

На правах рукописи

Криштоп Татьяна Викторовна

**Влияние электрон-электронного
взаимодействия
на транспорт и шум в двумерных
баллистических микроконтактах**

01.04.07 – Физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Нагаев К. Э.

Москва – 2012

Содержание

Введение	4
Глава 1. Магнетосопротивление в широких двумерных баллистических микроконтактах с учетом электрон-электронного рассеяния	9
1.1. Обзор литературы	9
1.2. Математическая постановка задачи	11
1.3. Нулевое магнитное поле	18
1.4. Вычисление магнетосопротивления	24
1.5. Обсуждение	29
1.6. Приложение. Вычисление $\varphi(\tau)$	32
1.7. Приложение. Вычисление эффективного времени взаимодействия	33
1.8. Приложение. Вычисление поправки при $eV \gg T$	35
Глава 2. Неравновесный шум в шарвиновских контактах	37
2.1. Обзор литературы	37
2.2. Вычисление спектральной плотности шума	38
2.3. Результаты и обсуждение	46
Глава 3. Квантовый электронный транспорт в узких двумерных контактах при ненулевой температуре	49
3.1. Обзор литературы	49
3.2. Методика вычислений	51
3.3. Невзаимодействующие электроны	54
3.4. Учет взаимодействия по теории возмущений	55
3.5. Точечный потенциал взаимодействия	58

3.6. Произвольный потенциал взаимодействия	59
3.7. Обсуждение	63
3.8. Приложение. Вычисление прошедшей волновой функции	66
3.9. Приложение. Фриделевские осцилляции электронной плотности	68
3.10. Приложение. Экранированный кулоновский потенциал	70
Заключение	72
Литература	75

Введение

Актуальность работы.

В диссертации исследуется влияние электрон-электронного взаимодействия на транспорт и шум в двумерных баллистических контактах. Экспериментальная реализация таких контактов на двумерном электронном газе в высокоподвижных гетероструктурах стала возможной в конце прошлого века, и они сразу же привлекли значительное внимание в связи со ступенчатой зависимостью проводимости от ширины контакта.

В настоящее время во множестве работ исследуются эффекты взаимодействия в таких системах: 0.7-аномалия в квантовых контактах и 0.5-аномалия в чистых квантовых проволоках, “нулевые аномалии” – экстремумы в дифференциальной проводимости вблизи нулевого тянущего напряжения при низких температурах, зависимость перечисленных эффектов от температуры и магнитного поля и другие эффекты.

Поэтому актуальность и важность темы представленной диссертации не вызывают сомнений.

Цель диссертационной работы состоит в теоретическом исследовании влияния электрон-электронного взаимодействия на транспорт и шум в двумерных баллистических микроконтактах. Для достижения поставленных целей решены следующие задачи:

1) Вычислена проводимость широкого двумерного баллистического контакта с электрон-электронным взаимодействием для произвольного соотношения между поданным на контакт напряжением и температурой в ненулевом магнитном поле.

2) Вычислена спектральная плотность шума в широком двумерном баллистическом контакте с электрон-электронным взаимодействием для произ-

вольного соотношения между поданным на контакт напряжением и температурой. Также вычислен Фано-фактор.

3) При ненулевой температуре вычислена проводимость точечного двумерного баллистического контакта для произвольного потенциала электрон-электронного взаимодействия.

Достоверность полученных результатов подтверждается использованием современных методов теоретической физики, признанием полученных результатов научной общественностью при обсуждениях на научных семинарах, конференциях и симпозиумах, а также положительными рецензиями статей при публикациях результатов исследований в научных журналах.

Научная новизна и практическая значимость. Диссертация посвящена исследованию влияния электрон-электронного взаимодействия на проводимость и шум в двумерных баллистических контактах. Используется нестандартная для изучения электрон-электронного взаимодействия модель контакта, позволяющая учесть взаимодействие вне контакта.

Впервые рассмотрен многомодовый баллистический контакт в магнитном поле с учетом электрон-электронного взаимодействия. Установлена зависимость проводимости от температуры, поданного на контакт напряжения и магнитного поля; получены спектральная плотность и Фано-фактор. Предсказаны новые эффекты: положительное магнетосопротивление в слабых магнитных полях, максимум в магнетосопротивлении при четырехконтактной схеме измерений. Полученные эффекты и зависимости подтверждаются экспериментами [1, 2].

Также впервые рассматривается короткий баллистический контакт вблизи отсечки тока. Установлен вид зависимости проводимости от температуры,

предсказан новый эффект - изменение знака наклона $G(T)$ в зависимости от радиуса электрон-электронного взаимодействия. Предложены ориентировочные параметры для экспериментальной проверки теоретических предсказаний.

Предсказанные эффекты и зависимости важны для понимания фундаментальных транспортных свойств имеющих широкое применение в нанoeлектронике двумерных баллистических микроконтактов.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1) Вычислена поправка к проводимости широкого двумерного баллистического контакта, возникающая вследствие электрон-электронного взаимодействия для произвольного соотношения между поданным на контакт напряжением и температурой. Предложено объяснение наблюдавшегося на эксперименте положительного магнетосопротивления в слабых магнитных полях [1, 2]: магнитное поле сильно подавляет положительную поправку к проводимости, разрушая приводящее к поправке “резонансное” рассеяние противоположно летящих электронов.

2) Предсказано возникновение дробового шума вследствие электрон-электронного рассеяния в широких двумерных квантовых контактах. Показано, что спектральная плотность связана с поправкой к току формулой Шоттки.

3) Построена теория рассеяния электронов на фриделевских осцилляциях зарядовой плотности в узком двумерном баллистическом контакте, получена линейная зависимость проводимости от температуры. Знак линейного по температуре слагаемого определяется конкуренцией между прямым и обменным взаимодействием, он положителен для дальнедействующего потенциала электрон-электронного взаимодействия и отрицателен для короткодействующего

щего.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих российских и международных конференциях:

- 1) «IX Российская конференция по физике полупроводников», г. Новосибирск-Томск, 23 сентября - 3 октября 2009 г.
- 2) «XVIII Уральская международная зимняя школа по физике полупроводников», г. Екатеринбург, 15 - 20 февраля, 2010 г.;
- 3) VIII Конференция «Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления», г. Троицк, 17 июня 2010 г.;
- 4) IX Конференция «Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления», г. Троицк, 9 июня 2011 г.;
- 5) 6th International Workshop on Electronic Crystals «ECRYS-2011», Каржез, Франция, 15 - 27 августа 2011 г.;
- 6) XVI Международный симпозиум «Нанопизика и нанозлектроника», г. Нижний Новгород, 12 - 16 марта 2012 г.;
- 7) Advanced research workshop MESO-2012 «Non-equilibrium and coherent phenomena at nanoscale», г. Черноголовка, 17 - 23 июня 2012 г.;
- 8) 8th Advanced Research Workshop «Fundamentals of electronic nanosystems», г. Санкт-Петербург, 23 - 29 июня 2012 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 научных статей, из них 7 статей опубликованы в журналах, включенных в Перечень ВАК, в том числе 5 статей в российских [3–7] и 2 статьи [8, 9] в зарубежных журналах, и 8 статей в сборниках трудов российских и зарубежных конференций [10–17].

Личный вклад автора заключается в участии в разработке теорети-

ческих методов исследования, в проведении теоретических и численных расчетов, в написании научных статей и их подготовке к публикации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 80 страниц, 17 рисунков и список литературы, включающий 77 источников.

Магнетосопротивление в широких двумерных баллистических микроконтактах с учетом электрон-электронного рассеяния

1.1. Обзор литературы

Известно, что в двумерные и трехмерные контакты обладают конечным электрическим сопротивлением, даже если их размеры малы по сравнению с длиной свободного пробега электрона [18]. В формализме Ландауэра-Бюттикера это сопротивление объясняется отражением от барьера в большинстве квантовых каналов электродов [19]. Если к двумерному контакту приложено перпендикулярное магнитное поле, то увеличение с ростом поля числа краевых состояний, которые могут пройти через контакт, дает не зависящее от температуры магнетосопротивление [20].

В недавней статье [1] исследовался электронный транспорт в широких двумерных квантовых контактах в гетероструктурах GaAs с высокой подвижностью. В нулевом магнитном поле наблюдалась линейно зависящая от температуры положительная поправка к проводимости. Кроме того, было отмечено необычное поведение магнетосопротивления в слабых магнитных полях – оно было положительным и увеличивалось с ростом температуры. В более сильных полях положительное магнетосопротивление сменялось отрицательным, так что на кривых $R(H)$ наблюдался зависящий от температуры максимум. Зависимость сопротивления от температуры заставила авторов работы [1] предположить, что они имеют дело с проявлением электрон-электронного взаимодействия, однако конкретный механизм взаимодействия предложен не

был. Цель данной работы – установить его.

Рассмотрим влияние электрон-электронного взаимодействия на магнетосопротивление однородного двумерного электронного газа. В квазиклассическом приближении электрон-электронное рассеяние не влияет на проводимость макроскопически однородных проводников с параболическим спектром вследствие закона сохранения импульса. Однако оно будет давать поправку к проводимости, если трансляционная инвариантность проводника нарушается наличием примесей. В этом случае возникает интерференция между рассеянием на примесях и рассеянием на фриделевских осцилляциях вокруг них [21]. Несколько теорий описывают магнетосопротивление, обусловленное этим квантовым эффектом. В работах [22, 23] анализировалось магнетосопротивление, возникающее из-за интерференции электрон-электронного рассеяния и рассеяния на плавных неоднородностях, в баллистическом режиме $T\tau_i \gg 1$, где T - температура, τ_i - это время упругого рассеяния (в данной главе используется система единиц, в которой постоянные Больцмана и Планка равны единице: $k_B = \hbar = 1$). Было получено, что магнетосопротивление пропорционально $\omega_c^2 T^{-1/2}$ в сильных полях $\omega_c \gg T$ и экспоненциально подавляется в слабых $\omega_c \ll T$ (здесь ω_c - циклотронная частота). В работе [24] изучалось магнетосопротивление двумерного газа с короткодействующим примесным потенциалом. Было получено, что в слабых полях $\omega_c E_F^{1/2} / T^{3/2} \ll 1$ магнетосопротивление положительно и пропорционально $\omega_c^2 / T^{3/2}$. В сильных полях $\omega_c E_F^{1/2} / T^{3/2} \gg 1$ оно сменяется на отрицательное, не зависит от температуры и пропорционально ω_c . Однако для всех этих теорий существенно наличие примесей, в то время как в экспериментах Ренара и соавторов ширина контакта, определяющая сопротивление системы, примерно в 50 раз меньше длины свободного пробега электрона.

Трансляционная инвариантность нарушается не только в системах со случайными неоднородностями. Нарушение может происходить в геометрии

чески ограниченных баллистических системах, где электрон-электронное взаимодействие приводит к нетривиальным эффектам даже в отсутствие примесей или шероховатых границ. В отличие от случая с примесями, эти эффекты можно получить уже в квазиклассическом приближении. Недавно было показано, что в квазиклассическом баллистическом двумерном контакте с большим числом каналов электрон-электронное взаимодействие в пределе малых напряжений $eV \ll T$ дает положительную поправку к шарвинской проводимости, причем поправка линейно возрастает с температурой [25]. Она возникает из-за столкновения электронов, налетающих на контакт, с неравновесными электронами, летящими из противоположного электрода. Обратите внимание, что этот механизм дает положительную поправку к проводимости, в отличие от случая рассеяния электронов назад в контактах с малым числом квантовых каналов, когда она отрицательна [26–36]. В данной работе рассматривается поведение поправки в магнитном поле, и вычисляется магнетосопротивление контакта.

1.2. Математическая постановка задачи

Используется модель баллистического контакта, аналогичная предложенной в работе [37] для случая электрон-фононного рассеяния. Рассмотрим две полуплоскости двумерного электронного газа, разделенные тонким непроницаемым слоем диэлектрика с отверстием шириной $2a$. Предполагается, что a много больше радиуса экранирования и фермиевской длины волны электрона, но много меньше упругой и неупругой длин свободного пробега. Функция распределения электронов $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ в обеих полуплоскостях удовлетворяет уравнению Больцмана [38]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \hat{I}_{ee}(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ – электрическое поле, \mathbf{H} – магнитное поле ($e < 0$ – заряд электрона), \mathbf{v} – скорость электрона. Интеграл столкновений выглядит стандартным образом

$$\begin{aligned} \hat{I}_{ee}(\mathbf{p}) = & \alpha_{ee} \nu^{-2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2p'}{(2\pi)^2} \int d^2k' \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}') \\ & \times \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) \left\{ [1 - f(\mathbf{p})] [1 - f(\mathbf{k})] f(\mathbf{p}') f(\mathbf{k}') - \right. \\ & \left. - f(\mathbf{p}) f(\mathbf{k}) [1 - f(\mathbf{p}')] [1 - f(\mathbf{k}')] \right\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\nu = dn_s/dE_F = m/\pi$ – двумерная плотность состояний, α_{ee} – безразмерный параметр электрон-электронного взаимодействия. (Мы будем считать его не зависящим от импульсов, что возможно при малой длине экранирования. В случае неэкранированного кулоновского взаимодействия этот параметр будет иметь сингулярность при малых передачах импульса, и наш подход неприменим.) Координата \mathbf{r} для краткости опущена во всех аргументах. Предполагается, что электрический потенциал φ вдали от контакта равен $V/2$ в левой полуплоскости и $-V/2$ в правой (здесь V – падение напряжения на контакте). Также предполагается, что функция распределения электронов в импульсном пространстве при достаточном удалении от контакта стремится к равновесной.

Существует ряд работ, в которых исследуются длинные и узкие контакты [26–33, 39], а электрон-электронное взаимодействие происходит в основном глубоко внутри контакта. В данной работе рассматривается другой случай – случай широких и коротких контактов, а основное взаимодействие происходит вне контакта.

Обсудим относительную роль интеграла столкновений и равновесные граничные условия для функции распределения. Согласно формализму Ландауэра-Бюттикера диссипация в баллистическом контакте происходит благодаря релаксационным процессам вне контакта. Эта релаксация приводит

инжектированные электроны в равновесие с электронами в электродах. При этом предполагается, что электроны, налетающие на контакт из электродов, имеют равновесное распределение. Однако при таком рассмотрении не принимается во внимание рассеяние налетающих на контакт равновесных электронов уже пролетевшими через него неравновесными электронами, которое может привести к нетривиальным эффектам. Электрон-электронное взаимодействие сохраняет суммарный импульс электронов, но может изменять их траектории. В результате некоторые электроны, траектория которых до столкновения проходила через контакт, после столкновения в него не попадут, и наоборот.

В данной работе также используются равновесные граничные условия для электронов, вылетающих из электродов в направлении контакта. Если положить интеграл столкновений в уравнении Больцмана равным нулю, то мы получим шарвинскую проводимость, т.е. тот же результат, который дает использование формализма Ландауэра-Бюттикера. Если учесть интеграл столкновений, то это не только приведет к релаксации неравновесных инжектированных электронов, но также изменит распределение “своих” для этой полуплоскости электронов, движущихся из электрода к контакту. В частности, столкновения с электронами, инжектированными из другого электрода, делают налетающие на контакт электроны неравновесными еще до достижения ими отверстия. Именно это “увлечение” налетающих на контакт электронов дает поправку к шарвинской проводимости.

Уравнение (2.1) можно решить, разложив его по степеням α_{ee} . В отсутствие взаимодействия электроны движутся по классическим траекториям в фазовом пространстве, так что их координата \mathbf{r}_τ и импульс \mathbf{p}_τ определяются уравнениями

$$\frac{d\mathbf{p}_\tau}{d\tau} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}_\tau) + \frac{e}{c} \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}, \quad \frac{d\mathbf{r}_\tau}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}_\tau}{m}, \quad (1.3)$$

где τ – время движения по классической траектории. Суммарная энергия электрона $p^2/(2m) + e\varphi(\mathbf{r})$ сохраняется во время движения вдоль траектории (1.3). Граничные условия для уравнения (2.1) принимают вид $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}})$ в левой и правой полуплоскости вдали от отверстия, где

$$f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{1 + \exp(\varepsilon_{\mathbf{p}}/T)} \quad (1.4)$$

и $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/(2m) - E_F$. Так как энергия сохраняется, то функция распределения $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ определяется только электродом, из которого вылетел электрон, попавший в точку \mathbf{r} с импульсом \mathbf{p} . Так как электроны, вносящие основной вклад в ток, обладают энергиями порядка $\max(T, eV) \ll E_F$, то мы можем считать их скорости не зависящими от энергии и предполагать, что траектории этих электронов зависят только от направления импульса и не зависят от их энергий. Для каждой точки \mathbf{r} удобно ввести область $\Omega(\mathbf{r})$, которая содержит импульсы всех инжектированных электронов, прошедших через контакт. Тогда в нулевом приближении функция распределения запишется следующим образом [25, 37, 40]

$$f^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \begin{cases} f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}} + e\varphi(\mathbf{r}) \mp eV/2), & \mathbf{p} \notin \Omega(\mathbf{r}) \\ f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}} + e\varphi(\mathbf{r}) \pm eV/2), & \mathbf{p} \in \Omega(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (1.5)$$

для электронов соответственно в левой полуплоскости (верхний знак) и в правой (нижний знак). Схематически функции распределения электронов слева и справа от контакта показаны на рис. 3.1.

Ток через контакт дается выражением

$$I = e \int d\rho \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v_{\perp} f(\mathbf{p}, \rho), \quad (1.6)$$

где v_{\perp} – компонента \mathbf{v} , перпендикулярная диэлектрику, а вектор ρ направлен вдоль диэлектрика и дает точку на отверстии. Подстановка функций распределения (2.4) в выражение для тока (2.5) приводит к хорошо известной

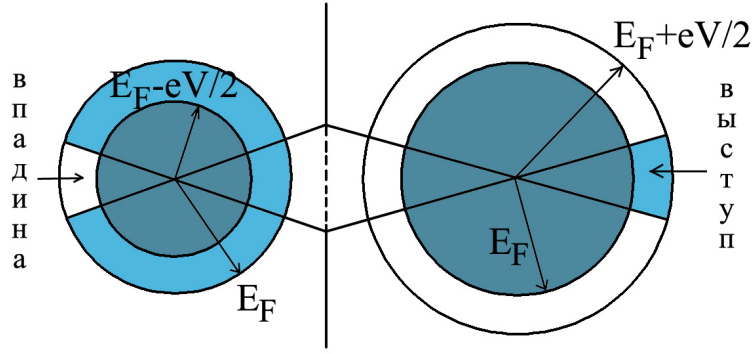


Рис. 1.1. Распределение невзаимодействующих электронов слева и справа от отверстия [37]. Поверхность Ферми в левой полуплоскости имеет резкую впадину, потому что инжектированные электроны обладают меньшими энергиями, в правой – резкую выпуклость, потому что у инжектированных из контакта электронов энергия больше.

формуле для проводимости Шарвина

$$G_0 = \frac{e^2 p_F a}{\pi^2}, \quad (1.7)$$

т.е. проводимость пропорциональна числу каналов в контакте.

В первом приближении по α_{ee} поправку к функции распределения $\delta f(\mathbf{p}, \rho)$ на отверстии легко получить интегрированием $\hat{I}_{ee}\{f^{(0)}\}$ вдоль классической траектории электрона, который прилетает в точку ρ с импульсом \mathbf{p}

$$\delta f(\mathbf{p}, \rho) = \int_0^\infty d\tau I_{ee}\{f^{(0)}(\mathbf{p}_\tau, \mathbf{r}_\tau)\}, \quad (1.8)$$

где τ – время движения по классической траектории в точку ρ , а \mathbf{p}_τ и \mathbf{r}_τ удовлетворяют уравнениям движения (1.3). Как уже упоминалось, условие $\max(T, eV) \ll E_F$ позволяет пренебречь зависимостью импульса электрона от напряжения в (1.3) и считать $|\mathbf{p}| = \text{const}$. В магнитном поле траектории в координатном пространстве представляют собой дуги окружностей циклотронного радиуса $l_H = p_F c / eH$, а импульс поворачивается со скоростью $\omega_H = eH / mc$. Аналогично, можно пренебречь $\varphi(\mathbf{r})$ в выражении (2.4).

Интеграл столкновений в (1.8) не равен нулю, только если по крайней мере

один импульс из (1.2) лежит в области $\Omega(\mathbf{r}_\tau)$. Как будет показано ниже, основной вклад в поправку (1.8) дают точки \mathbf{r} , расположенные далеко от отверстия, на расстояниях, которые много больше размера отверстия a . Следовательно, область $\Omega(\mathbf{r})$ можно считать небольшой, а вклад в (1.8) от столкновений электронов, при которых больше одного импульса лежит в $\Omega(\mathbf{r})$, – пренебрежимо малым. Как будет показано в следующем разделе, наибольший вклад в I_{ee} вносят столкновения электронов, налетающих на отверстие, с электронами, инжектированными из противоположного электрода и летящими практически точно навстречу налетающим. Следовательно, интегрирование по \mathbf{k} в (1.2) можно ограничить интегрированием по $\mathbf{k} \in \Omega(\mathbf{r}_\tau)$. Электроны с импульсом \mathbf{k} следует считать инжектированными, остальные электроны с импульсами \mathbf{p} , \mathbf{p}' , и \mathbf{k}' следует считать “своими” для соответствующей полуплоскости. Тогда интеграл столкновений, например, для левого электрода, можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}
I_{ee}(\mathbf{p}_\tau, \mathbf{r}_\tau) &= \alpha_{ee} \nu^{-2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \int d^2 k' \delta(\mathbf{p}_\tau + \mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}') \\
&\times \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) \Theta[\mathbf{k} \in \Omega(\mathbf{r}_\tau)] \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon) \\
&\times \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon') \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_1) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_2) F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (1.9)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= [1 - f_L(\varepsilon)] [1 - f_R(\varepsilon')] f_L(\varepsilon_1) f_L(\varepsilon_2) \\
&\quad - f_L(\varepsilon) f_R(\varepsilon') [1 - f_L(\varepsilon_1)] [1 - f_L(\varepsilon_2)]. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Здесь вводится несколько дополнительных переменных ε , ε' , ε_1 и ε_2 , чтобы разделить интегрирование по энергиям и по направлениям импульсов, и используются обозначения $f_L(\varepsilon) = f_0(\varepsilon - eV/2)$ и $f_R(\varepsilon) = f_0(\varepsilon + eV/2)$. Подставляя интеграл столкновений в (1.8), а затем полученное выражение в (2.5),

получаем поправку к току

$$\begin{aligned} \delta I = & 2\alpha_{ee} \nu^{-2} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_2 \delta(\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ & \times \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} v_{\perp} \Theta(v_{\perp}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon) \int d\rho \int_0^{\infty} d\tau \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon') \\ & \times \Theta[\mathbf{k} \in \Omega(\mathbf{r}_{\tau})] A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, |\mathbf{p}_{\tau} + \mathbf{k}|), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где величина

$$\begin{aligned} A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, |\mathbf{p}_{\tau} + \mathbf{k}|) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 p' \int d^2 k' \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}_{\tau} - \mathbf{k}) \\ & \times \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_1) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

представляет собой эффективный объем в импульсном пространстве, доступный для рассеяния паре электронов с импульсами \mathbf{p} и \mathbf{k} . Множитель 2 в выражении (1.11) появляется из-за суммирования двух равных вкладов от левой и правой полуплоскостей.

В выражении (1.11) удобно сделать A не зависящим от τ . Для этого повернем локальную систему координат таким образом, чтобы \mathbf{p}_{τ} совпало с \mathbf{p} . Тогда область $\Omega(\mathbf{r}_{\tau})$ интегрирования по \mathbf{k} перейдет в $\tilde{\Omega}(\mathbf{r}_{\tau}, \mathbf{p}_{\tau})$. После этого изменим последовательность интегрирования, чтобы сначала шло интегрирование по τ и по ρ . Получим поправку в следующем виде

$$\begin{aligned} \delta I = & 4ea \alpha_{ee} \nu^{-2} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_2 \delta(\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2) \times \\ & \times \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon) \Theta(v_{\perp}) v_{\perp} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon') A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \bar{\tau}_m(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\bar{\tau}_m(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2a} \int d\rho \int_0^{\infty} d\tau \Theta[\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}(\mathbf{r}_{\tau}, \mathbf{p}_{\tau})]. \quad (1.14)$$

– эффективное время взаимодействия между падающим электроном с импульсом \mathbf{p} и инжектированными электронами с импульсом \mathbf{k} .

1.3. Нулевое магнитное поле

Сначала рассмотрим случай нулевого магнитного поля. В работе [25] была вычислена поправка к току для случая малых тянущих напряжений $eV \ll T$. В этом разделе, следуя основной логике работы [25], мы кратко обобщим вычисления для случая произвольного соотношения между поданным на контакт напряжением и температурой. Результаты этого раздела опубликованы в работе [9].

Чтобы вычислить поправку к току, вычислим сначала доступный для рассеяния объем в фазовом пространстве для двух импульсов с заданной суммой $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, |\mathbf{p}_\tau + \mathbf{k}|)$ (1.12) и время рассеяния $\bar{\tau}_m(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ (1.14). Введем следующие обозначения: φ - угол между падающим и пучком инжектированных электронов, т.е. между импульсами \mathbf{p}_τ и \mathbf{k} , $D = [(\varepsilon - \varepsilon')^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2]/4$ - некоторая величина, характеризующая отклонение энергий от энергии Ферми (она равна нулю, когда все энергии лежат строго на поверхности Ферми). В новых обозначениях фазовый объем и время рассеяния примут следующий вид

$$A(|\mathbf{p}_\tau + \mathbf{k}|) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_F^2} \frac{\Theta(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{D}{4E_F^2})}{\cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{D}{4E_F^2}}}, \quad (1.15)$$

$$\tau_m = \frac{a \cos(\varphi - \varphi_p)}{v_F |\sin \varphi|}. \quad (1.16)$$

Здесь φ_p - угол между импульсом \mathbf{p} и осью x . Заметим, что при нулевой температуре величины $A(|\mathbf{p}_\tau + \mathbf{k}|)$ и $\bar{\tau}_m(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ сингулярны в точке $\varphi = 0$. При ненулевой температуре сингулярность во времени рассеяния остается, а в фазовом объеме размывается на величину E_F/T . Ниже мы подробно обсудим физику этих сингулярностей, а пока просто отметим, что основной вклад будет давать рассеяние электронов, летящих практически точно навстречу

друг другу. Подставляя (1.15) и (1.16) в (1.13), получаем после некоторых упрощений

$$\delta I = \frac{ea^2\alpha_{ee}m}{2(2\pi)^3} \ln \frac{l_c}{a} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_2 \delta(\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \times F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2) \frac{1}{\sqrt{D}}. \quad (1.17)$$

Здесь $l_c \gg a$ – некоторая большая длина обрезания, связанная со слабым рассеянием на примесях или конечными размерами образца. Мы вводим ее, чтобы обрезать возникающую при интегрировании по φ сингулярность в $\varphi = 0$.

Закон сохранения энергии позволяет ввести новую переменную $\omega = \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon'$ и переписать поправку к току в виде

$$\delta I = \frac{ea^2\alpha_{ee}m}{2(2\pi)^3} \ln \frac{l_c}{a} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \int d\omega F_L(\varepsilon, \varepsilon', \omega) \frac{1}{\sqrt{\omega(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)}}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим сначала предельные случаи. При малых напряжениях $eV \ll T$ комбинация функций распределения равна

$$F_L = \frac{eV}{T} (1 - f(\varepsilon))(1 - f(\varepsilon'))f(\varepsilon - \omega)f(\varepsilon' + \omega), \quad (1.19)$$

что при подстановке в (1.18) дает после численного интегрирования поправку к току в виде

$$\delta I = C_{10} \frac{ea^2\alpha_{ee}m}{2(2\pi)^3} \ln \frac{l_c}{a} (eV)T, \quad (1.20)$$

где $C_{10} = 3.742$. Поскольку $G_0 = e^2 p_F a / \pi^2$, то относительная поправка к проводимости равна

$$\frac{\delta G}{G_0} = \frac{\alpha_{ee} p_F a}{16\pi} \frac{T}{E_F} \ln \frac{l_c}{a} \times \frac{C_{10}}{2}. \quad (1.21)$$

Этот результат совпадает с полученным в статье [25], за исключением уточненного здесь численного множителя.

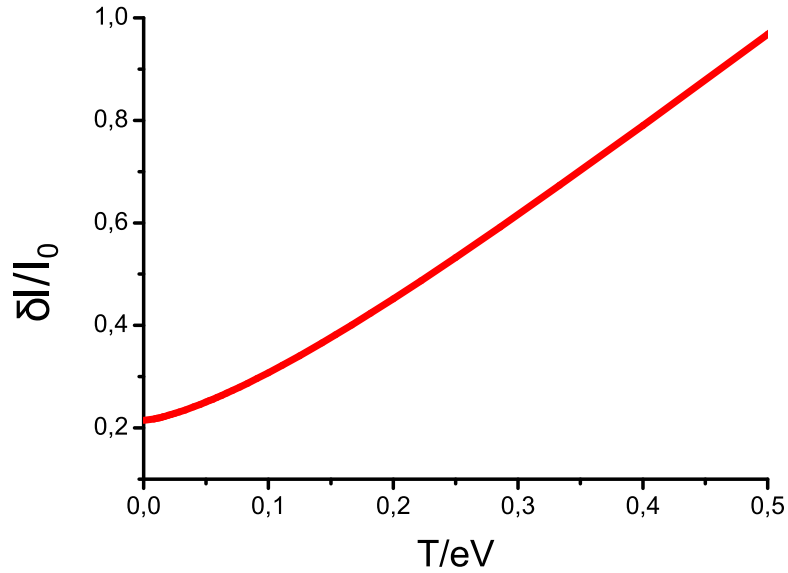


Рис. 1.2. На рисунке показана теоретическая зависимость проводимости от температуры в единицах $\frac{\alpha_{ee} p_F a}{16\pi} \frac{eV}{E_F} \ln \frac{l_c}{a}$. Рисунок построен в таких координатах для сравнения с экспериментальными графиками, где фиксировано поданное на контакт напряжение, но изменяется температура.

При малых температурах $T \ll eV$ функции распределения приобретают вид тета-функций, поэтому интеграл (1.18) легко вычисляется. Запишем сразу относительную поправку к проводимости

$$\frac{\delta G}{G_0} = \frac{\alpha_{ee} p_F a}{16\pi} \frac{eV}{E_F} \text{sign}(V) \ln \frac{l_c}{a} \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.22)$$

Кроме того, можно рассмотреть произвольное соотношение между eV и T и, численно проинтегрировав (1.18), получить поправку для всего диапазона температур и напряжений. Результат численного интегрирования приведен на рис. 1.2

Обсудим результаты. Поправка положительна, в отличие от случая длинных и узких контактов [26–34]. Необычный знак поправки можно объяснить следующим образом. В отсутствие взаимодействия поверхность Ферми имеет в зависимости от полуплоскости резкую выпуклость или впадину на противоположной контакту стороне (см. рис. 1.1). Электрон-электронное взаимодействие стремится сгладить эту впадину или выступ, добавляя электроны

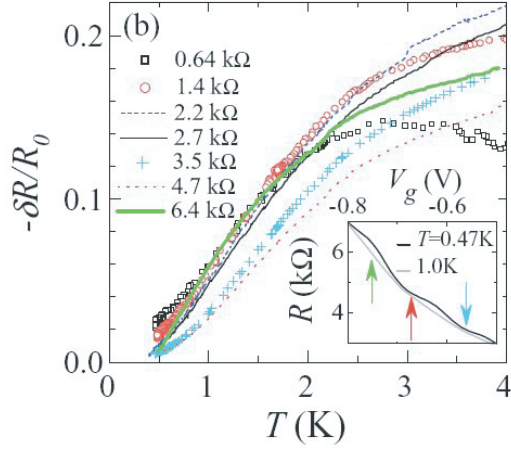


Рис. 1.3. Зависимость относительной поправки к проводимости от температуры из работы [2].

в нужную часть поверхности Ферми, или забирая их оттуда. Поскольку суммарный импульс электронов сохраняется, то столкновения не изменяют центр масс локального распределения. Поэтому на поверхности Ферми со стороны контакта должны появиться или исчезнуть дополнительные электроны. В результате число падающих электронов увеличивается с той стороны контакта, куда подано отрицательное напряжение, и уменьшается с той стороны, куда подано положительное. Это и дает положительную поправку к току.

Поправка обусловлена столкновениями электронов вдали от контакта $v_{FT} \gg a$.

При больших температурах $T \gg eV$ теория предсказывает линейную зависимость, она действительно наблюдается на экспериментах – см. рис. 1.3, взятый из работы [2], и вставку на рис. 1b из работы [1]). В случае высоких напряжений $eV \gg T$ роль эффективной температуры играет напряжение, что приводит к закруглению линейной зависимости вблизи нуля. Похожее закругление действительно наблюдается на экспериментах [1, 2].

Величина поправки при $eV \ll T$ много больше, чем следовало бы ожидать из качественных соображений. Действительно, можно оценить $\delta G/G_0$ как величину порядка a/l_{ee} , где $l_{ee}^{-1} \sim T^2/(v_F E_F)$ – обратная длина равновесного электрон-электронного взаимодействия. Однако реальный эффект в

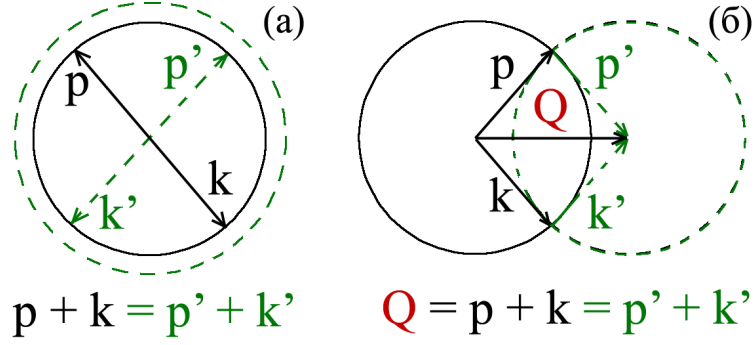


Рис. 1.4. Ограничения на доступный для рассеяния объем в импульсном пространстве: а – электроны с противоположно направленными импульсами имеют бесконечное число вариантов рассеяния, так как они могут рассеяться в любую пару противоположно направленных электронов и дают резонансный вклад в проводимость; б – электроны с ненулевым суммарным импульсом \mathbf{Q} могут только обменяться своими импульсами или сохранить их.

$(E_F/T) \ln(l_c/a)$ раз больше. Это обусловлено своеобразным “резонансом”, который дают столкновения электронов с почти противоположными импульсами. (Эффект от таких столкновений в узких каналах с рассеянием на границах был рассмотрен в работе [41]). Резкое увеличение объема доступного для рассеяния импульсного пространства проявляется в сингулярности величины A в (1.13) при $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$. Качественное объяснение этого приведено на рис. 1.4. Предположим, что изначально импульсы двух сталкивающихся электронов \mathbf{p} и \mathbf{k} лежат строго на поверхности Ферми, и температура равна нулю. Вследствие законов сохранения после столкновения импульсы этих электронов \mathbf{p}' и \mathbf{k}' также лежат на поверхности Ферми и $\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}'$. Если $\mathbf{Q} = \mathbf{p} + \mathbf{k} \neq 0$, то условию $\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}'$ электроны могут удовлетворить только двумя способами: сохранить свои импульсы или обменяться ими. Если же $\mathbf{Q} = 0$, то электроны могут рассеяться в любую пару электронов с противоположными импульсами, что приводит к резкому увеличению доступного для рассеяния объема.

Если бы угловое распределение электронов было гладким, то сингулярность в $A(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)$ усреднялась бы по всей поверхности Ферми и в итоге выра-

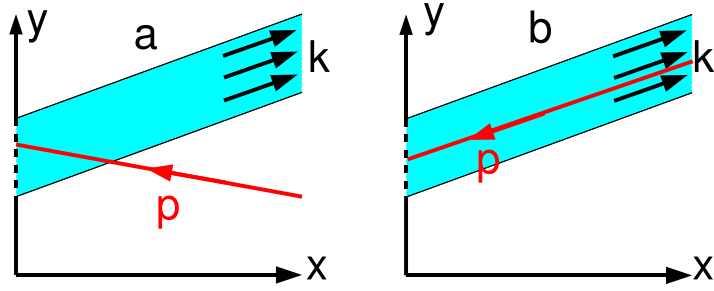


Рис. 1.5. Эффективное время рассеяния электронов в нулевом магнитном поле. Если импульсы падающего и инжектированного электронов направлены под углом, то время их взаимодействия конечно (а), если противоположны, то время их взаимодействия бесконечно (б).

жалась бы только в дополнительном логарифмическом множителе $\ln(E_F/T)$ в скорости электрон-электронного рассеяния [42, 43]. Однако в нашем случае $A(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)$ усредняется по поверхности Ферми с весовым коэффициентом $\bar{\tau}_m(\mathbf{p}, \mathbf{k})$, который отвечает за анизотропию локального распределения электронов и представляет собой время нахождения падающего на контакт электрона с импульсом \mathbf{p} в пучке инжектированных электронов с импульсом \mathbf{k} (см. рис. 1.5). Это время конечно, если \mathbf{p} и \mathbf{k} направлены под углом, но стремится к бесконечности при $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$. В последнем случае падающий и инжектированный электроны движутся вдоль одной прямой в противоположных направлениях и неравновесный электрон с импульсом $-\mathbf{p}$ можно найти сколь угодно далеко от отверстия. Суперпозиция двух сингулярностей в $A(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)$ и в $\bar{\tau}_m(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ в подынтегральном выражении в (1.13) приводит к тому, что окончательный результат для тока в E_F/T раз больше.

“Резонансное” рассеяние электронов с противоположно направленными импульсами связано с симметрией относительно обращения времени, которая позволяет им двигаться по одной и той же траектории в противоположных направлениях. Если эта симметрия разрушается магнитным полем, то эффект сильно подавляется. Магнитное поле искривляет траектории электронов с

противоположными импульсами в противоположных направлениях, так что они больше не совпадают (см. рис. 1.6).

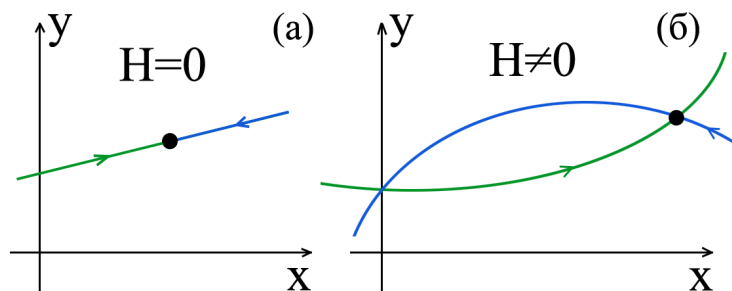


Рис. 1.6. Разрушение резонанса противоположно направленных электронов в магнитном поле: электроны движутся в противоположных направлениях и дают резонансный вклад (а); магнитное поле искривляет траектории электронов, и в точку столкновения они приходят с импульсами, направленными под углом (б).

Это приводит к уменьшению влияния столкновительных процессов на проводимость и, как следствие, к положительному магнетосопротивлению. В следующем разделе мы количественно оценим его величину.

1.4. Вычисление магнетосопротивления

Аномально большая величина поправки к току из-за электрон-электронного взаимодействия - это результат столкновений на большом расстоянии от контакта $v_F \tau \gg a$. Следовательно, сингулярность в $\bar{\tau}_m(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ должна подавляться уже в слабых магнитных полях, когда $l_H \gg a$. Поэтому нас будет в основном интересовать случай слабых полей и больших τ .

Чтобы вычислить эффективное время $\bar{\tau}_m$, нужно для произвольного τ найти область интегрирования $\Omega(\mathbf{r}_\tau, \mathbf{p}_\tau)$. Для этого найдем решение системы (1.3) в случае нулевого электрического поля. Введем систему координат с началом отсчета в центре контакта, ось y направлена вдоль барьера. Рассмотрим налетающий на контакт электрон. Пусть его траектория пересекает контакт в точке $\rho = (0, y)$ под углом φ_ρ к нормали к контакту. Определим

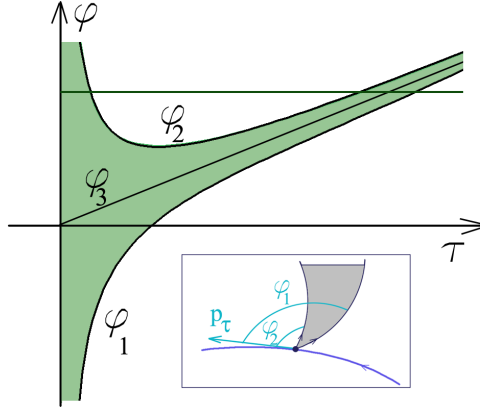


Рис. 1.7. Зависимость углов φ_1 и φ_2 между направлениями импульсов падающего электрона и инжектированных электронов, прошедших соответственно через верхний и через нижний край отверстия, от времени τ , за которое падающий электрон достигает отверстия. φ_3 – та же зависимость для инжектированных электронов, пересекших отверстие в точке $y' = y$. Время $\bar{\tau}_m(\varphi)$ – это суммарная длина участков прямой $\varphi = \text{const}$, лежащих в заштрихованной области. На врезке показано взаимное расположение траекторий падающего и инжектированного электронов в точке столкновения \mathbf{r}_τ . Заштрихованная область – это $\Omega(\mathbf{r}_\tau)$, она содержит все направления импульсов инжектированных электронов в точке \mathbf{r}_τ .

граничные углы для интегрирования по \mathbf{k} в точке траектории \mathbf{r}_τ , соответствующей времени τ движения налетающего электрона от столкновения до контакта.

Если инжектированный электрон пересек отверстие в точке $\rho' = (0, y')$ и затем попал в точку \mathbf{r}_τ , то его импульс в этой точке будет образовывать угол φ с импульсом \mathbf{p}_τ падающего электрона. В линейном приближении по магнитному полю при $\tau \gg a/v_F$ этот угол определяется выражением (см. Приложение 1)

$$\varphi(\tau) = \omega_c \tau + \frac{y - y'}{v_F \tau} \cos \varphi_p. \quad (1.23)$$

В плоскости (τ, φ) область $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}(\mathbf{r}_\tau, \mathbf{p}_\tau)$ ограничивается кривыми $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, которые получаются путем подстановки $y' = a$ и $y' = -a$ в (1.23) и соответствуют инжектированным электронам, пролетевшим через верхний и через нижний край отверстия (см. рис. 1.7).

Эффективное время взаимодействия $\bar{\tau}_m(\varphi, \varphi_p)$ представляет собой общую длину участков прямой $\varphi = \text{const}$, попадающих внутрь этой области.

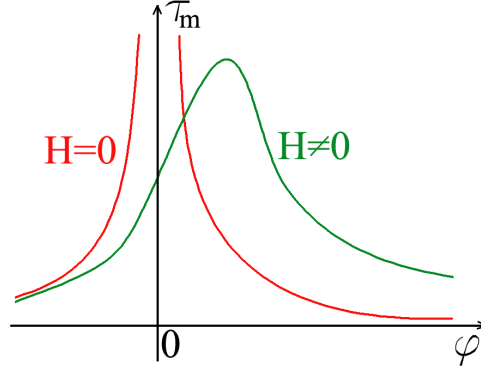


Рис. 1.8. Время $\bar{\tau}_m(\varphi)$ в нулевом и в ненулевом магнитном поле.

Его можно найти интегрированием по y от $-a$ до a и последующим делением на $2a$. Вычисления дают (см. Приложение 2)

$$\bar{\tau}_m(\varphi, \varphi_p) = \frac{a}{v_F} \sqrt{\frac{\cos \varphi_p}{\beta}} G\left(\frac{\varphi}{\sqrt{4\beta \cos \varphi_p}}\right), \quad (1.24)$$

где $\beta = \omega_c a / v_F$ - безразмерное магнитное поле и

$$G(b) = \begin{cases} b + \frac{1}{3}(b^2 + 2)^{3/2} + \frac{1}{3}b^3, & b < 0 \\ b + \frac{1}{3}(b^2 + 2)^{3/2} - b^3, & 0 < b < \sqrt{2} \\ b + \frac{1}{3}(b^2 + 2)^{3/2} + \\ + \frac{2}{3}(b^2 - 2)^{3/2} - b^3, & b > \sqrt{2}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Полученная кусочная функция изображена на рис. 1.8 сплошной линией $H \neq 0$. Магнитное поле не только сглаживает сингулярность при $\varphi = 0$ (что соответствует случаю противоположно летящих электронов), но и сдвигает из нуля максимум зависимости $\bar{\tau}_m(\varphi)$. Зависимость $\bar{\tau}_m(\varphi)$ для случая нулевого магнитного поля изображена на рис. 1.8 линиями $H = 0$.

Величина A , также входящая в уравнение (1.13), представляет собой интеграл по поверхности Ферми от двух импульсов с заданной суммой и отражает ограниченность доступного для рассеяния объема в фазовом пространстве

вследствие закона сохранения импульса. Вычисления дают

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{p} + \mathbf{k}) = \frac{1}{v_F^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\Theta\left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{D}{4E_F^2}\right)}{\cos(\varphi/2) \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{D}{4E_F^2}}}, \quad (1.26)$$

где

$$D = \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_k)^2 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{4}. \quad (1.27)$$

После интегрирования по \mathbf{p} и \mathbf{k} (1.13) сводится к интегралу по энергиям

$$\delta I = 4ea \frac{\alpha_{ee}}{\nu^2} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_2 \delta(\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2) \times C(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (1.28)$$

где функция $C(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ может быть найдена точно в некоторых предельных случаях. Если величина $D/(4E_F^2\beta)$ велика по модулю и положительна, то

$$C = C_1 = \frac{\nu^2}{8\pi^3} \frac{a}{v_F^2} \frac{E_F}{\sqrt{D}} \ln\left(\frac{D}{4\beta E_F^2}\right). \quad (1.29)$$

Если она велика по модулю и отрицательна, то

$$C = C_2 = \frac{\nu^2}{8\pi^2} \frac{a}{v_F^2} \frac{E_F}{\sqrt{|D|}}. \quad (1.30)$$

Если модуль $D/(4E_F^2\beta)$ мал, то

$$C = C_3 = -\frac{\nu^2}{3\pi^4} \frac{a}{v_F^2} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln\left|\frac{D}{4\beta E_F^2}\right|. \quad (1.31)$$

Разложим по напряжению зависящий от функций распределения множитель F_L в (1.28)

$$F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{eV}{T} \exp\left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{T}\right) f_0(\varepsilon) f_0(\varepsilon') f_0(\varepsilon_1) f_0(\varepsilon_2). \quad (1.32)$$

Вдали от поверхности Ферми F_L экспоненциально спадает, поэтому интегрирование по энергиям фактически происходит в узком интервале ширины T

вблизи поверхности Ферми. Тогда

$$\frac{D}{4E_F^2\beta} \sim \frac{T^2}{4E_F^2\beta}.$$

Вводя безразмерные переменные $\xi_i = \varepsilon_i/T$, можно легко оценить поправку (1.28) в двух предельных случаях - для сильного и слабого магнитного поля. Если магнитное поле слабое $\beta \ll T^2/E_F^2$, то основной вклад в интеграл вносят отрицательные D , и подстановка (1.30) в (1.28) дает

$$\frac{\delta G}{G_0} = \frac{C_{10} \alpha_{ee} p_{Fa}}{2} \frac{T}{16\pi E_F} \ln\left(\frac{T^2}{\beta E_F^2}\right), \quad (1.33)$$

В случае относительно сильного магнитного поля $T^2/E_F^2 \ll \beta \ll 1$ подставляем (1.31) в (1.28) и получаем поправку

$$\frac{\delta G}{G_0} = \frac{2\alpha_{ee} p_{Fa}}{9} \frac{T^2}{E_F^2 \sqrt{\beta}} \ln\left(\frac{\beta E_F^2}{T^2}\right). \quad (1.34)$$

Выше везде рассматривался случай малых напряжений, когда $eV \ll T$. Однако наблюдать предсказанный нами эффект можно и в случае $eV \gg T$. В этом случае качественно поправка будет вести себя точно так же, но роль температуры будет играть напряжение. Вычисления для нулевой температуры (См. Приложение 3) дают в относительно слабом магнитном поле $\beta \ll (eV)^2/E_F^2$

$$\frac{\delta I}{I_0} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\alpha_{ee} p_{Fa}}{16\pi} \frac{eV}{E_F} \text{sign}(V) \ln\left(\frac{(eV)^2}{\beta E_F^2}\right), \quad (1.35)$$

В относительно сильном магнитном поле $(eV)^2/E_F^2 \ll \beta \ll 1$

$$\frac{\delta I}{I_0} = \frac{\alpha_{ee} p_{Fa}}{9\pi^2} \frac{(eV)^2}{E_F^2 \sqrt{\beta}} \ln\left(\frac{\beta E_F^2}{(eV)^2}\right). \quad (1.36)$$

(1.33) переходит в (1.21) при $l_c = (T/E_F)^2 l_H$, а (1.35) в (1.22) при $l_c = (eV/E_F)^2 l_H$. Это значение магнитного поля, выраженное через эффективную энергию электронов в системе, при котором влияние очень слабого рассеяния на примесях или конечности размеров образца становится более важным.

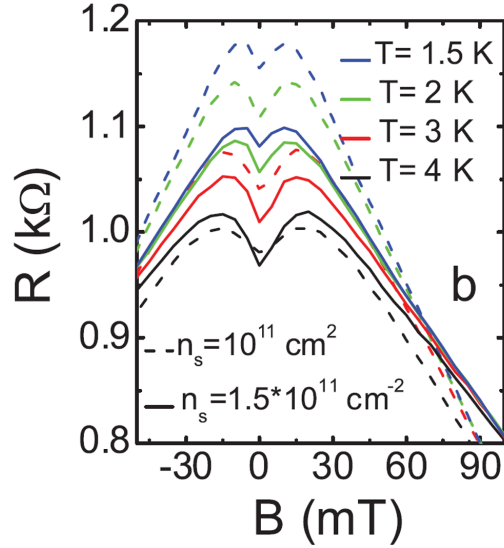


Рис. 1.9. Экспериментальные зависимости магнетосопротивления двумерного баллистического контакта с 13 открытыми каналами (см. работу [1])

Предельный переход при $\beta = 0$ не происходит потому, что при вычислениях предполагается, что магнитное поле достаточно сильно, чтобы искривить траекторию электрона между редким рассеянием на примесях.

Видно, что поправка к проводимости положительна, растет с увеличением температуры и сильно подавляется магнитным полем. В более сильных магнитных полях поправка к проводимости спадает быстрее.

1.5. Обсуждение

Положительная поправка к проводимости, уменьшающаяся с ростом магнитного поля, дает в слабых полях положительное магнетосопротивление $\delta R(H) = -\delta G/G_0^2$. Низкотемпературные участки этих зависимостей похожи на экспериментальные кривые, полученные Ренаром и его соавторами [1] (см. рис. 1.9). Похожие зависимости также наблюдались в работе [2] (см. рис. 4 из работы [2]).

В более высоких магнитных полях экспериментальное магнетосопротивление достигает максимума, и при дальнейшем увеличении поля начинает

линейно спадать с ростом H . Этот линейный спад является следствием четырехконтактной схемы измерения [20]. При отсутствии взаимодействия четырехконтактное магнетосопротивление дается формулой [44]

$$R_4(H) = R_2 - \frac{2\pi}{e^2} \frac{1}{p_F l_H}, \quad (1.37)$$

где R_2 не зависит от H при $l_H \gg a$.

Рассмотрим теперь случай, когда в системе есть электрон-электронное взаимодействие. Тогда максимум на кривых $R_4(H)$ можно объяснить переходом от положительного магнетосопротивления, возникающего из-за электрон-электронного взаимодействия, к отрицательному магнетосопротивлению, связанному с подавлением сопротивления в сильных магнитных полях вследствие увеличения числа краевых состояний, которые могут пройти через контакт. Положение максимума можно оценить, подставив $R_2 = G_0^{-1} - \delta G/G_0^2$ в (1.37) и продифференцировав получившееся выражение по H . Оценивая таким образом поле, при котором достигается максимум, для гетероструктуры GaAs с концентрацией электронов $n_s = 1.5 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$, $T = 1.5 \text{ К}$, $\alpha_{ee} = 1$ при 13 открытых каналах [1] получаем примерно 10 мТ. (Довольно трудно получить достоверную оценку параметра взаимодействия α_{ee} в структурах GaAs при низких электронных концентрациях, когда газовый параметр порядка единицы. В предположении, что взаимодействие определяется статически экранированным кулоновским потенциалом, из (3.29) из работы [21] следует $\alpha_{ee} \sim 1$). Такая оценка максимума хорошо согласуется с экспериментальными данными (см. рис. 1.9). Форма экспериментальных кривых также качественно объясняется нашими результатами. С повышением температуры усиливаются эффекты взаимодействия, максимумы становятся более выраженными и сдвигаются в сторону более высоких полей. В достаточно больших полях, когда эффекты взаимодействия подавлены практически полностью, все кривые сливаются в одну не зависящую от температуры прямую

в соответствии с (1.37).

Авторы работы [1] объясняют линейную зависимость проводимости в нулевом поле от температуры рассеянием электронов на фриделевских осцилляциях вокруг контакта. Предложенная в данной работе модель также предсказывает поправку к проводимости в нулевом поле из-за электрон-электронного взаимодействия [25]. Качественное согласие между полученным нами магнетосопротивлением и экспериментальными данными свидетельствует о том, что наблюдаемые особенности, скорее всего, являются следствием классического электрон-электронного взаимодействия.

Хотя столкновения электронов с противоположными импульсами изменяют время жизни электрона и термодинамические характеристики однородного двумерного газа [45], но эти эффекты усредняются по всей поверхности Ферми, поэтому их трудно наблюдать. В то же время двумерные баллистические контакты с поданным на них напряжением смещения служат в качестве избирательных усилителей вклада от таких столкновений и позволяют этот вклад наблюдать в виде особенностей в проводимости.

Влияние электрон-электронного рассеяния на проводимость трехмерных баллистических контактов меньше в T/E_F раз [25]. Поэтому температурная зависимость магнетосопротивления в них выражена существенно слабее, чем в двумерном случае.

Таким образом, предложен квазиклассический механизм магнетосопротивления в двумерных баллистических контактах, связанный с разрушением “резонанса” противоположно летящих электронов в магнитном поле. Представленная теория объясняет наблюдавшиеся на эксперименте особенности проводимости.

1.6. Приложение. Вычисление $\varphi(\tau)$

Предположим, что электрон, падающий на контакт, пересекает его в точке $(0, y)$ через время τ после столкновения с инжектированным электроном, пересекшим контакт в точке $(0, y')$. Обозначим точку столкновения \mathbf{r}_τ . Пусть φ_k и $\varphi_{p\tau}$ - направления импульсов инжектированного и падающего электронов в точке \mathbf{r}_τ , так что угол между ними равен $\varphi = \varphi_k - \varphi_{p\tau}$. Импульс электрона поворачивается в магнитном поле, так что

$$\varphi = \varphi_k - \varphi_p + \omega_c \tau \quad (1.38)$$

где φ_p - угол, под которым падающий электрон пересекает контакт.

Чтобы получить $\varphi_k(\tau)$, найдем координаты точки столкновения \mathbf{r}_τ двумя способами, решая уравнение

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (1.39)$$

для падающего и для инжектированного электронов. Решаем это уравнение с граничными условиями на отверстии для падающего электрона

$$\mathbf{v} = \frac{p}{m} \begin{pmatrix} \cos \varphi_p \\ \sin \varphi_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

и получаем координаты точки столкновения первым способом

$$\mathbf{r}_\tau = \begin{pmatrix} \frac{p}{m\omega_c} [\sin \varphi_p + \sin(\omega_c \tau - \varphi_p)] \\ y + \frac{p}{m\omega_c} [-\cos \varphi_p + \cos(\omega_c \tau - \varphi_p)] \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Для инжектированного электрона векторное произведение в (1.39) направлено противоположно, поэтому следует поставить перед ним знак "минус".

Граничные условия на отверстии для инжектированного электрона

$$\mathbf{v}' = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_k - \omega_c \tau') \\ \sin(\varphi_k - \omega_c \tau') \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}.$$

Здесь τ' – время движения инжектированного электрона от контакта до точки \mathbf{r}_τ .

Решаем уравнение движения для инжектированного электрона с этими граничными условиями и получаем координаты точки столкновения вторым способом

$$\mathbf{r}_\tau = \begin{pmatrix} \frac{k}{m\omega_c}[-\sin(\varphi_k - \omega_c\tau') + \sin \varphi_k] \\ y' + \frac{k}{m\omega_c}[-\cos(\varphi_k - \omega_c\tau') + \cos \varphi_k] \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Приравниваем правые части (1.41) и (1.42) и в приближении $p \approx k \approx p_F$ получаем систему с двумя неизвестными φ_k и τ' . Решаем эту систему для φ_k и подставляем полученное значение в (1.38), чтобы найти φ . Затем раскладываем полученное выражение для φ в ряд по малому безразмерному магнитному полю $\beta = a\omega_c/v_F$ и берем его асимптотику при больших временах $t = \tau v_F/a$ движения из точки столкновения к контакту. Получаем

$$\varphi_k = t\beta + \frac{y - y'}{at} \cos \varphi_p = \omega_c\tau + \frac{y - y'}{v_F\tau} \cos \varphi_p. \quad (1.43)$$

1.7. Приложение. Вычисление эффективного времени взаимодействия

Чтобы вычислить эффективное время взаимодействия (1.14), сначала найдем границы области $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}(\mathbf{r}_\tau, \mathbf{p}_\tau)$ в плоскости (φ, τ) . Согласно (1.23), они определяются выражением

$$\varphi_{1,2}(\tau) = \omega_c\tau + \frac{y \mp a}{v_F\tau} \cos \varphi_p. \quad (1.44)$$

Найдем обратные зависимости, чтобы получить пределы интегрирования по τ в (1.14). Для этого удобно ввести безразмерные переменные $b = \varphi/\sqrt{4\beta \cos \varphi_p}$,

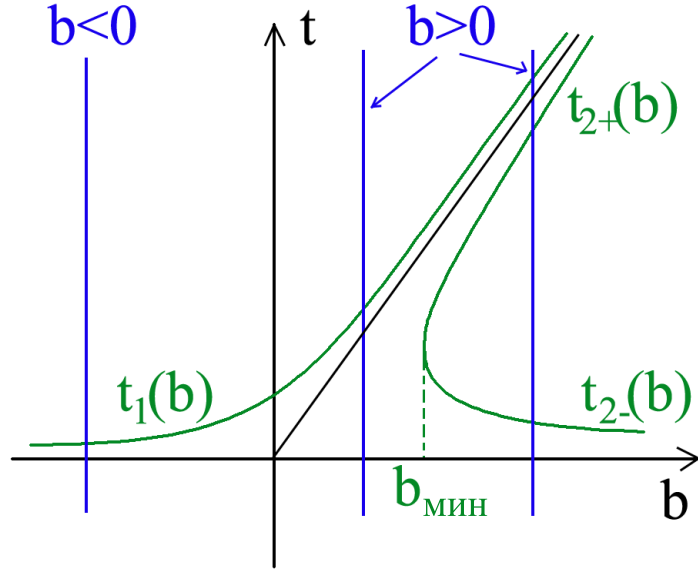


Рис. 1.10. Пределы интегрирования по t при различных значениях b

$t = \tau v_F/a$ и $\eta = y/a$. Для электронов, пролетевших через верхний край отверстия, зависимость $b_1(t)$ монотонна, так что обратная функция определяется однозначно

$$t_1(b) = \sqrt{\frac{\cos \varphi_p}{\beta}} \left(b + \sqrt{b^2 - (\eta - 1)} \right). \quad (1.45)$$

Для электронов, пролетевших через нижний край отверстия, $b_2(t)$ немонотонна и обратная зависимость представляет собой кусочную функцию

$$t_{2+}(b) = \sqrt{\frac{\cos \varphi_p}{\beta}} \left(b + \sqrt{b^2 - (\eta + 1)} \right), \quad (1.46)$$

$$t_{2-}(b) = \sqrt{\frac{\cos \varphi_p}{\beta}} \left(b - \sqrt{b^2 - (\eta + 1)} \right). \quad (1.47)$$

Как видно на рис. 1.10, в зависимости от диапазона значений b границы отрезков (т.е. пределы интегрирования в (1.14)) различны. Рассмотрим три возможных случая (они показаны на рис. 1.10 вертикальными линиями).

1. В самом простом случае $b < 0$ и интегрирование в (1.14) происходит в

пределах $\eta \in [-1, 1]$ и $t \in [0, t_1(b)]$, т.е.

$$\bar{\tau}_m = \frac{a}{2v_F} \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{t_1(b)} dt. \quad (1.48)$$

2. Если $b \in [\sqrt{2}, \infty)$, то есть два возможных варианта, в зависимости от того, находимся мы над минимумом зависимости $b_2(t)$ или под ним (сам минимум равен $b_{\text{мин}} = \sqrt{\eta + 1}$). Если $\eta \leq 1$, то мы находимся под минимумом при $b \geq \sqrt{2}$. Следовательно, $\bar{\tau}_m$ можно записать в виде

$$\bar{\tau}_m = \frac{a}{2v_F} \left[\int_{-1}^{b^2-1} d\eta \left(\int_0^{t_2-(b)} dt + \int_{t_2+(b)}^{t_1(b)} dt \right) + \int_{b^2-1}^1 d\eta \int_0^{t_1(b)} dt \right]. \quad (1.49)$$

3. Если $b \in [0, \sqrt{2}]$, то мы находимся над минимумом зависимости $b_2(t)$ при $\eta \in [-1, b^2 - 1]$ и под ним при $\eta \in [b^2 - 1, 1]$. Таким образом, $\bar{\tau}_m$ в данном случае принимает вид

$$\bar{\tau}_m = \frac{a}{2v_F} \int_{-1}^1 d\eta \left(\int_0^{t_2-(b)} dt + \int_{t_2+(b)}^{t_1(b)} dt \right). \quad (1.50)$$

Интегрирование (1.48) - (1.50) дает кусочную функцию (1.24).

1.8. Приложение. Вычисление поправки при $eV \gg T$

Вычисления происходят аналогично случаю $eV \ll T$ до момента вычисления интеграла по энергиям (1.28). Поскольку $T = 0$, то будем считать функции распределения ступенчатыми и величину F_L равной

$$F_L(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1 - \theta(-\varepsilon))(1 - \theta(-\varepsilon'))\theta(-\varepsilon_1)\theta(-\varepsilon_2) - \theta(-\varepsilon)\theta(-\varepsilon')(1 - \theta(-\varepsilon_1))(1 - \theta(-\varepsilon_2)). \quad (1.51)$$

Кроме того, теперь разность энергий на поверхности Ферми порядка eV , поэтому

$$\frac{D}{4E_F^2\beta} \sim \frac{(eV)^2}{4E_F^2\beta} \quad (1.52)$$

и функции C в (1.29), (1.30) и (1.31) несколько видоизменяются. Подставляя новые функции C и F_L из (1.51) в (1.28), получаем величину поправки в слабых полях $\beta \ll (eV)^2/E_F^2$

$$\frac{\delta I}{I_0} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\alpha_{ee} p_F a}{16\pi} \frac{eV}{E_F} \text{sign}(V) \ln \frac{(eV)^2}{\beta E_F^2} \quad (1.53)$$

и в относительно сильных магнитных полях $(eV)^2/E_F^2 \ll \beta \ll 1$

$$\frac{\delta I}{I_0} = \frac{\alpha_{ee} p_F a}{9\pi^2} \frac{(eV)^2}{E_F^2 \sqrt{\beta}} \ln \frac{\beta E_F^2}{(eV)^2}. \quad (1.54)$$

Неравновесный шум в шарвиновских контактах

2.1. Обзор литературы

Неравновесный электрический шум наблюдается в большинстве мезоскопических систем. Он зависит от механизма проводимости и более чувствителен к эффектам электрон-электронного взаимодействия, чем средняя проводимость [46]. В этой главе мы рассмотрим широкие баллистические контакты. В отсутствие рассеяния вблизи контакта конечная проводимость и диссипация энергии обусловлены релаксационными процессами вдали от контакта, где распределение электронов практически равновесно. Так как движение электронов в областях с неравновесным распределением вблизи контакта практически полностью предопределено, то шум не зависит от напряжения и удовлетворяет соотношению Найквиста, в котором в качестве проводимости взята шарвиновская проводимость. Если в контакте есть примеси, то это дает положительную поправку к сопротивлению и приводит к дробовому шуму, который пропорционален току. В отличие от рассеяния на примесях, электрон-электронное взаимодействие не вносит вклад в проводимость однородных проводников с параболическим спектром вследствие сохранения суммарного импульса. Однако как было установлено экспериментально в работе [1] и теоретически показано в работе [25] и в главе 1 данной работы, электрон-электронное рассеяние может приводить к отрицательной поправке к сопротивлению широких баллистических контактов. Поэтому интересно вычислить зависящий от напряжения шум в таких контактах и установить, действительно ли электрон-электронное взаимодействие приводит к дробовому шуму аналогично рассеянию на примесях.

Влияние электрон-электронного взаимодействия на дробовой шум ранее изучалось в контактах с неидеальной проводимостью. Более десяти лет назад обусловленные электрон-электронным взаимодействием эффекты рассматривались квазиклассически для диффузных микромостиков [47]. Недавно появилось несколько статей, где обсуждалось влияние эффектов взаимодействия на дробовой шум в микроструктурах, моделировавшихся квантовыми точками в режиме Кондо [48, 49] или в режиме кулоновской блокады [50, 51]. Предполагалось, что взаимодействуют электроны в локализованных состояниях на этих квантовых точках. Такое взаимодействие сильно отличается от рассеяния в объемном проводнике. Однако наши недавние результаты показывают, что даже рассеяние электронов вдали от контакта влияет на средний ток и, следовательно, может влиять и на шум.

2.2. Вычисление спектральной плотности шума

Будем использовать уравнение Больцмана-Ланжевена [52]. Ранее Кулик и Омелянчук использовали похожий подход, чтобы вычислить электрический шум в шарвиновских контактах вследствие электрон-фононного взаимодействия при нулевой температуре [53]. Здесь мы используем этот метод, чтобы вычислить спектральную плотность при произвольной температуре.

Воспользуемся моделью баллистического контакта, аналогичной рассмотренной в работе [37] для случая электрон-фононного рассеяния. Рассмотрим две полуплоскости двумерного электронного газа, разделенные тонким непроницаемым барьером с отверстием шириной $2a$. Будем предполагать, что a много больше фермиевской длины волны и радиуса экранирования, но много меньше длины рассеяния на примесях и длины электрон-электронного рассеяния. Функции распределения электронов по обеим сторонам от барьера

удовлетворяют уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \hat{I}_{ee}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ – электрическое поле. Интеграл электрон-электронных столкновений имеет вид

$$I_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}'\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left[J(\mathbf{p}'\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}\mathbf{k}) - J(\mathbf{p}\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}'\mathbf{k}') \right], \quad (2.2)$$

где

$$J(\mathbf{p}\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}'\mathbf{k}') = W(\mathbf{p}\mathbf{k}|\mathbf{p}'\mathbf{k}') f(\mathbf{p}) f(\mathbf{k}) [1 - f(\mathbf{p}')] [1 - f(\mathbf{k}')] \quad (2.3)$$

и $W(\mathbf{p}\mathbf{k}|\mathbf{p}'\mathbf{k}') = 8\pi^2 \alpha_{ee} \nu^{-2} V_{vol}^{-3} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}')$ – вероятность перехода из состояния (\mathbf{p}, \mathbf{k}) в состояние $(\mathbf{p}', \mathbf{k}')$. Здесь α_{ee} – безразмерный параметр электрон-электронного взаимодействия, а $\nu = m/\pi$ – двумерная плотность состояний. Уравнение (2.1) нужно решать вместе с уравнением Пуассона на электрический потенциал φ . Однако этого можно избежать при условии $E_F \gg \max(eV, T)$ [53]. Это условие эквивалентно тому, что в отсутствие столкновений электроны вблизи поверхности Ферми движутся практически по прямым, что позволяет считать $\mathbf{v} = v_F \mathbf{p}/p$ и пренебречь слагаемым с электрическим полем в уравнении (2.1).

Зададим граничные условия, чтобы вычислить функции распределения из (2.1): $f(\mathbf{p}) = f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}})$ и $\varphi = \pm V/2$ вдали от отверстия в левой и правой полуплоскостях соответственно.

В отсутствие электрон-электронного взаимодействия $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ зависит только от того, проходит ли траектория электрона через отверстие. Удобно ввести обозначение $\Omega_{in}(\mathbf{r})$ – это телесный угол, содержащий импульсы всех электронов, которые попали в точку \mathbf{r} , пролетев через отверстие. Тогда в нулевом приближении по взаимодействию функции распределения для электронов в

левой (верхний знак) и правой (нижний знак) полуплоскостях выглядят следующим образом

$$f_{L,R}^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \begin{cases} f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}} + e\varphi(\mathbf{r}) \mp eV/2), & \mathbf{p} \notin \Omega_{in}(\mathbf{r}) \\ f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}} + e\varphi(\mathbf{r}) \pm eV/2), & \mathbf{p} \in \Omega_{in}(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (2.4)$$

Ток через контакт равен

$$I = e \int_{-a}^a d\rho \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v_{\perp} f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}), \quad (2.5)$$

где v_{\perp} – компонента \mathbf{v} , направленная перпендикулярно барьеру, а $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{e}_{\parallel}\rho$ – вектор, параллельный барьеру, который задает точку внутри отверстия.

Теперь у нас есть все, чтобы вычислить спектральную плотность шума. Согласно теореме Винера-Хинчина, она выражается через Фурье-образ коррелятора токов

$$S = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \delta I(t) \delta I(0) \rangle. \quad (2.6)$$

Далее мы будем рассматривать случай, когда $\omega = 0$. Флуктуации тока выражаются через флуктуации функций распределения при помощи (2.5)

$$\begin{aligned} \langle \delta I(t) \delta I(0) \rangle &= e^2 \int_{-a}^a d\rho_1 \int_{-a}^a d\rho_2 \int \frac{d^2p_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2p_2}{(2\pi)^2} \\ &\quad \times v_{1\perp} v_{2\perp} \langle \delta f(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, t) \delta f(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Флуктуации функций распределения $\delta f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ удовлетворяют уравнению Больцмана-Ланжевена [52]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} e\delta \mathbf{E} = \delta I_{ee}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + \delta J^{ext}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

где $\delta J^{ext}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ – ланжевеновский источник. Коррелятор ланжевеновских источников вычислен в работе [54] в предположении, что каждое столкновение коррелировано только само с собой

$$\begin{aligned} \langle \delta J^{ext}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{p}_1) \delta J^{ext}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{p}_2) \rangle &= \frac{1}{2} V_{vol} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2) \\ &\times \left[\delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \sum_{\mathbf{p}' \mathbf{k} \mathbf{k}'} (J_{\mathbf{p}' \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{k}} + J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}' \mathbf{k}'}) + \sum_{\mathbf{p}' \mathbf{k}'} (J_{\mathbf{p}' \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} + J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}' \mathbf{k}'}) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} (J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' \mathbf{p}_2} + J_{\mathbf{k}' \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{k}}) \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

Мы пренебрегаем полевыми слагаемыми в уравнении (2.8) по той же причине, что и для уравнения Больцмана (2.1). Поскольку мы рассматриваем случай ненулевых температур, то необходимо учитывать равновесные флуктуации функций распределения вдали от контакта. Для этого представим δf в виде суммы равновесных флуктуаций δf_0 , приходящих из электродов и не связанных с рассеянием (в работе [53] δf_0 было опущено, поскольку авторы рассматривали случай нулевых температур) и интеграла от правой части уравнения Больцмана-Ланжевена (2.8) по времени τ движения электрона в точку \mathbf{r}

$$\delta f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \delta f_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + \int_0^\infty d\tau [\delta I_{ee}(\mathbf{p}, \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau, t - \tau) + \delta J^{ext}(\mathbf{p}, \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau, t - \tau)]. \quad (2.10)$$

Тогда коррелятор функций распределения из (2.7) выглядит следующим об-

разом

$$\begin{aligned}
\langle \delta f(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, t) \delta f(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle &= \langle \delta f_0(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, t) \delta f_0(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle \\
&+ \int_0^\infty d\tau \left[\langle \delta f_0(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, t) \delta I_{ee}(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{v}_2\tau, -\tau) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \delta f_0(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\rho}_2, 0) \delta I_{ee}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{v}_1\tau, t - \tau) \rangle \right] \\
&+ \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \langle \delta J^{ext}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{v}_1\tau_1, t - \tau_1) \delta J^{ext}(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{v}_2\tau_2, -\tau_2) \rangle. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Заметим, что δf_0 и δJ^{ext} некоррелированы вследствие принципа причинности. Первое слагаемое в (2.11) – это двухвременная корреляционная функция флуктуаций, возникающих в электродах и не связанных с рассеянием. Эта корреляционная функция хорошо известна [55]

$$\begin{aligned}
\langle \delta f_0(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, t) \delta f_0(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\
&\times \delta(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{v}_1 t) f(\mathbf{p}_1) [1 - f(\mathbf{p}_1)]. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Подстановка этого коррелятора в (2.7) и (2.6) дает уравнение Найквиста $S_0 = 4TG_0$, где G_0 – шарвиновская проводимость.

В первом порядке по взаимодействию поправка к спектральной плотности $\delta S = S - S_0$ определяется последними тремя слагаемыми в (2.11). Входящий во второе и третье слагаемое δI_{ee} находится варьированием интеграла столкновений I_{ee} (2.2) по δf . Чтобы найти поправку в первом порядке по взаимодействию, подставим функции распределения (2.4) в δI_{ee} и вычислим корреляторы $\langle \delta f_0 \delta I_{ee} \{ \delta f \} \rangle$ и $\langle \delta I_{ee} \{ \delta f \} \delta f_0 \rangle$, используя коррелятор тепловых флуктуаций (2.12). Четвертое слагаемое в (2.11) уже известно (2.9). Затем подставляем полученные выражения в коррелятор токов (2.7) и находим спектральную плотность (2.6).

После некоторых упрощений спектральную плотность в первом порядке

по взаимодействию можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta S = & 2e^2 V_{vol} \int_0^\infty dt \int_{-a}^a d\rho_1 \int_{-a}^a d\rho_2 \int \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^2} v_{1\perp} v_{2\perp} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \\ & \times \delta(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 + \mathbf{v}_2 \tau_1 - \mathbf{v}_1 \tau_1 - \mathbf{v}_2 t) \left[\delta(t - \tau_1 - \tau_2) \Gamma_1 + \delta(t - \tau_1 + \tau_2) \Gamma_2 \right] \Big|_{\rho_1 - \mathbf{v}_1 \tau_1}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где Γ_1 и Γ_2 – комбинации функций распределения и потоков частиц

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & - \sum_{\mathbf{p}'\mathbf{k}'} \left\{ f(\mathbf{p}_2) J_{\mathbf{p}'\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} + [1 - f(\mathbf{p}_2)] J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}'\mathbf{k}'} \right\} \\ & + 2 \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left\{ f(\mathbf{p}_2) J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}_2 \mathbf{k}'} + [1 - f(\mathbf{p}_2)] J_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{k}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & \delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} [1 - 2f(\mathbf{p}_1)] \sum_{\mathbf{p}'\mathbf{k}\mathbf{k}'} (J_{\mathbf{p}'\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}_2 \mathbf{k}} - J_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}'\mathbf{k}'}) + [1 - f(\mathbf{p}_1) - f(\mathbf{p}_2)] \\ & \times \sum_{\mathbf{p}'\mathbf{k}'} (J_{\mathbf{p}'\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} - J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}'\mathbf{k}'}) + 2[f(\mathbf{p}_2) - f(\mathbf{p}_1)] \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}_2 \mathbf{k}'} - J_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Слагаемые в (2.13) имеют различный физический смысл. Первое соответствует случаю, когда столкновение происходит после того, как один из электронов, участвующих в столкновении, пересек отверстие, и до того, как пересек отверстие второй электрон (см. рис. 2.1a). Это слагаемое определяет найквистовский шум при $V = 0$. Оно исчезает при $T = 0$ при любом V , потому что является следствием равновесных флуктуаций, приходящих из электродов. Второе слагаемое соответствует случаю, когда оба электрона пересекают отверстие после столкновения (см. рис. 2.1b), оно определяется поправкой к одновременной корреляционной функции от δf . В равновесии эта функция является термодинамической величиной и не зависит от силы взаимодействия, поэтому она равна нулю при $V = 0$.

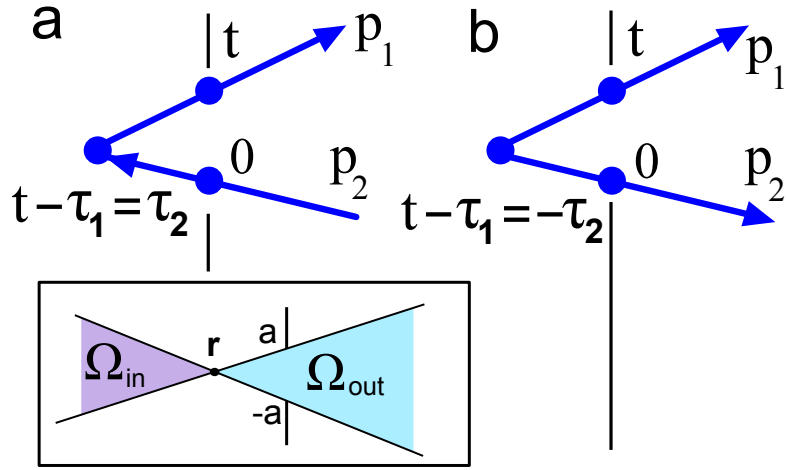


Рис. 2.1. Физический смысл двух слагаемых (2.13). Электрон с импульсом \mathbf{p}_1 пересекает отверстие в момент времени $t > 0$. Электрон с импульсом \mathbf{p}_2 пересекает отверстие в момент времени 0. Столкновение происходит в момент времени $t - \tau_1$. (a) Первое слагаемое в (2.13) пропорционально $\delta(t - \tau_1 - \tau_2)$ и соответствует случаю, когда столкновение происходит между пересечениями отверстия первым и вторым электронами; τ_2 – временной промежуток между пересечением отверстия первым электроном и столкновением. (b) Второе слагаемое (2.13) пропорционально $\delta(t - \tau_1 + \tau_2)$ и соответствует случаю, когда столкновение случилось до того, как оба электрона пересекли отверстие; τ_2 – время между столкновением и первым пересечением отверстия. На вставке показаны телесные углы $\Omega_{in}(\mathbf{r})$ и $\Omega_{out}(\mathbf{r})$.

Рассмотрим (2.13) и выделим слагаемые, вносящие основной вклад. Чтобы дать вклад в флуктуации тока δI , оба импульса \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 должны либо лежать в телесном угле Ω_{in} или в симметричном ему Ω_{out} (см. рис. 2.1, вставка). Как и в случае поправки к току, основной вклад в поправку к спектральной плотности дают столкновения электронов вдали от контакта, следовательно, телесные углы Ω_{in} и Ω_{out} малы, а значит, максимальный вклад в шум дают столкновения электронов, в которых минимально возможное число импульсов принадлежит Ω_{in} или Ω_{out} . С другой стороны, чтобы максимизировать доступное для рассеяния фазовое пространство, сталкивающиеся электроны должны иметь практически противоположно направленные импульсы.

В первом слагаемом, пропорциональном $\delta(t - \tau_1 - \tau_2)$, импульсы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 направлены противоположно (см. рис. 2.1a), они лежат соответственно в Ω_{out} и Ω_{in} . Тогда, чтобы фазовое пространство, доступное для рассеяния, было максимальным, \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 должны соответствовать либо двум начальным

состояниям электронов (импульсы до столкновения), либо двум конечным (импульсы после столкновения). Следовательно, нас интересует только первое слагаемое из (2.14).

Во втором слагаемом, пропорциональном $\delta(t - \tau_1 + \tau_2)$, оба импульса \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 принадлежат телесному углу $\Omega_{out}(\mathbf{r})$ (см. рис. 2.1b), они не могут быть противоположно направлены. Поэтому, чтобы (2.15) было не равно нулю, электрон с импульсом \mathbf{k} должен лежать в $\Omega_{in}(\mathbf{r})$. Следовательно, основной вклад в (2.15) дает первое слагаемое, потому что входящее в него $\delta_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ снимает одно из трех ограничений по телесным углам при интегрировании по импульсам.

Подставляем соответствующие слагаемые из (2.14) и (2.15) в (2.13), последовательно интегрируем по времени, импульсам и координатам и получаем спектральную плотность в виде интеграла по энергиям

$$S_{in} = \frac{e^2 a^2 \alpha_{ee} m}{(2\pi)^3} \ln \frac{l_c}{a} \int d\varepsilon_{\mathbf{p}} \int d\varepsilon_{\mathbf{k}} \int d\varepsilon_{\mathbf{p}'} \int d\varepsilon_{\mathbf{k}'} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) \times \Theta(D) D^{-1/2} [F_1(\varepsilon_{\mathbf{p}}, \varepsilon_{\mathbf{k}}, \varepsilon_{\mathbf{p}'}, \varepsilon_{\mathbf{k}'}) + F_2(\varepsilon_{\mathbf{p}}, \varepsilon_{\mathbf{k}}, \varepsilon_{\mathbf{p}'}, \varepsilon_{\mathbf{k}'})], \quad (2.16)$$

где

$$F_1 = 2f_R(\varepsilon_{\mathbf{k}})[1 - f_R(\varepsilon_{\mathbf{k}})] \left\{ [1 - f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}})] f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}'}) f_L(\varepsilon_{\mathbf{k}'}) + f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}})[1 - f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}'})][1 - f_L(\varepsilon_{\mathbf{k}'})] \right\} \quad (2.17)$$

и

$$F_2 = [1 - 2f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}})] \left\{ [1 - f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}})] [1 - f_R(\varepsilon_{\mathbf{k}})] f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}'}) f_L(\varepsilon_{\mathbf{k}'}) \right. \quad (2.18)$$

$$\left. - f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}}) f_R(\varepsilon_{\mathbf{k}}) [1 - f_L(\varepsilon_{\mathbf{p}'})] [1 - f_L(\varepsilon_{\mathbf{k}'})] \right\}. \quad (2.19)$$

2.3. Результаты и обсуждение

Интегрируя по энергиям, получаем для случая слабых напряжений $eV \ll T$

$$\delta S = \frac{e^2 a^2 \alpha_{ee} m}{(2\pi)^3} \ln \frac{l_c}{a} \times [2C_{10}T^2 + C_2(eV)^2]. \quad (2.20)$$

Здесь константы $C_{10} = 3.72$ и $C_2 = 0.22$ вычислены численно. Сравнивая с полученной в главе 1 поправкой к проводимости из-за электрон-электронного взаимодействия (1.21), получаем полное согласие с соотношением Найквиста.

В случае высоких напряжений $eV \gg T$ спектральная плотность имеет вид

$$\delta S = \frac{e^2 a^2 \alpha_{ee} m}{(2\pi)^3} \ln \frac{l_c}{a} \times 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) (eV)^2, \quad (2.21)$$

она связана с полученной в главе 1 поправкой к току (1.22) формулой Шоттки $\delta S = 2e\delta I$. Такое соотношение является следствием того, что мы рассматривали взаимодействие в низшем приближении и того, что поправка определяется столкновениями электронов вдали от контакта. Слабость взаимодействия позволяет нам рассматривать различные столкновения независимо, суммируя их общий вклад. Так как столкновения происходят вдали от контакта, телесный угол Ω_{in} мал и можно пренебречь столкновениями, в которых больше одного импульса принадлежит области Ω_{in} . Следовательно, любое столкновение изменяет число электронов, прошедших через контакт, на единицу, что приводит к классическому дробовому шуму.

Рассматривая случай высоких напряжений, вычислим Фано-фактор F , пользуясь стандартным определением $S_0 + \delta S = 2eF(I_0 + \delta I)$. Зная относительную поправку к проводимости (1.22), находим

$$F = \frac{\alpha_{ee} p_F a}{16\pi} \frac{eV}{E_F} \text{sign}(V) \ln \frac{l_c}{a} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.22)$$

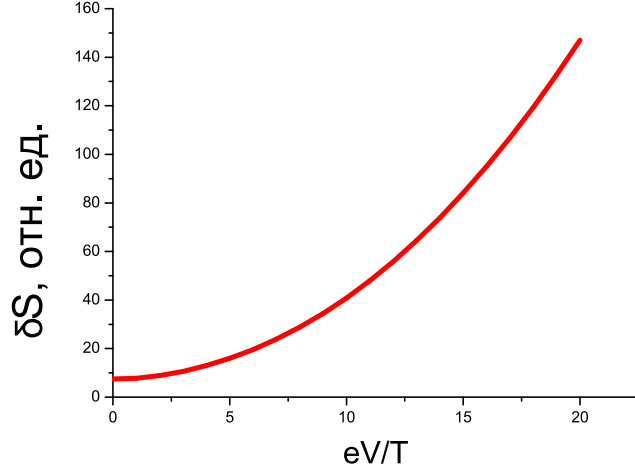


Рис. 2.2. Зависимость поправки к спектральной плотности от eV/T в единицах $e^2 a^2 \alpha_{ee} m \ln \frac{l_c}{a} \times T^2 / (2\pi)^3$

Для произвольного соотношения между напряжением и температурой зависимость $\delta S(eV/T)$ можно получить численным интегрированием в (2.16). Итоговая зависимость показана на рис. 2.2.

Таким образом, мы вычислили неравновесный шум, обусловленный электрон-электронными столкновениями для произвольного соотношения между поданным на контакт напряжением V и температурой T . Поправка определяется столкновениями электронов на расстояниях от контакта, много больших его ширины, она положительна во всем диапазоне напряжений. Такая ситуация сильно отличается от случая рассеяния на примесях, когда поправка к шуму отрицательна при слабых напряжениях и положительна при высоких. При слабых напряжениях шум определяется тепловыми флуктуациями, распространяющимися из глубины электродов. При высоких напряжениях шум является следствием случайных столкновений электронов, он связан с нелинейной поправкой к току формулой Шоттки. Также был вычислен Фано-фактор. Он не равен нулю, как для чисто баллистического контакта без взаимодействия.

Экспериментальная проверка соотношения Шоттки для широких бал-

листических контактов и измерение Фано-фактора в высокоподвижных образцах может дополнительно подтвердить, что положительное магнетосопротивление и линейно зависящая от температуры поправка, наблюдавшиеся в экспериментах [1, 2] действительно связаны с электрон-электронным рассеянием на больших расстояниях от контакта.

Квантовый электронный транспорт в узких двумерных контактах при ненулевой температуре

3.1. Обзор литературы

Работы по исследованию влияния электрон-электронного взаимодействия на проводимость низкоразмерных баллистических контактов традиционно вызывают большой интерес. В основном это связано с попытками объяснить 0.7-аномалию в квантовых контактах [56] и 0.5-аномалию в чистых квантовых проволоках [57]. Обычно эти эффекты объясняются существованием локализованного состояния в контакте [58, 59]. Механизм формирования такого состояния пока до конца не выяснен, предлагаются различные варианты [60–62]. Один из них – усиление рассеяния электронов назад как следствие флуктуаций электронной плотности в квантовом контакте [63]. Этот механизм не зависит от вида сужения, а осцилляции электронной плотности действительно наблюдались на эксперименте [64].

Формирование плато проводимости - не единственное следствие рассеяния электронов на фриделевских осцилляциях в двумерных системах. Недавно было показано, что рассеяние на фриделевских осцилляциях в двумерных проводниках с примесями приводит к сильной зависимости проводимости от температуры [65, 66]. Кроме того, при туннелировании через границу двумерного газа такое рассеяние может приводить к пику в дифференциальной проводимости при нулевом напряжении [67].

В большинстве теоретических работ [58, 60–63] рассматриваются эффек-

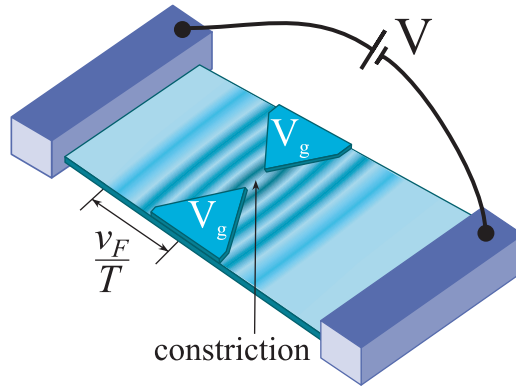


Рис. 3.1. Схема экспериментальной реализации квантового контакта. Треугольники - это формирующие сужение электроды, голубые полосы показывают фриделевские осцилляции электронной плотности, затухающие на расстоянии v_F/T от области обеднения.

ты взаимодействия в самой узкой части контакта (Рис. 3.1). Как правило, рассматриваются длинные контакты с одним или несколькими каналами проводимости. При этом неясно, каким образом происходит переход к бесконечному числу каналов проводимости в электродах и оказывают ли влияние эффекты взаимодействия вне сужения. В то же время хорошо известно, что в двумерии фриделевские осцилляции от барьера затухают по закону $x^{-3/2}$, т.е. глубоко проникают в электроды. Следовательно, их вклад в проводимость может быть довольно существенным.

В 1-2 главах рассматривались контакты с шириной много больше фермиевской длины волны. В квазиклассическом приближении как следствие электрон-электронного взаимодействия были вычислены зависящая от температуры поправка к проводимости [25], положительное магнетосопротивление в слабых полях [8] и дробовой шум [6]. Теоретические зависимости $G(T)$ и $G(H)$ [8, 25] качественно и количественно подтверждаются экспериментом [1, 2]. При этом линейный по температуре вклад в проводимость выживает даже когда ширина контакта становится порядка фермиевской длины волны [2], и квантовые эффекты рассеяния на фриделевских осцилляциях должны давать большой вклад. Интересно сравнить вклад квантового и квазиклассического эффектов. Для этого вычисляется зависящая от температуры

проводимость для узкого контакта $a \ll \lambda_F$ и обсуждается интерференция дифракции на отверстиях и электрон-электронного взаимодействия. Локализованное состояние не формируется, поскольку взаимодействие предполагается слабым. Также здесь не рассматриваются физические эффекты, связанные с 0.7-аномалией, и основное внимание уделяется проводимости вблизи напряжения отсечки.

3.2. Методика вычислений

Рассматривается влияние электрон-электронного взаимодействия на проводимость узкого и короткого контакта при ненулевой температуре. Предполагается, что электрон-электронное взаимодействие слабое.

Так как фриделевские осцилляции затухают на расстоянии v_F/T от контакта, то нас в основном будут интересовать процессы рассеяния вне области сужения и мы не будем обсуждать точную динамику электронов в самой узкой части контакта. Следовательно, будем рассматривать экстремально короткий контакт, а именно, воспользуемся стандартной моделью для задачи дифракции на отверстии - отверстие шириной $2a \ll \lambda_F$ в непрозрачном одномерном барьере, разделяющем две полуплоскости двумерного электронного газа (Рис. 3.2). Такая геометрия позволяет избежать рассмотрения бесконечного числа каналов проводимости и использовать вместо этого непрерывное представление.

Заметим, что форма фриделевских осцилляций вдали от отверстия не зависит от точной формы барьера, потому что они формируются электронами вблизи поверхности Ферми, летящими практически перпендикулярно барьеру. Поэтому некоторое размытие барьера приводит только к сдвигу фазы фриделевских осцилляций, что практически не изменяет поправку к проводимости. Будем использовать стандартный подход Ландауэра [68] и запишем

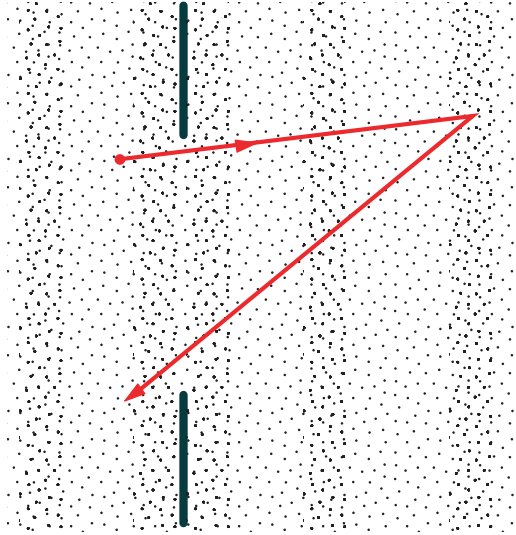


Рис. 3.2. Используемая для вычислений модель квантового контакта. Красной линией показан влияющий на проводимость процесс рассеяния электрона на фриделевских осцилляциях.

проводимость как сумму коэффициентов прохождения через контакт

$$G = g_s \frac{e^2}{\hbar} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} |t(\mathbf{k}, \mathbf{q})|^2. \quad (3.1)$$

Здесь g_s – спиновое вырождение и $t(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ – коэффициент прохождения из моды с волновым вектором \mathbf{k} в левой полуплоскости в моду с волновым вектором \mathbf{q} в правой полуплоскости.

Сначала вычислим $t = t_0$ и $G = G_0$ для невзаимодействующих электронов. Слабое электрон-электронное взаимодействие приводит к рассеянию электронов на фриделевских осцилляциях от границ контакта. Будем считать осцилляции от барьера одномерными и пренебрежем их искривлением из-за наличия отверстия, потому что это эффект более высокого порядка по размеру отверстия. Падающие электроны рассеиваются на фриделевских осцилляциях до и после прохождения через контакт, что приводит к поправке к коэффициенту прохождения $t(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = t_0(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \delta t(\mathbf{k}, \mathbf{q})$. Поправку к коэффициенту прохождения можно получить, разложив возмущение волновой функции из-за взаимодействия $\delta\psi$ на плоские волны. Чтобы вычислить это

возмущение, решим уравнение типа Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{eff}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = \varepsilon \psi(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

методом итераций [69] и получим $\delta\psi(\mathbf{r})$ в низшем порядке по взаимодействию.

Рассмотрим эффективный потенциал взаимодействия, созданный фриделевскими осцилляциями. Он представляет собой сумму прямого и обменного слагаемого [70] $V_{eff}(\mathbf{r}) = V_H(\mathbf{r}) - V_F(\mathbf{r})$, где

$$V_H(\mathbf{r}) = g_s \int d\mathbf{r}_1 U_{ee}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1), \quad (3.3)$$

$$V_F(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 U_{ee}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1), \quad (3.4)$$

где $n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \langle \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle$, $\hat{\psi}^+$ и $\hat{\psi}$ – электронные операторы рождения и уничтожения и $U_{ee}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ – потенциал электрон-электронного взаимодействия. Как правило, это кулоновское взаимодействие, экранированное двумерными электронами и затвором. Коэффициент спинового вырождения g_s стоит только перед слагаемым прямого взаимодействия, потому что оно включает в себя взаимодействие между электронами с различными направлениями спинов, в то время как обменное взаимодействие возможно только для электронов с одинаковым направлением спина.

Выражения (3.3) и (3.4) дают поправку к волновой функции в виде $\delta\psi = \delta\psi_H - \delta\psi_F$ и, следовательно, поправка к проводимости выглядит следующим образом

$$\delta G = \delta G_H - \delta G_F. \quad (3.5)$$

Здесь явным образом показан отрицательный знак обменного слагаемого.

3.3. Невзаимодействующие электроны

В отсутствие электрон-электронного взаимодействия вычисление проводимости контакта сводится к решению стандартной задачи дифракции на узком отверстии шириной $a \ll \lambda_F$. Для трехмерного случая она рассматривалась много раз [71], в том числе в применении к микроконтактам [72]. В [72] было получено, что проводимость пропорциональна шестой степени размера контакта $G \propto (k_F a)^6$.

Однако двумерный случай в пределе $a \ll \lambda_F$ рассматривался лишь единожды для весьма специфической модели контакта [73]. В пределе $k_F a \ll 1$ авторы [73] получили $G \propto 1/\ln^2(k_F a)$, что выглядит нефизичным. Поэтому мы получили свое решение этой задачи, используя известное решение проблемы дифракции на узком отверстии [74] и стандартный подход Ландауэра [68].

Используем метод, похожий на тот, который использовался в [74] и сведем решение уравнения Шредингера (3.2) при нулевом потенциале взаимодействия $V_{eff} = 0$ к решению граничной задачи. Полную волновую функцию можно записать в виде

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}') = \psi_0(\mathbf{r}') + \psi_t(\mathbf{r}'), & x' < 0 \\ \psi(\mathbf{r}') = \psi_t(\mathbf{r}'), & x' > 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

где ψ_0 – волновая функция в отсутствие отверстия и ψ_t – поправка в нижнем порядке по размеру отверстия. Функция нулевого порядка по размеру отверстия ψ_0 удовлетворяет нулевым граничным условиям на барьере и на отверстии, а поправка ψ_t удовлетворяет нулевым граничным условиям на барьере и ненулевым граничным условиям на отверстии

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2) \psi_t(x, y) = 0 \\ \psi_t(x, y)|_{x=0, y \in (-a, a)} = \chi(0, y), \end{cases} \quad (3.7)$$

где $k^2 = 2m\varepsilon$.

Предполагаем, что падающая волна $\psi_i(\mathbf{r}) = \sqrt{m/k_x} e^{i(k_x x + k_y y)}$, где $k_x^2 + k_y^2 = k^2$, падает на контакт слева по оси x и находим волновую функцию на отверстии $\chi(y)$ самосогласованно, используя непрерывность полной волновой функции на отверстии (см. Приложение 1). Представляем прошедшую волновую функцию в виде суммы плоских волн и находим коэффициент прохождения для невзаимодействующих электронов

$$t_0(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -\frac{i\pi}{2} a^2 \sqrt{k_x q_x}. \quad (3.8)$$

Подставляем коэффициент прохождения в Eq.(3.1) и получаем

$$G_0 = g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{\pi}{128} k_F^4 a^4 + \mathcal{O}\left(\frac{T^2}{E_F^2}\right). \quad (3.9)$$

Эта зависимость от размера отверстия выглядит более физической, чем полученная в работе [73], потому что это аналог двумерного релеевского рассеяния света на частицах с размерами много меньше длины волны [71]. Интенсивность рассеянного света пропорциональна квадрату объема частицы, а проводимость пропорциональна четвертой степени размера отверстия.

3.4. Учет взаимодействия по теории возмущений

Учтем слабое электрон-электронное взаимодействие. Оно приводит к рассеянию электронов на фриделевских осцилляциях от барьера и дает поправку к коэффициенту прохождения $\delta t(\mathbf{k}, \mathbf{q})$. Подставляем ее в формулу Ландауэра (3.1) и получаем поправку к проводимости для случая слабого взаимодействия

$$\delta G = -2g_s \frac{e^2}{\hbar} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} |t_0(\mathbf{k}, \mathbf{q})| \text{Im} \delta t(\mathbf{k}, \mathbf{q}). \quad (3.10)$$

Здесь мы приняли во внимание, что t_0 (3.8) – мнимая величина. Поправка к коэффициенту прохождения легко находится из поправки к волновой функции, представленной в виде суммы плоских волн. Волновую функцию будем искать как решение уравнения Шредингера (3.2) в низшем порядке по взаимодействию. Для этого перенесем слагаемое с V_{eff} в правую часть и подставим в него невозмущенную волновую функцию. Решение имеет вид

$$\delta\psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V_{eff}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'). \quad (3.11)$$

Здесь $V_{eff}(\mathbf{r}')$ – эффективный потенциал взаимодействия, созданный фриделевскими осцилляциями, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\psi(\mathbf{r}')$ – одноэлектронная функция Грина и полная волновая функция в отсутствие взаимодействия. Мы предполагаем, что электроны падают на контакт слева, а ток измеряется справа, где $x > 0$. В то же время нас интересует весь диапазон значений $x' \in (-\infty, \infty)$, потому что мы рассматриваем рассеяние электронов на фриделевских осцилляциях как до, так и после отверстия. По аналогии с полной волновой функцией (3.6), одноэлектронную функцию Грина можно записать в виде

$$\begin{cases} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), & x' < 0 \\ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), & x' > 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

где g_0 – функция Грина в отсутствие отверстия, а $g_t \propto a^2$ – поправка второго порядка малости по размеру отверстия. g_t вычисляется аналогично ψ_t (см. Приложение 1), для этого решаем систему

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 + k^2) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{x=0, y \in (-a, a)} = \chi(0, y, x', y'). \end{cases} \quad (3.13)$$

Подставляем (3.6) и (3.12) в (3.11) и получаем в низшем порядке по размеру

отверстия

$$\delta\psi(\mathbf{r}) = \int_{x'<0} d\mathbf{r}' g_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V_{eff}(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}') + \int_{x'>0} d\mathbf{r}' g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V_{eff}(\mathbf{r}') \psi_t(\mathbf{r}'). \quad (3.14)$$

Первое слагаемое соответствует рассеянию электронов на фриделевских осцилляциях до отверстия, а второе – после отверстия.

Подставляем формулы для эффективного потенциала в приближении Хартри-Фока (3.3) и (3.4) в (3.14) и получаем проводимость как сумму прямого и обменного слагаемых $\delta G = \delta G_H - \delta G_F$. Затем подставляем ψ_0 , ψ_t , g_0 и g_t в полученное выражение и после некоторых упрощений получаем проводимость для произвольного потенциала взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} \delta G_H = & -g_s^2 \frac{e^2 m}{\hbar \hbar^2} \frac{1}{16} a^4 \int d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) k^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_0^{\infty} dx_1 \\ & \times \int_0^{\infty} dx' U_{ee}(x' - x_1, -y_1) n(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \sin(2q_x x') \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta G_F = & -g_s \frac{e^2 m}{\hbar \hbar^2} \frac{1}{8} a^4 \int d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) k^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_0^{\infty} dx_1 \\ & \times \int_0^{\infty} dx' U_{ee}(x' - x_1, -y_1) n(\mathbf{r}', x_1, y_1 + y') \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \sin(q_x x') \cos(q_y y_1) \cos(q_x x_1) \quad (3.16) \end{aligned}$$

Используем замену координат $y_1 \rightarrow y_1 + y'$, чтобы сделать потенциал взаимодействия не зависящим от y' и проинтегрировать по y' . Такая замена приводит к независимости фриделевских осцилляций от y' , потому что мы получаем поправку в низшем приближении по размеру отверстия и для вычисления n используем невозмущенные волновые функции в отсутствие отверстия (см.

Приложение 2).

$$n(\mathbf{r}', x_1, y_1 + y') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dp \left(-\frac{\partial f(p)}{\partial p} \right) p \times \left[\frac{J_1(p\sqrt{(x' - x_1)^2 + y_1^2})}{\sqrt{(x' - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{J_1(p\sqrt{(x' + x_1)^2 + y_1^2})}{\sqrt{(x' + x_1)^2 + y_1^2}} \right] \quad (3.17)$$

Взяв $x' = x_1$ и $y_1 = 0$, отсюда легко получить $n(x_1) = n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)$, видно, что отвечающая за прямое взаимодействие плотность фриделевских осцилляций зависит только от одной координаты

$$n(x_1) = \frac{k_F^2}{4\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dp \left(-\frac{\partial f}{\partial p} \right) p \frac{J_1(2px_1)}{2x_1}. \quad (3.18)$$

Первое слагаемое представляет собой константу, а второе – осцилляции с периодом $(2k_F)^{-1}$ на больших расстояниях от отверстия, затухающие по закону $x^{-3/2}$ при нулевой температуре. При ненулевой температуре осцилляции экспоненциально затухают на расстоянии v_F/T от отверстия.

3.5. Точечный потенциал взаимодействия

Рассмотрим случай точечного потенциала взаимодействия, когда $U_{ee}(x' - x_1, -y_1) = U_p \delta(x' - x_1) \delta(y_1)$. Тогда из (3.15) и (3.16) легко получить, что $\delta G_H = g_s \delta G_F$. Следовательно, $\delta G = (g_s - 1) \delta G_F$. Интегрируя по x_1, y_1 и q_y , получаем

$$\delta G = [1 - g_s] g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{\pi}{16} a^4 U_p \int d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) k^3 \int_0^{\infty} dx' n(x') J_1(2kx'). \quad (3.19)$$

Подставляя сюда $n(x')$ из (3.18), можно показать, что основной вклад вносят значения $x' \sim v_F/T$, т.е. “хвост” фриделевских осцилляций вдали от барьера. Интегрируя по x' и p , получаем суммарный коэффициент прохождения

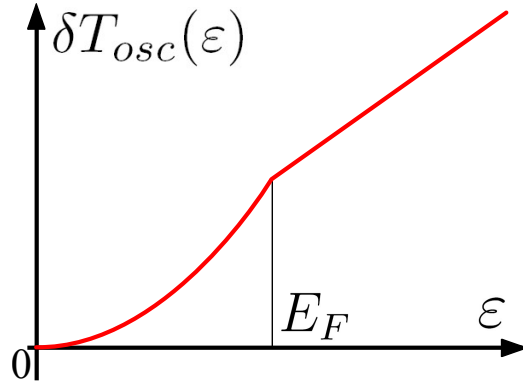


Рис. 3.3. Излом в коэффициенте прохождения.

ния $\delta T(\varepsilon)$. Он состоит из двух частей $\delta T_{const}(\varepsilon) + \delta T_{osc}(\varepsilon)$, формируемых соответственно константной и осциллирующей частью электронной плотности (3.18). $\delta T_{const}(\varepsilon)$ представляет собой непрерывную функцию без особенностей, а $\delta T_{osc}(\varepsilon)$ имеет излом на поверхности Ферми вида

$$\delta T_{osc}(\varepsilon) \propto \frac{\varepsilon}{E_F} \left[\frac{\varepsilon}{E_F} - \frac{T}{E_F} \ln \left(1 + e^{\frac{\varepsilon - E_F}{T}} \right) \right]. \quad (3.20)$$

При $T/E_F \ll 1$ производная последнего слагаемого по ε/E_F стремится к 2 при $\varepsilon = E_F - 0$ и к 1 при $\varepsilon = E_F + 0$. Этот излом (см. Рис. 3.3) приводит к линейной зависимости проводимости от температуры

$$\delta G = \frac{[1 - g_s] g_s}{128} \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} k_F^4 a^4 U_p \frac{T}{E_F}. \quad (3.21)$$

Такая температурная зависимость – это следствие того, что длина, на которой затухают фриделевские осцилляции, зависит от температуры (см. Рис. 3.1).

3.6. Произвольный потенциал взаимодействия

3.6.1. Прямое взаимодействие

Рассмотрим изотропный несингулярный потенциал взаимодействия. Он обычно описывается своими фурье-компонентами $U_p(p)$, зависящими только от абсолютного значения \mathbf{p} . Как и для случая точечного взаимодействия,

подстановка в (3.15) электронной плотности (3.18), состоящей из константной и осциллирующей части, приводит к поправке в виде суммы двух слагаемых $\delta G_H = \delta G_{H,const} + \delta G_{H,osc}$. Первое легко вычисляется

$$\delta G_{H,const} = -g_s^2 \frac{e^2 m}{\hbar \hbar^2} \frac{1}{128} k_F^4 a^4 U_p(0) + \mathcal{O}\left(e^{-E_F/T}\right) \quad (3.22)$$

Здесь $U_p(0)$ – Фурье-компонента потенциала взаимодействия. Второе слагаемое после некоторых упрощений приводится к виду

$$\begin{aligned} \delta G_{H,osc} &= g_s^2 \frac{e^2 m}{\hbar \hbar^2} \frac{1}{128\pi} a^4 \int dk \left(-\frac{\partial f}{\partial k} \right) k^3 \\ &\times \int_0^\infty dp \left(-\frac{\partial f}{\partial p} \right) p \int dp_1 U_p(p_1) I_1(k, p, p_1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь введено обозначение

$$I_1(p > k) = \frac{\theta(-p_1 + 2k)}{4kp} \left[\sqrt{4p^2 - p_1^2} + \frac{p_1^2}{\sqrt{4k^2 - p_1^2}} \right] \quad (3.24)$$

$$- \frac{\theta(-p_1 + 2p) \theta(p_1 - 2k)}{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4k^2}} \frac{k}{p} \sqrt{\frac{4p^2 - p_1^2}{p_1^2 - 4k^2}}, \quad (3.25)$$

$$I_1(p < k) = \frac{\theta(-p_1 + 2p)}{4kp} \left[\sqrt{4p^2 - p_1^2} + \frac{p_1^2}{\sqrt{4k^2 - p_1^2}} \right] \quad (3.26)$$

$$+ \frac{\theta(p_1 - 2p) \theta(-p_1 + 2k)}{k \sqrt{4k^2 - p_1^2}} \frac{p p_1}{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p^2}}. \quad (3.27)$$

$I_1(k, p, p_1)$ имеет сингулярности при $p_1 = 2k$ и $p_1 = 2p$, а производные от функций распределения (3.23) вырезают в интервалах интегрирования по k и p узкие интервалы шириной $\sim k_F T/E_F$ вблизи k_F . Предположив, что потенциал U_p является гладкой функцией по p на масштабах T/v_F , можно представить подинтегральное выражение в виде суммы двух слагаемых, одно из которых имеет особенность при $p_1 = 2k_F$, а второе представляет собой

гладкую функцию (в нем можно положить $p = k = k_F$)

$$U_p(p_1) I_1(k, p, p_1) \approx U_p(2k_F) I_1(k, p, p_1) + [U_p(p_1) - U_p(2k_F)] I_1(k = k_F, p = k_F, p_1). \quad (3.28)$$

Интегрируя обе части и суммируя с (3.22), получаем поправку, обусловленную прямым взаимодействием, в виде

$$\delta G_H = -g_s^2 \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{128} k_F^4 a^4 U_p(2k_F) \frac{T}{E_F} + g_s^2 \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{64\pi} k_F^4 a^4 \int_0^{2k_F} dp_1 \frac{U_p(p_1) - U_p(0)}{\sqrt{4k_F^2 - p_1^2}}. \quad (3.29)$$

Поправка состоит из двух слагаемых – первое линейно по температуре и пропорционально Фурье-компоненте потенциала $U_p(2k_F)$, а второе не зависит от температуры и исчезает, если потенциал взаимодействия $U_p(p)$ представляет собой константу.

3.6.2. Обменное взаимодействие

Подставляя (3.17) в (3.16) видим, что обменное слагаемое состоит из двух частей $\delta G_F = \delta G_{F,const} + \delta G_{F,osc}$, в полной аналогии с прямым слагаемым δG_H .

Первая часть легко вычисляется

$$\delta G_{F,const} = -g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{64\pi} k_F^2 a^4 \int_0^{2k_F} dp_1 U_p(p_1) p_1 \arccos\left(\frac{p_1}{2k_F}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-E_F/T}\right). \quad (3.30)$$

Вторая часть после некоторых упрощений приводится к виду

$$\delta G_{F,osc} = g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{32\pi^2} a^4 \int dk \left(-\frac{\partial f}{\partial k}\right) k^2 \int_0^\infty dp \left(-\frac{\partial f}{\partial p}\right) \int_0^p dp_y \times \int_0^k dq_y U_p(p_y - q_y) \ln \left| \frac{q_x + p_x}{q_x - p_x} \right|. \quad (3.31)$$

Видно, что она имеет особенность при $p_x = q_x$, так как обратное рассеяние электронов наиболее эффективно, если x -компонента импульса q_x совпадает с волновым вектором фриделевских осцилляций p_x . Записываем подинтегральное выражение в виде суммы двух слагаемых, одно из которых имеет сингулярность при $p_x = q_x$, а второе представляет собой гладкую функцию без особенностей (так что можно положить $k = p = k_F$)

$$U_p(p_y - q_y) \ln \left| \frac{q_x + p_x}{q_x - p_x} \right| \approx U_p(0) \ln \left| \frac{q_x + p_x}{q_x - p_x} \right| + [U_p(p_y - q_y) - U_p(0)] \ln \left| \frac{q_x + p_x}{q_x - p_x} \right|_{p=k=k_F}. \quad (3.32)$$

Вычисляя обе части и суммируя с (3.30), получаем обусловленную обменным взаимодействием поправку в виде

$$\delta G_F = -g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{128} k_F^4 a^4 U_p(0) \frac{T}{E_F} + \delta G_{F,T=0}, \quad (3.33)$$

где $\delta G_{F,T=0}$ – не зависящее от температуры слагаемое

$$\delta G_{F,T=0} = g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{32\pi^2} k_F^3 a^4 \int_0^{2k_F} dp_1 U_{ee}(p_1) \times \left[K \left(\sqrt{1 - \frac{p_1^2}{4k_F^2}} \right) - E \left(\sqrt{1 - \frac{p_1^2}{4k_F^2}} \right) - \pi \frac{p_1}{2k_F} \arccos \left(\frac{p_1}{2k_F} \right) \right]. \quad (3.34)$$

Здесь K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Зависящая от температуры поправка к проводимости (3.33) определяется длинноволновой компонентой потенциала взаимодействия, что типично для обменного взаимодействия [65, 75]. В то же время $\delta G_{F,T=0}$ зависит от всех Фурье-компонент потенциала U_p от 0 до $2k_F$. Длинноволновые компоненты входят в (3.34) с положительным знаком, а коротковолновые – с отрицательным, так что суммарный интеграл равен нулю, если U_p является константой.

3.7. Обсуждение

Суммируя (3.9), (3.29) и (3.33), получаем полную проводимость $G = G_0 + \delta G_H - \delta G_F$ в виде

$$G = g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{\pi}{128} k_F^4 a^4 + \delta G_{T=0} + g_s \frac{e^2}{\hbar} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{128} k_F^4 a^4 [U_p(0) - g_s U_p(2k_F)] \frac{T}{E_F} \quad (3.35)$$

Здесь $\delta G_{T=0}$ – не зависящее от температуры слагаемое, это следствие слабого изменения уровня Ферми в результате взаимодействия. Чтобы вычислить относительную поправку из-за взаимодействия, разделим $\delta G_H - \delta G_F$ на (3.9) (нас интересует только зависящее от температуры слагаемое при $g_s = 2$) и получим

$$\frac{\delta G_T}{G_0} = \nu_2 [U_p(0) - 2U_p(2k_F)] \frac{T}{E_F}, \quad (3.36)$$

где $\nu_2 = m/(\pi\hbar^2)$ – двумерная плотность состояний с учетом спина. Относительная поправка линейно зависит от температуры, она намного больше стандартных Ферми-жидкостных поправок порядка T^2 . Это следствие излома в коэффициенте прохождения (см. Рис. 3.3). Точно такая же температурная зависимость была получена ранее для обусловленной электрон-электронным взаимодействием поправки к проводимости широкого баллистического контакта [25]. Эта поправка была вызвана увлечением равновесных падающих на контакт электронов неравновесными электронами, пришедшими из другой полуплоскости.

Абсолютное значение поправки к проводимости пропорционально четвертой степени размера отверстия $\delta G \propto (k_F a)^4$, а относительная поправка $\delta G/G_0$ не зависит от a . Эта ситуация сильно отличается от квазиклассической, так как поправка к проводимости широкого контакта δG_{semi} пропорциональна $(k_F a)^2 \ln(l_c/a)$, где $l_c \gg a$ – это большая длина обрезания, обусловленная примесями или конечными размерами образца, так что, грубо говоря, $\delta G/G_0|_{semi}$ пропорциональна G_0 . Если экстраполировать эту зависимость

на случай узких контактов, то квазиклассическая поправка будет пропорциональна G_0^2 , так как и число падающих, и число инжектированных электронов пропорционально G_0 . Поэтому в случае узких контактов поправка, обусловленная фриделевскими осцилляциями, должна играть основную роль.

Квантовая поправка из-за рассеяния на фриделевских осцилляциях более чувствительна к форме потенциала взаимодействия, нежели квазиклассическая. В частности, знак квантовой поправки определяется множителем $[U_p(0) - 2U_p(2k_F)]$, который представляет собой конкуренцию между положительным вкладом от обменного взаимодействия и отрицательным вкладом от прямого. Этот множитель возникает в теориях рассеяния на фриделевских осцилляциях [63, 65, 66], он положителен для дальнедействующего взаимодействия и отрицателен для короткодействующего.

Рассмотрим наиболее типичный случай кулоновского потенциала, статически экранированного металлическим затвором, параллельным плоскости двумерного газа и двумерными электронами. Если расстояние до затвора d , а диэлектрическая проницаемость ε_d , то потенциал взаимодействия между электронами в газе (см. Приложение 3)

$$U(q) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon_d(\coth |qd| + 1)|q| + 4\pi e^2\nu_2}, \quad (3.37)$$

что дает поправку в виде

$$\frac{\delta G_T}{G_0} = \frac{T}{E_F} \left[\frac{2\kappa_2 d}{1 + 2\kappa_2 d} - \frac{2\kappa_2}{k_F[\coth(2k_F d) + 1] + \kappa_2} \right], \quad (3.38)$$

где κ_2 - обратная длина экранирования. Диаграмма на Рис. 3.4 показывает области в координатах $(k_F d, \kappa_2 d)$, в которых поправка положительна и отрицательна.

К сожалению, детальное сравнение с экспериментом в настоящий момент невозможно, так как нет экспериментов, где основное внимание уделялось бы измерению проводимости вблизи напряжения отсечки. В экспе-

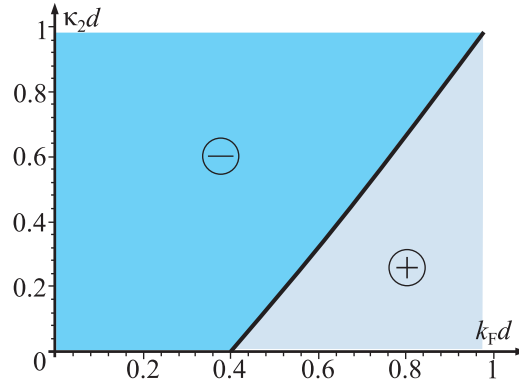


Рис. 3.4. Знак поправки из-за рассеяния на фриделевских осцилляциях в координатах $k_F d$ и $\kappa_2 d$. Серая область соответствует положительному знаку поправки, голубая - отрицательному.

риментах [76] на двумерном газе, сформированном в высокоподвижных гетероструктурах GaAs/AlGaAs, параметры были следующими: электронная плотность $n_s = 1.1 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_d = 13.1$, расстояние до затвора $d = 100 \text{ нм}$. Если предположить, что обратная длина экранирования равна полученному в приближении среднего поля значению $\kappa_2 = 2\pi e^2 \nu_2 / \varepsilon_d = 1.93 \times 10^6 \text{ см}^{-1}$ (что верно в пределе достаточно высокой электронной плотности), то подстановка этих параметров в (3.38) при $T = 1 \text{ К}$ дает отрицательную поправку к проводимости $\delta G_T / G_0 \approx -0.003$. Измерение проводимости в области 0.7-аномалии действительно демонстрирует отрицательный знак зависимости $G(T)$ (см. [76], Рис. 2b, вставка). Однако количественное сравнение с теорией невозможно из-за того, что на экспериментальном графике используется логарифмическая температурная шкала.

Конечно, параметры эксперимента [76] являются далеко не самыми удачными для наблюдения предсказанного эффекта, поскольку были оптимизированы для наблюдения состояний типа Кондо в области 0.7-аномалии. Увеличив температуру до $T = 3 \text{ К}$, немного изменив электронную плотность и/или уменьшив расстояние до затвора, можно увеличить относительную поправку к проводимости до 10%.

В многоканальном режиме эта отрицательная поправка должна подав-

ляться положительной квазиклассической поправкой, связанной с рассеянием электронов, движущихся навстречу друг другу [25], в связи с чем должна наблюдаться смена знака температурной зависимости. Если же κ_2 меньше своего полученного в приближении среднего поля значения из-за того, что электронная концентрация недостаточно высока, то знак поправки может оставаться положительным при всех размерах контакта. Следовательно, измерив знак и величину температурной зависимости проводимости для узкого контакта, можно оценить длину экранирования в системе.

Таким образом, мы вычислили проводимость узкого и короткого квантового контакта при ненулевой температуре с учетом электрон-электронного взаимодействия. Проводимость линейно зависит от температуры и пропорциональна четвертой степени размера контакта, а относительная поправка не зависит от размера контакта. Знак линейно зависящего от температуры слагаемого определяется конкуренцией между прямым и обменным взаимодействием. Измерение знака и наклона этой температурной зависимости позволяет определить параметры электрон-электронного взаимодействия.

3.8. Приложение. Вычисление прошедшей волновой функции

Используем подход, описанный Зоммерфельдом [74] для решения задачи двумерной дифракции на узком отверстии и решим систему (3.7), используя непрерывность полной волновой функции $\psi = \psi_0 + \psi_t$ при $x = 0$, где ψ_0 – волновая функция в отсутствие отверстия, а ψ_t – поправка в низшем порядке по размеру отверстия. Разложим неизвестную функцию в ряд Фурье

$$\psi_t(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} e^{-ik_y y} \psi_t(x, k_y) \quad (3.39)$$

и будем искать решение в форме уходящих волн $\psi_t(x, k_y) = c_1 \times e^{-ik_x x}$. Константа c_1 легко выражается через волновую функцию на отверстии

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dy' e^{ik_y y'} \chi(0, y').$$

Подставляем эти формулы в (3.39) и получаем

$$\psi_t(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy' \chi(0, y') K(x, y, y'), \quad (3.40)$$

где ядро

$$K(x, y, y') = -\frac{i}{2} k_x \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - y')^2})}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2}}. \quad (3.41)$$

Условие непрерывности производной полной волновой функции на отверстии можно записать как

$$\frac{\partial \psi_0(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=-0} + \frac{\partial \psi_t(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=-0} = \frac{\partial \psi_t(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=+0}, \quad (3.42)$$

где

$$\psi_0(x, y) = \sqrt{\frac{m}{k_x}} e^{ik_y y} (e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}).$$

Подставляем ядро (3.41) в (3.42) и получаем интегральное уравнение

$$\int_{-a}^a dy' \chi(0, y') \frac{k H_1^{(1)}(k|y - y'|)}{|y - y'|} = 2\sqrt{\frac{m}{k_x}} k_x e^{ik_y y} \quad (3.43)$$

Интегральное уравнение такого типа возникает в задачах дифракции на узком отверстии [74]. Нас интересует случай $k \approx k_F$, так что предел $k_F a \ll 1$ эквивалентен условию $ka \ll 1$. Решение интегрального уравнения в пределе $ka \ll 1$ известно [77]

$$\chi(0, y') = -i k_x \sqrt{\frac{m}{k_x}} \sqrt{a^2 - y'^2} \quad (3.44)$$

Подставляем (3.44) и (3.41) в (3.40) и находим

$$\psi_t(x, y) = \frac{\pi}{4} k_x k a^2 |x| \sqrt{\frac{m}{k_x}} \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}. \quad (3.45)$$

Волновую функцию удобно переписать в виде

$$\psi_t(x, y) = -\frac{i\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k_x}} a^2 k_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_y}{2\pi} e^{i(q_x x + q_y y)}. \quad (3.46)$$

Аналогично решаем систему (3.13) для функции Грина уравнения Шредингера g_t и получаем

$$g_t = \frac{\pi}{8} \frac{m}{\hbar^2} k^2 a^2 |x| |x'| \frac{H_1^{(1)}(kr) H_1^{(1)}(kr')}{rr'}. \quad (3.47)$$

3.9. Приложение. Фриделевские осцилляции электронной плотности

Осцилляции электронной плотности можно найти как

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \langle \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\alpha} f(\varepsilon_{\alpha}) \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}_1) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (3.48)$$

где ψ_{α} – собственные функции Гамильтониана без взаимодействия. В низшем порядке по размеру отверстия мы пренебрегаем искривлением плотности фриделевских осцилляций из-за наличия отверстия и рассматриваем осцилляции, возникающие от сплошного барьера. Из-за наличия трансляционной инвариантности вдоль барьера, мы можем использовать вместо α импульс p , а в качестве собственных волновых функций взять

$$\psi_0(x, y) = e^{ip_y y} (e^{ip_x x} - e^{-ip_x x}) \quad (3.49)$$

Используя функции распределения $f(p)$, перепишем (3.48) в виде

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} f(p) \psi_p^*(\mathbf{r}_1) \psi_p(\mathbf{r}). \quad (3.50)$$

Подставим $\psi_0(x, y)$ в (3.50) и после некоторых упрощений получим

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = 4 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \cos[p_y(y - y_1)] \sin(p_x x) \sin(p_x x_1) \quad (3.51)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам (p, φ) и представим произведение тригонометрических функций в виде суммы четырех слагаемых. Тогда интеграл по φ можно записать в виде суммы четырех интегралов вида

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos(a \cos \varphi + b \sin \varphi) = \pi J_0(\sqrt{a^2 + b^2}). \quad (3.52)$$

После вычислений получаем электронную плотность фриделевских осцилляций в виде

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi} f(p) p \left[J_0(p\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}) - J_0(p\sqrt{(x + x_1)^2 + (y - y_1)^2}) \right].$$

Интегрируем по частям и получаем

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dp \left(-\frac{\partial f}{\partial p} \right) p \left[\frac{J_1(p\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2})}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} - \frac{J_1(p\sqrt{(x + x_1)^2 + (y - y_1)^2})}{\sqrt{(x + x_1)^2 + (y - y_1)^2}} \right]. \quad (3.53)$$

В случае $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ плотность фриделевских осцилляций зависит только от одной координаты x , так что

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dp \left(-\frac{\partial f}{\partial p} \right) \left[\frac{p^2}{2} - \frac{pJ_1(2px)}{2x} \right]. \quad (3.54)$$

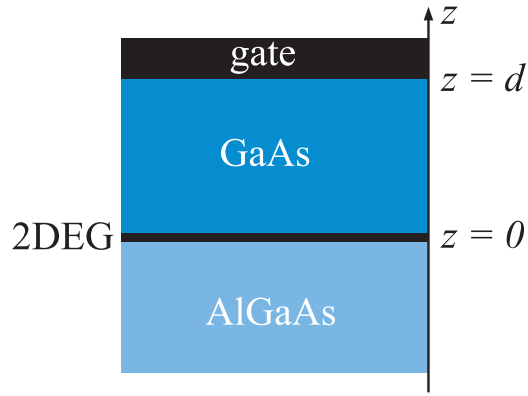


Рис. 3.5. Модель экспериментальной реализации структуры.

3.10. Приложение. Экранированный кулоновский потенциал

Вычислим кулоновский потенциал, экранированный затвором и двумерными электронами. Рассмотрим систему, показанную на Рис. 3.5, и поместим положительный заряд e_0 в точку $(0, 0, 0)$. Суммарный потенциал, созданный заряженной частицей, двумерными электронами и затвором, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}_{||}, z) = \frac{4\pi}{\varepsilon}[\rho^{ext} + \rho^{ind}], \quad (3.55)$$

где $\rho^{ext} = e_0\delta(\mathbf{r}_{||})\delta(z)$ – плотность заряда частицы и $\rho^{ind} = -e^2\nu_2\delta(z)\phi(\mathbf{r})$ – плотность индуцированных зарядов в приближении Томаса-Ферми. Сделаем Фурье-преобразование (3.55) по координатам в плоскости и проинтегрировав по z в малой окрестности $z = 0$, получим

$$\frac{\partial\phi(q, z)}{\partial z}\Big|_{z=+0} - 2\kappa_2\phi(q, 0) = -\frac{4\pi e_0}{\varepsilon}. \quad (3.56)$$

Здесь $\kappa_2 = 2/a_B$ – обратная длина экранирования. Мы предполагаем, что слой двумерного газа тонкий, и потенциал непрерывен при $z = 0$, т.е.

$$\phi(q, z = -0) = \phi(q, z = +0). \quad (3.57)$$

Решаем (3.56) и (3.57) с учетом граничных условий

$$\phi(q, d) = 0 \quad (3.58)$$

$$\phi(q, -\infty) = 0 \quad (3.59)$$

и переписываем потенциал в виде

$$\phi(q, 0) = \frac{4\pi e_0}{\varepsilon} \frac{1}{[\coth(qd) + 1]q + 2\kappa_2}. \quad (3.60)$$

Чтобы получить потенциал в зависимости от координат, сделаем обратное Фурье-преобразование (3.60) и запишем результат при помощи безразмерной координаты $x = qr_{\parallel}$

$$\phi(\mathbf{r}_{\parallel}, 0) = \frac{2e_0}{\varepsilon r_{\parallel}} \int dx \frac{J_0(x)}{\coth(xd/r_{\parallel}) + 1 + 2\kappa_2 r_{\parallel}/x}. \quad (3.61)$$

В экспериментах [1, 2] выполняется условие $d \gg \kappa_2^{-1}$. Оценим интеграл (3.61) для различных предельных случаев

$$\phi(\mathbf{r}_{\parallel}, 0) = \begin{cases} \frac{e_0}{2\varepsilon\kappa_2^2 r_{\parallel}^3}, & r_{\parallel} \gg d \gg \kappa_2^{-1} \\ \frac{e_0}{\varepsilon\kappa_2^2 r_{\parallel}^3}, & d \gg r_{\parallel} \gg \kappa_2^{-1} \\ \frac{e_0}{\varepsilon r_{\parallel}}, & d \gg \kappa_2^{-1} \gg r_{\parallel}. \end{cases} \quad (3.62)$$

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации:

1) Вычислена поправка к шарвинской проводимости широкого двумерного баллистического контакта, возникающая вследствие электрон-электронного взаимодействия для произвольного соотношения между поданным на контакт напряжением и температурой. Основной вклад вносят столкновения электронов вдали от контакта. Поправка положительна, линейна по температуре при высоких температурах $T \gg eV$ и пропорциональна $|V|$ при высоких напряжениях $eV \gg T$. Магнитное поле сильно подавляет поправку, что приводит к положительному магнетосопротивлению в слабых полях. Полученные результаты качественно и количественно согласуются с недавними экспериментами [1, 2].

2) Вычислен шум в широком двумерном баллистическом контакте с электрон-электронным взаимодействием для произвольного соотношения между поданным на контакт напряжением и температурой. Хотя суммарный импульс электронов сохраняется, столкновения электронов приводят к дробовому шуму в результате ограниченной геометрии. Вычислен Фано-фактор, он не равен нулю, как в случае чисто баллистического контакта без взаимодействия. Показано, что при слабых напряжениях $eV \ll T$ шум удовлетворяет соотношению Найквиста, а при высоких напряжениях связан с поправкой к току формулой Шоттки $\delta S = 2e\delta I$.

3) Вычислена проводимость узкого и короткого двумерного баллистического контакта с электрон-электронным взаимодействием при ненулевой температуре. Рассеяние электронов на фриделевских осцилляциях зарядовой

плотности приводит к излому в суммарном коэффициенте прохождения через контакт на поверхности Ферми и, как следствие, к линейной зависимости проводимости от температуры. Проводимость пропорциональна четвертой степени размера контакта, относительная поправка к проводимости не зависит от размера контакта. Знак линейного по температуре слагаемого определяется конкуренцией между прямым и обменным взаимодействием, он положителен для дальнедействующего потенциала электрон-электронного взаимодействия и отрицателен для короткодействующего.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю К. Э. Нагаеву – за научное руководство и постоянное внимание к работе, своим коллегам С. Н. Артеменко, В. А. Сабликову, А. Я. Шульману – за подробное обсуждение многих вопросов. Автор также благодарен своей коллеге Н. Ю. Сергеевой за совместную работу и экспериментаторам В. С. Храпаю, М. Ю. Мельникову и В. Т. Ренару – за подробное обсуждение полученных экспериментальных данных. Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований и Фонду некоммерческих программ “Династия” за финансовую поддержку, оказанную при проведении исследований, на основе которых написана данная диссертация.

Литература

1. V. T. Renard et al. // PRL. 2008. Vol. 100. P. 186801.
2. M. Yu. Melnikov, J. P. Kotthaus, et al. // Phys. Rev. B. 2012. Vol. 86. P. 075425.
3. Т. В. Костюченко (Криштоп), К. Э. Нагаев // Радиотехника и Электроника. 2010. Т. 55, № 10. С. 1223–1231.
4. К. Э. Нагаев, Т. В. Костюченко (Криштоп) // Нелинейный мир. 2010. Т. 8, № 2. С. 123–125.
5. Т. В. Криштоп, К. Э. Нагаев // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 2. С. 25–28.
6. K. E. Nagaev, T. V. Krishtop, N. Yu. Sergeeva // JETP Lett. 2011. Vol. 94, no. 1. Pp. 53–57.
7. К. Э. Нагаев, Т. В. Криштоп, Н. Ю. Сергеева // Нелинейный Мир. 2012. Т. 10, № 2. С. 84–85.
8. K. E. Nagaev, T. V. Kostyuchenko (Krishtop) // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 81. P. 125316.
9. K. E. Nagaev, T. V. Krishtop // Physica B. 2012. Vol. 407, no. 11. Pp. 1905–1908.
10. К. Э. Нагаев, О. С. Айвазян, Т. В. Костюченко (Криштоп) // IX Российская конференция по физике полупроводников. Тезисы докладов. Новосибирск-Томск: 2009. С. 339.
11. К. Э. Нагаев, Т. В. Костюченко (Криштоп) // XVIII Уральская международная зимняя школа по физике полупроводников: Программа и тезисы докладов. Екатеринбург: 2010. С. 47.

12. К. Э. Нагаев, Т. В. Костюченко (Криштоп), О. С. Айвазян // Труды VIII конференции “Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления”. Троицк: 2010. С. 19.
13. К. Э. Нагаев, Т. В. Криштоп, Н. Ю. Сергеева // Труды IX конференции “Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления”. Троицк: 2011. С. 17.
14. K. E. Nagaev, T. V. Krishtop, N. Yu. Sergeeva // Abstract book of ECRYS 2011. Cargese, France: 2011. P. 137.
15. Т. В. Криштоп, К. Э. Нагаев // Труды XVI Международного симпозиума “Нанопизика и нанопэлектроника”, том 1. Нижний Новгород: 2012. С. 285.
16. T. V. Krishtop, K. E. Nagaev // Abstracts of Advanced research workshop “Non-equilibrium and coherent phenomena at nanoscale”. Chernogolovka: 2012. P. 46.
17. T. V. Krishtop, K. E. Nagaev // Abstract book of 8th Advanced research workshop NanoPeter 2012 “Fundamentals of Electronic Nanosystem”. St. Petersburg: 2012. P. 45.
18. Ю. В. Шарвин // ЖЭТФ. 1965. Т. 48, № 3. С. 984.
19. Й. Имри. Введение в мезоскопическую физику. Москва: Физматлит, 2004.
20. C. W. J. Beenakker, H. van Houten // Solid State Physics. Advances in Research and Applications. 1991. Vol. 44. P. 1.
21. B. L. Altshuler, A. G. Aronov. Electron-electron Interactions in Disordered Systems. Amsterdam: North-Holland, 1985.
22. I. V. Gornyi, A. D. Mirlin // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, no. 7. P. 076801.

23. I. V. Gornyi, A. D. Mirlin // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 69, no. 4. P. 045313.
24. T. A. Sedrakyan, et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100, no. 10. P. 106806.
25. K. E. Nagaev, O. S. Ayvazyan // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101, no. 21. P. 216807.
26. K. A. Matveev // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92, no. 10. P. 106801.
27. M. Kindermann, P. W. Brouwer // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 74, no. 12. P. 125309.
28. D. Meidan, Y. Oreg // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 72, no. 12. P. 121312(R).
29. O. F. Syljuasen // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98, no. 16. P. 166401.
30. J. Rech, K. A. Matveev // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100, no. 6. P. 066407.
31. J. Rech, T. Micklitz, K. A. Matveev // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102, no. 11. P. 116402.
32. A. M. Lunde, K. Flensberg, L. I. Glazman // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97, no. 25. P. 256802.
33. A. M. Lunde, K. Flensberg, L. I. Glazman // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75, no. 25. P. 245418.
34. В. А. Сабликов // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 84, № 7. С. 480.
35. C. Sloggett, A. I. Milstein, O. P. Sushkov // Eur. Phys. J. B. 2009. Vol. 61, no. 4. P. 427.
36. A. M. Lunde, A. De Martino, A. Schulz // New J. Phys. 2009. Vol. 11, no. 2. P. 023031.

37. I. O. Kulik, R. I. Shekhter, A. N. Omelyanchuk // Sol. St. Commun. 1977. Vol. 23, no. 5. P. 301.
38. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Физическая кинетика. Курс теоретической физики. Москва: Наука, 1979.
39. D. L. Maslov, M. Stone // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 52, no. 8. P. R5539.
40. A. V. Andreev, L. I. Glazman // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97, no. 26. P. 266806.
41. R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, A. I. Kopeliovich // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74, no. 19. P. 3872.
42. C. Hodges, H. Smith, J. W. Wilkins // Phys. Rev. B. 1971. Vol. 4, no. 2. P. 302.
43. G. F. Giuliani, J. J. Quinn // Phys. Rev. B. 1982. Vol. 26, no. 8. P. 4421.
44. H. van Houten, et al. // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 37, no. 14. P. 8534.
45. A. V. Chubukov, D. L. Maslov // Phys. Rev. B. 2003. Vol. 68, no. 15. P. 155113.
46. Ya. M. Blanter, M. Büttiker // Phys. Rep. 2000. Vol. 336. P. 1.
47. K. E. Nagaev // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 52. P. 4740.
48. C. Mora, X. Leyronas, N. Regnault // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 036604.
49. A. O. Gogolin, A. Komnik // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 016602.
50. D. Loss, E. V. Sukhorukov // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 1035.

51. D. A. Bagrets, Yu. V. Nazarov // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 056801.
52. Sh. Kogan. *Electronic Noise and Fluctuations in Solids*. Cambridge University Press: Cambridge, 1996.
53. I. O. Kulik, A. N. Omelyanchuk // *Sov. J. Low Temp. Phys.* 1984. Vol. 10. P. 158.
54. Ш. М. Коган, А. Я. Шульман // *ЖЭТФ*. 1969. Т. 56. С. 862.
55. M. J. M. de Jong, C. W. J. Beenakker // *Physica A*. 1996. Vol. 230. P. 219.
56. K. J. Thomas, J. T. Nicholls, M. Y. Simmons et al. // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. Pp. 135–138.
57. D. J. Reilly, G. R. Facer, A. S. Dzurak, B. E. Kane // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 63. P. 121311.
58. V. V. Flambaum, M. Y. Kuchiev // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 61. P. R7869.
59. B. Spivak, F. Zhou // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 61. P. 16730.
60. K. Hirose, Y. Meir, N. S. Wingreen // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 026804.
61. C.-K. Wang, K.-F. Berggren // *Phys. Rev. B*. 1998. Vol. 57. P. 4552.
62. T. Rejec, A. Ramšak, J. H. Jefferson // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62. P. 12 985.
63. B. S. Shchamkhalova, V. A. Sablikov // *Journal of Physics-Condensed Matter*. 2007. Vol. 19, no. 15. P. 156221.
64. M. A. Topinka, B. J. LeRoy, et al. // *Nature*. 2001. Vol. 410. P. 183.

65. G. Zala, B. N. Narozhny, et al. // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 64. P. 214204.
66. A. M. Rudin, I. L. Aleiner, L. I. Glazman // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 55. P. 9322.
67. L. Shekhtman, L. I. Glazman // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 52. P. 2297.
68. R. Landauer // IBM J. Res. Dev. 1957. Vol. 1. P. 223.
69. L. D. Landau, E. M. Lifshits. Quantum Mechanics (vol. 3 of course of theoretical physics). New York: Pergamon, 1977.
70. C. Kittel. Quantum Theory of Solids. New York: Wiley, 1963.
71. L. D. Landau, E. M. Lifshits. Electrodynamics of Continuous Media (vol. 8 of course of theoretical physics). New York: Pergamon, 1984.
72. I. F. Itskovich, R. I. Shekhter // Low Temperature Physics Journal. 1985. Vol. 11. P. 4.
73. A. M. Zagoskin, I. O. Kulik // Low Temperature Physics Journal. 1990. Vol. 16. P. 7.
74. A. Sommerfeld. Optics. Academic Press, 1954.
75. B.L. Altshuler, A. G. Aronov. Electron-Electron Interaction in Disordered Systems. Amsterdam: North-Holland, 1985.
76. S. M. Cronenwett, et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88. P. 226805.
77. A.D. Polyinin, A.V. Manzhirov. Handbook of Integral Equations. Boca Raton: CRC Press, 1998.