}\rangle f_a^g(\theta_1, \ldots, \theta_N).$$

Из выражения (3.23) следует, что форм факторы f_a^g могут быть представлены в виде

$$f_a^g(\theta_1,\ldots,\theta_N) = \rho^N J_{N,a}^g(e^{\theta_1},\ldots,e^{\theta_N}) \prod_{i<j}^N R(\theta_i-\theta_j), \tag{3.24}$$

где функции $J_a^g(x_1,\ldots,x_N)$ являются симметрическими рациональными функциями аргументов x_i с кинематическими полюсами и полюсами связных состояний. Очевидно, что J функции, которые соответствуют экспоненциальным операторам совпадают с $J_{N,a}^1 = J_{N,a}$. Используя (3.15) и (3.21), легко получить явный вид этих функций, а именно

$$\begin{aligned} J_{N,a}^g(x_1,\ldots x_N) = &\sum_{I_+ + I_- + I_0 = I} h^{\#I_0} e^{(\#I_+ - \#I_-)i\pi p} P^g(X_+|X_-|X_0)\times \\ &\times \prod_{i\in I_+, j\in I_-, k\in I_0} f\Big(\frac{x_i}{x_j}\omega\Big) f\Big(\frac{x_i}{x_j}\omega^2\Big) f\Big(\frac{x_i}{x_k}\omega\Big) f\Big(\frac{x_j}{x_k}\omega^{-1}\Big) \prod_{(p<q)\in I_0} f\Big(\frac{x_p}{x_q}\Big). \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$f(x) = 1 + \frac{h^2-1}{x+x^{-1}-1}. \tag{3.26}$$

В выражение (3.25) мы ввели множество целых чисел, $I = \{1,\ldots,N\}$ и сумма берется по всем разбиениям множества I в три подмножества I_σ, $\sigma = \{+,-,0\}$, так что $I_+\cup I_-\cup I_0 = I$ and $I_{\sigma'}\cap I_\sigma = \varnothing$ if $\sigma' \neq \sigma$. Каждому подмножеству I_σ мы поставили в соответствие подмножество $X_\sigma = \{x_i | i\in I_\sigma\}$. Функции $P^g(X|Y|Z)$ являются полиномами, определяемыми с помощью соотношений

$$\begin{aligned} &P^{\alpha_{-m}}(X|Y|Z) = S_m(X) - (-1)^m S_m(Y) + (\omega^{-m} - (-1)^m\omega^m) S_m(Z), \\ &P^{\bar\alpha_{-m}}(X|Y|Z) = S_{-m}(Y) - (-1)^m S_{-m}(X) + (\omega^{-m} - (-1)^m\omega^m) S_{-m}(Z), \\ &P^{g_1g_2} = P^{g_1}P^{g_2}, \quad P^{c_1g_1+c_2g_2} = c_1P^{g_1} + c_2P^{g_2} \quad (\forall g_1,g_2\in\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}},\ c_1,c_2\in\mathbb{C}), \end{aligned} \tag{3.27}$$

где мы обозначили степенные суммы порядка m как $S_m(x_1,\ldots,x_N) = \sum_{i=1}^N x^m$.

Подводя итог вышесказанному, используя формализм свободно полевого представления, мы получили набор решений f_a^g для форм факторных аксиом. Кроме того, в выражениях (3.24) мы (3.25) привели явный вид для этих функций. Однако, остается нерешенной задача об отождествлении пространства решений форм факторных аксиом f_a^g и полей из $\mathcal{F}\otimes\bar{\mathcal{F}}$. Необходимы некоторые дополнительные условия для того, чтоб определить какому оператору соответствует полученный форм фактор. В случае экспоненциальных операторов решение данной задачи известно. Достаточно потребовать правильную асимптотику форм факторов при больших значениях быстрот [67] и потребовать выполнения свойства кластерной факторизации [68]. Однако, для операторов потомков этих критериев оказывается недостаточно и эта задача не решена. Тем не менее, мы можем исследовать некоторые аналитические свойства полученных решений, что, возможно, приблизит нас к решению поставленной задачи.

3.2.1 Свойства форм факторов

В этом подразделе мы кратко опишем основные аналитические свойства форм факторов f_a^g. Доказательство этих свойств во многом аналогично доказательству подобных свойств, рассмотренных подробно в предыдущей главе. Поэтому, в этом подразделе мы только сформулируем основные результаты. Отметим, что формализм, разработанный в предыдущей главе, позволяет легко исследовать аналитические свойства форм факторов и является универсальным формализмом, который может быть построен для любой интегрируемой модели.

Свойство кластерной факторизации

Используя свободно полевое представление для форм факторов операторов потомков (3.23), скобку на алгебре (3.21) и свойства функций (3.27), мы легко получаем, что для любого элемента $g = h\bar{h}' \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$ выполняется соотношение

$$f_a^{h\bar{h}'}(\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1} + \Lambda, \ldots, \theta_N + \Lambda) \simeq f_a^h(\theta_{n+1} + \Lambda, \ldots, \theta_N + \Lambda) f_a^{\bar{h}'}(\theta_1, \ldots, \theta_n), \tag{3.28}$$

при $\Lambda \to +\infty$. Полученный результат согласуется с результатами, полученными в работе [38] с помощью других методов. Таким образом, всегда можно выделить киральные части операторов потомков при помощи этой асимптотики. Аналогично случаю, рассмотренному в предыдущей главе, можно показать, что операторы V_a^h, $h \in \mathcal{A}_n$ и $V_a^{\bar{h}}$, $h \in \bar{\mathcal{A}}_{\bar{n}}$ являются операторами потомками на уровнях $(n, 0)$ и $(0, \bar{n})$ соответственно.

Подсчет операторов потомков

Аналогично доказательству, приведенному в предыдущей главе, мы можем доказать, что количество независимых решений f_a^g форм факторных аксиом в каждом уровневом подпространстве совпадает с количеством операторов потомков в соответствующих уровневых подпространствах в Лагранжевом формализме. Это утверждение является следствием теоремы

Теорема 9. *Для общих значений параметра a, отображение* (3.23) *из алгебры $\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ в пространство функций f_a^g является биекцией.*

Мы не приводим доказательство этой теоремы, потому что оно во многом повторяет основные шаги доказательства теоремы 3. Отметим только, что в этом случае мы рассматриваем предел $a\to-\mathrm{i}\infty$. После доказательства теоремы в этом предел, мы применяем деформационный аргумент. Следствием этой теоремы является следующее предложение.

Предложение 6. *Для общих значений параметра a размерность пространства операторов V_a^g с $g\in\mathcal{A}_n\otimes\bar{\mathcal{A}}_{\bar{n}}$ совпадает с размерностью соответствующего подпространства в Фоковском модуле* $\dim(\mathcal{F}_n\otimes\bar{\mathcal{F}}_{\bar{n}})$.

Интегралы движения

Модель Буллоу-Додда обладает бесконечным набором коммутирующих интегралов движения I_s с нечетным спином s, значения которых приведены в (3.4). Локальные интегралы движения имеют диагональный вид в базисе асимптотических состояний. С другой стороны, мы можем рассмотреть киральный элемент α_{-m}. Этот элемент приводит к появлению общего множителя во всех слагаемых выражения (3.25), при условии выполнения следующих соотношений

$$e^{i\pi m}=-1,\quad e^{-\frac{i\pi}{3}m}+e^{\frac{i\pi}{3}m}=1. \tag{3.29}$$

Первое их эти соотношений отражает тот факт, что значения m должны быть нечетными, в то время как второе соотношение показывает, что допустимыми значениями m являются значения из набора (3.4). Как следствие, для данных значений s мы получаем

$$f_a^{\alpha_{-s}g}(\theta_1,\ldots,\theta_N)=\sum_{m=1}^{N}e^{s\theta_m}f_a^g(\theta_1,\ldots,\theta_N), \tag{3.30}$$

для любого элемента $g\in\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$. Мы заключаем, что элементы α_{-s} соответствуют подходящим образом нормированным интегралом движения I_s, в то время как антикиральные элементы $\bar{\alpha}_s$ соответствуют интегралам движения I_{-s}, т.е.

$$V_a^{\alpha_{-s}g}(x)=[V_a^g(x),I_s],\quad V^{\bar{\alpha}_{-s}g}(x)=[V_a^g(x),I_{-s}]. \tag{3.31}$$

3.2.2 Отражательные свойства форм факторов локальных операторов

В этом разделе мы докажем, что форм факторы локальных операторов удовлетворяют отражательным соотношениям. Эти соотношения устанавливают связь между экспоненциальными операторами с различными значениями параметра a. А именно, с точностью до некоторого не зависящего от параметра a множителя, следующие операторы совпадают [33]

$$V_a(x) = R(a)\ V_{Q_L-a}(x), \quad V_{-a}(x) = R'(a)\ V_{-Q'_L+a}(x), \tag{3.32}$$

где мы ввели обозначения

$$Q_L = \frac{1}{\sqrt{2}b} + \sqrt{2}b, \quad Q'_L = \frac{\sqrt{2}}{b} + \frac{b}{\sqrt{2}}. \tag{3.33}$$

Функции $R(a)$ и $R'(a)$ — это отражательные амплитуды, вычисленные в работе [33]. Эти отражательные соотношения происходят из аналогичных отражательных соотношений для экспоненциальных операторов в теории Лиувилля [31]. Действительно, можно рассматривать модель Буллоу-Додда как две различных версии возмущенной теории Лиувилля с зарядами Q_L or Q'_L, в зависимости от того, какой из операторов в выражении (3.1) был выбран в качестве возмущающего оператора. Используя рекуррентные соотношения, мы покажем, что J функции экспоненциальных операторов удовлетворяют соотношениям

$$J_{N,a}(x_1,\ldots,x_N) = J_{N,Q_L-a}(x_1,\ldots,x_N), \quad J_{N,-a}(x_1,\ldots,x_N) = J_{-Q'_L+a}(x_1,\ldots,x_N). \tag{3.34}$$

Следуя логике предыдущей главы, мы утверждаем, что отражательные соотношения для экспоненциальных операторов (3.32) могут быть обобщены на все пространство состояний локальных операторов, включая операторы потомки. Точнее, мы утверждаем, что для любого потомка экспоненциально оператора V_a^g существует некоторый потомок экспоненциального оператора $V_{wa}^{g'}$, такой что форм факторы этих операторов совпадают. Здесь мы ввели обозначение w для элемента конечной группы $\mathcal{W}$, порождаемой элементами w_1 и w_2, таким что

$$w_1 a = Q_L - a, \quad w_2 a = -Q'_L - a. \tag{3.35}$$

Оба этих доказательства используют рекуррентные соотношения между форм факторами. Для вывода рекуррентных соотношений мы построим свободно-полевое представление для функций $J^g_{N,a}$ определенных в (3.24).

3.3 Альтернативная процедура бозонизации

Из выражения (3.24) следует, что каждый форм фактор пропорционален функции $J^g_{N,a}$ с точностью до некоторого однородного множителя, зависящего только от числа частиц. Для получения свободно полевого представления для функций $J^g_{N,a}$ мы рассмотрим алгебру Гейзенберга, порождаемую элементами $d^\pm_n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$. Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениями

$$[d^\pm_m, d^\pm_n]=0, \qquad [d^\pm_m, d^\mp_n]=mA^\pm_n\delta_{m+n,0}, \tag{3.36}$$

причем коэффициенты $A^\pm_n$ имеют вид

$$A^\pm_n = 4\,\omega^{\pm\frac{3}{2}}\cos\frac{\pi n}{6}\Big(\cos\frac{\pi n}{3}-\cos\frac{\pi(b-b^{-1})n}{3Q}\Big). \tag{3.37}$$

Отметим, что

$$A^-_n = A^+_{-n} = (-1)^n A^+_n. \tag{3.38}$$

Пусть $\hat{a}$ — это дополнительный центральный элемент рассматриваемой алгебры. Кроме того, пусть $|1\rangle_a$ — это вакуумный вектор, который уничтожается генераторами $d^\pm_n|1\rangle_a = 0$ $(n>0)$, причем $\hat{a}|1\rangle_a = a|1\rangle_a$. Фоковское пространство порождается операторами $d^\pm_{-n}$ $(n>0)$, действующими на вакуумный вектор $|1\rangle_a$, и будет в дальнейшем обозначаться как $\mathcal{D}^L_a$. Аналогично, мы рассмотрим Фоковское пространство $\mathcal{D}^R_a$, которое порождается генераторами $d^\pm_n$ $(n>0)$, действующими на вакуумный вектор ${}_a\langle 1|$. Этот вакуумный вектор уничтожается отрицательными модами и, кроме того, ${}_a\langle 1|\hat{a} = {}_a\langle 1|a$. Рассматриваемые Фоковские пространства могут быть разложены в прямую сумму уровневых подпространств $\mathcal{D}^R_a = \oplus_{n=0}^\infty \mathcal{D}^R_{a,n}$ и $\mathcal{D}^L_a = \oplus_{n=0}^\infty \mathcal{D}^L_{a,n}$.

Рассмотрим следующие экспоненциальные операторы

$$\lambda^\pm(z) = \exp\sum_{n\neq 0}\frac{d^\pm_n}{n}z^{-n}, \quad \lambda^0(z) =: \lambda^+(z\omega^{-1})\lambda^-(z\omega) : . \tag{3.39}$$

Здесь мы ввели обозначение $:\cdots:$ для процедуры нормального упорядочивания, определенной с помощью соотношений.

$$\begin{gathered}\lambda^\pm(z')\lambda^\pm(z') =: \lambda^\pm(z')\lambda^\pm(z') :,\\ \lambda^-(z')\lambda^+(z) = \lambda^+(z)\lambda^-(z') = f\Big(\frac{z}{z'}\omega\Big)f\Big(\frac{z}{z'}\omega^2\Big) : \lambda^+(z)\lambda^-(z') :,\end{gathered} \tag{3.40}$$

Рассмотрим токи

$$t(z) = e^{i\pi p}\lambda^+(z) + e^{-i\pi p}\lambda^-(z) + h\,\lambda^0(z), \tag{3.41}$$

которые выглядят очень похоже на Лукьяновские токи (3.18). Функции $J_{N,a}$, которые определяют форм факторы экспоненциальных операторов даются матричными элементами токов $t(x_i)$, а именно

$$J_{N,a}(x_1, \ldots, x_N) = {}_a\langle 1|t(x_1)\ldots t(x_N)|1\rangle_a. \tag{3.42}$$

Легко обобщить предложенную конструкцию для получения аналогичного свободно-полевого представления для всего набора функций $J^g_{N,a}$, которые определяют форм факторам операторов потомков. В предыдущей главе мы описали процедуру, которая позволяет решить эту задачу. Действительно, рассмотрим два представления алгебры $\mathcal{A}$ в алгебры Гейзенберга, π_R и π_L, определенные следующим образом

$$\pi_R(\alpha_{-n}) = \frac{d^+_n - d^-_n}{A^+_n}, \quad \pi_L(\alpha_{-n}) = \frac{d^+_{-n} - d^-_{-n}}{A^+_n} \quad (n > 0). \tag{3.43}$$

Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
[\pi_R(\alpha_{-n}), \lambda^\pm(z)] &= (\pm)^{n+1} z^n \lambda^\pm(z),\\
[\pi_L(\alpha_{-n}), \lambda^\pm(z)] &= -(\mp)^{n+1} z^{-n} \lambda^\pm(z),\\
[\pi_R(\alpha_{-m}), \pi_L(\alpha_{-n})] &= -m(A^+_m)^{-1}(1 + (-1)^m)\delta_{m-n,0}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Введем следующие обозначения для векторов, получаемых из векторов старшего веса в результате применения операторов алгебр π_L и π_R, а именно

$${}_a\langle h| = {}_a\langle 1|\pi_R(h), \quad |\bar{h}\rangle_a = \pi_L(h)|1\rangle_a. \tag{3.45}$$

Рассмотрим киральный элемент $h \in \mathcal{A}$. Учитывая коммутационные соотношения (3.44) мы немедленно получаем, что функции $J^g_{N,a}$ киральных и антикиральных операторов потомков даются следующими матричными элементами

$$J^h_{N,a}(x_1, \ldots, x_N) = {}_a\langle h|t_1(x_1)\ldots t_N(x_N)|1\rangle_a, \quad J^{\bar{h}}_{N,a}(x_1, \ldots, x_N) = \langle 1|t_1(x_1)\ldots t_N(x_N)|\bar{h}\rangle_a.$$

Теперь, мы рассмотрим элемент общего вида $g = h\bar{h}$. Соответствующий ему матричный элемент мы обозначим как

$$\tilde{J}^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1,\ldots,x_N) = {}_a\langle h|t_1(x_1),\ldots,t_N(x_N)|\bar{h}'\rangle_a.$$

В предыдущей главе было показано, что функции $\tilde{J}^g$ могут быть выражены в виде линейных комбинаций функций J^g. Поэтому, вектора (3.45) в дальнейшем будут называться 'физическими' векторами. Эти вектора образуют подпространства $\mathcal{D}^R_a$ и $\mathcal{D}^L_a$, которые могут быть разложены в прямые суммы уровневых подпространств $\mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_a = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_{a,n}$ и $\mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}_a = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}_{a,n}$. Очевидно, что

$$\dim\mathcal{D}^{R,\mathrm{phys}}_{a,n} = \dim\mathcal{D}^{L,\mathrm{phys}}_{a,n} = \dim\mathcal{F}_n.$$

3.4 Реккурентные соотношения для форм факторов экспоненциальных операторов

В этом подразделе мы исследуем аналитические свойства матричных элементов (3.42), которые определяют форм факторы экспоненциальных операторов. Рассмотрим функцию $J^g_{N+1,a}(z,X)$ как аналитическую функцию аргумента z, зависящую от набора параметров $X = \{x_1,\ldots,x_N\}$. Докажем, что эта функция имеет простые полюса, которые соответствуют кинематическим полюсам и полюсам связных состояний матрицы рассеяния. В предложенном свободно-полевом представлении(3.42) удается вычислить вычеты в этих полюсах. Рассмотрим операторное произведение

$$t(z)t(x). \tag{3.46}$$

Легко показать, что что простые полюса этого произведения находятся в точках

$$z = x\omega^{\pm1}, \quad z = x\omega^{\pm2}, \quad z = -x.$$

Рассмотрим каждые из этих полюсов подробно.

Начнем с полюсов в точках $z = x\omega^{\pm1}$. Эти полюса не соответствуют ни динамическим ни полюсам связных состояний, поэтому, мы ожидаем, что данные полюса не вносят вклада в матричные элементы, т.е. вычеты матричных элементов в этих полюсах равны нулю.

Рассмотрим сингулярную часть операторного разложения (3.46), которая имеет вид

$$(z - x\omega^{\pm 1})t(z)t(x)\Big|_{z=x\omega^{\pm 1}} = \operatorname*{Res}_{z=x\omega^{\pm 1}} f\left(\frac{z}{x}\right) h^2\Big(:\lambda^0(x\omega^{\pm 1})\lambda^0(x): - :\lambda^{\mp}(x\omega^{\pm 1})\lambda^{\pm}(x):\Big).$$

При подстановке этого операторного выражения в матричные элементы и учитывая следующие соотношения между операторами

$$\langle :\lambda^0(x\omega^{\pm 1})\lambda^0(x): \lambda^\sigma(x')\rangle = \langle :\lambda^{\mp}(x\omega^{\pm 1})\lambda^{\pm}(x): \lambda^\sigma(x')\rangle, \quad \sigma = \pm, 0,$$

мы получаем, что вычет матричного элемента в рассматриваемой полюсе действительно равен нулю, т.е.

$$(z - x_n\omega^{\pm 1})J^g_{N+1,a}(z, X)\Big|_{z=x_n\omega^{\pm 1}} = 0.$$

Теперь рассмотрим полюс в точке $z = x\omega^{\pm 2}$, который соответствует полюсу связного состояния в амплитуде рассеяния. В этом полюсе сингулярная часть операторного разложения имеет вид

$$(z - x\omega^{\pm 2})t(z)t(x)\Big|_{z=x\omega^{\pm 2}} = \pm\frac{h(h^2-1)}{\omega - \omega^{-1}} x\omega^{\pm 2}\tilde{t}(x\omega^{\pm 1}),$$

где мы ввели оператор

$$\tilde{t}(x) = \gamma :\lambda^0(x\omega^{+1})\lambda^+(x\omega^{-1}): + \gamma^{-1} :\lambda^-(x\omega^{+1})\lambda^0(x\omega^{-1}): + h :\lambda^-(x\omega^{+1})\lambda^+(x\omega^{-1}): .$$

Отметим сходство этого оператора и оператора с оператором (3.41). В каждом матричном элементе, содержащем оператор $\tilde{t}(z)$, его можно заменить на оператор $t(z)$, учитывая следующее соотношение

$$\langle \tilde{t}(z)t(x_1)\dots t(x_N)\rangle = \prod_{n=1}^{N} f\left(\frac{z}{x_n}\right)\langle t(z)t(x_n)\dots t(x_N)\rangle.$$

Следовательно, мы получаем, что вычет в полюсе связного состояния дается выражением

$$(z - x_n\omega^{\pm 2})J_{N+1,a}(z, X)\Big|_{z=x_n\omega^{\pm 2}} = x_n\omega^{\pm 2}\frac{h(h^2-1)}{\omega - \omega^{-1}}\prod_{i\neq n} f\left(\frac{x_n}{x_i}\omega^{\pm 1}\right)J_{N,a}(x_n\omega^{\pm 1}, \hat{X}_n), \quad (3.47)$$

где мы ввели обозначения для набора $\hat{X}_n = X \setminus \{x_n\}$.

Последний полюс находится в точке $z = -x$ и соответствует кинематическому полюсу.

Для сингулярной части операторного разложения в этом полюсе мы получаем выражение

$$(z+x)t(z)t(x)\Big|_{z=-x} = xf(\omega^2)\frac{h^2-1}{\omega-\omega^{-1}}\left(s(x\omega^{-3/2})-s(x\omega^{3/2})\right)$$

где мы ввели оператор $:\lambda^+(x\omega^{-3/2})\lambda^-(x\omega^{3/2}):$. Будучи вставленным в матричный элемент, этот оператор приводит к появлению общего множителя, а именно

$$\langle s(z)t(x_1)\ldots t(x_N)\rangle = \prod_{n=1}^{N} f\Big(\frac{z}{x}\omega^{1/2}\Big)f\Big(\frac{z}{x}\omega^{-1/2}\Big)\langle t(x_1)\ldots t(x_N)\rangle$$

В результате, мы получаем следующее выражение для вычета матричного элемента в кинематическом полюсе

$$\begin{aligned}&(z+x_n)J_{N+1,a}(z,X)\Big|_{z=-x_n} = \\ &= x_n f(\omega^2)\frac{h^2-1}{\omega-\omega^{-1}}\left(\prod_{i\neq n} f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega^{-2}\Big)f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega^{-1}\Big) - \prod_{i\neq n} f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega^{2}\Big)f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega\Big)\right)J_{N,a}(z,\hat{X}).\end{aligned} \quad (3.48)$$

Таким образом, мы доказали, что матричный элемент $\langle t(z)t(x_1)\ldots t(x_N)\rangle$, рассматриваемый как функция аргумента z, имеет простые полюса в точках, соответствующих кинематическим и полюсам связных состояний форм факторов. Кроме того, мы вычислили вычеты в этих полюсах и показали, что они могут быть представлены в виде матричных элементов с меньшим числом числом операторов $t(x)$.

3.4.1 Рекуррентные соотношения

Аналитические свойства матричных элементов, а точнее, положение полюсов и вычеты в них (3.47) и (3.48), позволяют установить рекуррентные соотношения между ними. Рассмотрим функцию $J^g_{N+1,a}(z,X)$ как аналитическую функцию аргумента z, зависящую от параметров $X=\{x_1,\ldots x_N\}$. Мы можем отделит вклад полюсов от регулярной части. Выше было показано, что вычеты в полюсах могут быть вычислены явно. Соответственно, мы имеем

$$\begin{aligned}J^g_{N+1,a}(z,X) &= J^{(\infty)g}_{N+1,a}(z,X) + \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n}{z+x_n}K_n(X)J^g_{N-1,a}(X_n) + \\ &+ \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n\omega^2}{z-x_n\omega^2}B^+_n(X)J^g_{N,a}(x_n\omega,\hat{X}_n) - \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n\omega^{-2}}{z-x_n\omega^{-2}}B^-_n(X)J^g_{N,a}(x_n\omega^{-1},\hat{X}_n),\end{aligned} \quad (3.49)$$

где $J_{N+1,a}^{(\infty)g}(z,X)$ — регулярная часть функции, а функции $K_n(X)$ и $B_n^{\pm}(X)$ даются следующими выражениями

$$K_n(x_1,\ldots,x_N) = \frac{(h^2-3)(h^2-1)}{2(\omega-\omega^{-1})}\Big(\prod_{i\neq n} f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega^2\Big)f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega\Big) - \prod_{i\neq n} f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega^{-2}\Big)f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega^{-1}\Big)\Big),$$
$$B_n^{\pm}(x_1,\ldots,x_N) = \frac{h(h^2-1)}{\omega-\omega^{-1}}\prod_{i\neq n} f\Big(\frac{x_n}{x_i}\omega^{\pm1}\Big).$$

Функция $J_{N+1,a}^{(\infty)g}(z,X)$ является регулярной во всей комплексной плоскости, за исключением точек $z=0,\infty$. Так как сумма по полюсам порядка $O(z^{-1})$ при $z\to\infty$, то асимптотическое поведение функции J^g, как функции аргумента z, однозначно определяется регулярной частью.

Для форм факторов экспоненциальных операторов регулярная часть может быть легко найдена. Действительно, рассматривая предел $z\to\infty$ и используя свойство кластерной факторизации (3.28), мы немедленно получаем

$$J_{N+1,a}^{(\infty)}(z,X) = J_{1,a}J_{N,a}(X), \tag{3.50}$$

где $J_{1,a}$ — это одно-точечный матричный элемент

$$J_{1,a} = 4\sin\Big(\frac{\pi\sqrt{2}a}{3Q}\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{6Q}(2\sqrt{2}a-b+b^{-1})\Big). \tag{3.51}$$

Таким образом, соотношения (3.49) с начальными условиями (3.50) и $J_{0,a}=1$ однозначно определяют набор функций $J_{N,a}(x_1,\ldots,x_N)$ экспоненциальных операторов.

Теперь мы перейдем к доказательству отражательных свойств для форм факторов экспоненциальных полей. Отражательное свойство (3.34) является немедленным следствием следующей теоремы

Теорема 10. *Функции $J_{N,a}$ являются симметричными функциями относительно преобразований конечной группы $\mathcal{W}$, порождаемой элементами w_1 и w_2, введенными в* (3.35), *а именно*

$$J_{N,a}(z,X) = J_{N,wa}(z,X) \qquad \forall w\in\mathcal{W} \tag{3.52}$$

Для доказательства этой теоремы, отметим, что параметр a входит в рекуррентные соотношения (3.49) и (3.51) только посредством функции $J_{1,a}$. Легко проверить, что эта функция действительно обладает требуемым отражательным свойством.

Доказательство отражательные свойств для форм факторов операторов потомков буквально повторяет шаги доказательства аналогичной теоремы из раздела 2.5. Поэтому, мы сформулируем только результат.

Теорема 11. *В случае общего положения параметра a существует представление группы $\mathcal{W}$, а именно r_a на алгебре $\mathcal{A}$ такое, что для любых $h, h' \in \mathcal{A}$ выполняется следующее соотношение*

$$\tilde{J}^{h\bar{h}'}_{N,a}(x_1, \ldots, x_N) = \tilde{J}^{(r_a(w)h)\overline{(r_{-a}(w)h')}}_{N,wa}(x_1, \ldots, x_N).$$

3.4.2 Уравнения движения для форм факторов

Предложенные выше рекуррентные соотношения позволяют, в частности, доказать, что предложенные форм факторы модели Буллоу-Додда удовлетворяют квантовым уравнениям движения, которые имеют вид

$$\partial\bar{\partial}\varphi = 8\sqrt{2}\pi\mu b \left(e^{\sqrt{2}b\varphi} - e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\varphi}\right).$$

В разделе 2.4.2 было показано, как из данных уравнений следуют уравнения движения для форм факторов. В модели Буллоу-Додда эти уравнения выглядять следующим образом

$$S_1(z, X)S_{-1}(z, X)J'_{N+1}(z, X) = A\Big(J_{N+1,\sqrt{2}b} - J_{N+1,-b/\sqrt{2}}\Big), \tag{3.53}$$

где константа A дается выражением

$$A = \frac{-\sqrt{2}\pi}{6\sqrt{3}Q\sin\left(\frac{\pi}{6Qb}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3Qb}\right)},$$

причем мы учли, что вакуумные средние операторов $e^{\sqrt{2}b}$ и $e^{b/\sqrt{2}}$ совпадают [33]. Доказательство уравнений движения (3.53) производится по рекурсии и буквально повторяет основные моменты доказательства, приведенного в разделе 2.4.2.

3.5 Явные выражения для форм факторов экспоненциальных операторов

Из предложенного свободно-полевого представления для форм факторов следует, что функции $J_{N,a}(x_1, \ldots, x_N)$ являются симметрическими и 2πi-периодическими функциями аргументов $x_i = e^{\theta_i}$. Как следствие, эти функции могут быть представлены в удобном виде с помощью симметрических функций. Базисом в пространстве таких функций от N

переменных являются элементарные симметрические полиномы $\sigma_N(x_1,\dots,x_N)$, определяемые с помощью производящей функции

$$\prod_{i=1}^{N}(x+x_i)=\sum_{i=0}^{N}x^{N-i}\sigma_i(x_1,\dots,x_N).$$

Удобно выделить вклад кинематических полюсов и полюсов связных состояний в общий множитель. Тогда функции $J_{N,a}(x_1,\dots,x_N)$ допускают следующую параметризацию

$$J_{N,a}(x_1,\dots,x_N)=\Lambda_N(\sigma_1,\dots,\sigma_N)\prod_{1\leq i<j\leq N}\frac{1}{(x_i+x_j)(x_i^2+x_ix_j+x_j^2)}, \tag{3.54}$$

где $\Lambda_N(\sigma_1,\dots,\sigma_N)$ — это симметрический полином, зависящий от функций $\sigma_i(x_1,\dots,x_N)$. Мы приведем явные выражения для этих полиномов до $N=3$ включительно,

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= J_{1,a},\\
\Lambda_2(\sigma_1,\sigma_2) &= J_{1,a}^2\sigma_1^2-J_{1,a}(J_{1,a}+h-h^3)\sigma_2,\\
\Lambda_3(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) &= \quad J_{1,a}(J_{1,a}^2+(-3+h^2)(-1+h^2)^2+J_{1,a}(h-h^3))\sigma_2^3\sigma_3\\
&+J_{1,a}(J_{1,a}^2+(-3+h^2)(-1+h^2)^2+J_{1,a}(h-h^3))\sigma_1\sigma_3^2\\
&-J_{1,a}h(J_{1,a}+h-h^3)(4-5h^2+h^4)\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\\
&-J_{1,a}^2(J_{1,a}+h-h^3)\sigma_1\sigma_2\\
&-J_{1,a}^2(J_{1,a}+h-h^3)\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3\\
&+J_{1,a}(-J_{1,a}^2+3(-1+h^2)^2+J_{1,a}h(4-5h^2+h^4))\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3\\
&+J_{1,a}^3\sigma_1^3\sigma_2^3.
\end{aligned}$$

Используй свободно-полевое представление (3.25) или (3.42) легко вычислить и другие много-точечные форм факторы.

Для простой проверки полученных выражений мы рассмотрим форм факторы экспоненциальных операторов, которые входят в действие модели Буллоу-Додда (3.1). Общее выражение для тензора энергии импульса $\Theta(x)$, не противоречащее квантовым уравнением движения, дается линейной комбинацией этих экспоненциальных операторов [69]. Учитывая закон сохранение тензора энергии импульса, можно показать, что N-частичные форм факторы оператора $\Theta(x)$ должны быть пропорциональны $\sigma_1\sigma_{N-1}$ для $N>2$. Легко проверить, что представленные нами форм факторы действительно обладают таким свойством.

3.6 Минимальные модели, возмущенные оператором Φ_{12}

В этом разделе мы рассмотрим модель Буллоу-Додда при мнимых значениях константы связи b. Получаемая таким образом модель соответствует теории Тоды для твистованной аффинной алгебры Каца-Муди $A_2^{(2)}$, причем действие для нее получается из действия модели Буллоу-Додда с помощью подстановки $b \to i\beta$, $\mu \to -\mu$, т.е.

$$S_{cBD} = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\partial\varphi)^2 - \mu (e^{i\sqrt{2}\beta\varphi} - 2e^{-i\frac{\beta}{\sqrt{2}}\varphi}) \right). \tag{3.55}$$

Легко видеть, что эта модель не унитарна, так как ее Гамильтониан не эрмитов. Однако, в работе [51] было показано, что при некоторых значениях константы связи β пространство состояний модели может быть ограничено на унитарный сектор, причем состояния этого сектора образуют замкнутую операторную алгебру. Мы кратко опишем процедуру этого ограничения. Используя действие (3.55), можно построить нелокальные сохраняющиеся заряды, которые коммутируют с Гамильтонианом. Эти заряды образуют квантовую аффинную алгебру $U_q(A_2^{(2)})$, причем

$$q = e^{\frac{i\pi}{2\beta^2}},$$

и однозначно определяют S-матрицу модели с точностью до скалярного фактора [50, 51, 52]. Ограничение пространства состояний происходит следующим образом. Квантовая алгебра $U_q(A_2^{(2)})$ содержит две подалгебры $U_q(sl_2)$ и $U_{q^4}(sl_2)$ и обе из них могут быть выбраны для квантово-группового усечения пространства состояний. Мы рассмотрим только первую возможность. Пусть параметр $2\beta^2$ принимает следующие рациональные значения

$$2\beta^2 = \frac{p}{p'},$$

где p и p' взаимно простые числа, такие что $p > p' > 1$. В этом случае Гильбертово пространства комплексно продолженной модели Буллоу-Додда может быть последовательно ограничено до представлений алгебры $U_q(sl_2)$. Подробности этой процедуры могут быть найдены в работах [51, 52]. Теория Жибер-Михайлова-Шабата с ограниченным таким образом пространством состояний совпадает с минимальной моделью $M(p, p')$ конформной теории поля, возмущенной оператором $\Phi_{1,2}$ [51], причем действие для этой модели можно формальным образом представить в виде

$$S_{M(p,p')} + \lambda \int d^2x \Phi_{1,2}(x). \tag{3.56}$$

Константы связи μ и λ связаны следующим соотношением [35]

$$\lambda^2 = -\frac{4\pi\mu^3}{(4\beta^2-1)^2}\frac{\Gamma^2(1-2\beta^2)\Gamma(4\beta^2)}{\Gamma^2(2\beta^2)\Gamma(1-4\beta^2)}.$$

Опишем кратко основные обозначения, используемые в конформной теории поля. Центральный заряд минимальной модели $M(p,p')$ имеет вид

$$c = 1 + 6Q_L^2,$$

где определение Q_L было введено ранее (3.33), причем в этом выражении подразумевается подстановка $b \to \mathrm{i}\beta$. Спектр примарных операторов минимальной модели $M(p,p')$ состоит из вырожденных полей $\Phi_{m,n}$, причем $m = 1,\ldots,p-1$ и $n = 1,\ldots,p'-1$. Конформные размерности этого набора операторов принимают следующие значения

$$\Delta_{m,n} = a_{m,n}(Q_L - a_{m,n}),$$

где

$$a_{m,n} = -\frac{(n-1)}{2}\sqrt{2}i\beta - \frac{(m-1)}{2}\frac{1}{\sqrt{2}i\beta}.$$

Нормировка примарных операторов минимальной модели фиксируется двух-точечной корреляционной функцией

$$\langle\Phi_{m,n}(x)\Phi_{m,n}(0)\rangle = |x|^{-4\Delta_{m,n}}.$$

Примарные операторы возмущенной минимальной модели связаны с некоторыми подмножеством экспоненциальных полей в аналитически продолженной модели Буллоу-Додда [49, 50]. А именно, можно проверить, что следующие экспоненциальные операторы

$$V_{a_{1,n}}(x) = e^{a_{1,n}\varphi(x)},$$

коммутируют с подгруппой генераторов алгебры $U_q(sl_2)$ и могут быть отождествлены с примарными операторами $\Phi_{1,n}$ возмущенных минимальных моделей.

3.6.1 Теория рассеяния

Фундаментальной частицей модели Дибера-Михайлова-Шабата является кинковый триплет, причем масса легчайшего кинка определяется значением константы связи λ [35]. Под действием алгебры $U_q(sl_2)$ фундаментальные кинки образуют либо синглетные связные состояния, либо порождают серии бризеров или триплетов, соответствующих тяжелым кинкам.

После аналитического продолжения к мнимым значениям константы связи и квантово-группового усечения пространства состояний, S-матрица модели Буллоу-Додда может рассматриваться как амплитуда рассеяния легчайших бризеров в минимальной модели $M(p,p')$, возмущенной оператором $\Phi_{1,2}$ [66]. В S-матрице появляются два дополнительных полюса в 'физической полосе', которые соответствуют тяжелым бризерам.

3.6.2 Форм факторы

Форм факторы модели Буллоу-Додда, будучи аналитически продолженными до мнимых значений константы связи, удовлетворяют форм факторным аксиомам модели Жибера-Михайлова-Шабата. Следовательно, эти форм факторы могут быть отождествлены с форм факторами легчайших бризеров в возмущенной минимальной модели. Для изучения аналитических свойств минимальных форм факторов полезно использовать следующее представление

$$R(\theta) = \mathcal{N}(b)\frac{g_0(\theta)g_{\frac{2}{3}}(\theta)}{g_{\frac{2b}{3Q}}(\theta)g_{\frac{2}{3Qb}}(\theta)}, \tag{3.57}$$

где функции $g_\alpha(\theta)$ имеют следующий вид

$$g_\alpha(\theta) = \exp\Big(2\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{\cosh\frac{(2\alpha-1)t}{2}}{\cosh\frac{t}{2}\sinh t}\sin^2\frac{(i\pi-\theta)t}{2\pi}\Big),$$

а нормировка минимального форм фактора выбирается таким образом, что $R(\theta)\to 1$ при больших значениях быстрот, т.е. $\theta\to\infty$. Таким образом, нормировочная константа, которая зависит от параметра b модели, имеет вид

$$\mathcal{N}(b) = \exp\Big(-4\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{\cosh\frac{t}{6}\sinh\frac{tb}{3Q}\sinh\frac{t}{3Qb}}{\sinh t\cosh\frac{t}{2}}\Big).$$

Из этого представления легко видно, что при аналитическом продолжении в двухточечном минимальном форм факторе появляются два полюса в 'физической полосе', положения которых определяются с помощью следующих функциональных соотношений

$$\begin{gathered} g_{1+\alpha}(\theta) = g_{-\alpha}(\theta), \\ g_\alpha(\theta)g_{-\alpha}(\theta) = \mathcal{P}_\alpha(\theta) \equiv \frac{\cos\pi\alpha-\cosh\theta}{2\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}}. \end{gathered} \tag{3.58}$$

В дальнейшем мы будем обсуждать только ненормированные форм факторы f_a. В свободно-полевом представлении правильная нормировка форм факторов фиксируется вакуумным ожидаемым соответствующего оператора. Однако, в общем случае, возмущенные минимальные модели обладают несколькими вакуумами и вычисление их вкладов в вакуумные ожидаемые операторов остается открытой задачей.

Таким образом, мы построили свободно полевое представление для форм факторов легчайших бризеров в минимальной модели $M(p,p')$, возмущенной примарным оператором $\Phi_{1,2}$, а именно

$$f^{a_{1,n}}_{1\dots 1}(\theta_1,\dots,\theta_N)_{Mp,p'} = f^{a_{1,n}}(\theta_1,\dots,\theta_N)\Big|_{2b^2=-p/p'}.$$

При аналитическом продолжении до мнимых значений константы связи, в минимальных двух-точечных форм факторах (3.57) возникают дополнительные полюса. Однако, в предложенном нами свободно-полевом представлении (3.42), минимальные форм факторы исключены из конструкции. Поэтому, процедура усреднения генерирует функции с той же аналитической структурой, что и в модели Буллоу-Додда. В следующем разделе мы рассмотрим модель Изинга в магнитном поле, как важный пример применения предложенной нами процедуры вычисления форм факторов.

3.7 Модель Изинга в магнитном поле

Минимальная модель $M(3,4)$, возмущенная примарным оператором $\Phi_{1,2}$, описывает модель Изинга при критической температуре в ненулевом магнитном поле. Центральный заряд этой минимальной модели равен $c = 1/2$ а пространство полей состоит из двух нетривиальных примарных операторов $\Phi_{1,2}$ и $\Phi_{1,3}$ с конформными размерностями $\Delta_{1,2} = 1/16$ и $\Delta_{1,3} = 1/2$. С другой стороны, эта модель получается как скейлинговый предел модели Изинга на решетке в ее критической точке. Поэтому, мы можем определить оператор плотности спина $\sigma(x)$ и оператор плотности энергии $\epsilon(x)$, как скейлинговые пределы соответствующих решеточных операторов. Предполагая стандартную нормировку конформной теории поля для этих операторов, мы можем отождествить их с примарными операторами минимальной модели, а именно $\sigma(x) = \Phi_{1,2}(x)$ и $\epsilon(x) = \Phi_{1,3}(x)$. При этом, константа связи λ в действии (3.56) отождествляется с внешним магнитным полем или, точнее, с его скейлинговым пределом.

3.7.1 Теория рассеяния

Спектр рассматриваемой модели содержит 8 различных типов частиц A_i, $i = 1, \dots, 8$. При аналитическом продолжении S-матрица модели Буллоу-Додда (3.5) до значения $2b^2 = -3/4$, матрица рассеяния буквально воспроизводит S-матрицу легчайших частиц в модели Изинга в магнитном поле

$$S_{11}(\theta) = \frac{\tanh\frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi}{3})\tanh\frac{1}{2}(\theta + \frac{2i\pi}{5})\tanh\frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{15})}{\tanh\frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi}{3})\tanh\frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi}{5})\tanh\frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{15})}.$$

Дополнительные полюса, которые возникают в S-матрице, соответствуют тяжелым частицам, например, частица $_2$ является связным состояниям частиц A_1 при $\theta = 2\pi\mathrm{i}/3$, а частица A_3 — связным состоянием частиц A_1 при $\theta = \pi\mathrm{i}/15$. Полный набор двух-частичных амплитуд рассеяния $S_{ab}(\theta)$ может быть получен, используя амплитуду S_{11} и бутстрапную структуру модели [47]. Кроме того, можно точно определить массы всех частиц

$$\begin{aligned}
&m_1 = m, && m_2 = 2m\cos\frac{\pi}{5}, && m_3 = 2m\cos\frac{\pi}{30},\\
&m_4 = 2m_2\cos\frac{7\pi}{30}, && m_5 = 2m_2\cos\frac{2\pi}{15}, && m_6 = 2m_2\cos\frac{\pi}{30},\\
&m_7 = 4m_2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30}, && m_8 = 4m_2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15},
\end{aligned}$$

Отметим, что при аналитическом продолжении и квантово-групповом усечении не все интегралы движения модели Буллоу-Додда сохраняются. Модель Изинга в магнитном поле обладает интегралами движения I_s, причем спины принимают следующие значения

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \quad \mathrm{mod}\ 30.$$

Эти целые числа, по модулю 30, совпадают с экспонентами алгебры Ли E_8. Кроме того, количество частиц модели Изинга в магнитном поле в точности равно рангу группы E_8.

3.7.2 Форм факторы

В соответствии с предложенной нами конструкцией, форм факторы в модели Изинга в магнитном имеют свободно-полевое представление. Полезно рассмотреть аналитическое продолжение форм факторов (3.20) более подробно. При аналитическом продолжении двух-точечного минимального форм фактора, мы получаем

$$R(\theta)\Big|_{2b^2=-3/4} = \frac{R_{11}(\theta)}{\mathcal{P}_{2/5}(\theta)\mathcal{P}_{1/15}(\theta)},$$

где функции $\mathcal{P}_\alpha(\theta)$ были определены ранее (3.58) и, кроме того, мы ввели обозначение

$$R_{11}(\theta) = \mathcal{N}(\mathrm{i}\sqrt{3/8})\ g_0(\theta)g_{2/3}(\theta)g_{2/5}(\theta)g_{1/15}(\theta).$$

Можно показать, что эти функции удовлетворяют первым двум форм факторным аксиомам и не имеют ни нулей, ни полюсов в ‘физической области’. Поэтому, мы будем называть эти функции двух-точечными минимальными форм факторами легчайших частиц A_1 в модели Изинга в магнитном поле. Появившиеся полюса соответствуют полюсам $S_{11}(\theta)$ и, поэтому, связным состояниям A_2 и A_3. Аналитическое продолжение функции $J_{N,a}(x_1,\ldots,x_N)$ довольно прямолинейно. В результате, мы получаем

$$f^{a_{1,n}}_{1\ldots1}(\theta_1,\ldots,\theta_N)_{M(3,4)} = \rho^N J_{N,a_{1,n}}(x_1,\ldots,x_N)\prod_{1\le i<j\le N}\frac{R_{11}(\theta_{ij})}{\mathcal{P}_{2/5}(\theta_{ij})\mathcal{P}_{1/15}(\theta_{ij})},$$

где предполагается подстановка $2b^2 = -3/4$. Функции $J_{N,a_{1,n}}(x_1,\ldots,x_N)$ в этом выражении вычисляются в рамках предложенного свободно-полевого представления. Мы проверили, что вычисления, выполненные в рамках свободно полевого представления или с помощью рекуррентных соотношений, воспроизводят результаты работы [56], где форм факторы вычислялись путем решения форм факторных аксиом. Отметим, что в этой работе были вычислены четырех-точечные форм факторы. Однако, используя свободно-полевое представление, вычисление много-точечных форм факторов сводиться к простой комбинаторной задаче.

В силу бутстрапной структуры модели, форм факторы для других сортов частиц могут быть получены из форм факторов легчайших частиц. Кроме того, стоит отметить, что в рассматриваемой модели правильная нормировка форм факторов примарных операторов может быть получена используя вакуумные средние соответствующих экспоненциальных операторов модели Буллоу-Додда [33],

$$\langle\Phi_{1,2}\rangle = -1.27758\ldots\ \lambda^{1/15},\quad \langle\Phi_{1,3}\rangle = 2.00314\ldots\ \lambda^{8/15}.$$

Эти значения хорошо согласуются с численными вычислениями [71] и были проверены для оператора $\Phi_{1,3}$ с высокой степенью точности [57].

Приведем результаты вычислений форм факторов в модели Изинга в магнитном поле для операторов плотности спина $\Phi_{1,2}$ и плотности энергии $\Phi_{1,3}$. Мы используем следующую параметризацию симметрических функций Λ, определенных в (3.54)

$$\rho^N \Lambda_N(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = \sum_{i,j,\ldots,k} c_{i,j,\ldots,k} \sigma_1^i \sigma_2^j \ldots \sigma_N^k.$$

Коэффициенты $c_{i,j,\ldots,k}$ приведены в таблице 3.1.

$\rho\Lambda_1$	$\Phi_{1,2}$	$\Phi_{1,3}$	$\rho^2\Lambda_2$	$\Phi_{1,2}$	$\Phi_{1,3}$
c_1	0.6409021102	3.706584366	$c_{2,0}$	0.4107555149	13.73876767
			$c_{0,1}$	3.179116785	7.022849954

$\rho^3\Lambda_3$	$\Phi_{1,2}$	$\Phi_{1,3}$	$\rho^4\Lambda_4$	$\Phi_{1,2}$	$\Phi_{1,3}$
$c_{0,0,3}$	0	0	$c_{0,1,0,4}$	0	0
$c_{0,3,1}$	0	-14.24712127	$c_{0,3,0,3}$	0	0
$c_{3,0,2}$	0	-14.24712127	$c_{0,5,0,2}$	0	0
$c_{1,4,0}$	2.037502656	26.03078585	$c_{2,5,2,0}$	0	0
$c_{4,1,1}$	2.037502656	26.03078585	$c_{0,0,2,3}$	0	-13.62445371
$c_{1,1,2}$	-11.78366457	-26.03078585	$c_{2,0,0,4}$	0	-13.62445371
$c_{3,3,0}$	0.2632540763	50.92390144	$c_{0,4,2,1}$	0	-20.58886976
$c_{2,2,1}$	16.28462393	2.660170221	$c_{2,4,0,2}$	0	-20.58886976
			$c_{0,2,2,2}$	0	34.21332347
			$c_{2,2,0,3}$	0	34.21332347
			$c_{0,1,4,1}$	0	40.27790712
			$c_{4,1,0,3}$	0	40.27790712
			$c_{0,3,4,0}$	0	-40.27790712
			$c_{3,0,5,0}$	0	-40.27790712
			$c_{4,3,0,2}$	0	-40.27790712
			$c_{5,0,3,1}$	0	-40.27790712
			$c_{2,0,4,1}$	-10.10678353	22.34920758
			$c_{4,0,2,2}$	-10.10678353	22.34920758
			$c_{2,2,4,0}$	10.43684984	7.520543065
			$c_{4,2,2,1}$	10.43684984	7.520543065
			$c_{1,0,3,2}$	10.10678353	31.55315325
			$c_{3,0,1,3}$	10.10678353	31.55315325
			$c_{1,5,1,1}$	10.10678353	37.6177369
			$c_{3,4,1,1}$	1.305839752	73.59139819

продолжение на следующей странице...

...продолжение

$\rho^3\Lambda_3$	$\Phi_{1,2}$	$\Phi_{1,3}$	$\rho^4\Lambda_4$	$\Phi_{1,2}$	$\Phi_{1,3}$
			$c_{1,4,3,0}$	1.305839752	73.59139819
			$c_{4,1,4,0}$	1.305839752	73.59139819
			$c_{1,1,5,0}$	-7.552175492	-73.59139819
			$c_{5,1,1,2}$	-7.552175492	-73.59139819
			$c_{2,1,2,2}$	-49.43207011	59.33896348
			$c_{1,1,1,3}$	24.88106821	55.54643644
			$c_{2,3,2,1}$	83.33249977	-11.54051329
			$c_{1,2,3,1}$	-65.19655371	-209.6936489
			$c_{1,3,1,2}$	-42.54002723	-105.8887946
			$c_{3,1,3,1}$	-0.3871377716	-292.7215171
			$c_{3,2,1,2}$	-65.19655371	-209.6936489
			$c_{3,3,3,0}$	0.168720093	143.9664991

Таблица 3.1: Коэффициенты симметрического полинома

Заключение

В первой главе нашей основной задачей было прояснение разницы между классами абсолютных и относительных когомологий. С математической точки зрения, удобно найти относительные когомологии, а затем постоить абсолютные. В некоторых случаях, например в случае, когда пространство состояний в Лиувиллевском секторе реализуется модулями Фейгина-Фукса, существует изоморфизм $H_k^{\text{abs}} \cong H_k^{\text{rel}} + c_0 H_{k-1}^{\text{rel}}$. В частности, любой представитель класса относительных когомологий является так же и представителем класса абсолютных когомлогий. Однако, в рассматриваемом нами случае связь между классами относительных и абсолютных когомлогий является более сложной.

В Предложении 3 мы доказали, что структура операторной алгебры в пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ изоморфна алгебре полиномов от двух переменных $\mathbb{C}[a, b]$, причем этот изоморфизм реализуется оператором

$$O^i_{a_{n+1}} \mapsto a^{n-i} b^i.$$

Хорошо известно, что на $\mathbb{C}[a,b]$ действует алгебра sl_2. Поэтому, естественно ожидать, что эта же алгебра действует в пространстве $H_*^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Легко проверить, что оператор X_+ соответствует повышаещему оператору этой алгебры

$$X_+ \mapsto b\frac{\partial}{\partial a}.$$

Естественно ожидать, что существует такой оператор X_-, который соответствует понижающему оператору алгебры sl_2, а именно

$$X_- \mapsto a\frac{\partial}{\partial b}.$$

Построение такого оператора является нерешенной задачей. Похоже, что не существует оператора X_-, такого что $[Q, X_-] = 0$ и оператор X_- действует не нулем на пространстве когомлогий. Можно ожидать, что существует оператор X_-, такой что $[Q, X_-] \neq 0$, но X_- действует на некоторых представителях пространства относительных когомологий $H_*^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Эта схема похожа на действие алгебры sl_2 на пространстве гармонических форм многообразия Кахлера [17].

Во второй главе мы рассмотрели свободно-полевое представление для форм факторов операторов потомков в модели Тоды, связанной с алгеброй $A_{L-1}^{(1)}$. Мы построили пространство решений форм факторных аксиом, которое, как мы показали, может быть биективно отображено на Фоковские пространства операторов потомков над экспоненциальными операторами $V_a(x)$ для параметра a в случае общего положения. Мы предложили способ построения Вейль-инвариантных семейств базисов в этих пространствах. Данный способ основывается на разложении форм факторов экспоненциальных операторов при больших значениях быстрот. В принципе, возможно, по крайней мере на нижних уровнях, получить Вейль инвариантные семейства базисов в Фоковских пространствах операторов потомков в Лагранжевом формализме [42]. Однако, отождествление двух типов базисов не может быть однозначным без какой-либо дополнительной информации. Возможно, мы могли бы фиксировать отождествление в некоторых резонансных точках, но это не сделано в настоящий момент. Поэтому, задача отождествления полей и форм факторов остается не решенной.

Недавно в работах [43, 44] с использованием скейлингого предела решеточных моделей, было показано, что пространство операторов потомков, по крайней мере для модели синус-Гордона, может быть описываться с помощью некоторых фермионных операторов, действующих на пространстве локальных операторов теории. В частности, оказывается возможным точное вычисление всех вакуумных ожидаемых операторов потомков в модели [44]. Будет крайне не естественным, если эти фермионные операторы не индуцируют действие на алгебре $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ в нашей конструкции. Поэтому, выявление подобных фермионов в конструкции для форм факторов будет важным дальнейшим шагом по направлению к решению задачи об идентификации полей, если не полным ее решением.

В третьей главе в формализме свободно-полевого представления мы построили решения для форм факторных аксиом для модели Буллоу-Додда. Предложенная нами процедура бозонизации отличается от Лукьяновской тем, что минимальные форм факторы исключены из конструкции. В результате, вычисление много-точечных форм факторов сводится к вычислению определенных матричных элементов. Простая аналитическая структура этих матричных элементов позволяет получить явные рекуррентные соотношения между ними. Используя эти соотношения, мы доказываем, что форм факторы удовлетворяют квантовым уравнениям движения и удовлетворяют отражательным свойствам. Кроме того, мы приводим явные выражения для много-точечных форм факторов.

Рассматриваем квантово-групповое ограничение модели Жибера-Михайлова-Шабата, которая возникает при аналитическом продолжении модели Буллоу-Додда к мнимым значениям константы связи b. Предложенное свободно-полевое представление позволяет вычислять форм факторы легчайших бризеров в минимальных моделях конформной теории поля, возмущенных оператором $\Phi_{1,2}$. При этом, процедура вычисления генерирует функции, аналитические свойства которых совпадают с аналитическими свойствами этих функций в модели Буллоу-Додда. Это значит, что никаких дополнительных полюсов функций $J^{g}_{N,a}$ при аналитическом продолжении не возникает.

В качестве примера применения предложенной конструкции мы рассматриваем модель Изинга в магнитном поле. Нетривиальной задачей является получения свободно-полевого представления для алгебры E_8 напрямую. Замечательная связь между этими моделями была установлена в работах [64, 65]. В этой работе мы получили удобное для вычислений свободно-полевое представление для 'фундаментальных' частиц в модели Изинга в магнитном поле и привели результаты вычислений много-точечных форм факторов.

Список литературы

1. A. Polyakov, *Phys.Lett.* **B103** (1981) 207;
2. J. Distler and H. Kawai, *Nucl. Phys.* **B321** (1989) 509;
   F. David, *Mod. Phys. Lett.* **A3** (1988) 1651;
3. A. Belavin, A. Polyakov and A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333;
4. Al. Zamolodchikov, *Theor.Math.Phys.* **142** (2005) 183;
5. A. Belavin and Al. Zamolodchikov, *Theor.Math.Phys.* **147** (2006) 729;
6. B. Lian and G. Zuckerman, *Phys. Lett.* **B254** (1991) 417;
7. B. Feigin and D. Fuchs, *Representations of Lie Groups and Related Topics*, 465, Adv. Stud. Contemp. Math., 7, Gordon and Breach, New York, 1990;
8. H. Kanno and M. Sarmadi. *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 39;
9. C. Imbimbo, S. Mahapatra and S. Mukhi. *Nucl.Phys.* **B375** (1992) 399;
10. B. Feigin and D. Fuchs, *Lectures Notes in Math.* 1060 Springer, Berlin, (1984), 230;
11. S. Govindarajan, T. Jayaraman, V. John and P. Majumdar, *Mod.Phys.Lett.* **A7** (1992) 1063;
12. S. Govindarajan, T. Jayaraman and V. John, *Nucl.Phys.* **B402** (1993) 118;
13. I. Frenkel, H. Garland and G. Zuckerman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986) 8442;
14. L. Goncharova, *Funkts. Anal. Prilozhen.* **7:2** (1973) 6;
15. M. Bauer, P. Di Francesco, C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Nucl. Phys.* **B362** (1991) 515;
16. H. Dorn, H.-J. Otto *Phys. Lett.* **B291** (1992) 39;
    H. Dorn, H.-J. Otto *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 375;
17. P. Griffits and J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience Publication (1994).
18. O. Alekseev and M. Berstein, *Theor.Math.Phys.* **164** (2010) 929

19. M. Karowski and P. Weisz, *Nucl. Phys.* **B139** (1978) 455;

20. F. A. Smirnov, *J. Phys.* **A17** (1984) L873;

21. F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, World Scientific, Singapore (1992);

22. A. E. Arinshtein, V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Phys. Lett.* **B87** (1979) 389;

23. A. Koubek and G. Mussardo, *Phys. Lett.* **B311** (1993) 193;

24. S. L. Lukyanov, *Mod. Phys. Lett.* **A12** (1997) 2543;

25. H. M. Babujian and M. Karowski, *Phys. Lett.* **B471** (1999) 53;

26. H. Babujian and M. Karowski, *J. Phys.* **A35** (2002) 9081;

27. B. Feigin and M. Lashkevich, *J. Phys.* **A42** (2009) 304014;

28. H. Babujian and M. Karowski, *Phys. Lett.* **B575** (2003) 144;

29. S. L. Lukyanov, *Commun. Math. Phys.* **167** (1995) 183;

30. S. L. Lukyanov, *Phys. Lett.* **B408** (1997) 192;

31. A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 577;

32. V. Fateev, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Phys. Lett.* **B406** (1997) 83;

33. V. Fateev, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B516** (1998) 652;

34. C. Ahn, V. A. Fateev, C. Kim, C. Rim and B. Yang, *Nucl. Phys.* **B565** (2000) 611;

35. V. A. Fateev, *Phys. Lett.* **B324** (1994) 45;

36. M. R. Niedermaier, The spectrum of the conserved charges in affine Toda theories, preprint DESY-92-105 (1992).

37. M. R. Niedermaier, *Nucl. Phys.* **B424** (1994) 184;

38. G. Delfino and G. Niccoli, *J. Stat. Mech.* **0504** (2005) P004;

39. V. A. Fateev, V. V. Postnikov and Y. P. Pugai, *JETP Lett.* **83** (2006) 172;

40. V. A. Fateev and Y. P. Pugai, Correlation functions of disorder fields and parafermionic currents in Z_N Ising models, `[arXiv:0909.3347]`;

41. V. A. Fateev, Normalization factors, reflection amplitudes and integrable systems, `[arXiv:hep-th/0103014]`;

42. V. Fateev, D. Fradkin, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B540** (1999) 587;

43. H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, *Commun.Math.Phys.* **299** (2010) 825;

44. M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, On one-point functions of descendants in sine-Gordon model, `[arXiv:0912.0934]`.

45. O. Alekseev and M. Lashkevich, *J. High Energy Phys.* **1007** (2010), 095;

46. A.B. Zamolodchikov, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **19** (1989) 641;

47. A.B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys* **A4** (1989) 4235;

48. G. Takacs, *Nucl.Phys.* **B489** (1997) 532;

49. N. Reshetikhin and F. Smirnov, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990) 157;

50. D. Bernard and A. LeClair, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 721;

51. F.A. Smirnov, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991) 1407;

52. C. J. Efthimiou, *Nucl. Phys.* **B398** (1993) 697;

53. J. Cardy and G. Mussardo, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 387;

54. G. Delfino, G. Mussardo and P. Simonetti, *Nucl. Phys.* **B737** (1996) 469;

55. A. Zamolodchikov and I. Ziyatdinov, *Nucl.Phys.* **B849** (2011) 654;

56. G. Delfino, P. Grinza and G. Mussardo, *Nucl.Phys.* **B737** (2006) 291;

57. B. Pozsgay and G. Takacs, *Nucl.Phys.* **B788**, (2008) 167;

58. B. Pozsgay and G. Takacs, *Nucl.Phys.* **B788** (2008) 209;

59. A. Fring, G. Mussardo and P. Simonetti, *Nucl.Phys.* **B393** (1993) 413;

60. R.K. Dodd and R.K. Bullough, *Proc. R. Soc. London* **A352** (1977) 481;

61. A. Fring, A. Mussardo and P. Simonetti, *Phys. Lett.* **B307** (1993) 389;

62. C. Acerbi, *Nucl.Phys.* **B497** (1997) 589;

63. V.A. Fateev and M. Lashkevich, *Nucl.Phys.* **B696** (2004) 301;

64. Y. Hara, M. Jimbo, H. Konno, S. Odake and J. Shiraishi, *arXiv:math/9902150v1 [math.QA]*, (1999);

65. V.A. Brazhnikov and S.L. Lukyanov, *Nucl. Phys.* **B512** (1998) 616;

66. A. Koubek, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 1909;

67. G. Delfino and G. Mussardo, *Nucl. Phys.* **B455** (1995) 724;

68. G. Delfino, P. Simonetti and J.L. Cardy, *Phys. Lett.* **B387** (1996) 327;

69. G. Mussardo and P. Simonetti, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 3307;

70. O. Alekseev, *Theor.Math.Phys.* **173** (2012) 1518;

71. R. Guida and N. Magnoli *Phys.Lett.* **B411** (1997) 127;