

На правах рукописи

ТИХОНОВ Константин Сергеевич

УДК 538.915, 538.955

**Эффекты близости и флуктуации в сверхпроводящих структурах
с беспорядком**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
М. В. Фейгельман

Москва – 2012

Оглавление

Введение	4
1 Наведённая сверхпроводимость в графене	11
1.1 Введение	11
1.2 Описание наведенного эффекта близости в графене	13
1.3 Переход Березинского-Костерлица-Таулеса	15
1.4 Низкие температуры: однородное состояние	17
1.5 Эффект магнитного поля	21
1.6 Заключение	23
2 Сверхпроводящие флуктуации и электрический транспорт в неупорядоченных плёнках	25
2.1 Введение	25
2.2 Учёт сверхпроводящих флуктуаций в уравнении Узаделя	28
2.3 Параметризация Келдышевской функции Грина	34
2.4 Решение уравнения Узаделя и сверхпроводящий пропагатор	37
2.5 Эффект Холла и сверхпроводящие флуктуации	46
2.6 Вычисление поправок к тензору электрической проводимости	48
2.7 Результаты для продольной проводимости	54
2.7.1 Область Гинзбурга-Ландау (I)	54
2.7.2 Область квантовой критической точки (II)	56
2.7.3 Высокие температуры (III) и большие магнитные поля (IV)	58
2.8 Результаты для Холловской проводимости	63

2.9	Сравнение с предыдущими работами	65
2.10	Вычисление диаграммы Асламазова и Ларкина в мнимом времени	65
2.11	Заключение	71
3	Нестационарный эффект Джозефсона в длинном SINIS переходе	74
3.1	Введение	74
3.2	Основные уравнения	75
3.3	Упрощение уравнений в пределе слабого эффекта близости . . .	77
3.4	Вычисление спектральных функций	78
3.5	Вычисление функций распределения	79
3.6	Вычисление электрического тока	82
3.6.1	Равновесный вклад	83
3.6.2	Неравновесный вклад	84
3.7	Заключение	86
4	Отклик электрического тока в SNS переходе на гармоническую модуляцию разности фаз	87
4.1	Введение	87
4.2	Теория линейного отклика	88
4.2.1	Неравновесные поправки	91
4.2.2	Спектральные поправки	93
4.2.3	Вычисление электрического тока	94
4.3	Адиабатический предел: результаты	95
4.4	Заключение	97
	Заключение	99
	Публикации по теме диссертации	101

Введение

Актуальность темы.

Сверхпроводящие гибридные структуры - очень богатые системы, которые изучаются на протяжении нескольких последних десятилетий как теоретически, так и экспериментально (в качестве относительно современного краткого обзора см. [1]). В связи с развитием экспериментальной техники становится доступным изучение сопутствующих явлений в новых, недоступных ранее режимах.

Стационарные свойства эффекта близости в равновесных условиях уже хорошо изучены. В частности, ток-фазовое соотношение для длинного SNS перехода [2] было недавно измерено экспериментально [3]. Динамические аспекты этого эффекта сложнее и ещё не поняты до конца. Это связано с тем, что вычисление отклика переменного тока на зависящую от времени разность фаз подразумевает как нахождение самих Андреевских уровней, так и определение их чисел заполнения, что является непростой задачей. С экспериментальной точки зрения, измерения такого рода ранее были доступны только в сильно нелинейном режиме [4, 5, 6], однако в недавнем эксперименте [7] был измерен линейный отклик в относительно широком диапазоне частот.

Другим интересным примером современных экспериментов, связанных с эффектом близости, являются эксперименты на структурах, включающих элементы, выполненные на основе графена. Графен [8, 9], среди других впечатляющих свойств, предоставляет благоприятные условия для изучения наведённой сверхпроводимости. Первым экспериментом такого рода было измерение критического тока через широкий плоский SNS контакт [10]. Было показано, что эффект близости в графене во многом качественно похож

на обычный эффект близости, известный по обыкновенным грязным металлам. Однако, специфика графена, связанная с возможностью контролировать плотность носителей заряда в широком диапазоне, открывает и другие необычные возможности по изучению эффекта близости [11].

Ещё одним аспектом сосуществования нормального и сверхпроводящего состояний являются сверхпроводящие флуктуации. Теоретическое изучение флуктуационной проводимости в сверхпроводниках началось с открытия парпроводимости Асламазовым и Ларкиным в 1968 г. [12]. Несмотря на существенное количество теоретических работ по теории сверхпроводящих флуктуаций, результаты которых суммированы в книге Ларкина и Варламова [13], эта область ещё является полем для активных исследований. Такая активность отчасти стимулирована современными аккуратными измерениями на различных сверхпроводящих системах [14, 15, 16, 17, 18, 19]. При количественном описании экспериментальных данных по неупорядоченным сверхпроводящим плёнкам, обычно используется несколько свободных параметров, таких как критическая температура T_c , критическое магнитное поле B_c и время дефазировки τ_ϕ . В связи с таким количеством свободных параметров, удобнее работать с выражениями, которые справедливы во всей области параметров (B, T) , вместо того, чтобы выполнять описание экспериментальных кривых в каждой из асимптотических областей отдельно. Кроме важности таких результатов с точки зрения эксперимента, вопрос представляет и теоретический интерес, так как до сих пор нет окончательного теоретического ответа в связи с существованием нескольких противоречащих друг другу работ.

Целью работы являлось:

1. Построение теории наведённой сверхпроводимости в графене. В частности, изучение условий реализации необычного для объёмных сверхпроводников состояния, которое соответствует наличию двух параметрически различающихся энергетических масштабов - критической температуры, при которой наступает глобальная фазовая когерентность T_c и величины спектральной

щели при низких температурах E_g .

2. Вычисление поправок к тензору электрической проводимости грязных плёнок, связанных с флуктуациями (классическими и квантовыми) сверхпроводящего параметра порядка во всей области выше фазового перехода в сверхпроводящее состояние.

3. Исследование эффектов, связанных с неравновесностью в длинных и грязных SNS-переходах с сильными барьерами на границах сверхпроводящей и нормальной областей. В частности, вычисление амплитуд первой и второй гармоник в нелинейном по напряжению режиме и высоких температурах, когда главные (по параметру прозрачности барьера) вклады оказываются экспоненциально малы.

4. Описание эксперимента по измерению восприимчивости SNS - контакта к слабому переменному магнитному полю, индуцирующему гармонически зависящую от времени разность фаз на переходе.

Главный метод исследования всех рассматриваемых в диссертации явлений - уравнение Узаделя [20]. В наиболее общем виде оно было впервые выписано в основополагающей работе Ларкина и Овчинникова [21] и оказалось чрезвычайно удобным для описания явлений, связанных неоднородной сверхпроводимостью [22]. Уравнение Узаделя незаменимо при исследовании мезоскопических сверхпроводников и гибридных структур [23, 24]. Его удобство состоит в том, что оно позволяет с самого начала работать с эффективной диффузной теорией, способной описать все неравновесные явления, имеющие место в квазиклассическом (когда характерные энергии много меньше, чем E_F) приближении на масштабах, меньших частоты упругих рассеяний τ^{-1} . Таким образом, оно описывает низкоэнергетическую (диффузную) физику на пространственных q^{-1} и временных ω^{-1} масштабах, удовлетворяющих неравенству $(ql, \omega\tau) \ll 1$, где τ - время рассеяния на примесях, а l - упругая длина свободного пробега.

Это уравнение описывает поведение квазиклассической функции Грина \check{g} , которая является матрицей в пространстве Келдыша и Горькова-Намбу и

зависит от одного пространственного и двух временных аргументов. Более подробно мы останавливаемся на его обсуждении в главе 2, приводя его вывод для случая, когда становятся важны флуктуации параметра порядка. В отсутствие таких флуктуаций уравнение Узаделя подробно обсуждается в цитируемой выше литературе, поэтому здесь мы ограничимся тем, что просто выпишем его в стандартном виде и вводим используемые в дальнейшем обозначения.

Мы начинаем с того, что выписываем уравнения, образующие основу нашего рассмотрения в последующих главах. Сформулировав микроскопическую модель, мы выписываем уравнение Узаделя, которое позволяет найти квазиклассические Гриновские функции в грязном пределе, то есть, при выполнении условия $T_c\tau \ll 1$.

Мы используем символ шляпки, как в $\hat{\tau}_3$ для обозначения матриц размера 2×2 в Келдышевском пространстве (K , запаздывающая/опережающая функции Грина) или пространстве Горькова-Намбу (N , частица/дырка). Символами $\hat{\sigma}_i$ и $\hat{\tau}_i$ мы обозначаем матрицы Паули в пространствах K и N , соответственно. Поле параметра порядка удобно записывать в виде $\check{\Delta} = \hat{\Delta}_0\hat{\sigma}_0 + \hat{\Delta}_1\hat{\sigma}_1$, где $\hat{\Delta}_0$ и $\hat{\Delta}_1$ будут называться его классической (cl) и квантовой (q) компонентами. Обе эти компоненты недиагональны в пространстве Намбу N : $\hat{\Delta}_i = \Delta_i\hat{\tau}_+ - \Delta_i^*\hat{\tau}_-$, где $\hat{\tau}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{\tau}_x \pm i\hat{\tau}_y)$. Удобно объединить классическую и квантовую компоненту параметра порядка в один вектор $\vec{\Delta} = (\Delta_{cl}, \Delta_q)^T$.

Уравнение Узаделя имеет следующий вид:

$$D\hat{\nabla} \left(\check{g} \cdot \hat{\nabla} \check{g} \right) - \{ \hat{\tau}_3 \partial_t, \check{g} \} + i [\check{\Delta} - e\check{\varphi}, \check{g}] = 0. \quad (1)$$

Плотность заряда и электрический ток выражаются через усреднённую по направлениям Гриновскую функцию \check{g} следующим образом [24]:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e\nu \left(2e\phi + \frac{\pi}{2} \text{tr} \hat{\sigma}_1 \hat{g}(\mathbf{r}, t, t) \right) \quad (2)$$

и

$$\mathbf{j}(r, t) = \frac{e\pi\nu D}{2} \text{tr} \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_1 \check{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t, t), \quad (3)$$

где $\check{\mathbf{j}} = \check{g} \cdot \hat{\nabla} \check{g}$. Соотношение (3) следует из

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{2m} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) \langle G^K(x, x') \rangle_{dis x \rightarrow x'} - \frac{ne^2}{m} \mathbf{A}, \quad (4)$$

где n - плотность электронов, в диффузном приближении.

Символ \cdot обозначает свертку во времени, то есть, интегрирование по промежуточному временному аргументу. Пространственная производная имеет следующую структуру: $\hat{\nabla} \check{g} = \nabla \check{g} - ie [\hat{\tau}_3 \mathbf{A}, \check{g}]$. Наконец, важным ограничением, накладываемым на квазиклассическую функцию Грина, является условие нормировки:

$$(\check{g} \cdot \check{g})(t, t') = \check{1} \delta(t - t'). \quad (5)$$

Эта форма справедлива, в том числе, и в присутствии флуктуаций параметра порядка. В таком случае выражения для тока и плотности заряда следует усреднить по флуктуирующему полю с действием, которые мы обсуждаем в главе 2.

Научная новизна работы заключается в следующих оригинальных результатах, которые выносятся на защиту:

1. Показано, что специфика графена (малая концентрация носителей и высокая подвижность электронов) позволяет реализовать в нём сверхпроводящее состояние путём покрытия малой доли его поверхности сверхпроводящими островками. Вычислена зависимость критической температуры (температуры появления глобальной фазовой когерентности) и щели в электронном спектре от геометрических параметров массива гранул и сопротивления между гранулой и пленкой графена.

2. Вычислены флуктуационные поправки к тензору электрической проводимости грязной пленки нормального металла за счёт взаимодействия в Куперовском канале при произвольных температурах и магнитных полях. В результате численного анализа общих результатов получена диаграмма для качественной зависимости проводимости от температуры и магнитного поля.

3. Для длинного SINIS ($r = R_B/R_N \gg 1$, где R_B - сопротивление барьера, а R_N - сопротивление проволоки в нормальном состоянии) контакта вычислена зависимость от напряжения амплитуд первых двух гармоник нестационарного тока при высоких температурах. Показано, что вклад неравновесного происхождения, который оказывается порядка r^{-4} , доминирует в переменном токе за счёт его более медленного спада с ростом температуры (длины) перехода.

4. Получены уравнения, которые описывают линейный отклик SNS структуры на гармоническую модуляцию разности фаз. Полученные уравнения проанализированы аналитически при низких частотах и выполнено сравнение с результатами эксперимента.

Научная и практическая ценность. Полученные новые результаты и методы позволяют лучше понять физику эффекта близости и сверхпроводящих флуктуаций в различных структурах, содержащих сверхпроводники. Они могут быть применены для дальнейших теоретических исследований и анализа экспериментальных данных.

Структура диссертации такова:

В **главе 1** построена теория сверхпроводящего эффекта близости, наведённого в графене сверхпроводящими островками радиуса a , образующих решётку с периодом b (Рис. 1.1). Вычислена Джозефсоновская энергия связи островков и найдена температура перехода в когерентное состояние T_c . Найдена щель в спектре одноэлектронных возбуждений при низких температурах $T \ll T_c$.

В **главе 2** вычисляется поправка к тензору электрической проводимости, возникающая за счёт взаимодействия в Куперовском канале. Получены общие выражения для продольной и поперечной проводимостей, справедливые во всей диффузной области выше сверхпроводящего перехода. Подход, основанный на использовании техники Келдыша совместно с уравнением Узаделя [21, 25, 26], обобщён на произвольные температуры и магнитные поля. Численный анализ приведённых формул позволяет определить линии на плос-

кости температура-магнитное поле, на которых происходит смена характера зависимости проводимости от температуры и магнитного поля. Подробно проанализирована область квантового фазового перехода и указан источник противоречий в существующей литературе.

В **главе 3** изучается эффект близости между двумя массивными сверхпроводниками через нормальный металл. Вычислены неравновесные поправки к току, которые возникают в следующем порядке по r^{-1} . Показано, что они дают основной вклад в переменный ток при большой температуре электронов в проволоке, когда известный в литературе вклад, найденный в работе [27], экспоненциально подавлен.

В **главе 4** обсуждается недавний эксперимент по измерению восприимчивости SNS перехода по отношению к зависящей от времени внешней разности фаз (индуцированной, например, переменным внешним магнитным потоком в геометрии SQUID). Для теоретического описания системы построено разложение уравнений Узаделя (спектральной и кинетической частей) по малому параметру, характеризующему возмущение, $\alpha = e\delta V/\omega$. При малых частотах удаётся построить теорию отклика, обеспечивающую удовлетворительное согласие с экспериментом. Возникающие особенности в $\frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}$ при $\phi = \pm\pi$ хорошо видны на эксперименте.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

Глава 1

Наведённая сверхпроводимость в графене

1.1 Введение

Графен [8, 9] - относительно новый материал с необычными электронными свойствами, которые могут меняться в широком диапазоне в зависимости от приложенного затворного напряжения. В частности, хорошая контролируемость концентрации носителей заряда (и даже их знака) предоставляет возможность изучать многие транспортные эффекты в широком диапазоне параметров. Интерес предоставляют, в том числе, и явления, возникающие в гибридных структурах, содержащих в качестве одного из своих элементов графен.

Мы будем рассматривать случай, когда электронная константа взаимодействия в Куперовском канале в графене мала, соответствующая оценка приведена в Ур. (1.1). Аналогично, индуцированное взаимодействием с фононами притяжение также мало с связи с малой плотностью электронных состояний. Отметим, что существуют теоретические предсказания [28, 29], что покрытие графена слоем металла или легирование его Литием может привести к появлению его собственной сверхпроводимости. Мы не будем рассматривать такой возможности. Таким образом, сверхпроводящие корреляции возникают только за счёт эффекта близости и их подавлением Кулоновским взаимодействием в графене можно пренебречь.

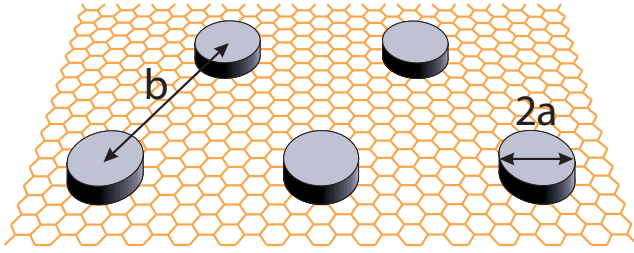


Рис. 1.1: Плёнка графена, покрытая сверхпроводящими гранулами.

Экспериментальное изучение наведенного эффекта близости в графене началось с работы [10]. Было показано, что он качественно похож на хорошо известный по неупорядоченным металлам. Специфика графена в отношении эффекта близости состоит в том, что даже в Дираковской дочке, когда концентрация носителей заряда равна нулю, существует возможность протекания конечного электрического тока - в том числе, и сверхтока.

Однако, даже вдали от Дираковской точки, эффект близости в графене может представлять особенный интерес. Это связано, в том числе, с тем, что образующийся на поверхности графена двумерный электронный газ, в отличие от его аналога в гетероструктурах, не скрыт в глубине структуры, а доступен для непосредственного электрического контакта с другими материалами по всей своей поверхности. В связи с этим, мы рассмотрим систему сверхпроводящих гранул, образующих почти периодическую структуру на поверхности слоя графена. Геометрия структуры изображена на Рис. 1.1.

Мы будем интересоваться случаем, когда гранулы покрывают малую долю поверхности графена. Это отвечает неравенству $b \gg a$. Реалистичные значения радиуса гранулы составляют десятки нанометров. Еще одним предположением, ограничивающим наше рассмотрение, является предположение о том, что распространение электронов является диффузным на всех существенных масштабах. Это подразумевает выполнение неравенства $l \ll a$, где l - длина свободного пробега электронов в графене. В таких условиях поведение сверхпроводящих корреляций в графене может быть целиком описано в рамках уравнения Узаделя.

Ясно, что при понижении температуры, в первую очередь, происходит переход отдельных гранул в сверхпроводящее состояние при критической тем-

пературе T_{c0} отдельной гранулы. При $T < T_{c0}$ фаза сверхпроводящего параметра порядка каждой из гранул хорошо определена. При этой температуре, однако, еще нет глобальной фазовой когерентности. Действительно, фаза каждой из гранул подвержена тепловым флуктуациям. Только при дальнейшем понижении температуры тепловые флуктуации фаз параметров порядка различных гранул 'вымерзают' и происходит переход в глобально когерентное состояние. Такой переход обсуждается в секции 1.3. В рамках переложенной модели, в этой секции мы изучаем переход Березинского-Костерлица-Таулеса (БКТ) T_c в этой системе и вычисляем соответствующую температуру перехода. Оказывается, что покрытия даже малой площади графена, покрытой гранулами (при условии хорошего электрического контакта гранула-графен), достаточно для того, чтобы температура перехода T_c оказалась порядка 1К.

В следующей секции 1.4 обсуждаются свойства образовавшегося состояния при дальнейшем понижении температур. В частности, показано, что если гранулы образуют периодическую структуру, в спектре электронов по всей поверхности графена (даже вдали от всех гранул), открывается энергетическая щель E_g . При температурах $T \ll E_g$ и не слишком больших магнитных полях, система в многом аналогична однородному сверхпроводнику и структура гранул 'забывается'. Основным отличием такого состояния от состояния обычной сверхпроводящей плёнки является нестандартное соотношение величины сверхпроводящей щели в спектре и критической температуры. А именно, эти энергетические масштабы параметрически отличаются, тогда как в обычном сверхпроводнике, описываемом теорией БКШ, они связаны универсальным соотношением $\Delta_0 = 1.76T_c$.

1.2 Описание наведенного эффекта близости в графене

Мы не будем интересоваться явлениями вблизи нейтральной точки графена. На практике это означает, что затворный потенциал относительно большой $|V_g| \geq 10$ V, так что концентрация носителей заряда $n \geq 10^{12} \text{cm}^{-2}$. При выполнении этих условий система может рассматриваться в квазиклассиче-

ском приближении. Это означает, что энергия Ферми велика по сравнению со всеми остальными существенными энергетическими масштабами задачи, то есть $E_F \gg \Delta_0$, где Δ_0 - сверхпроводящая щель в грануле. Как мы увидим, в рассматриваемом пределе окажется, что температура T_c перехода в когерентное состояние мала по сравнению с температурой установления сверхпроводимости в отдельной грануле, то есть $\Delta_0 \gg T_c$. Более того, однослойность графена не существенна. Свойства, на которые мы будем опираться, состоят в том, что (i) константа диффузии велика $D \geq 10^2 \text{cm}^2/\text{s}$, и (ii) плотность носителей мала (по сравнению с металлом), что позволяет реализовать ситуацию, в которой сочетаются небольшие значения безразмерного кондактанса плёнки $g = (\hbar/e^2 R_{\square}) \geq 3$ и большая энергия Таулеса, отвечающая диффузии электрона от гранулы к грануле $E_{\text{Th}} = \hbar D/b^2$.

Не слишком большие значения g существенны с той точки зрения, что позволяют избежать подавления сверхпроводимости в небольших сверхпроводящих гранулах за счёт обратного эффекта близости, так что небольшие гранулы $a \ll \xi_0$ остаются стабильны. Обратным эффектом близости можно пренебречь при условии $G_{\text{tot}}\delta \leq \Delta_0$, где $G_{\text{tot}}^{-1} = G_{\text{int}}^{-1} + \ln(b/a)/2\pi g \ll 1$ - сопротивление контакта гранула-графен, измеренное в нормальном состоянии, а G_{int} - кондактанс поверхности между гранулой и графеном, и δ - расстояние между одноэлектронными уровнями в грануле.

Ещё раз отметим, что собственной (электронной) константой взаимодействия в Куперовском канале можно пренебречь. Действительно, в графене взаимодействие в Куперовском канале включает электроны из разных долин (с волновыми векторами в окрестностях точки K и K' зоны Бриллюэна). Это означает, что амплитуда Кулоновского рассеяния есть $U_C = 2\pi e^2/(\kappa K_0)$, где κ - эффективная диэлектрическая константа Графена на подложке, и $K_0 = 1.7 \cdot 10^8 \text{cm}^{-1}$ - расстояние между точками K и K' в пространстве импульсов. Безразмерная константа отталкивания, таким образом, оказывается весьма мала,

$$-\lambda_g = U_C \nu_0 = (2e^2/\kappa \hbar v_F)(k_F/K_0) \leq 0.03, \quad (1.1)$$

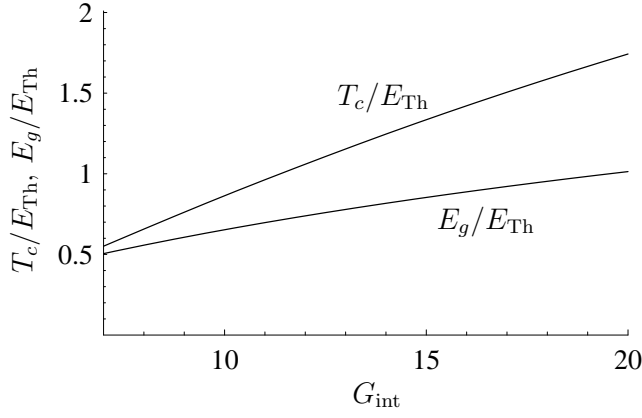


Рис. 1.2: Критическая температура, T_c и спектральная щель при нулевой температуре, E_g , как функция поверхностного кондактанса G_{int} (кондактанс плёнки $g = 6$, и $b/a = 10$).

для $n = k_F^2/\pi < 10^{13} \text{cm}^{-2}$, где $\nu_0 = k_F/\pi\hbar v_F$ - плотность состояний с заданной проекцией спина. Для оценки мы взяли $\kappa \approx 5$.

Итак, мы рассматриваем графен как обычный грязный двумерный металл, то есть, пользуясь стандартным подходом, основанным на уравнении Узаделя [20]. Нормальная функция Грина диагональна в пространстве долин и спинов, а её структура в пространстве подрешёток в квазиклассическом приближении есть $\propto 1 + (\hat{\sigma}\mathbf{n})$, где $\hat{\sigma}$ - матрицы Паули в пространстве подрешёток, а \mathbf{n} - направление импульса электрона. Матричная структура аномальной функции Грина \tilde{F}_ω в пространстве долин и спинов определяется свойствами s -волнового спаривания в сверхпроводящих гранулах: $\propto \hat{\pi}_x \hat{s}_y$, где \hat{s} , $\hat{\pi}$ - матрицы Паули в спиновом и долинном пространствах, соответственно. Она диагональна в пространстве подрешёток, что связано с тем, что сверхпроводимость наводится из материала с большой энергией Ферми и не может быть чувствительна к решёточной структуре графена - общепринятое приближение для обсуждаемой задачи (см., например, работу [30]). Для функций энергии G и F мы в дальнейшем пишем:

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \cos \theta_\omega(\mathbf{r}), \quad F_\omega(\mathbf{r}) = e^{i\varphi} \sin \theta_\omega(\mathbf{r}). \quad (1.2)$$

1.3 Переход Березинского-Костерлица-Таулеса

Для вычисления температуры перехода T_c массива гранул в когерентное состояние можно рассматривать их взаимодействие в попарном приближении. Начнём с вычисления Джозефсоновской энергии связи двух сверхпроводя-

щих гранул радиуса a , разделённых расстоянием $b \gg a$, пренебрегая присутствием остальных гранул. Уравнение Узаледа удобно рассматривать в мнимом времени. Для спектрального угла θ_ω , введённого в (1.2) уравнение Узаледа и граничное условие Куприянова и Лукичёва [31] имеют вид:

$$D\nabla^2\theta_\omega - 2|\omega_n|\sin\theta_\omega = 0, \quad (1.3)$$

и

$$\left[g\frac{\partial\theta_\omega}{\partial r} + \frac{G_{\text{int}}}{2\pi a}\cos\theta_\omega \right] \Big|_{r=a} = 0. \quad (1.4)$$

Поверхностный кондактанс G_{int} рассматривается как феноменологический параметр, который учитывает скачок скорости Ферми и присутствие потенциального барьера на поверхности контакта между графеном и гранулой [32].

Для дальнейшего анализа оказывается существенно, что нелинейная задача о Джозефсоновской связи двух гранул (1.3), (1.4) может быть линеаризована в рассматриваемом пределе $b \gg a$. Действительно, электрический ток можно вычислять интегрированием плотности тока по линии, проходящей между двумя гранулами, на расстоянии $\rho \geq b/2$ от каждой из них.

Критический ток между двумя гранулами через графен, определяющий энергию их связи согласно

$$E_J = (\hbar/2e)I_c, \quad (1.5)$$

включает суммирование по Мацубаровским энергиям $\omega_n = \pi T(2n + 1)$, причём основной вклад в сумму приходит от $\omega_n \sim E_{\text{Th}}$. При таких ω_n и ρ спектральный угол θ мал, и линеаризация уравнений (1.3) и (1.4) даёт решение в виде:

$$\theta_\omega(r) = A(\omega)K_0\left(\frac{r}{L_\omega}\right), \quad A(\omega) = \frac{\Theta(t_\omega)}{\ln(L_\omega/a)}, \quad (1.6)$$

где $L_\omega = \sqrt{D/2\omega}$, $t_\omega = (G_{\text{int}}/2\pi g)\ln(L_\omega/a)$. Функция $\Theta(t)$ решает уравнение $\Theta(t) = t \cos \Theta(t)$. Функция $A(\omega)$ меняется между пределами туннельной и идеальной границ следующим образом:

$$A(\omega) = \begin{cases} G_{\text{int}}/(2\pi g), & G_{\text{int}} \ll 2\pi g/\ln(L_\omega/a), \\ \pi/[2\ln(L_\omega/d)], & G_{\text{int}} \gg 2\pi g/\ln(L_\omega/a), \end{cases} \quad (1.7)$$

и всегда мала для $\ln(L_\omega/a) \gg 1$. Таким образом, Джозефсоновский ток $I(\varphi) = I_c \sin \varphi$ между двумя гранулами с разными фазами, $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$, может быть вычислен при помощи линеаризованного двух-гранульного решения для аномальной функции Грина: $F_\omega(\mathbf{r}) = e^{i\varphi_1} \sin \theta_\omega(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + e^{i\varphi_2} \sin \theta_\omega(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|)$.

Стандартное вычисление энергии связи, см. Ур. 1.5, приводит к такому результату:

$$E_J(b, T) = 4\pi g T \sum_{\omega_n > 0} A^2(\omega_n) P(\sqrt{\omega_n/8E_{Th}}), \quad (1.8)$$

где $P(z) = z \int_0^\infty K_0(z \cosh t) K_1(z \cosh t) dt$.

В двумерном массиве сверхпроводящих гранул с энергиями связи (1.8) при температуре

$$T_c = \gamma E_J(b, T_c), \quad (1.9)$$

происходит переход БКТ. Значение численного коэффициента γ зависит от структуры массива. Если гранулы образуют треугольную решётку, то $\gamma \approx 1.47$ [33]. Если поверхностный кондактанс G_{int} порядка с кондактанса листа графена g , то температура перехода оказывается порядка энергии Таулеса $T_c \sim E_{Th}$. Вообще говоря, T_c получается численным решением уравнения (1.9) с учётом (1.6) и (1.8). Получающийся результат для T_c/E_{Th} как функция G_{int} с $g = 6$ ($R_\square \approx 700 \Omega$) и $b/a = 10$ построен на Рис. 1.2. Взяв коэффициент диффузии $D = 500 \text{ cm}^2/\text{s}$ (см. например [34]) и $b = 0.5 \mu\text{m}$, можно получить $E_{Th} \approx 1.5 \text{ K}$, что приводит к T_c в диапазоне $1 \div 3 \text{ K}$ для $5 < G_{\text{int}} < 20$.

1.4 Низкие температуры: однородное состояние

В этой секции мы обсуждаем когерентное состояние, образующееся при дальнейшем понижении температуры. Парное приближение для описания вза-

имодействия гранул адекватно для определения T_c , но перестаёт работать при $T \leq T_c / \ln(b/a)$. Мы воспользуемся тем, что при низких температурах тепловые флуктуации 'замерзают' и фазы параметров порядка всех гранул φ_i становятся равны. В таком низкотемпературном пределе ($T \ll T_c$) имеет смысл вопрос о квазичастичных возбуждениях над полностью когерентным состоянием. Плотность состояний $\nu(E) = \nu_0 \operatorname{Re} \cos \theta(E)$ может быть найдена из периодического решения уравнений (1.3) и (1.4), аналитически продолженного на действительные энергии: $|\omega| \rightarrow iE$. Такая периодическая задача эквивалентна к задаче, определённой на одной гексагональной элементарной ячейке с граничным условием на границе этой ячейки $\mathbf{n} \nabla \theta|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = 0$, где Γ - эта граница. Решение уравнения Узаделя для такой геометрии даёт результат о наличии жёсткой спектральной щели E_g . Эта явление похоже на образование минищели в SNS контакте. Чтобы найти её, запишем, как обычно [35], $\theta(\mathbf{r}) = \pi/2 + i\psi(\mathbf{r})$ и найдём границу электронного спектра как значение энергии E при которой уравнение

$$D \nabla^2 \psi + 2E \cosh \psi = 0 \quad (1.10)$$

перестаёт иметь решение с чисто действительным $\psi(\mathbf{r})$ [36]. При больших $\ln(b/a)$ гексагональная граница Γ элементарной решётки может быть приближена окружностью радиуса $R = b/2$. Для идеально прозрачной границы, численное решение радиально симметричного уравнения (1.10) даёт значение нуль-температурной щели в спектре:

$$E_g \approx \frac{\hbar D / R^2}{1.52 \ln(R/a) - 1.2} \approx \frac{2.6 E_{\text{Th}}}{\ln(b/4a)}. \quad (1.11)$$

С уменьшением кондактанса G_{int} минищель подавляется, как показано на Рис. 1.2.

При больших значениях параметра $\ln(b/a)$, спектральная щель оказывается относительно мала $E_g \ll T_c$. Малость щели отличает систему, в которой сверхпроводимость индуцирована гранулами, от обычного грязного сверхпроводника. На энергетических масштабах, меньших E_g , она ведет себя

как непрерывный сверхпроводник, тогда как на промежуточных масштабах $E_g < (E, T) < T_c$ она, скорее, может быть описана моделью массива Джоузефсоновских переходов.

Существование щели (1.11) в электронном спектре может показаться удивительным, так как только малая доля поверхности $(a/b)^2$ находится в непосредственном контакте со сверхпроводником. Присутствие этой щели связано с периодической структурой массива. Любая нерегулярность в положениях гранул приведет к размытию жёсткой щели. Кроме этого, тепловые флуктуации фаз гранул φ_i и конечность тепловой длины когерентности, приведут к тому же эффекту. Тем не менее, даже если щель размыта, сильное подавление локальной плотности состояний в графене при малых энергиях $E \leq E_g$, должно быть заметно в низкотемпературном эксперименте STM (Scanning Tunnelling Microscopy).

Это подавление является признаком коллективного эффекта близости, который не сводится к попарному взаимодействию гранул, когда существенные энергии электрона малы $\leq E_g$. Соответствующим образом определённый пространственный масштаб

$$\xi_g = \sqrt{\hbar D / E_g} \sim b \sqrt{\ln(b/a)} \quad (1.12)$$

играет роль низкотемпературной длины когерентности. В рассматриваемом приближении $\ln(b/a) \gg 1$, длина когерентности относительно велика $\xi_g \gg b$, что позволяет описывать рассматриваемую систему непрерывным образом при низких температурах.

Локальный сверхпроводящий параметр порядка, $\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \int d\omega F_\omega(\mathbf{r})$, при $T < E_g$ может быть найден как

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{D e^{i\varphi_j}}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2} \frac{\Theta[t(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)]}{\ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|/a)}, \quad (1.13)$$

где \mathbf{r}_j - координаты сверхпроводящих гранул, а $t(r) = (G_{\text{int}}/2\pi g) \ln(r/a)$. Мы использовали решение (1.6) для $\omega > E_g$. Сумма в уравнении (1.13) расходится и должна быть ограничена при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \sim \xi_g$ так как спектральная

щель (1.11) подавляет вклады малых частот ω в $\mathcal{F}(\mathbf{r})$. Формально, уравнение (1.13) не применимо вблизи гранул, так как система уравнений (1.3) и (1.4) не может быть линеаризована при малых $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$.

В нулевом магнитном поле фазы всех гранул при $T < T_c$ равны $\varphi_j = \text{const}$ и среднее по пространству значение $\overline{\mathcal{F}}$ даётся

$$\overline{\mathcal{F}} = n_i \int_b^{\xi_g} d^2r \frac{D \Theta[t(r)]}{r^2 \ln(r/a)} = \frac{\pi^2}{2} n_i D \frac{\ln \ln(b/a)}{\ln(b/a)}, \quad (1.14)$$

где последнее равенство написано в пределе больших G_{int} ($\Theta \approx \pi/2$) и $n_i \approx 1/b^2$ - концентрация гранул. Сравнение уравнений (1.14) и (1.11) даёт условие возможности пренебречь собственной константой взаимодействия в Куперовском канале графена λ_g . А именно, наличие такой константы привело бы к появлению энергетического масштаба (щели), равного $\Delta_g = \lambda_g \overline{\mathcal{F}}$. Этой собственной щелью можно пренебречь по сравнению с наведённой (1.11) если $\lambda_g \ll 0.5$. Оценка собственной константы связи в графене, Ур. (1.1), показывает, что ей действительно можно пренебречь.

Линейный отклик сверхпроводящей плёнки на слабое электромагнитное поле характеризуется плотностью сверхтока ρ_s . В промежуточном интервале температур, $E_g \ll T \ll T_c$, величина ρ_s может быть вычислена в парном приближении:

$$\rho_s(T) = \frac{n_i^2}{2} \int_0^\infty 2\pi r^3 E_J(r, T) dr. \quad (1.15)$$

Взяв $E_J(r, T)$ из уравнения (1.8) найдём

$$\rho_s(T) = (\pi^3/3) g A^2 (\pi T) E_{Th}^2 / T, \quad (1.16)$$

где $g = 2\nu_0 D$ и численный множитель в случае треугольного массива есть $n_i = (2/\sqrt{3})b^{-2}$.

При низких температурах $T < E_g$, функция $\rho_s(T)$ насыщается при значениях, которые можно оценить, заменив $T \rightarrow E_g$ в уравнении (1.16). Для высоко прозрачной границы гранула-графен, получим:

$$\rho_s(0) \approx 10gE_{Th} / \ln(b/a). \quad (1.17)$$

Сравнивая (1.17) и (1.11) найдём $\rho_s(0) \approx 4gE_g$, что является типичным значением для сверхпроводника с энергетической щелью E_g .

Критическую плотность тока на единицу длины при самых низких температурах, $T \ll E_g$, можно оценить следующим образом:

$$j_c(0) \approx \frac{2e}{\hbar b} E_J(b, 0) = \frac{\pi^3}{2} \frac{egD}{b^3 \ln^2(b/a)}, \quad (1.18)$$

где для оценки мы взяли ноль-температурный предел парной Джозефсоновской энергии связи (1.8) при $G_{\text{int}}/g \gg 1$:

$$E_J(b, 0) = \frac{\pi^3}{4} \frac{gE_{Th}}{\ln^2(b/a)}. \quad (1.19)$$

1.5 Эффект магнитного поля

Эффект поперечного магнитного поля характеризуется двумя различными масштабами ($\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{|e|}$ - квант магнитного потока):

$$H_g = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_g^2} \approx \frac{0.4}{\ln(b/4a)} \frac{\Phi_0}{b^2}, \quad H_{\text{Glass}} = \frac{\Phi_0}{b^2}. \quad (1.20)$$

В слабых полях и при низких температурах ($B \ll H_g$ и $T \ll E_g$), магнитное поле проникает в плёнку в виде хорошо разделённых вихрей с центром размера $\xi_g \geq b$ (в центрах вихрей щель в плотности состояний закрывается). Похожее явление (образование вихрей в условиях наведённой сверхпроводимости) наблюдалось в работе [37].

Эти вихри запинингованы структурой массива, так что критический ток должен относительно велик $j_{c1} \sim j_c(0)(b/\xi_g)$. При $B \approx H_g$ вихри начинают перекрываться и щель закрывается во всем пространстве, так что H_g является аналогом верхнего критического поля H_{c2} для массива. Однако, сразу выше H_g , металлическое состояние ещё не образуется, по крайней мере при

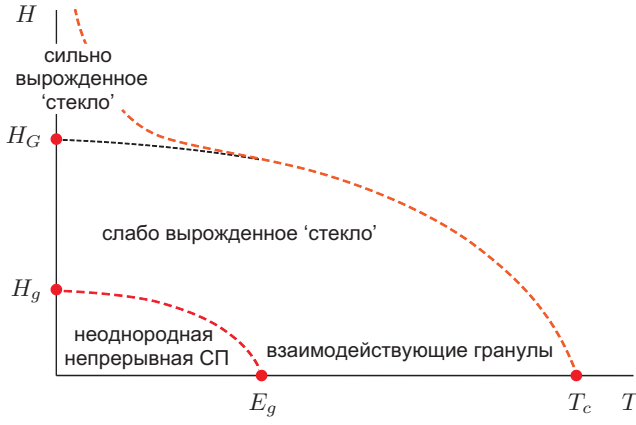


Рис. 1.3: Схематическое изображение фазовой диаграммы графена со сверхпроводящими гранулами (изображенные линии означают переходные области).

малых температурах $T \ll E_g$. В этом диапазоне полей система представляет собой набор гранул с вырожденным парным Джозефсоновским взаимодействием. Полностью энергии связи вырождаются при $B \gg H_{\text{Glass}}$. В этой области магнитных полей, среднее значение Джозефсоновской энергии связи экспоненциально подавлено, $\overline{E_J(B)} \propto \exp(-B/H_{\text{Glass}})$. Однако, как было показано в работах [38, 39], в действительности Джозефсоновские энергии связи намного больше, что связано с мезоскопическими флуктуациями (экспоненциальная малость $\overline{E_J(B)}$ связана со случайностью знака усредняемой энергии связи):

$$E_J^{\text{glass}}(b) = [\overline{(E_J(b))^2}]^{1/2} \sim \frac{E_{\text{Th}}}{\ln^2(b/a)}, \quad (1.21)$$

что всего лишь в $1/g$ раз меньше чем значение энергии связи при $(T, B) = 0$, см. уравнение (1.19). Оценка (1.21) показывает, что при $T \rightarrow 0$ сверхпроводящее состояние выживает вплоть до высоких магнитных полей $H_{g2}(0) \gg H_{\text{Glass}}$. Значение $H_{g2}(0)$ определяется квантовыми флуктуациями фазы [39, 40]:

$$H_{g2} \sim (\Phi_0/b^2)e^{c\sqrt{g}}, \quad c \sim 1. \quad (1.22)$$

Общая фазовая диаграмма в плоскости (H, T) схематично изображена на Рис. 1.3. Указанные линии не обозначают резких фазовых переходов, а лишь указывают на переходные области.

1.6 Заключение

Итак, мы изучили когерентное состояние графена, возникающее благодаря коллективному эффекту близости, наведённому малыми сверхпроводящими гранулами, покрывающими небольшую часть площади графена. Показано, что такое когерентное состояние имеет критическую температуру T_c порядка $1K$. При низких температурах $T \ll T_c$ и в слабых магнитных полях $B \ll \Phi_0/b^2$ в спектре электронов открывается щель. С увеличением температуры и магнитного поля, непрерывное сверхпроводящее состояние переходит в состояние, более адекватно описывающееся массивом слабо связанных гранул.

Наше рассмотрение было основано на стандартном уравнении Узаделя, которое справедливо для достаточно грязных систем ($l \ll a$). В противоположном (баллистическом) пределе, Андреевский кондактанс уменьшается. Это приводит к увеличению квантовых флуктуаций фаз $\varphi_i(t)$. При условии $b^2 \ln(b/a) \ll b_c^2$, квантовыми флуктуациями фаз можно пренебречь. Здесь b_c - критическое расстояние между гранулами, при котором происходит квантовый фазовый переход в металлическое состояние [40]. Та же проблема, связанная с подавлением Андреевского кондактанса, становится даже более серьёзной с уменьшением электронной плотности при приближении к нейтральной точке графена. А именно, сечение рассеяния электрона на грануле спадает при $k_F a \sim 1$, приводя к расщеплению фаз гранул квантовыми флуктуациями. Эти флуктуации могут привести к квантовому переходу сверхпроводник-металл [40, 41], так что даже при нулевой температуре графен останется нормальным металлом.

Наведённая эффектом близости сверхпроводимость в графене изучалась экспериментально в работе [42]. Доля поверхности графена, покрытая сверхпроводящими гранулами, в этом эксперименте составляла 40%, что означает, что такая система находится вне области применимости нашего рассмотрения. Отметим, однако, что резистивные измерения, результат которых приведён на Рис. 1.4, подтверждают существование перехода типа БКТ, кото-

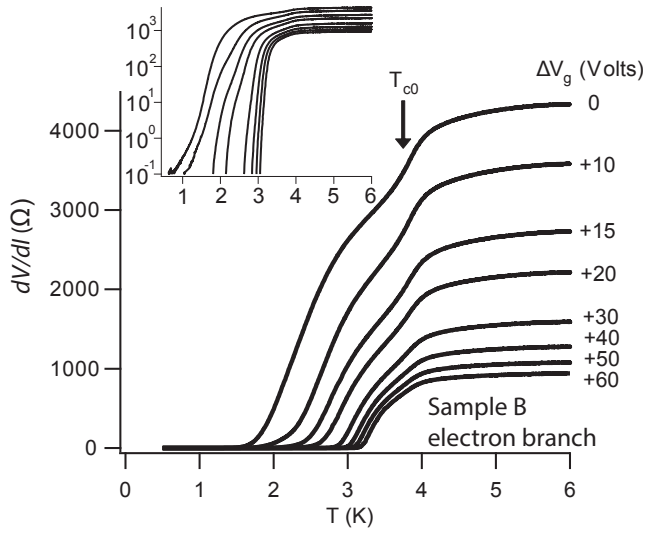


Рис. 1.4: Сопротивление как функция температуры для серии затворных напряжений, рисунок из работы [42].

рый оказывается на существенном отдалении (по температуре) от фазового перехода отдельных гранул в сверхпроводящее состояние. Однако, эти температуры оказываются связаны универсальным соотношением, известным для сверхпроводящих пленок [43, 44]:

$$\frac{T_{c0}}{T_c} \left\{ \frac{\Delta(T_c)}{\Delta(0)} \tanh \frac{\Delta(T_c)}{2kT_c} \right\} = \frac{\epsilon R_N}{R_Q}, \quad (1.23)$$

а не полученным нами соотношением для массива гранул, см. результат на Рис. 1.2, что указывает на то, что наша теория не является непосредственно применимой к такой системе.

Глава 2

Сверхпроводящие флуктуации и электрический транспорт в неупорядоченных плёнках

2.1 Введение

Переход нормальный металл - сверхпроводник обычно происходит довольно резко. Когда он впервые был открыт в 1911 году, он был описан как внезапное падение сопротивления до нуля при некоторой температуре T_c . На практике, ширина перехода является конечной, и эта конечность связана с существованием сверхпроводящих флуктуаций.

В нулевом магнитном поле, когда переход происходит по температуре, эти флуктуации имеют термодинамическое происхождение. В самом деле, параметр порядка должен быть определен из условия минимизации свободной энергии. В точке перехода второго рода функционал свободной энергии как функции параметра порядка Δ превращается из параболического потенциала в потенциал типа 'мексиканской шляпы'. Ввиду наличия тепловых флуктуаций, существенными оказываются не только конфигурации системы, отвечающие минимуму параметра порядка, но и энергетически близкие конфигурации. При этом ясно, что чем ближе к переходу находится система, тем большие флуктуации поля Δ являются возможными. Фазовый переход оказывается резким, если область сильных флуктуаций, так называемая область

Гинзбурга, мала. Для массивных сверхпроводников она, действительно, оказывается мала и флуктуациями часто можно просто пренебречь. Однако, в случаях, когда размерность системы понижена, и беспорядок играет существенную роль (подавляя длину когерентности ξ_0), флуктуации оказываются существенны. Экспериментально такая ситуация реализуется, главным образом, в неупорядоченных плёнках, нанопроволоках или сверхпроводящих гранулах.

Теоретическое рассмотрение флуктуационной проводимости имеет корни в работе Асламазова и Ларкина 1968 года [12], в которой был впервые введен термин парапроводимость. Авторы проанализировали проводимость сверхпроводников в металлической фазе (выше температуры перехода T_c) при помощи диаграммной теории линейного отклика, вычисляя диаграмму, изображённую на Рис. 2.8. Парапроводимость может быть понята как прямой вклад флуктуационных Куперовских пар в электрический ток. Действительно, образование Куперовских пар приводит к появлению дополнительного канала для переноса заряда даже в металлической фазе. Выше температуры перехода эти Куперовские пары еще не в состоянии образовать конденсата, и их вклад в проводимость остается конечным, так как он ограничен конечностью времени их жизни.

Другими проявлениями сверхпроводящих флуктуаций являются: i) рассеяние электронов на флуктуирующем параметре порядка - процесс, отвечающий так называемому вкладу Маки-Томпсона [45, 46], отвечающему диаграмме 2.2; ii) подавление квазичастичной плотности состояний вблизи уровня Ферми, обычно ассоциируемому с диаграммами типа 2.1.

Первоначально, классические результаты для этих вкладов были получены для температур в окрестности T_c и позднее распространены на большие температуры и слабые магнитные поля. Относительно недавно в работе Галицкого и Ларкина [47] была рассмотрена также и окрестность индуцированного магнитным полем квантового фазового перехода в грязных сверхпроводящих плёнках. В этой работе было показано, что вблизи квантового фазово-

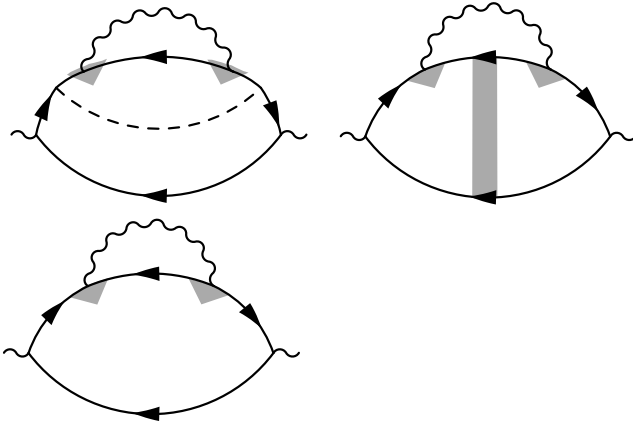


Рис. 2.1: Диаграммы с горизонтальной линией взаимодействия, связываемые с подавлением плотности состояний.

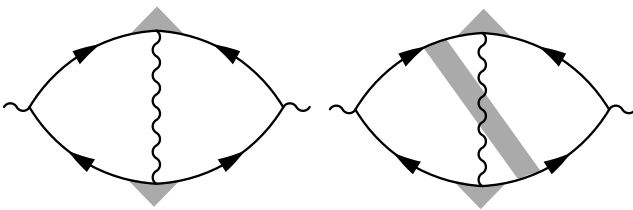


Рис. 2.2: Диаграммы с вертикальной линией взаимодействия, отвечающие вкладу Маки и Томпсона.

го перехода, в отличие от ранее изученного режима слабых магнитных полей, вклады различных процессов оказываются сравнимы по величине. Этот факт имеет интересное последствие, состоящее в том, что знак полной поправки к проводимости становится отрицательным для достаточно низких температур в окрестности квантовой критической точки, что приводит к немонотонному магнитосопротивлению в данном режиме.

В секции 2.2 мы представляем основы используемого метода. Мы показываем, как уравнение Узаделя, изначально сформулированное для конкретной реализации параметра порядка [20], может быть применено для вычисления флуктуационной проводимости. Далее, в секции 2.4 мы решаем полученные уравнения, что позволяет вычислить корреляционные функции параметра порядка в Гауссовом приближении. Этого оказывается достаточно для того, чтобы вычислить флуктуационные поправки к электрическому току, как обсуждается в секции 2.6. Наконец, мы получаем окончательные выражения для продольной проводимости, которые справедливы во всей металлической фазе за пределами области сильных флуктуаций. Вычисление поправок включает интегрирование по медленным степеням свободы, а именно, сумми-

рование по уровням Ландау Куперовских пар и интегрирование по медленной бозонной частоте. Последний шаг может быть выполнен аналитически только в некоторых предельных случаях. Ряд таких предельных случаев проанализирован подробно в секции 2.7, включая хорошо изученную окрестность T_c и наиболее интересную область - окрестность квантовой критической точки вблизи H_{c2} . Посредством численного анализа, мы указываем линию смены знака магнитосопротивления $\partial\sigma/\partial B$ и линию $\partial\sigma/\partial T = 0$. Далее, мы обсуждаем существование точки пересечения полученных кривых. В секции 2.8 мы вычисляем Холловскую проводимость, обобщая предыдущие вычисления [48, 49, 50] на случай произвольных температур и магнитных полей выше линии перехода.

2.2 Учёт сверхпроводящих флуктуаций в уравнении Узаделя

При выборе метода для вывода флуктуационных поправок, мы отклоняемся от обычного подхода, который состоит в использовании диаграммной теории линейного отклика в мнимом времени [51], детально описанного для рассматриваемой задачи в книге [13]. Вместо этого, мы используем метод, основанный на технике Келдыша (непосредственно в действительном времени) совместно с уравнением Узаделя. В таком подходе, усреднение по положениям примесей происходит на раннем этапе вычислений, что позволяет избежать применения крестовой диаграммной техники. Кроме этого, отпадает необходимость в нефизической процедуре аналитического продолжения.

Интересно, что такой подход может быть применен и для вычисления флуктуационных величин. Такого рода вычисление было проделано Волковым и соавторами в работе [52], где была вычислена флуктуационная проводимость в гибридной структуре, состоящей из металла в нормальном состоянии и сверхпроводника в окрестности T_c . При этом учитывались только классические (термодинамические) флуктуации параметра порядка и пред-

полагалось отсутствие магнитного поля.

Наша цель состоит в том, чтобы научиться применять уравнение Узаде-ля для вычисления продольной и поперечной (Холловской) проводимостей в неупорядоченной пленке при произвольных температурах и магнитных полях. Развиваемый подход до определённой степени напоминает формализм нелинейной σ -модели, предложенной для неупорядоченных сверхпроводников Фейгельманом, Ларкиным и Скворцовым [53], и использованный во множестве последующих работ, из которых мы отметим работу Каменева и Левченко [25], которая наиболее близка к обсуждаемой тематике. В этой работе вычислялись поправки к проводимости за счёт классических флуктуаций в окрестности T_c . Близкая связь формализма σ -модели и уравнения Узаде-ля объясняется тем, что это уравнение является седловым уравнением для нелинейной σ -модели. Для простоты, нами было решено не обращаться к несколько более техничному аппарату σ -модели, а, вместо этого, сформулировать метод полностью в рамках уравнения Узаде-ля. Такой подход приводит к описанию флуктуационных эффектов на языке кинетического уравнения для квазичастиц,двигающихся на фоне флуктуирующего поля, описывающего сверхпроводящее спаривание. Такой метод оказывается очень удобным для описания флуктуационного транспорта.

Вычисление проводимости требует как знания квазиклассической функции Грина в присутствии флуктуирующего параметра порядка, так и корреляционной функции самого флуктуирующего поля. В режиме слабых флуктуаций, который мы только и рассматриваем, корреляционная функция параметра порядка должна быть найдена из квадратичного действия Гинзбурга-Ландау. Оказывается возможным найти это действие, зная только саму квазиклассическую функцию Грина. Метод нахождения действия по функции Грина также описан в данной секции.

Начнём с Келдышевского действия для электронов с короткодействующим взаимодействием типа БКШ. Воспользовавшись преобразованием Хаббарда

и Стратановича, действие можно записать в виде суммы двух членов:

$$S[\Psi, \check{\Delta}] = S_1[\Psi, \check{\Delta}] + S_2[\check{\Delta}], \quad (2.1)$$

где

$$S_1[\Psi, \check{\Delta}] = \int dx \Psi^\dagger(x) [i\hat{\tau}_3\partial_t - \check{H}(x) + \mu + \check{\Delta}(x)] \Psi(x) \quad (2.2)$$

и

$$S_2[\check{\Delta}] = -\frac{2\nu}{\lambda} \int dx \text{tr} [\check{\Delta}^+ \hat{\sigma}_1 \check{\Delta}]. \quad (2.3)$$

Здесь ν - плотность состояний с данной спиновой проекцией на уровне Ферми и μ - химический потенциал. Безразмерная константа связи в Куперовском канале λ положительна для случая притяжения.

Символ \check{H} обозначает 4×4 матрицы в пространстве $K \otimes N$. Оператор следа tr в Ур. (2.3) включает свертку как по Келдышевским индексам, так и по индексам частица/дырка. Для краткости введено обозначение $x = (\mathbf{r}, t)$. Наконец, временное интегрирование идет по всей действительной оси, $(-\infty, \infty)$. Одночастичный Гамильтониан \check{H} имеет вид:

$$\check{H} = -\frac{1}{2m} (\nabla - ie\mathbf{A}(\mathbf{r})\hat{\tau}_3)^2 + U(\mathbf{r}) + e\varphi(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

где U - потенциал потенциальных примесей, а электромагнитное поле описывается скалярным φ и векторным потенциалами \mathbf{A} . Масса электрона обозначена m , его заряд - e . В записанном действии, Ψ - четырёхкомпонентный вектор Грассмановых полей со следующей структурой:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_K, \quad \psi_i = \begin{pmatrix} \chi_{i\uparrow} \\ \chi_{i\downarrow}^* \end{pmatrix}_N \quad (2.5)$$

и

$$\Psi^\dagger = \left(\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger \right)_K, \quad \psi_i^\dagger = (\chi_{i\uparrow}^*, -\chi_{i\downarrow})_N. \quad (2.6)$$

В присутствии флуктуаций электронные Гриновские функции системы должны быть усреднены по флуктуирующему параметру порядка:

$$\check{G}(x, x') = -i \int D\Psi D\check{\Delta} \Psi(x) \Psi^\dagger(x') e^{iS[\Psi, \check{\Delta}]}. \quad (2.7)$$

Это выражение может быть приведено к виду

$$\check{G}(x, x') = \int D\check{\Delta} \check{G}_\Delta(x, x') e^{iS_{GL}[\check{\Delta}]}, \quad (2.8)$$

где действие Гинзбурга-Ландау определено согласно

$$S_{GL}[\check{\Delta}] = -i \ln \int D\Psi e^{iS[\Psi, \check{\Delta}]}, \quad (2.9)$$

а

$$\check{G}_\Delta(x, x') = -i \frac{\int D\Psi \Psi(x) \Psi^\dagger(x') e^{iS_1[\Psi, \check{\Delta}]}}{\int D\Psi e^{iS_1[\Psi, \check{\Delta}]}}. \quad (2.10)$$

Эти Гриновские функции зависят от конкретной реализации поля параметра порядка $\check{\Delta}$.

Физические величины могут быть найдены посредством усреднённых по беспорядку функций Грина, $\langle \check{G}(x, x') \rangle_{dis}$, которые даются выражением

$$\langle \check{G}(x, x') \rangle_{dis} = \int D\check{\Delta} \langle \check{G}_\Delta(x, x') \rangle_{dis} e^{i\langle S_{GL}[\check{\Delta}] \rangle_{dis}}. \quad (2.11)$$

Здесь электронные функции Грина можно усреднять по беспорядку отдельно от бозонного действия. Это приближение справедливо для плёнок с большим безразмерным кондактансом $g \gg 1$; учёт кросс-корреляций между этими двумя членами дает поправки к Друдевской проводимости, которые оказываются порядка $1/g^2$, тогда как мы будем интересоваться только поправками порядка $1/g$.

В последующем рассмотрении мы используем квазиклассическое приближение [54, 21, 22]. Квазиклассические функции Грина определяются следующим образом. Во-первых, выполним Вигнеровское преобразование усреднённой по беспорядку функции Грина:

$$\langle \check{G}_\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t_1, t_2) \rangle_{dis} = \int d\rho e^{-i\mathbf{p}\rho} \langle \check{G}_\Delta(x_1, x_2) \rangle_{dis}, \quad (2.12)$$

где $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$, $\rho = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Далее, квазиклассическая функция Грина получается интегрированием по энергетической переменной $\xi = \frac{p^2}{2m} - \mu$, которая описывает удаление от Ферми поверхности:

$$\check{g}_\mathbf{n}(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle \check{G}_\Delta(\mathbf{n}(p_F + \xi/v_F), \mathbf{r}, t_1, t_2) \rangle_{dis}. \quad (2.13)$$

В этом уравнении v_F обозначает скорость Ферми.

В диффузном приближении старшие угловые гармоники функции Грина подавлены и удаётся возможным сформулировать полное описание посредством усреднённой по направлению функции:

$$\check{g}(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \int d\mathbf{n} \check{g}_\mathbf{n}(\mathbf{r}, t_1, t_2). \quad (2.14)$$

В дальнейшем рассмотрении мы интересуемся Гауссовыми флуктуациями. Этот режим имеет место, когда пленка находится не слишком близко к сверхпроводящему переходу. Ширина негауссовой области в окрестности линии перехода определяется параметром Гинзбурга Gi . Для грязной пленки $Gi \sim g^{-1}$. Более точный критерий справедливости этого приближения зависит от рассматриваемой величины. Для транспортных явлений, негауссова область существенно шире, чем для термодинамических. Как было показано в работе Ларкина и Овчинникова [55], её ширина для температурного фазового перехода была оценена как \sqrt{Gi} . Это означает, что при температурах удовлетворяющих неравенству $|T - T_c| \lesssim \sqrt{Gi}T_c$, следует учитывать взаимодействие флуктуаций. Нам неизвестно, проводилось ли похожее вычисление для квантового перехода (по магнитному полю). Существует, однако, исследование влияния флуктуаций на величину критического магнитного поля [56]. Так или иначе, в нашем рассмотрении мы находимся вне режима сильных флуктуаций.

Перейдем к рассмотрению действия Гинзбурга-Ландау. Так как мы интересуемся Гауссовыми флуктуациями, следует вычислить $S_{GL}[\vec{\Delta}]$ только до второго порядка по $\vec{\Delta}$. Обратим внимание на соотношение

$$\frac{\delta \langle S_{GL}[\vec{\Delta}] \rangle_{dis}}{\delta \Delta_i^*(x_1)} = i \text{tr} [\hat{\sigma}_i \hat{\tau}_- \langle \check{G}_{\Delta}(x_1, x_1) \rangle_{dis}] - \frac{2\nu}{\lambda} (\hat{\sigma}_1 \vec{\Delta}(x_1))_i, \quad (2.15)$$

которое позволяет получить

$$\langle S_{GL}[\vec{\Delta}] \rangle_{dis} = \int dx_1 dx_2 \vec{\Delta}^\dagger(x_1) \times \left[-\frac{2\nu}{\lambda} \hat{\sigma}_1 \delta_{x_1, x_2} + \hat{\Pi}(x_1, x_2) \right] \vec{\Delta}(x_2), \quad (2.16)$$

где

$$\hat{\Pi}_{ij}(x_1, x_2) = i \left. \frac{\delta \text{tr} [\hat{\sigma}_i \hat{\tau}_- \langle \check{G}_{\Delta}(x_1, x_1) \rangle_{dis}]}{\delta \Delta_j(x_2)} \right|_{\vec{\Delta}=0}. \quad (2.17)$$

Важно, что возникающие Гриновские функции взяты в совпадающих временных и пространственных точках и могут быть выражены через квазиклассическую функцию Грина. Таким образом, можно получить:

$$\hat{\Pi}^{ij}(x_1, x_2) = \pi\nu \left. \frac{\delta \text{tr} [\sigma_i \hat{\tau}_- \hat{g}(\mathbf{r}_1, t_1, t_1)]}{\delta \Delta_j(x_2)} \right|_{\vec{\Delta}=0}. \quad (2.18)$$

Этот результат демонстрирует, что знания квазиклассической Функции Грина, то есть, решения уравнения Узаделя, достаточно для вычисления действия Гинзбурга-Ландау. Это наблюдение существенно упрощает процесс вычисления Гауссовых поправок к проводимости. В свою очередь, с помощью действия Гинзбурга-Ландау, можно вычислить корреляционные функции поля параметра порядка, которые необходимы для вычисления электрического тока. Электрический ток вычисляется по формулам (2) и (3) с дополнительным усреднением по действию Гинзбурга-Ландау.

В главном приближении по g^{-1} , достаточно определить $\check{\mathbf{j}}$ до второго порядка по флуктуирующему полю Δ до того как выполнено разложение по электрическому полю.

2.3 Параметризация Келдышевской функции Грина

Для практических вычислений, необходимо разрешить нормировочное условие (5) явным образом. При рассмотрении эффекта близости в приближении среднего поля, приходится иметь дело только с классической компонентой параметра порядка Δ_{cl} . В этом случае, ($\Delta_q = 0$) Гриновская Функция может быть параметризована следующим образом:

$$\check{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}^R & \hat{g}^K \\ 0 & \hat{g}^A \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где $\hat{g}^K = \hat{g}^R \cdot \hat{h} - \hat{h} \cdot \hat{g}^A$ и $(\hat{g}^R \cdot \hat{g}^R)_{t,t'} = (\hat{g}^A \cdot \hat{g}^A)_{t,t'} = \hat{1}\delta_{t-t'}$. Однако, в присутствии квантовых флуктуаций параметра порядка (то есть, для конечного Δ_q), эта структура, вообще говоря, перестаёт иметь место и следует рассмотреть более общую параметризацию. В таком случае, следует обобщить (2.19) для того, чтобы принять во внимание эффекты до второго порядка по Δ :

$$\check{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}^R - \hat{h} \cdot \hat{g}^Z & \hat{g}^R \cdot \hat{h} - \hat{h} \cdot \hat{g}^A - \hat{h} \cdot \hat{g}^Z \cdot \hat{h} - \hat{g}^W \\ \hat{g}^Z & \hat{g}^A + \hat{g}^Z \cdot \hat{h} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

В частности, следует обратить внимание на левый нижний угол этой матрицы, который не равен нулю [57, 26]. Такая параметризация имеет следующее свойство:

$$(\hat{g}^R)^2 = (\hat{g}^A)^2 = \hat{1}\delta_{t-t'} + \mathcal{O}(\Delta^4) \quad (2.21)$$

Матрица

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} h_e & 0 \\ 0 & h_h \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

называется обобщённой функцией распределения [22]. Матрицы $\hat{g}^{Z,W}$ диагональны и появляются только во втором порядке по Δ . Это свойство выполняется, если \hat{h} удовлетворяет следующему (отвечающему металлу, находящемуся в нормальном состоянии) уравнению диффузии:

$$D\nabla^2\hat{h} - \left[\partial_t + ie\phi\hat{\tau}_3, \hat{h} \right] = 0. \quad (2.23)$$

Для целей нашего вычисления можно предположить, что $\hat{g}^Z = \hat{g}^W = 0$. Что касается \hat{g}^Z , рассуждение таково. Для вычисления электрического тока, следует подставить Гриновские функции в соответствующее выражение (3) и далее усреднить по всем конфигурациям параметра порядка. Возможны два типа вкладов в ток, возникающих из \hat{g}^Z . Первый - когда \hat{g}^Z не комбинируется с другими вкладами, содержащими Δ , когда оно должно быть усреднено внутри себя. Так как левый нижний угол усреднённой по взаимодействию функции Грина должен равняться нулю, $\langle \hat{g}^Z \rangle = 0$, вклады такого типа за-нуляются. Второй тип вкладов возникает при сочетании \hat{g}^Z в формуле (3) с другими членами, возникающими из-за флуктуаций. Так как \hat{g}^Z само по себе квадратично по Δ , такая процедура приводит к вкладам, которые, по меньшей мере, четвёртого порядка по Δ . Эти вклады находятся за пределами точности нашего вычисления.

Тоже самое касается вкладов, возникающих из \hat{g}^W , правда, в этом случае, среднее от такого вклада $\langle \hat{g}^W \rangle$ не зануляется тождественно, но оказывается мало $\mathcal{O}(\mathbf{E}^2)$. Чтобы увидеть это, параметризуем обсуждаемые компоненты следующим образом:

$$\hat{g}^Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{g}^W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Это дает следующие уравнения:

$$\mathcal{D}^{-1}w_i = I_i^W, \quad \bar{\mathcal{D}}^{-1}z_i = I_i^Z, \quad (2.25)$$

где

$$\mathcal{D}^{-1} = D\hat{\nabla}^2 - \partial_{t_1} - \partial_{t_2}, \quad \bar{\mathcal{D}}^{-1} = D\hat{\nabla}^2 + \partial_{t_1} + \partial_{t_2}. \quad (2.26)$$

Интегралы столкновений $I_{1,2}^Z$ даются следующими выражениями

$$\begin{aligned}
I_1^Z &= i (\Delta_q \cdot f^* - \bar{f} \cdot \Delta_q^*), \\
I_2^Z &= i (\Delta_q^* \cdot f - \bar{f}^* \cdot \Delta_q),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

а $I_i^W = I_{i,coll}^W - I_{i,neq}^W$ можно записать так (смысл такого разделения объясняется ниже)

$$\begin{aligned}
I_{1,coll}^W &= i(f \cdot J_1 - \bar{J}_1 \cdot \bar{f}^*), \\
I_{2,coll}^W &= i(f^* \cdot J_2 - \bar{J}_2 \cdot \bar{f}), \\
I_{1,neq}^W &= 2j_e \cdot z_1 \cdot j_e + j_e \cdot \bar{f} \cdot \bar{f}^{*'} + f \cdot j_h \cdot \bar{f}^{*'} + \\
&\quad f' \cdot j_h \cdot \bar{f}^* + f' \cdot f^* \cdot j_e, \\
I_{2,neq}^W &= 2j_h \cdot z_2 \cdot j_h + j_h \cdot \bar{f}^* \cdot \bar{f}' + f^* \cdot j_e \cdot \bar{f}' + \\
&\quad f^{*'} \cdot j_e \cdot \bar{f} + f^{*'} \cdot f \cdot j_h.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Для удобства, мы определили $j_{e,h} = \pm \nabla h_{e,h}$ и:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \Delta_q^* - \Delta_c^* \cdot h_e + h_h \cdot \Delta_c^* - h_h \cdot \Delta_q^* \cdot h_e, \\
\bar{J}_1 &= \Delta_q - \Delta_c \cdot h_h + h_e \cdot \Delta_c - h_e \cdot \Delta_q \cdot h_h, \\
J_2 &= \Delta_q - \Delta_c \cdot h_h + h_e \cdot \Delta_c - h_e \cdot \Delta_q \cdot h_h, \\
\bar{J}_2 &= \Delta_q^* - \Delta_c^* \cdot h_e + h_h \cdot \Delta_c^* - h_h \cdot \Delta_q^* \cdot h_e.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Тогда как $\langle I^Z \rangle = 0$ благодаря свойствам причинности [26], интеграл столкновений I^W не зануляется тождественно после усреднения. Тем не менее, можно показать, что его разложение по электрическому полю начинается с членов порядка \mathbf{E}^2 . С физической точки зрения полезно заметить, что $I_{i,neq}^W$ связано с производством тепла. Действительно, $\langle I_{i,neq}^W \rangle$ пропорционально Друдевскому электрическому току $j_{e,h}$. Вклады в $\langle I_{i,neq}^W \rangle$ которые содержат первую степень тока $j_{e,h}$, умножаются на средние от величин содержащих пространственные градиенты f , которые, конечно, зануляются в отсутствие электрического поля, когда система однородна. Таким образом $\langle I_{i,neq}^W \rangle = \mathcal{O}(\mathbf{E}^2)$. Кроме

этого, существует еще один вклад, $I_{i,coll}^W$. Для $\mathbf{E} = 0$ он отвечает интегралу столкновений за счёт взаимодействия в Куперовском канале, входящему в кинетическое уравнение и вычисленному впервые Рейзером [58]. Заметим, что когда единственным источником неоднородности является меняющийся в пространстве электрический потенциал, (что отвечает рассматриваемому нами случаю), интеграл столкновений, записанный через калибровочно-инвариантные энергии участвующих квазичастиц/квазидырок не должен зависеть от пространственных координат. Как таковой, он не может зависеть и от электрического поля, являющегося векторной величиной, а только от \mathbf{E}^2 . Коротко это выражается таким уравнением: $I_{1,2,coll}^W = I_{coll}(\mathbf{E}^2, \epsilon \mp e\phi(x))$. Так как для $\mathbf{E} = 0$ интеграл столкновений зануляется (это условие фиксирует функцию распределения \mathcal{H} в тепловом виде) и зависит только от \mathbf{E}^2 , им следует пренебречь при вычислении линейного отклика. Таким образом, при изучении линейного отклика, нет необходимости удерживать \hat{g}^W .

Краткий вывод приведённых рассуждений состоит в том, что для наших целей параметризации, данной в уравнении (2.19), оказывается достаточно.

2.4 Решение уравнения Узаделя и сверхпроводящий пропагатор

В дальнейшем, мы рассматриваем постоянные во времени и пространстве электрическое \mathbf{E} и магнитное \mathbf{B} поля. Оказывается удобным работать в калибровке со стационарными потенциалами: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ и $\mathbf{B} = \text{curl}\mathbf{A}$. Например, можно выбрать $\phi = -\mathbf{E}\mathbf{r}$, $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$. В таких условиях, в отсутствие сверхпроводящих флуктуаций, запаздывающий и опережающий секторы квазиклассической функции Грина диагональны в пространстве Горькова-Намбу и имеют крайне простой вид:

$$\hat{g}^R(t_1, t_2) = -\hat{g}^A(t_1, t_2) = \hat{\tau}_3 \delta_{t_1 - t_2}. \quad (2.30)$$

Для замкнутой невзаимодействующей системы (в отсутствие контакта с

тепловым резервуаром), функция распределения \hat{h} еще не фиксирована. В самом деле, уравнение (2.23) имеет бесконечно много решений. В присутствии взаимодействия удобно работать с функцией распределения, отвечающей состоянию локального теплового равновесия с пространственно меняющимся химическим потенциалом:

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} h_e & 0 \\ 0 & h_h \end{pmatrix}, \quad h_{e,h} = \mathcal{H}(\epsilon \mp e\phi(x)) \quad (2.31)$$

где

$$\mathcal{H}(\epsilon) = \tanh \frac{\epsilon}{2T}. \quad (2.32)$$

Этот выбор особенно удобен для изучения линейного отклика, так как отклонения $\langle \hat{g}^W \rangle$ от нуля, возникающие из-за взаимодействия, проявляются только во втором порядке по электрическому полю (см. обсуждение в конце предыдущей главы). Этот факт существенно упрощает теорию возмущений. Температура при этом всё ещё произвольна и определяется тепловым балансом с подложкой или контактами. При этом, пренебрегая $\langle \hat{g}^W \rangle$, мы не учитываем эффекта нагрева системы электрическим полем и должны считать температуру постоянной в пространстве.

В присутствии сверхпроводящих флуктуаций, квазиклассическая функция Грина получает недиагональные в пространстве Горькова-Намбу компоненты. Для анализа режима слабых флуктуаций, отклонения от металлического решения 2.30 можно считать малыми и рассматривать как небольшое возмущение. Имея это в виду, оставшиеся ограничения (2.21) можно разрешить следующим образом:

$$\hat{g}^R = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}f \cdot f^* & f \\ f^* & -1 + \frac{1}{2}f^* \cdot f \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\hat{g}^A = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}\bar{f} \cdot \bar{f}^* & -\bar{f} \\ -\bar{f}^* & 1 - \frac{1}{2}\bar{f}^* \cdot \bar{f} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

Ясно (это подтверждается решением уравнения Узаделя), что f, \bar{f} - порядка $\mathcal{O}(\Delta)$. Функции f и f^* , также как \bar{f} и \bar{f}^* следует считать независимыми: они становятся комплексно сопряжёнными только в отсутствие Δ_q .

Далее, следует подставить параметризацию (2.20) в уравнение (1) и пренебречь членами третьего порядка по Δ . В итоге, для нахождения f получается простое уравнение

$$\mathcal{C}^{-1}f = V, \quad (2.35)$$

где оператор \mathcal{C}^{-1} даётся выражением

$$\mathcal{C}^{-1} = D\hat{\nabla}^2 - \partial_{t_1} + \partial_{t_2}, \quad (2.36)$$

а калибровочно инвариантная производная есть $\hat{\nabla}f = (\nabla - 2ie\mathbf{A})f$. Как легко заметить, это уравнение описывает отклик поля f на параметр порядка Δ , который входит в это уравнение в следующей комбинации:

$$V_{t_1, t_2}(\mathbf{r}) = 2i [\Delta_{cl}(\mathbf{r}, t_1) \delta_{t_1 - t_2} + h_e(\mathbf{r}, t_1 - t_2) \Delta_q(\mathbf{r}, t_2)]. \quad (2.37)$$

Похожие уравнения, которые мы не выписываем здесь, имеют место для f^*, \bar{f} , и \bar{f}^* с соответствующим образом модифицированными дифференциальными операторами и функциями V^*, \bar{V} и \bar{V}^* . Принимая во внимание явный вид $h_{e,h}$ можно заключить, что $\bar{f}_{t_1, t_2} = -f_{t_2, t_1}$ (такое же свойство соблюдается для f^*). Заметим, что статический электрический потенциал не входит в уравнение на f . Это одно из преимуществ скалярной калибровки для электрического поля.

Уравнение на f можно легко решить, выполнив преобразование Фурье во временном пространстве:

$$f(t_1, t_2) = \int f(\epsilon_1, \epsilon_2) e^{-i(\epsilon_1 t_1 - \epsilon_2 t_2)} (d\epsilon_1) (d\epsilon_2). \quad (2.38)$$

Здесь использовано обозначение $(d\epsilon) = d\epsilon/2\pi$. На этом этапе удобно ввести базис уровней Ландау с собственными функциями $\psi_{np}(\mathbf{r})$ оператора кинетической энергии

$$-D(\nabla - 2ie\mathbf{A})^2 \psi_{np}(\mathbf{r}) = \epsilon_n \psi_{np}(\mathbf{r}). \quad (2.39)$$

Это уравнение описывает распространение 'частицы' с массой, равной $1/2D$. В калибровке Ландау, функции ψ_{np} нумеруются импульсом p и номером уровня n :

$$\psi_{np}(\mathbf{r}) = e^{ipy} \chi_n(x - pl_B^2). \quad (2.40)$$

Магнитная длина равна $l_B = 1/\sqrt{2|e|B}$ (для "частицы" зарядом $2|e|$) и

$$\chi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l_B}} \frac{e^{-x^2/2l_B^2}}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} H_n(x/l_B). \quad (2.41)$$

Заметим, что описание, основанное на уравнении Узаделя, справедливо только до тех пор, пока мы интересуемся режимом классически слабых магнитных полей, для которых $\omega_c = \frac{|e|B}{m}$ удовлетворяет неравенству $\omega_c \tau \ll 1$. Это означает, что квантование пространственного движения квазичастиц не является существенным. Квантование уровней ландау Куперовской пары и Куперонов мод, напротив, важно при рассматриваемых температурах и магнитных полях, так что $\epsilon_n = \Omega_c \left(\frac{1}{2} + n\right)$ где $\Omega_c = 4|e|DB$.

Выражение для f удобно записать через Куперонный пропагатор, который диагонален в выбранном базисе: $\langle n, p | \mathcal{C} | m, p \rangle = \delta_{mn} C_n(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, где

$$C_n(\epsilon) = \left(i\epsilon - \epsilon_n - \tau_\phi^{-1} \right)^{-1}. \quad (2.42)$$

Здесь введено время дефазировки τ_ϕ . Физическая роль величины τ_ϕ состоит в том, чтобы обеспечить длинновременное спадание Куперона, которое важно для того, чтобы одночастичные интерференционные поправки оставались конечны. Речь идет о процессах типа слабой локализации и аномального процесса Маки-Томпсона (аналога слабой антилокализации), которые расходятся в отсутствие магнитного поля при $\tau_\phi^{-1} = 0$. Дефазировка может быть обеспечена, например, магнитными примесями или любыми неупругими процессами, например, столкновениями электронов с фононами или другими электронами. При низких температурах основной вклад в дефазировку даётся электрон-электронными соударениями. Отметим, что вне режима сильных флуктуаций (в Гауссовом режиме), частоту дефазировки можно считать

независящей от электронной энергии и равной сумме частот дефазировки за счёт взаимодействия в Кулоновском [59] и Куперовском [60, 61] каналах.

Решение уравнения $\mathcal{C}^{-1}f = V$ относительно f имеет вид:

$$f_{np}(\epsilon_1, \epsilon_2) = C_n(2\epsilon) \int V_{\epsilon_1, \epsilon_2}(\mathbf{r}') \psi_{np}^*(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2.43)$$

где

$$V_{\epsilon_1, \epsilon_2}(\mathbf{r}) = 2i [\Delta_{cl}(\mathbf{r}, \omega) + h_e(\mathbf{r}, \epsilon + \omega/2) \Delta_q(\mathbf{r}, \omega)] \quad (2.44)$$

с сокращённым обозначением $\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$ и $\omega = \epsilon_1 - \epsilon_2$. Похожие уравнения имеют место для f^* , \bar{f} и \bar{f}^* .

После того, как вычислены \hat{g}^R и \hat{g}^A , можно найти действие Гинзбурга-Ландау S_{GL} . Как следует из уравнений 2.16 и 2.18, достаточно знать $\hat{g}^{R(A)}$ в первом порядке по Δ для того чтобы определить S_{GL} в квадратичном приближении. Запишем искомое действие GL в таком виде:

$$S_{GL}[\vec{\Delta}] = \int \text{tr} \left(2\nu \vec{\Delta}^+(-\omega, \mathbf{r}) \mathcal{L}^{-1}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \vec{\Delta}(\omega, \mathbf{r}') \right), \quad (2.45)$$

где

$$\mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_{12}^{-1} \\ \mathcal{L}_{21}^{-1} & \mathcal{L}_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Аргументы $(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ функций \mathcal{L}^{-1} опускаются, когда это не может привести к недоразумению.

Прямолинейное вычисление из уравнения (2.16) дает:

$$\mathcal{L}_{21}^{-1} = \sum_{np} \psi_{np}(\mathbf{r}) \psi_{np}^*(\mathbf{r}') \left[\int \frac{\mathcal{H}_{\epsilon - \omega/2 + e\phi(\mathbf{r})} d\epsilon}{2\epsilon + i(\epsilon_n + \tau_\phi^{-1})} - \frac{1}{\lambda} \right]. \quad (2.47)$$

Остальные элементы \mathcal{L}^{-1} могут быть найдены при помощи тождеств $\mathcal{L}_{12}^{-1} = (\mathcal{L}_{21}^{-1})^+$ и

$$\mathcal{L}_{22}^{-1} = \mathcal{B}(\omega - e\phi(\mathbf{r}) - e\phi(\mathbf{r}')) [\mathcal{L}_{21}^{-1} - \mathcal{L}_{12}^{-1}], \quad (2.48)$$

где бозонная функция распределения определена в соответствии с

$$\mathcal{B}(\omega) = \coth(\omega/2T). \quad (2.49)$$

Видно, что компоненты матрицы \mathcal{L}^{-1} не являются независимыми. Как и компоненты \mathcal{L} , они связаны обобщённой флуктуационно-диссипационной теоремой, отвечающей уравнению (2.48), справедливому в квазиравновесном состоянии. Таким образом, явно следует вычислить только \mathcal{L}_{21}^{-1} . Интегрирование по электронной энергии ϵ в уравнении (2.47) выполняется легко и даёт:

$$\mathcal{L}_{21}^{-1} = \sum_{np} \psi_{np}(\mathbf{r}) \psi_{np}^*(\mathbf{r}') \mathcal{E}_n(\omega - 2e\phi(\mathbf{r})), \quad (2.50)$$

где

$$\mathcal{E}_n(\omega) = \ln \frac{T_c}{T} + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi^R(n, \omega) \quad (2.51)$$

и

$$\psi^{R(A)}(n, \omega) = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_n + \tau_\phi^{-1} \mp i\omega}{4\pi T}\right). \quad (2.52)$$

Температура перехода определена стандартным образом $T_c = \frac{2e\gamma\omega_D}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$, где ω_D - Дебаевская частота, а $\gamma \approx 0.57$ - постоянная Эйлера. Символ ψ обозначает Дигамма-функцию [62]. При выводе асимптотических выражений, мы будем использовать следующие свойства этой функции: $\psi'(1/2) = \pi^2/2$ и $\psi(x) \approx \ln x$ для $x \gg 1$.

Среднеполевая линия сверхпроводящего перехода определяется уравнением $\mathcal{E}_{n=0}(\omega = 0) = 0$. В отсутствие дефазировки $\tau_\phi = \infty$ верхнее критическое поле даётся выражением

$$B_c(T = 0) = \frac{\pi T_c}{2\gamma D}. \quad (2.53)$$

Обсудим вкратце влияние эффекта дефазировки на линию перехода. Так как флуктуационный пропагатор зависит от частоты дефазировки, температура

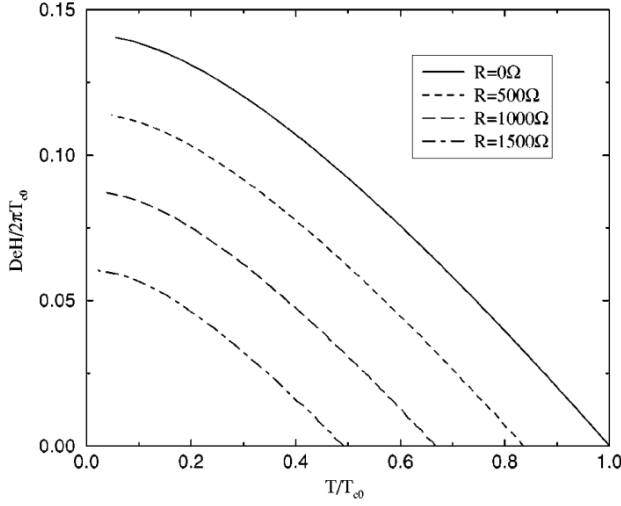


Рис. 2.3: Влияние дефазировки и взаимодействия в Кулоновском канале на линию перехода в сверхпроводящее состояние, рисунок из работы [63].

перехода сдвигается конечным значением τ_ϕ . Более того, так как τ_ϕ зависит как от магнитного поля, так и от температуры, присутствие τ_ϕ во флуктуационном пропагаторе, изменяет всю линию перехода. Изучение этого эффекта вместе с учётом подавления сверхпроводимости Кулоновским взаимодействием теоретически было проделано в работе [63]. Было показано, что учёт этих эффектов почти не меняет формы линии перехода, схожим образом подавляя критическую температуру и критическое магнитное поле, см. Рис. 2.3. С экспериментальной точки зрения этот эффект обсуждался, например, при анализе экспериментальных данных по магнитосопротивлению тонких сверхпроводящих плёнок оксида индия InO [64].

Как видно из правой части уравнения (2.50), \mathcal{L}_{21}^{-1} не является трансляционно инвариантной величиной. Однако, калибровочный множитель можно выписать явно, написав это выражение в следующем виде:

$$\mathcal{L}_{21}^{-1}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-iS_g(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')} \bar{\mathcal{L}}_{21}^{-1}(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.54)$$

где S_g определено как

$$S_g(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = e(\phi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}'))t - e(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.55)$$

и $\bar{\mathcal{L}}_{21}^{-1}$ уже является калибровочно (и, следовательно, трансляционно) инвариантным. Несмотря на это, оказывается удобным работать с оператором \mathcal{L}^{-1} в исходном виде.

Для того, чтобы найти корреляционные функции, следует обратить оператор \mathcal{L}^{-1} , даваемый уравнением (2.46). Это приводит к следующему результату:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^K & \mathcal{L}^R \\ \mathcal{L}^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

где

$$\mathcal{L}^R = (\mathcal{L}_{21}^{-1})^{-1}, \quad \mathcal{L}^A = (\mathcal{L}_{12}^{-1})^{-1}, \quad \mathcal{L}^K = -\mathcal{L}^R \mathcal{L}_{22}^{-1} \mathcal{L}^A. \quad (2.57)$$

Корреляционные функции параметра порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{cl}(\omega) \Delta_c^*(-\omega) \rangle &= \frac{i}{2\nu} \mathcal{L}^K, \\ \langle \Delta_{cl}(\omega) \Delta_q^*(-\omega) \rangle &= \frac{i}{2\nu} \mathcal{L}^R, \\ \langle \Delta_q(\omega) \Delta_{cl}^*(-\omega) \rangle &= \frac{i}{2\nu} \mathcal{L}^A, \\ \langle \Delta_q(\omega) \Delta_q^*(-\omega) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В равновесии, $\mathcal{L}_{E \rightarrow 0}^{R(A)}(\omega) \equiv L^{R(A)}(\omega)$, диагонально в базисе уровней Ландау, и явным образом может быть записано так:

$$L_n^R(\omega) = \mathcal{E}_n^{-1}(\omega). \quad (2.59)$$

Для Келдышевского пропагатора, в соответствии с уравнением (2.57):

$$\mathcal{L}_{E \rightarrow 0}^K(\omega) = \mathcal{B}(\omega) (L^R(\omega) - L^A(\omega)) \equiv L^K(\omega). \quad (2.60)$$

Тогда как мы уже пренебрегли эффектами нагрева, вызванными электрическим полем, другие нелинейные эффекты еще могут быть описаны удержанными членами. К примеру, можно изучать распад флуктуационных Куперовских пар, вызванный ускорением спаренных электронов электрическим полем. Такой эффект уже рассматривался ранее в рамках феноменологической теории [65, 66, 67, 68] (с учётом только процессов типа АЛ). При

$T \sim T_c$ этот эффект становится существенным в электрических полях порядка $E \sim T_c/e\xi_{GL}$, которые могут оказаться довольно малы в связи с расходимостью корреляционной длины ξ_{GL} на переходе.

В дальнейших вычислениях мы пренебрегаем всеми нелинейными эффектами. В режиме линейного отклика следует разложить пропагаторы до первого порядка по электрическому полю. Что касается зависимости \mathcal{L} от пространственных координат, мы рассматриваем эту величину как оператор в пространстве уровней Ландау. Тоже самое удобно иметь в виду касательно оператора положения центра масс \mathbf{r} . Вообще говоря, эти операторы не коммутируют между собой, что учтено во всех уравнениях, выписанных ниже.

Начнём с линеаризации \mathcal{L}_{21}^{-1} , интересуясь поправкой первого порядка к соответствующему равновесному значению. Во всех уравнениях ниже, мы не указываем явно частотного аргумента, имея в виду, что задача стационарна и все возникающие функции имеют один и тот же частотный аргумент ω .

Таким образом, в первом порядке по электрическому полю, получим

$$\mathcal{L}_{21}^{-1} = (1 + 2e\mathbf{E}\mathbf{r}\partial_\omega)\mathcal{E}. \quad (2.61)$$

Для \mathcal{L}^R это дает:

$$\mathcal{L}^R = L^R + \delta L^R, \quad (2.62)$$

$$\delta L^R = -2e\mathbf{E}L^R\mathbf{r}\partial_\omega\mathcal{E}L^R, \quad (2.63)$$

а \mathcal{L}^A получается эрмитовым сопряжением.

Перейдем к вычислению \mathcal{L}^K . Для того, чтобы найти эту величину, нужно знать \mathcal{L}_{22}^{-1} , согласно уравнению (2.48):

$$\mathcal{L}_{22}^{-1} = \mathcal{B}(\mathcal{L}_{21}^{-1} - \mathcal{L}_{12}^{-1}) + e\mathbf{E}\partial_\omega\mathcal{B}\{(\mathcal{E} - \mathcal{E}^*), \mathbf{r}\}, \quad (2.64)$$

где фигурные скобки означают антикоммутатор. Подставляя это выражение в Eq. (2.57), получим:

$$\mathcal{L}^K = L^K + \delta L^K, \quad (2.65)$$

где

$$\delta L^K = \mathcal{B} (\delta L^R - \delta L^A) - e \mathbf{E} \partial_\omega \mathcal{B} L^R \{(\mathcal{E} - \mathcal{E}^*), \mathbf{r}\} L^A. \quad (2.66)$$

Таким образом, корреляционные функции, задаваемые уравнениями (2.58), известны и можно перейти к вычислению электрического тока. Подведём итог этой главы, перечислив основные элементы, необходимые для вычисления флуктуационной проводимости. Решив уравнение Узаделя, что сводится к Ур. (2.35), электрический ток можно вычислить согласно (3). Так как Гриновские функции зависят от параметра порядка, формула (3) подразумевает усреднение с действием Гинзбурга-Ландау. Это действие само может быть найдено из функций Грина согласно (2.16) и (2.18). Как мы уже аргументировали, для наших целей достаточно использовать параметризацию \hat{g} даваемую уравнением (2.19) где $\hat{g}^{R(A)}$ определены в уравнениях (2.33), (2.34), а функция распределения \hat{h} указана в (2.31).

2.5 Эффект Холла и сверхпроводящие флуктуации

Оказывается, что в отличие от эффекта Нернста [69], для эффекта Холла оказывается существенной электрон-дырочная асимметрия. Для того, чтобы получить конечный ответ для Холловской проводимости, оказывается необходимым учесть эту асимметрию в пропагаторе [50]

$$L_{R(A)}^{-1}(\omega) \rightarrow L_{R(A)}^{-1}(\omega) - \varsigma \omega. \quad (2.67)$$

В результате дополнительного члена, пропорционального ς , сверхпроводящие пропагаторы теряют электрон/дырочную симметрию, то есть, соотношение $L^A(-\omega) = L^R(\omega)$ перестаёт выполняться. В рамках теории БКШ, параметр асимметрии ς может быть связан с зависимостью плотности состояний вблизи уровня Ферми от энергии: $\varsigma = -\frac{1}{2\lambda} \frac{d \ln \nu}{d\mu}$ или, в соответствии с работой [50], с изменением критической температуры T_c при варьировании химического потенциала: $\varsigma = -\frac{1}{2} \frac{d \ln T_c}{d\mu}$. В простейшей модели трёхмерных

электронов с квадратичным спектром, можно написать $\nu(\epsilon) \approx \nu_0(1 + \epsilon/2\epsilon_F)$, так что $\varsigma = -1/(4\epsilon_F\lambda)$.

В излагаемом вычислении Холловской проводимости, мы будем работать в рамках квазиклассического метода. При этом мы используем пропагаторы, выписанные в Ур. (2.67). Такой подход является самосогласованным и позволяет получить все вклады в поперечный ток, пропорциональные параметру $1/\lambda$. Отметим, что в таком приближении можно получить только те вклады в $\delta\sigma_{\perp}$, которые отвечают повороту сверхтока. Мы обозначаем их как $\delta\sigma_{\perp}^{(sc)}$. В принципе, существуют и другие вклады, которые отвечают повороту магнитным полем траектории квазичастицы. Эти вклады отсутствуют в приближении, которого мы придерживаемся. Эффекты, отсутствующие в окончательном результате (2.92), включают вклад, связанный с аномальным процессом Маки-Томпсона, который обсуждался Фукуямой и соавторам в работе [48], и вкладом $\delta\sigma_{\perp}^{(dos)}$, недавно открытым диаграммным методом в работе [70]. Последний представляет собой влияние подавления плотности состояний квазичастиц за счёт Куперовского спаривания на эффект Холла. Эти два вклада простым образом связаны с соответствующими поправками к продольной проводимости (эти простые соотношения универсальны - то есть, имеют место при произвольных температурах и магнитных полях):

$$\delta\sigma_{\perp}^{(an)} = -2\omega_c\tau\delta\sigma_{\parallel}^{(an)} \quad (2.68)$$

$$\delta\sigma_{\perp}^{(dos)} = -\frac{\omega_c\tau}{2}\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)}. \quad (2.69)$$

Заметим, что $\delta\sigma_{\perp}^{(an)}$ и $\delta\sigma_{\parallel}^{(an)}$ сокращают друг друга в выражении для Холловского сопротивления $\rho_{xy} = -\sigma_{xy}/(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2) \approx -\sigma_{xy}/\sigma_{xx}^2$. Поправка типа плотности состояний, напротив, дает конечный вклад в ρ_{xy} .

Итак, упомянутые вклады параметрически отличаются от вкладов, возникающих благодаря повороту сверхтока: для $\lambda \ll 1$ вклады, возникающие из $\delta\sigma_{\perp}^{(sc)}$ параметрически больше, чем те, которые возникают из $\delta\sigma_{\perp}^{(dos)}$ и $\delta\sigma_{\perp}^{(an)}$, поэтому их можно рассматривать отдельно.

2.6 Вычисление поправок к тензору электрической проводимости

Перед тем, как приняться за флуктуационные поправки, покажем, как получить обычную Друдевскую проводимость в рассматриваемом подходе. Решения уравнения Узаделя в отсутствие параметра порядка имеют вид: $\hat{g}^R = -\hat{g}^A = \hat{\tau}_3$ а функция распределения даётся выражением (2.31). Таким образом, в соответствии с Ур. (3), электрический ток равен:

$$\mathbf{j}^{(n)} = e\pi\nu D \text{tr} \hat{\tau}_3 \nabla \hat{h} = 2\nu e^2 D \mathbf{E}. \quad (2.70)$$

Это приводит к формуле Друде $\sigma_D = 2\nu e^2 D$.

Теперь перейдем к вычислению флуктуационных поправок. Начиная с выражения (3), подставим для \hat{g} параметризацию (2.19), что даёт следующие вклады в электрический ток:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(n)} + \mathbf{j}^{(dos)} + \mathbf{j}^{(an)} + \mathbf{j}^{(sc)}. \quad (2.71)$$

Здесь все члены, кроме $\mathbf{j}^{(n)}$, зависят от реализации сверхпроводящего параметра порядка Δ и должны быть усреднены с корреляционными функциями, данными в уравнениях (2.58). Флуктуационные вклады могут быть записаны в следующем виде (производная берется по энергетическому аргументу):

$$\mathbf{j}^{(dos)} = 2\pi e^2 D \mathbf{E} \int \mathcal{H}'(\epsilon) \delta\nu(\epsilon) (d\epsilon), \quad (2.72)$$

$$\mathbf{j}^{(an)} = 2\pi e^2 D \mathbf{E} \int \mathcal{H}'(\epsilon) \vartheta(\epsilon) (d\epsilon), \quad (2.73)$$

и

$$\mathbf{j}^{(sc)} = 2\pi e D \int \mathcal{H}(\epsilon) \mathbf{j}^{(s)}(\epsilon) (d\epsilon). \quad (2.74)$$

Введённые здесь величины определены следующим образом:

$$\delta\nu(\epsilon) = -\frac{\nu}{8} \langle f \cdot f^* + f^* \cdot f + (f \leftrightarrow \bar{f}) \rangle_{\epsilon, \epsilon}, \quad (2.75)$$

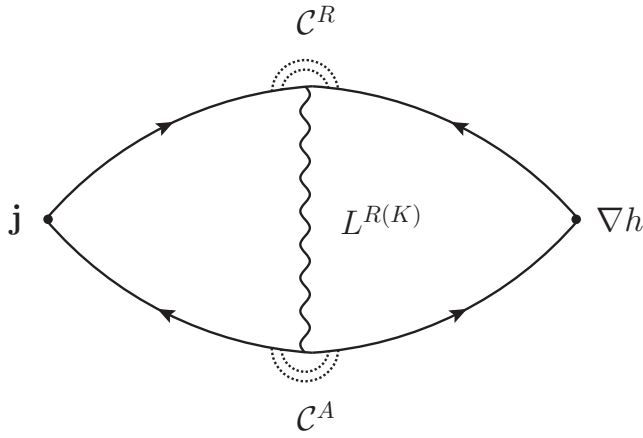


Рис. 2.4: Диаграмма, соответствующая аномальному процессу Маки-Томпсона.

$$\vartheta(\epsilon) = -\frac{\nu}{4} \langle \bar{f} \cdot f^* + \bar{f}^* \cdot f \rangle_{\epsilon, \epsilon}, \quad (2.76)$$

и

$$j_\alpha^{(s)}(\epsilon) = \frac{\nu}{8} \left\langle f \cdot \hat{\nabla}_\alpha f^* - \hat{\nabla}_\alpha f \cdot f^* - (f \leftrightarrow \bar{f}) - (f \leftrightarrow f^*) \right\rangle_{\epsilon, \epsilon}. \quad (2.77)$$

Такое разделение имеет ясный физический смысл. (i) Функция $\delta\nu(\epsilon)$ описывает поправку к электронной плотности состояний, см. $\delta\nu(\epsilon)$ в уравнении (2.78) ниже. (ii) Величина $\vartheta(\epsilon)$ имеет особенную аналитическую структуру. По происхождению, она содержит свертку функций с разными аналитическими свойствами f^* и \bar{f} , что после усреднения приводит к появлению двух Куперонов с разной аналитической структурой, \mathcal{C}^R и \mathcal{C}^A , и мнимой части флуктуационного пропагатора, $\text{Im}L^R$. Такая особенная структура позволяет идентифицировать этот вклад с процессом, описываемым аномальной частью обычной диаграммы Маки-Томпсона. Это соображение проиллюстрировано на Рис. 2.4. (iii) Вклад $j_\alpha^{(s)}$ следует интерпретировать как флуктуационную плотность сверхтока. Он появляется в результате разложения по электрическому полю а) фермионной функции распределения h_e , входящей в величину V , определённую в уравнении (2.37), или б) корреляционной функции параметра порядка \mathcal{L} , см. уравнение (2.62) и (2.65). Первый вклад имеет чисто квантовую природу, а второй - как квантовую, так и классическую, причём эти вклады имеют разную значимость в разных областях фазовой диаграммы.

Заметим, что разделение (i) - (iii) отличается от обычной классификации, основанной на вычислении диаграмм в Мацубаровской технике. Основное различие связано с тем, что в обычном подходе вычисляется отклик на векторный потенциал, тогда как мы работаем в скалярной калибровке. Это приводит к тому, что, например, трехкуперонные диаграммы отсутствуют совсем. Их вклад, соответственно, перераспределяется по перечисленным выше членам некоторым нетривиальным образом. Подробный анализ почленного соответствия этих подходов был проделан недавно в дипломной работе Б. Тарасинского [71].

Из уравнений (2.72) и (2.73) ясно, что $\mathbf{j}^{(dos)}$ и $\mathbf{j}^{(an)}$ дают вклад только в продольный ток, тогда как $\mathbf{j}^{(sc)}$ дает вклад также и в поперечный (к электрическому полю) ток. Напомним, что в уравнении Узаделя, которое является исходной точкой нашего рассмотрения, сила Лоренца, действующая на квазичастицу (электрон/дырку), отсутствует. Более подробное обсуждение этого вопроса приводится в секции 2.5.

Для того, чтобы продвинуться в вычислении, подставим выражения для f , f^* , \bar{f} и \bar{f}^* в базисе уровней Ландау (см. уравнение (2.43)) в выписанные выше выражения и усредним по флуктуациям параметра порядка.

Величины $\delta\nu(\epsilon)$ и $\vartheta(\epsilon)$ - равновесные свойства системы и не зависят от электрического поля. Поэтому их вычисление является простой задачей. Начнём с поправки отвечающей перенормировке квазичастичной плотности состояний сверхпроводящими флуктуациями:

$$\delta\nu(\epsilon) = v \sum_n \text{Im} \int (d\omega) C_n^2(2\epsilon - \omega) [L_n^K(\omega) + L_n^R(\omega)\mathcal{H}(\epsilon - \omega)]. \quad (2.78)$$

Здесь

$$v = 1/2\pi l_B^2 \quad (2.79)$$

число состояний на единицу площади на данном уровне Ландау. Этот множитель присутствует при каждом суммировании по уровням Ландау. В

непрерывном пределе, соответствующем $B \rightarrow 0$, следует написать $v \sum_n \rightarrow \sum_q$ и приведённое выражение тождественно совпадает с уравнением (372) в обзоре Каменева и Левченко [26]. Заметим, что $\int \delta\nu(\epsilon) d\epsilon = 0$. Это связано с тем, что взаимодействие не меняет полного числа одночастичных состояний, просто перераспределяя их так, что их число в окрестности уровня Ферми уменьшается.

Перейдем к аномальному вкладу Маки-Томпсона. Легко видеть, что этот вклад связан исключительно с реальным физическим процессом и является полностью неупругим. Величина $\vartheta(\epsilon)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\vartheta(\epsilon) = v \sum_n \frac{\tau_{out,n}^{-1}(\epsilon)}{\epsilon_n + \tau_\phi^{-1}}, \quad (2.80)$$

где $\tau_{out,n}^{-1}$ - частичный (n) вклад во время рассеяния квазичастицы, возникающий из-за распада сверхпроводящей флуктуации с уровня Ландау n [58], так что:

$$\tau_{out,n}^{-1}(\epsilon) = 2 \int (d\omega) \operatorname{Re} C_n(2\epsilon - \omega) \operatorname{Im} L_n^R(\omega) [\mathcal{B}(\omega) + \mathcal{H}(\epsilon - \omega)]. \quad (2.81)$$

Обсуждаемая поправка исчезает при нулевой температуре. Это делает её существенно отличной от поправки плотности состояний, которая существует вплоть до нулевых температур. Знак соответствующего вклада в проводимость всегда положителен. Это связано с тем, что аномальный процесс Маки-Томпсона может быть проинтерпретирован как интерференционный эффект в синглетном Куперовском канале, усиленный рассеянием на флуктуирующем параметре порядка.

Наконец, перейдем к вычислению сверхтока $\mathbf{j}^{(s)}$. Это несколько более сложное вычисление, что связано с тем, что нужно учитывать неравновесные вклады во флуктуационный пропагатор. Начнём с выражения (2.77). Подставляя в него решение для f и усредняя по Δ получим:

$$j_{\alpha}^{(s)}(\epsilon) = \frac{1}{8}eE \sum_{mn} \int (d\omega) I_{\alpha,mn} A_{mn}(\omega, \epsilon). \quad (2.82)$$

Здесь $I_{\alpha,mn}$ дают результат интегрирования по центру орбиты уровня Ландау:

$$I_{\alpha,mn} = 2i \int (dp) \text{Im} \left(\psi_{mp}(\mathbf{r}) \hat{\nabla}_{\alpha} \psi_{np}^*(\mathbf{r}) \right) \langle np | x | mp \rangle \quad (2.83)$$

и $A_{mn} = \sum_k A_{mn}^{(k)}$ содержит несколько вкладов. Они возникают из различных способов разложить пропагаторы или бозонные/фермионные функции распределения по электрическому полю.

Следующий шаг состоит в том, чтобы вычислить интеграл (2.83): учитывая, что $\langle n, p | x | m, p \rangle = x_{nm} + pl_B^2 \delta_{nm}$, где x_{nm} - матричные элементы в базисе функций $\chi_n(x)$, получим:

$$I_x(m, n) = 2v x_{nm} \partial_{mn}, \quad (2.84)$$

$$I_y(m, n) = \frac{2i}{l_B^2} v (x_{nm} x_{mn} - \delta_{mn} (x^2)_{mn}). \quad (2.85)$$

Учитывая, также, что:

$$x_{mn} = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1}), \quad (2.86)$$

$$\partial_{mn} = -\frac{1}{\sqrt{2} l_B} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} - \sqrt{n} \delta_{m,n-1}), \quad (2.87)$$

получим результат, представленный в формулах (2.88), (2.89):

$$j_x^{(s)}(\epsilon) = \frac{eE_x}{8} v \sum_n \int (d\omega) (n+1) \{A_{n,n+1}(\omega, \epsilon)\}_-, \quad (2.88)$$

$$j_y^{(s)}(\epsilon) = \frac{eE_x}{8} v \sum_n \int (d\omega) i(n+1) \{A_{n,n+1}(\omega, \epsilon) - A_{n,n}(\omega, \epsilon)\}_+. \quad (2.89)$$

В этих уравнениях использовано обозначение $\{X\}_{\pm} = X \pm \tilde{X}$, где \tilde{X} получается из X заменой $n \leftrightarrow n+1$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы подставить полученные выражения для $\delta\nu(\epsilon)$, $\vartheta(\epsilon)$ и $j_\alpha^{(s)}(\epsilon)$ в формулы (2.72)-(2.74) и выполнить интегрирование по электронной энергии ϵ . Результаты этого интегрирования могут быть удобно записаны посредством введённой выше функции \mathcal{E}_n :

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)} = -2e^2 Dv \sum_n \int (d\omega) \left[\mathcal{B} \operatorname{Im} \frac{\mathcal{E}_n''}{\mathcal{E}_n} + \mathcal{B}' \frac{\operatorname{Im} \mathcal{E}_n \operatorname{Re} \mathcal{E}_n'}{|\mathcal{E}_n|^2} \right], \quad (2.90)$$

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(an)} = -4e^2 Dv \sum_n \int (d\omega) \mathcal{B}' \frac{\operatorname{Im}^2 \mathcal{E}_n}{|\mathcal{E}_n|^2} \frac{1}{\tau_\phi^{-1} + \epsilon_n}, \quad (2.91)$$

$$\delta\sigma_i^{(sc)} = -2e^2 D\Omega_c^{-1} v \sum_n \int (d\omega) (n+1) (\mathcal{B}u_i + \mathcal{B}'v_i), \quad (2.92)$$

где $i = \parallel, \perp$ отвечают продольной и поперечной проводимостям. Для продольной проводимости (\parallel), имеем:

$$u_{\parallel} = \operatorname{Re} [K_n K_n' L_n^R L_{n+1}^R], \quad (2.93)$$

$$v_{\parallel} = 2\operatorname{Re} K_n \operatorname{Im} [\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_{n+1}] \operatorname{Im} [L_n^R L_{n+1}^A] + \operatorname{Im} K_n \operatorname{Im} [L_{n+1}^R - L_n^R], \quad (2.94)$$

где $K_n(\omega) = \psi_{n+1}^R(\omega) - \psi_n^R(\omega)$.

Для поперечной проводимости (\perp) существенен знак носителей заряда. Мы везде предполагаем, что носители заряжены отрицательно, для противоположного случая знак Холловской проводимости должен быть обращен. Итак, для $e < 0$, результат имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{\perp} &= 2\operatorname{Im} [K_n L_n^R L_{n+1}^R (\mathcal{E}_n' + \mathcal{E}_{n+1}')] - 2\Omega_c \operatorname{Re} \left\{ (L_n^R)^2 \mathcal{E}_n' \psi_n^{R'} \right\}_+ - \\ &\quad - \operatorname{Im} [K_n' (L_{n+1}^R + L_n^R)] + \Omega_c \operatorname{Re} \left\{ \psi_n^{R''} L_n^R \right\}_+, \\ v_{\perp} &= -2\operatorname{Im} (\psi_n^R + \psi_{n+1}^R) \operatorname{Re} K_n \operatorname{Re} [L_n^R L_{n+1}^A] - 2\Omega_c \left\{ \operatorname{Im} \psi_n^R \operatorname{Im} \psi_n^{R'} L_n^R L_n^A \right\}_+ - \\ &\quad - \operatorname{Im} K_n \operatorname{Re} (L_{n+1}^R + L_n^R) + \Omega_c \operatorname{Re} \left\{ L_n^R \operatorname{Re} \psi_n^{R'} \right\}_+. \end{aligned}$$

Напомним, что в этих формулах использованы обозначения: (2.51), (2.59) для равновесного пропагатора и (2.49) для бозонной функции распределения.

Итак, мы получили выражения для поправок к проводимости за счёт взаимодействия в Куперовском канале в Гауссовом приближении. Уравнения (2.90)-(2.92) описывают вклад сверхпроводящих флуктуаций на всей области диаграммы (B, T) вне режима сильных флуктуаций. В следующей секции мы рассмотрим ряд предельных случаев.

2.7 Результаты для продольной проводимости

В конце предыдущей главы были выписаны общие ответы для флуктуационных поправок. В некоторых асимптотических областях фазовой диаграммы удаётся получить окончательные ответы, выполнив интегрирование по бозонным частотам и суммирование по уровням Ландау. Таким образом можно сравнить полученные результаты с уже известными. Точные формулы, также, можно изучать численно, что позволяет более полно понять поведение изучаемых поправок на всей фазовой диаграмме.

Мы обсудим следующие асимптотические области: окрестности классической (I) и квантовой (QCP) (II) точек перехода, область высоких температур в слабых магнитных полях (III) и область высоких магнитных полей и низких температур (IV). Соответствующие области указаны на фазовой диаграмме, изображённой на Рис. 2.5. Численный анализ полученных выражений позволяет указать линии, на которых происходит смена знака магнитосопротивления ($\partial_B \sigma = 0$). Также на фазовой диаграмме указана линия, на которой меняется характер температурной зависимости поправки $\partial_T \sigma = 0$.

2.7.1 Область Гинзбурга-Ландау (I)

В классической области наиболее существенны вклады $\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)}$ и $\delta\sigma_{\parallel}^{(an)}$. Так как вблизи перехода основной вклад приходит с малых бозонных частот и импульсов ($\omega, Dq^2 \lesssim T - T_c$), для того чтобы получить характер особенности вблизи перехода, следует разложить пропагатор по ω/T и ϵ_n/T :

$$\left[L_n^{R(A)}(\omega) \right]^{-1} \approx \frac{\pi}{8T} \left[-\tau_{GL}^{-1} - \epsilon_n \pm i\omega \right], \quad (2.95)$$

где

$$\tau_{GL} = \frac{\pi}{8T \ln T/T_c}. \quad (2.96)$$

Для простоты мы предполагаем, что $\tau_\phi \gg \tau_{GL}$ и будем пренебрегать τ_ϕ во флуктуационном пропагаторе. Подставляя выражения для $L_n^{R(A)}$ в уравнения (2.91) и (2.92), мы интегрируем по частоте (достаточно учесть только член, пропорциональный \mathcal{B}'), и выполняем суммирование по уровням Ландау. Это даёт следующий результат:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(an)} = \frac{e^2}{\pi} T \tau_{GL} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + s\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + s \frac{\tau_{GL}}{\tau_\phi}\right) \right] \quad (2.97)$$

и

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)} = \frac{2e^2}{\pi} (T \tau_{GL}) s \left[-1 - 2s\psi(s) + 2s\psi\left(\frac{1}{2} + s\right) \right], \quad (2.98)$$

где

$$s = (\Omega_c \tau_{GL})^{-1}. \quad (2.99)$$

Эти результаты находятся в полном согласии с известными в литературе. В частности, поправка $\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)}$ была получена феноменологически Абрахамсом с соавторами [72]. Вклад Маки-Томпсона для конечных магнитных полей обсуждался в работе [73]. Заметим, что параметр s делит область (I) на две части с различным поведением. Предел нулевого поля соответствует большим значениям этого параметра $s \gg 1$:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(an)} = \frac{e^2}{\pi} T \tau_{GL} \ln(\tau_\phi/\tau_{GL}), \quad \delta\sigma_{\parallel}^{(sc)} = \frac{e^2}{2\pi} T \tau_{GL}. \quad (2.100)$$

В отсутствие магнитного поля, важность аномального вклада Маки-Томпсона $\delta\sigma_{\parallel}^{(an)}$ по сравнению с $\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)}$ определяется соотношением τ_ϕ/τ_{GL} .

Действительно, в отсутствие дефазировки $\tau_\phi \rightarrow \infty$, этот вклад расходится и становится сравним с вкладом Асламазова и Ларкина при $\tau_\phi \sim \tau_{GL}$. С дальнейшим уменьшением их соотношения относительная важность вклада Маки и Томпсона спадает.

Для полноты, обсудим также поправку плотности состояний в области (I). Вблизи критической температуры, поправка $\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)}$ слабо (всего лишь логарифмически) сингулярна. Причина состоит в том, что взаимодействие сохраняет полную плотность состояний, а интегрирование с \mathcal{H}' в уравнении (2.72) происходит в относительно широком интервале энергий: $\epsilon \lesssim T \approx T_c$. В нулевом магнитном поле это приводит к:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)} = -\frac{7\zeta(3)e^2}{\pi^4} \ln T\tau_{GL}. \quad (2.101)$$

Вклад такого же вида возникает как побочный в процессе Маки и Томпсона, с численным коэффициентом -14 вместо -7 . Поучительно выполнить сравнение с известным в литературе результатом для этой области. Для этого следует сложить все логарифмически сингулярные члены, $\delta\sigma = c\frac{\zeta(3)}{\pi^4} \ln T\tau_{GL}$. В диаграммном вычислении в работе [74] для вклада всех диаграмм с горизонтальной линией, изображённых на Рис. 2.1, численный коэффициент перед логарифмом оказывается равен $c = -14$. Кроме этого, регулярный (Рис. 2.2) и аномальный (Рис. 2.4) вклады диаграммы Маки и Томпсона, и диаграмма Асламазова и Ларкина (Рис. 2.8) дают такие же вклады с коэффициентами $c = -7$, $c = -14$ и $c = 14$, соответственно. Таким образом, видно, что после суммирования всех логарифмических вкладов такого рода, результаты обоих подходов совпадают и дают численный коэффициент $c_{tot} = -21$. Подчеркнём, что в соответствии с уравнением (2.72) именно вклад $\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)}$, а не сумму всех диаграмм с горизонтальной линией следует связывать с подавлением квазичастичной плотности состояний.

2.7.2 Область квантовой критической точки (II)

Вблизи линии перехода, для

$$h = (B - B_c(T))/B_c \ll 1, \quad (2.102)$$

сингулярный вклад в проводимость набирается только с нижнего уровня Ландау, $n = 0$. Кроме того, для малых температур в окрестности квантовой критической точки (QCP), когда

$$t = T/T_c \ll 1, \quad (2.103)$$

флуктуационный пропагатор можно упростить имея в виду свойства Дигамма-функции:

$$\mathcal{E}_n(\omega) = -h - \ln(2n + 1) - \ln\left(1 - \frac{i\omega}{\epsilon_n}\right). \quad (2.104)$$

В этой области влияние τ_ϕ на флуктуационный пропагатор сводится, в основном, к сдвигу критического магнитного поля. Мы будем предполагать, что этот сдвиг уже выполнен. Кроме этого, естественно пренебречь величиной τ_ϕ в Купероне, так как в этой окрестности Куперон не сингулярен и $1/\tau_\phi$ следует сравнивать с Ω_c . Подставляя выражение для $\mathcal{E}_n(\omega)$ в уравнения (2.90)-(2.92) и раскладывая пропагаторы по частоте ω/Ω_c , вклады каждого из трёх членов можно записать в следующем виде:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(i)} = \frac{e^2}{\pi^2} \left[\alpha^{(i)} I_\alpha(t, h) + \beta^{(i)} I_\beta(t, h) \right] \quad (2.105)$$

с численными коэффициентами

$$\alpha^{(dos)} = -1, \quad \alpha^{(an)} = 0, \quad \alpha^{(sc)} = \frac{1}{3}, \quad (2.106)$$

$$\beta^{(dos)} = -1, \quad \beta^{(an)} = 2, \quad \beta^{(sc)} = \frac{5}{3}. \quad (2.107)$$

Здесь

$$I_\alpha = \int_0^{\Omega_c} \frac{\omega \mathcal{B}(\omega) d\omega}{\omega^2 + (h\Omega_c/2)^2}, \quad I_\beta = - \int_0^\infty \frac{\omega^2 \mathcal{B}'(\omega) d\omega}{\omega^2 + (h\Omega_c/2)^2}.$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$I_\alpha(t, h) = \ln \frac{r}{h} - \frac{1}{2r} - \psi(r), \quad (2.108)$$

$$I_\beta(t, h) = r\psi'(r) - \frac{1}{2r} - 1, \quad (2.109)$$

где

$$r = \frac{1}{2\gamma} \frac{h}{t}. \quad (2.110)$$

Заметим, что складывая все члены, можно получить $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\beta = \frac{8}{3}$, и наш результат воспроизводит полученный в этом пределе Галицким и Ларкиным [47] ответ.

Область фазовой диаграммы вблизи QCP может быть дополнительно разделена на классическую и квантовую подобласти. Для этого оказывается важно соотношение между параметрами h и t . Вообще говоря, сверхпроводящие флуктуации дают вклад как либо классически доступные многочастичные моды либо как промежуточные состояния в теории возмущений по Куперовскому взаимодействию. В квантовой области $t \ll h$ числа заполнения нижних уровней Ландау коллективной моды малы, так что классический вклад становится пренебрежимо мал. Квантовый, тем не менее, выживает и является основным. При этом интересно извлечь поправку к квантовому пределу за счёт конечности температуры:

$$\delta\sigma_{\parallel} = \frac{e^2}{\pi^2} \left[-\frac{2}{3} \ln \frac{1}{h} + \frac{14\gamma^2}{9} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \right], \quad (t \ll h). \quad (2.111)$$

В классической области $t \gg h$, эти числа заполнения велики и поправка меняет свой характер. В итоге, она становится положительной:

$$\delta\sigma_{\parallel} = \frac{2e^2\gamma}{\pi^2} \frac{t}{h}, \quad (t \gg h). \quad (2.112)$$

2.7.3 Высокие температуры (III) и большие магнитные поля (IV)

В этих областях основной вклад набирается с высоких уровней Ландау. Это означает, что суммирование по уровням Ландау можно заменить интегри-

рованием. В то же время, следует учитывать полную зависимость флуктуационных пропагаторов от частоты (нельзя раскладываться по ω), так как основной вклад набирается с 'длинного' дважды логарифмического интегрирования.

Обсудим сперва область (III). Будем считать, что есть большой параметр $\ln(T/T_c) \gg 1$. Начнём с анализа вклада, который оказывается лидирующим, $\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)}$. Фактически, эта поправка расходится в диффузном приближении и интегрирование должно быть остановлено на $\omega, \epsilon \sim \tau^{-1}$, когда это приближение перестаёт работать. В связи с этим, главным оказывается вклад, пропорциональный \mathcal{B} (а не \mathcal{B}'), так что можно записать:

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)} &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int \mathcal{B}(\omega) \operatorname{Im} [L^R(\omega) \psi^{R''}(\omega)] d\omega d\epsilon \\ &= -\frac{e^2}{4\pi^2} \operatorname{Im} \int \frac{\mathcal{B}(\omega) \partial_{\omega}^2 \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon - i\omega}{4\pi T}\right) d\omega d\epsilon}{\ln T/T_c + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon - i\omega}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}\tag{2.113}$$

Этот интеграл логарифмически расходится. В итоге, получим:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{dos} = -\frac{e^2}{2\pi^2} \ln \frac{\ln 1/T_c \tau}{\ln T/T_c}.\tag{2.114}$$

Полученный результат похож на поправку Альтшулера и Аронова, но с зависящей от масштаба константой взаимодействия. Он был впервые получен в работе [75]. При высоких температурах ($\ln T/T_c \gg 1$), этот вклад оказывается доминирующим. Для отталкивательного взаимодействия в Куперовском канале, эта поправка было проанализирована Фукуямой [76] с результатом $\frac{e^2}{2\pi^2} \ln \ln \frac{1}{T\tau}$.

Перейдем к $\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)}$. Вклад, пропорциональный \mathcal{B}' , опять пренебрежимо мал, $\mathcal{O}(\ln^{-2}(T/T_c))$. Другой вклад, пропорциональный \mathcal{B} , более важен:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)} = e^2 \int_0^{\infty} \frac{izdz}{256\pi^5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy \coth \frac{y}{2} \psi'(\epsilon) \psi''(\epsilon)}{[\ln T/T_c + \psi(\epsilon)]^2}\tag{2.115}$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{z-iy}{4\pi}$. Вычислим сначала интеграл по y , пренебрегая y в знаменателе. Так как только $y \gtrsim 1$ даёт вклад в лидирующий член, можно подставить $\coth \frac{y}{2} \rightarrow \text{sign}$. Это приводит к

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)} = \frac{e^2}{64\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{z dz [\psi'(\frac{1}{2} + \frac{z}{4\pi})]^2}{[\ln T/T_c + \psi(\frac{1}{2} + \frac{z}{4\pi})]^2}. \quad (2.116)$$

Остающийся интеграл набирается на $1 \lesssim z$ и может быть вычислен:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(sc)} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{1}{\ln T/T_c}. \quad (2.117)$$

Для полноты заметим, что похожий член возникает как побочный вклад в поправку плотности состояний $\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)}$, но с другим численным коэффициентом, который оказывается равен $\frac{\ln 2 - 1}{2\pi^2}$. Таким образом, разные вклады типа $\mathcal{O}(\ln^{-1} T/T_c)$ не сокращают друг друга.

Наконец, перейдем к $\delta\sigma_{\parallel}^{(an)}$. В непрерывном пределе, $v \sum_n \rightarrow \sum_q$, уравнение (2.91) воспроизводит известный результат [77]. При $\ln T/T_c \gg 1$, это выражение может быть дополнительно упрощено:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(an)} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\ln^2 T/T_c} \int_0^{\infty} \frac{M(z) dz}{z + 1/(T\tau_{\phi})}, \quad (2.118)$$

где

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy [\psi(\frac{1}{2} + \frac{z-iy}{4\pi}) - \psi(\frac{1}{2} + \frac{z+iy}{4\pi})]^2}{\sinh^2(y/2)}. \quad (2.119)$$

Хотя формально этот член $\mathcal{O}(\ln^{-2} T/T_c)$, он всё ещё может быть существенен в связи с его логарифмической расходимостью на малых импульсах, заметной в уравнении (2.118). С логарифмической точностью, можно вычислить его следующим образом:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(an)} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\ln^2 T/T_c} \int_0^1 \frac{M(0) dz}{z + 1/(T\tau_{\phi})}. \quad (2.120)$$

В результате, получим:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(an)} = \frac{e^2}{12} \frac{\ln T \tau_{\phi}}{\ln^2 T/T_c}. \quad (2.121)$$

Следует помнить, что τ_{ϕ} само зависит от T . В этой области, вклад аномального процесса Маки и Томпсона рассматривался несколькими авторами, которые получили одну и ту же функциональную зависимость, но с разными численными коэффициентами [75, 78, 58]. Мы полагаем, что эти коэффициенты различаются в связи с различными неточностями, допущенными при вычислении интеграла для $M(0)$.

В больших магнитных полях (область (IV)), положение во многом аналогично положению в области (III). Основное различие состоит в том, что аномальный процесс Маки и Томпсона не даёт никакого вклада, так как подавлен низкими температурами. Основные поправки возникают из $\delta\sigma^{(sc)}$ и $\delta\sigma^{(dos)}$, причём лидируют те вклады, которые пропорциональны $\mathcal{B} \approx \text{sign } \omega$. Чтобы продолжить, заметим, что равновесный пропагатор при нулевой температуре имеет такой вид:

$$L^{R(A)} = \ln^{-1} \left(\frac{\Omega_c/2h}{\epsilon_n \mp i\omega} \right), \quad (T \rightarrow 0). \quad (2.122)$$

После интегрирования по частоте, получаем для $\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)}$ следующий результат:

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)} = \frac{e^2}{\pi^2} h \sum_n \text{li} \left(\frac{1}{h(2n+1)} \right), \quad (2.123)$$

где функция li даётся логарифмическим интегралом $\text{li}(z) = \int_0^z dt/\ln t$. Последняя сумма логарифмически расходится на верхнем пределе и должна быть обрезана на границе применимости диффузного приближения, то есть при $n \sim N_{max} \gg 1$, где $N_{max} = \frac{1}{hT_c\tau}$. В этих условиях, она определяется большими n и равна

$$\delta\sigma_{\parallel}^{(dos)} = -\frac{e^2}{2\pi^2} \ln \frac{\ln 1/\tau T_c}{\ln B/B_c}. \quad (2.124)$$

Эта формула завершает обсуждение областей (I-IV) фазовой диаграммы. Ссылки на соответствующие области даны на Рис. 2.5.

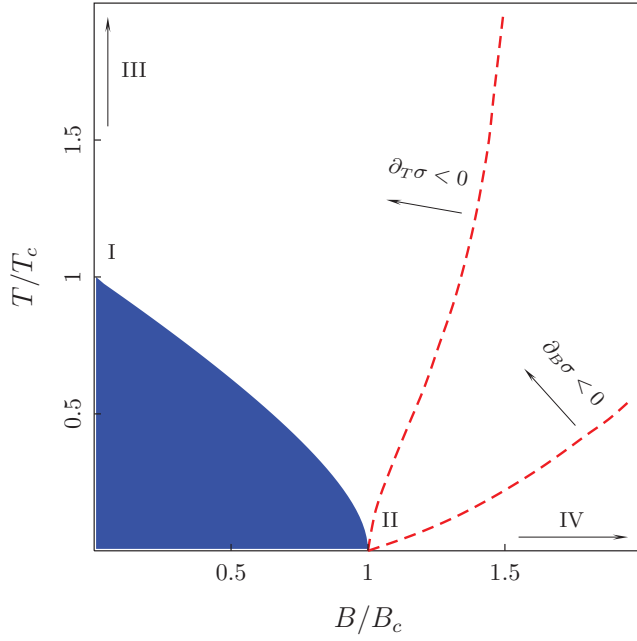


Рис. 2.5: Фазовая диаграмма для поправки к продольной проводимости $\delta\sigma_{xx}$. Отмечены главные асимптотические области.

Полученные результаты отличаются от результатов недавней работы [78]. Остановимся на различии в поведении сопротивления как функции температуры в полях, больших критического $B > B_c$ и малых температурах $T \ll T_c$. Утверждение авторов работы [78] состоит в том, что при малых температурах $T \ll T_c$ сопротивление сперва растёт с ростом T , а потом меняет ход при достижении $T/T_c \gtrsim (B - B_c)/B_c$. Из наших асимптотических результатов (2.111) и из результатов численного анализа, представленных на Рис. 2.5 и 2.6, следует, что положение противоположное. В заданном магнитном поле, сопротивление сперва падает с ростом температуры от нуля до достижения линии $\partial_T \sigma = 0$. После этого сопротивление начинает расти.

Остановимся подробнее на причинах расхождения. Одной из особенностей результата упомянутой работы является обращение диаграммы Асламазова и Ларкина в ноль при $T = 0$. В секции 2.10 мы приводим подробное вычисление этой диаграммы как отклика ток-ток с разложением флуктуационно пропагатора по электрическому полю. Мы показываем, что корректное вычисление приводит к тому результату, что эта диаграмма, помимо неупругого вклада, существенного в окрестности T_c и отвечающего классической картине переноса тока Куперовскими парами с конечным временем жизни, содержит также и упругий вклад, имеющий чисто квантовую природу.

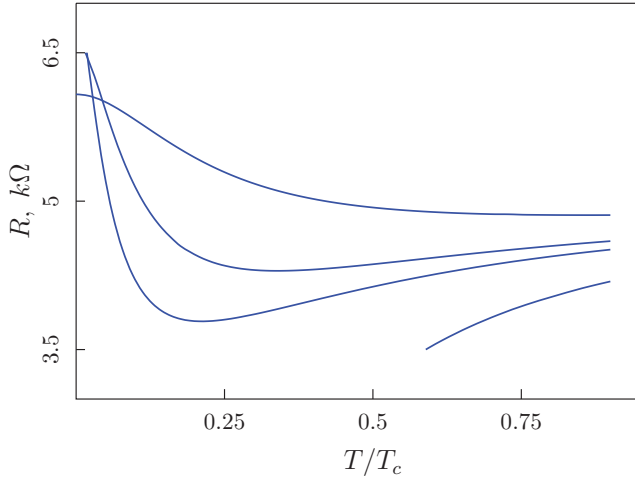


Рис. 2.6: Сопротивление как функция температуры для серии магнитных полей $B/B_c = 0.9, 1.05, 1.1, 1.3$. Параметры образца выбраны следующим образом: $R_D = 5k\Omega$ и $T_c\tau = 10^{-2}$.

2.8 Результаты для Холловской проводимости

В области (I) после разложения по кинетической энергии $\Omega_c(n + 1/2)/4\pi T$ и частоте Куперовской пары $\omega/4\pi T$ поправка $\delta\sigma_{\perp}^{(sc)}$ принимает вид:

$$\delta\sigma_{\perp}^{(sc)} = -\frac{16e^2\zeta\Omega_c(T\tau_{GL})^2}{\pi^2}f(s), \quad (2.125)$$

где

$$f(s) = s^2 \left[1 + \psi\left(\frac{1}{2} + s\right) - \psi(1 + s) - s\psi'(1 + s) \right].$$

В этой области эффект Холла можно рассматривать феноменологически: выражение (2.125) было получено еще Ароновым и Рапопортом [49] (с другим коэффициентом, который позже был исправлен Ароновым с соавторами в работе [50]) где вычисление проводилось в рамках временной теории Гинзбурга-Ландау.

Для $s \gg 1$, когда квантованием пространственного движения коллективной моды можно пренебречь, выражение (2.125) принимает вид [48]:

$$\delta\sigma_{\perp}^{(sc)} = \frac{e^2\zeta\Omega_c}{96} \left(\frac{T}{T - T_c} \right)^2. \quad (2.126)$$

Область применимости этого результата (2.125) довольно невелика. Уже при $T \gtrsim 1.01T_c$ не следует раскладывать выражение для $\delta\sigma_{\perp}^{(sc)}$ по $\Omega_c(n + 1/2)/4\pi T$ для получения аккуратного результата. Более точная формула имеет вид:

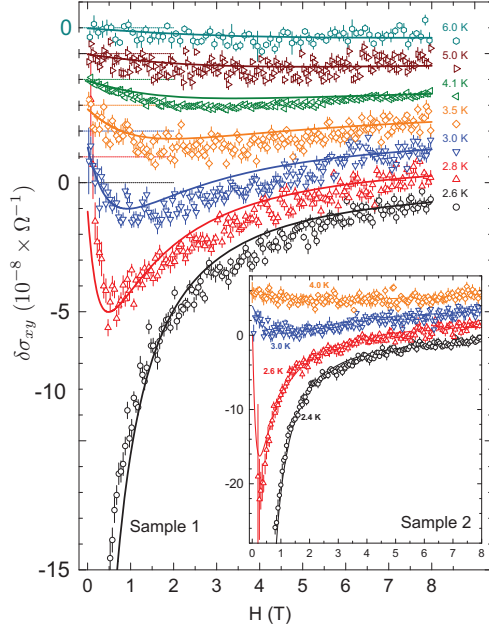


Рис. 2.7: Результаты эксперимента по измерению Холловской проводимости, из работы [79].

$$\delta\sigma_{\perp}^{(sc)} = \frac{2e^2\zeta T}{\pi} \sum_n (n+1) \frac{[L_{n+1}^R(0) - L_n^R(0)]^3}{[L_{n+1}^R(0) + L_n^R(0)]^2}. \quad (2.127)$$

В области (II), можно ограничиться нижним уровнем Ландау и последовать тем же путём, что и при вычислении продольной проводимости. Для квантового режима получается такой результат:

$$\delta\sigma_{\perp}^{(sc)} = -\frac{e^2\zeta\Omega_c}{3\pi^2} \ln \frac{1}{h}, \quad (2.128)$$

а для классического:

$$\delta\sigma_{\perp}^{(sc)} = \frac{2e^2\zeta T}{\pi h}. \quad (2.129)$$

Заметим, что в области (II) вклады $\delta\sigma_{\perp}^{(dos)}$ и $\delta\sigma_{\perp}^{(an)}$ демонстрируют то же сингулярное поведение, что и $\delta\sigma_{\perp}^{(sc)}$. Мы не выписываем соответствующие выражения, так как они следуют непосредственно из уравнений (2.68) и (2.69), вместе с уравнением (2.105).

2.9 Сравнение с предыдущими работами

Классификация флуктуационных поправок, обсуждаемая в настоящей работе, существенно отличается от общепринятой, основанной на вычислении отклика ток-ток. Следовательно, сравнение должно проводиться на уровне окончательных результатов. В дополнение к уже процитированным выше работам, упомянем работы ещё одной группы авторов [80, 81]. Можно убедиться прямым сравнением (которое требует некоторых преобразований, в том числе, интегрирования по частям) [71] что в нулевом магнитном поле общие формулы для продольной проводимости, выписанные в (2.90), (2.91) и (2.92) точно воспроизводят диаграммные результаты упомянутых работ Лопатина и соавторов.

Эффект Холла изучен теоретически гораздо менее подробно, и все известные результаты касаются только окрестности T_c в слабых магнитных полях. Классические результаты в этой области воспроизведены нами во всех подробностях, при этом мы получили обобщённое описание, справедливое и в режиме квантовых флуктуаций. Полученные результаты были применены для описания недавнего эксперимента [79]. На Рис. 2.7 мы приводим рисунок из этой работы, иллюстрирующий соотношение результатов эксперимента и формулы 2.127.

2.10 Вычисление диаграммы Асламазова и Ларкина в мнимом времени

В связи с тем, что в известной литературе существуют различные точки зрения на свойства диаграммы Асламазова и Ларкина, изображённой на рис. 2.8 при низких температурах, мы остановимся подробнее на вкладе этой диаграммы в общепринятой векторной калибровке. Отправной точкой является самое общее выражение, которое может быть 'считано' непосредственно с диаграммы 2.8. Так как магнитное поле квантует Куперовские пары: $\epsilon_n = \Omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$, соответствующее выражение должно быть написано сразу в

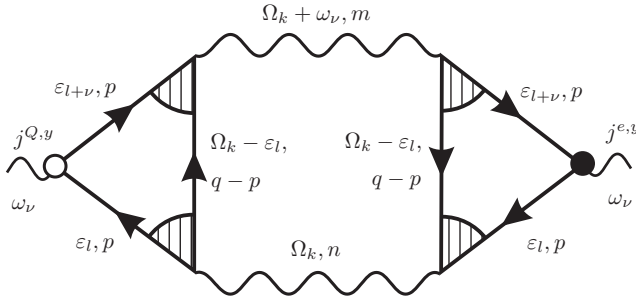


Рис. 2.8: Диаграмма Асламазова и Ларкина, рисунок из работы [82].

базисе собственных функций уровней Ландау. Оно имеет вид:

$$Q_{AL}(\omega_\nu) = -\frac{4eH}{\pi c} T \sum_{\Omega_k} \sum_{mn} j_{mn} L_n(\Omega_k) j_{nm} L_m(\Omega_k + \omega_\nu) B_{mn}(\Omega_k, \omega_k), \quad (2.130)$$

где входящие в это выражение элементы обсуждаются ниже.

Равновесный пропагатор сверхпроводящей флуктуации имеет вид:

$$L_n(\Omega_k) = -\frac{1}{\ln \frac{T}{T_c} + \psi_n(i|\Omega_k|) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)},$$

где

$$\psi_n(\Omega) = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_n - i\Omega}{4\pi T}\right).$$

Отметим, что электронные блоки, одевающие токовые вершины на диаграмме Асламазова и Ларкина, идентичны. Это явление связано со свойством симметрии вершинного блока. Он даётся следующим выражением:

$$T_{mn}(\Omega, \omega) = 4\pi T e \nu D \sum_{\varepsilon} \lambda_n(\varepsilon + \omega, \Omega - \varepsilon) \lambda_m(\varepsilon, \Omega - \varepsilon),$$

где λ - Куперон:

$$\lambda_n(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\theta(-\epsilon_1 \epsilon_2)}{\Omega_n + |\epsilon_1 - \epsilon_2|}. \quad (2.131)$$

Можно видеть, что ($\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \omega$):

$$\begin{aligned} T_{nm}(\Omega + \omega, -\omega) &= 4\pi T e \nu D \sum_{\varepsilon} \lambda_m(\varepsilon - \omega, \Omega + \omega - \varepsilon) \lambda_n(\varepsilon, \Omega + \omega - \varepsilon) = \\ &= 4\pi T e \nu D \sum_{\tilde{\varepsilon}} \lambda_m(\tilde{\varepsilon}, \Omega - \tilde{\varepsilon}) \lambda_n(\tilde{\varepsilon} + \omega, \Omega - \tilde{\varepsilon}) = \\ &= T_{mn}(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

Это равенство приводит к тому, что произведение двух треугольных блоков собирается в квадрат:

$$B_{nm}(\Omega_k, \omega_\nu) = (eD)^2 \left[\frac{\psi_m(i\omega_\nu + i|\Omega_k|) - \psi_n(i|\Omega_k|)}{\omega_\nu + \epsilon_m - \epsilon_n} - \frac{\psi_n(i\omega_\nu + i|\Omega_{k+\nu}|) - \psi_m(i|\Omega_{k+\nu}|)}{\omega_\nu + \epsilon_n - \epsilon_m} \right]^2. \quad (2.132)$$

Последний элемент диаграммы, токовая вершина, имеет вид:

$$j_{nm} = i\sqrt{eH/c} (\sqrt{n}\delta_{n,m+1} - \sqrt{m}\delta_{m,n+1}). \quad (2.133)$$

Наконец, электрическая проводимость даётся стандартной формулой:

$$\sigma_{AL} = - \lim_{i\omega \rightarrow 0} \frac{Q_{AL}(\omega \rightarrow i\omega)}{i\omega}. \quad (2.134)$$

Следующим этапом вычисления является аналитическое продолжение. Подставляя матричные элементы оператора тока j_{mn} , можно получить:

$$Q_{AL}(\omega_\nu) = \frac{4(eH/c)^2}{\pi} \sum_{mn} (m\delta_{m,n+1} + n\delta_{n,m+1}) \chi_{nm}(\omega_\nu), \quad (2.135)$$

где

$$\chi_{nm}(\omega_\nu) = T \sum_{\Omega_k} B_{nm}(\Omega_k, \omega_\nu) L_m(\Omega_k + \omega_\nu) L_n(\Omega_k). \quad (2.136)$$

Стандартная процедура аналитического продолжения даёт:

$$\sum_{\Omega_k} f(\Omega_k) \rightarrow \frac{1}{4\pi iT} \int_{C_0} dz \coth \frac{z}{2T} f(z), \quad (2.137)$$

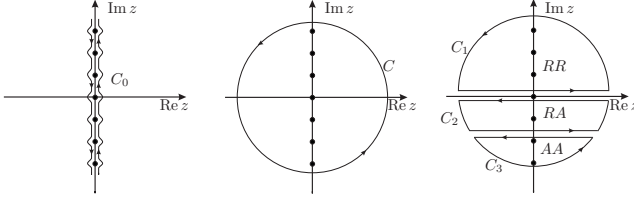
с последующей деформацией контура в соответствии с

$$\int_{C_0} \rightarrow \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}, \quad (2.138)$$

с изображёнными на Рис. 2.9 контурами интегрирования. После того, как проделана описанная процедура, мы приходим к четырём интегралам по действительной переменной ω вдоль разрезов, указанных там же. Результат можно собрать в одно уравнение:

$$\chi_{nm}(\omega_\nu) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}(\omega) \Xi_{nm}(\omega, \omega_\nu) d\omega, \quad (2.139)$$

Рис. 2.9: Контур интегрирования при аналитическом продолжении, рисунок из работы [82].



где

$$\begin{aligned} \Xi_{nm}(\omega, \omega_\nu) = & B_{nm}^{RR}(-i\omega) L_m^R(-i\omega + \omega_\nu) L_n^R(-i\omega) - B^{RA}(-i\omega) L_m^R(-i\omega + \omega_\nu) L_n^A(-i\omega) + \\ & + B_{nm}^{RA}(-i\omega - \omega_\nu) L_m^R(-i\omega) L_n^A(-i\omega - \omega_\nu) - B_{nm}^{AA}(-i\omega - \omega_\nu) L_m^A(-i\omega) L_n^A(-i\omega - \omega_\nu). \end{aligned}$$

Для удобства мы симметризовали полученное выражение по индексам уровня Ландау и впоследствии работаем с такой симметризованной версией.

Следующим шагом является вычисление величины

$$I_{mn}(\omega) = \partial_{\omega_\nu} \Xi_{nm}(\omega, \omega_\nu)|_{\omega_\nu \rightarrow 0} = I_{mn}^{(1)}(\omega) + I_{mn}^{(2)}(\omega). \quad (2.140)$$

В конце концов, результат принимает вид:

$$\sigma_{AL} = \frac{i\Omega_c^2}{4\pi} \sum_n (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}(\omega) (d\omega) \left[I^{(1)}(\omega) + I^{(2)}(\omega) \right]. \quad (2.141)$$

Здесь первый вклад в квадратных скобках появляется в результате разложения по внешней частоте пропагатора L , тогда как второй является результатом разложения вершинного блока B . Для того, чтобы записать эти вклады в компактной форме, удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \delta\epsilon &= \epsilon_{n+1} - \epsilon_n, \\ \delta\psi(\omega) &= \psi_{n+1}(\omega) - \psi_n(\omega), \\ A(\omega) &= \delta\psi^2(\omega), \quad B(\omega) = \delta\psi(\omega) \delta\psi(-\omega), \\ \Phi(\omega) &= L_{n+1}^R(\omega) L_n^R(\omega), \quad \Pi(\omega) = L_{n+1}^R(\omega) L_n^A(\omega). \end{aligned}$$

Тогда обсуждаемые вклады $I^{(1,2)}$ принимают такой вид:

$$I^{(1)}(\omega) = \frac{2i}{\delta\epsilon^2} \left[4A'(\omega) \Phi(\omega) - B'(\omega) \Pi(\omega) - \frac{1}{2}A'(\omega) \Pi(\omega) - \frac{1}{2}A'(\omega) \Pi(-\omega) \right],$$

и

$$I^{(2)}(\omega) = \frac{2i}{\delta\epsilon^2} \left[2A(\omega) \Phi'(\omega) - B(\omega) \Pi'(\omega) - \frac{1}{2}A(\omega) \Pi'(\omega) + \frac{1}{2}A(\omega) \Pi'(-\omega) \right].$$

При записи этих выражений, мы приняли во внимание тот факт, что впоследствии I интегрируется с нечётной функцией $\mathcal{B}(\omega)$. Последний шаг состоит в том, чтобы заметить, что:

$$I^{(1)}(\omega) + I^{(2)}(\omega) = \frac{2i}{\delta\epsilon^2} [\dots], \quad (2.142)$$

$$[\dots] = 2A'(\omega) \Phi(\omega) + \partial_\omega \left(2A(\omega) \Phi(\omega) - B(\omega) \Pi(\omega) - \frac{1}{2}[A(\omega) (\Pi(\omega) + \Pi(-\omega))] \right)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.141) и выполняя интегрирование по частям, мы получим:

$$\sigma_{AL} = -\frac{1}{2\pi} \sum_n (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} (d\omega) [\dots], \quad (2.143)$$

где

$$[\dots] = 2\mathcal{B}(\omega) A'(\omega) \Phi(\omega) + \\ + \mathcal{B}'(\omega) \left[B(\omega) \Pi(\omega) - 2A(\omega) \Phi(\omega) + \frac{1}{2}A(\omega) (\Pi(\omega) + \Pi(-\omega)) \right].$$

Дальнейшее аналитическое рассмотрение возможно в ряде предельных случаев, из которых мы рассмотрим (I) и (II), изображенные на Рис. 2.5.

В окрестности критической температуры T_c существенным оказывается только классический вклад, пропорциональный $\mathcal{B}'(\omega)$ (он более сингулярен). Интересуясь нулевым магнитным полем, перейдем в непрерывный предел $H \rightarrow 0$, когда:

$$\delta\psi(\omega) \rightarrow \frac{\omega_c}{4\pi T} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon - i\omega}{4\pi T} \right) \quad (2.144)$$

и

$$\sum_n (n+1) \rightarrow \frac{1}{\Omega_c^2} \int_0^\infty \epsilon d\epsilon,$$

тогда как в остальных выражениях можно положить $n+1 \rightarrow n$. В рассматриваемом пределе удобно ввести время Гинзбурга-Ландау в соответствии с $\tau_{GL} = \frac{\pi}{8(T-T_c)}$ и написать для пропагатора асимптотику (2.95). Это приводит к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2\pi} \frac{2T}{\omega^2} \left(\frac{\pi^2}{2} \frac{\omega_c}{4\pi T} \right)^2 \int_0^\infty \frac{\epsilon d\epsilon}{\omega_c^2} \int_{-\infty}^\infty (d\omega) \left[\Pi(\omega) - 2\Phi(\omega) + \frac{1}{2} (\Pi(\omega) + \Pi(-\omega)) \right] = \\ &= \frac{1}{128T} \int_0^\infty \epsilon d\epsilon \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \left[\Pi(\omega) - 2\Phi(\omega) + \frac{1}{2} (\Pi(\omega) + \Pi(-\omega)) \right] = \\ &= \frac{2T}{\pi^2} \int_0^\infty \epsilon d\epsilon \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\left[(\tau_{GL}^{-1} + \epsilon)^2 + \omega^2 \right]^2} = \\ &= \frac{T}{\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon d\epsilon}{(\epsilon + \tau_{GL}^{-1})^3}, \end{aligned}$$

что воспроизводит классический результат для парапроводимости: $\sigma_{AL} = \frac{T\tau_{GL}}{2\pi}$.

При нулевой температуре второй вклад в фигурных скобках в Ур. (2.142) зануляется. Однако, вклад, пропорциональный $\mathcal{B}(\omega)$, даёт конечный результат. Сингулярный по близости к переходу вклад даётся только членом с $n=0$. Он даёт:

$$\sigma_{AL} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \text{sgn}(\omega) \partial_\omega [\psi_1(\omega) - \psi_0(\omega)]^2 L_0^R(\omega) L_1^R(\omega) d\omega. \quad (2.145)$$

Для дальнейшего упрощения заметим, что при малых температурах в окрестности H_{c2} , знаменатель пропагатора можно разложить по частоте согласно уравнению (2.104). Это даёт для обсуждаемой поправки к проводимости при нуле температур:

$$\sigma_{AL} = \frac{4e^2}{3\pi^2} \ln \frac{1}{h}. \quad (2.146)$$

Для того, чтобы получить поправки по температуре, следует учесть второй член в фигурных скобках в Ур. (2.142). Это даёт такую асимптотику для диаграммы Асламазова и Ларкина в области (II):

$$\sigma_{AL} = \frac{4e^2}{3\pi^2} \left\{ \ln \frac{1}{h} + \left(\frac{\gamma t}{h} \right)^2 \right\}, \quad (2.147)$$

что воспроизводит результат Галицкого и Ларкина [47].

Отметим, что все известные нам работы, в которых вычислялся вклад обсуждаемой диаграммы в проводимость с нулевым результатом при $T = 0$, кроме [78], обладают общим свойством: в них не учитывалась зависимость электронных блоков, Ур. (2.132), от бозонной частоты. В результате этого квантовый вклад был упущен. Вероятный источник ошибки в статье [78] состоит в том, формула включающая Ξ^{RA} , выписанная в конце страницы 12, неверна. Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, начиная с выражения Ξ^{RA} приведённого после (A12), можно получить:

$$\left(\Xi_{mn}^{RA}(\Omega + \omega, \Omega) \right)^2 \approx \frac{\Gamma}{\omega_c^2 (n - m)^2} [\Gamma + \omega (\psi'_m(-\Omega) + \psi'_m(\Omega) - 2\psi'_n(-\Omega))], \quad (2.148)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\psi_n(\Omega) + \psi_n(-\Omega) - \psi_m(\Omega) - \psi_m(-\Omega)) \quad (2.149)$$

и

$$\psi_n(\Omega) = \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_c (n + \frac{1}{2}) - i\Omega}{4\pi T} \right), \quad (2.150)$$

а ψ'_n - производная по частоте. Видно, что этот ответ не сводится к приведённому в статье [78].

2.11 Заключение

Мы рассмотрели однородно неупорядоченные пленки при температуре выше температуры сверхпроводящего перехода $T > T_c(B)$. Мы вычислили по-

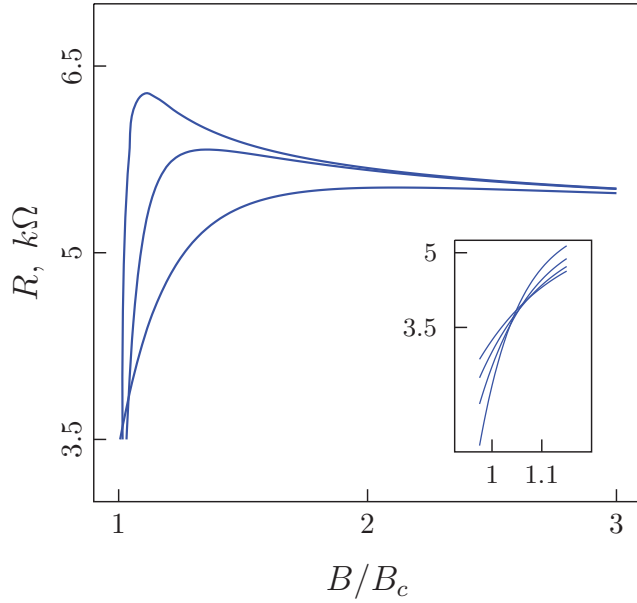


Рис. 2.10: Сопротивление как функция магнитного поля для температур $T/T_c = 0.03, 0.1, 0.35$. Вставка: увеличенная область приближённого пересечения для $T/T_c = 0.15 - 0.3$. Параметры образца: $R_D = 5k\Omega$ и $T_c\tau = 10^{-2}$.

правки к тензору электрической проводимости (коэффициентам σ_{xx} и σ_{xy}). Результаты представлены уравнениями (2.90)-(2.92). Мы проанализировали асимптотическое поведение этих поправок в различных областях фазовой диаграммы и провели подробное сравнение с известными в литературе результатами.

Полученные результаты для эффекта Холла недавно использовались для описания экспериментальных данных, полученных в группе Стэнфорда [79]. Результаты для продольной проводимости, данные в уравнениях (2.90)-(2.92), могут также оказаться полезными при анализе результатов экспериментов. С их помощью можно вычислить флуктуационные поправки без дополнительных аналитических приближений (например, приближения нижнего уровня Ландау).

Пример результатов, полученных численно исходя из этих формул, показан на Рис. 2.6 и 2.10 для сопротивления $R = (R_D^{-1} + \delta\sigma)^{-1}$ как функции магнитного поля и температуры. Похожее поведение сопротивления наблюдалось в экспериментах Батуриной и других авторов [16]. В этой работе авторы представили теоретические кривые, основанные на асимптотических выражениях (2.105), впервые полученных в работе Галицкого и Ларкина [47] и воспроизведённых в нашей работе с помощью другого метода. Заметим, однако, что хотя эти выражения достаточно точны в окрестности кванто-

вой критической точки, область их применения не простирается до больших магнитных полей, которые изучались в эксперименте (до $5B_c$). Таким образом, при описании этих данных более корректным было бы использование уравнений (2.90)-(2.92).

Согласно Рис. 2.10, кривые зависимости сопротивления как функции магнитного поля при разных температурах (в определённом интервале), демонстрируют приближённое пересечение. Как можно увидеть из этого Рис., буквальное пересечение в единственной точке отсутствует, однако отклонение от этого поведения невелико. Существование такой приближённой точки пересечения является следствием относительно широкого минимума кривой $R(T)$ для магнитного поля $B = 1.05B_c$, см. Рис. 2.10. Поведение такого типа было обнаружено в различных системах, см., например, Рис. 4 в работе [83]. Однако, в этих экспериментах кривые продолжают пересекаться вплоть до самых малых температур. Такого поведения проводимости нельзя ожидать, если предполагать, что она полностью описывается Гауссовыми поправками. Это явление может быть связано с тем фактом, что при столь низких температурах близость точки перехода получает ключевое значение, и изложенная нами теория не достаточна по ряду причин. Во-первых, она не учитывает эффектов взаимодействия флуктуаций и во-вторых, пренебрегает размытием области перехода беспорядком [84, 85], которое часто действительно наблюдается в этой области (см. Рис. 2 в работе [86] для примера такого поведения).

Итак, мы развили подход, основанный на уравнении Узаделя для учёта как классических, так и квантовых флуктуаций параметра порядка в произвольном магнитном поле. Этот подход является более прозрачным физически, чем обычная теория возмущений, основанная на формуле Кубо и даёт возможность установить связь между микроскопическим и феноменологическим подходами. Мы полагаем, что он может найти применение для изучения флуктуационных эффектов в неравновесных системах или в гибридных структурах сверхпроводник/нормальный металл.

Глава 3

Нестационарный эффект Джозефсона в длинном SINIS переходе

3.1 Введение

Стационарный эффект Джозефсона в гибридных структурах сверхпроводник/нормальный металл хорошо изучен. Он может быть понят как в терминах Андреевских уровней, образуемых когерентными состояниями электрона и дырки в нормальной области, так и (более прямым образом) в подходе функций Грина. Если к переходу приложено постоянное напряжение, возникает нестационарный эффект Джозефсона. Если пренебречь эффектами когерентности между сверхпроводящими контактами, электрический ток является стационарным с богатой подщелевой ($V < \Delta$, где Δ - энергетическая щель в сверхпроводящем контакте) [87]. Этот вклад в ток хорошо изучен теоретически, мы же остановимся на переменном вкладе в ток, который возникает за счёт когерентных эффектов и может оказаться существенным даже при довольно высоких температурах $T \gg E_{Th}$ [88, 89, 90, 91].

В этой главе мы рассматриваем нестационарный эффект Джозефсона в длинном симметричном SNS переходе с большим сопротивлением контактов в условиях постоянного напряжения. Соответствующим большим параметром является отношение $r = R_B/R_N$, где R_B - сопротивление одного барьера в нормальном состоянии, а R_N - сопротивление нормальной проволоки. Такого рода задача была впервые рассмотрена в работе Асламазова, Ларкина и

Овчинникова [27], где был вычислен Джозефсоновский ток в главном порядке по r^{-1} . В этой работе было показано, что Джозефсоновский ток экспоненциально мал, если температура велика по сравнению с обратным временем диффузии электрона через нормальную область. Однако позже, в несколько ином контексте, Лемпицким [88] было сделано замечание, что из-за неравновесных эффектов переменный ток при больших температурах спадает только как T^{-1} . Мы рассматриваем такую задачу для SNS перехода в главе 4. Для SINIS - перехода рассмотрение существенно упрощается, так как эффект близости можно рассматривать по теории возмущений.

Мы вычисляем электрический ток микроскопически, с учётом всех неравновесных эффектов. Для этого следует учесть вклады в электрический ток, которые формально появляются в старших порядках по малому параметру r^{-1} ; однако, их вклад в электрический ток не является обязательно меньшим вклада главного порядка по прозрачности. Более того, оказывается, что он может доминировать в переменном токе, как мы объясняем в секции 3.6.2.

3.2 Основные уравнения

Подробности используемого метода были изложены во Введении, так что мы остановимся только на существенных для рассматриваемой здесь задачи дополнениях. Так как мы будем интересоваться, в том числе, режимом нелинейного отклика, оказывается существенным учесть процессы неупругой релаксации. Это приводит к появлению в правой части уравнения Узаделя (1) интеграла столкновений $\check{I} = -i (\check{\Sigma}_{in} \circ \check{G} - \check{G} \circ \check{\Sigma}_{in})$ где $\check{\Sigma}_{in}$ - Келдышевская матрица собственной энергии, учитывающая неупругие процессы.

Для определённости, мы будем предполагать, что энергетическая релаксация осуществляется, в основном, неупругим рассеянием электронов на фононах. Мы будем интересоваться ситуацией, в которой существенные электронные энергии определяются энергией Таулеса или напряжением и меньше тепловых, а отклонения функции распределения от равновесной - невелики. В таком случае, электрон-фононный интеграл столкновений можно рассмат-

ривать в тау-приближении, см., например, работу [92].

Удобно перейти к Вигнеровскому представлению:

$$\check{G}(\tau, t) = \int \check{G}(\epsilon, t) e^{-i\epsilon\tau} d\epsilon. \quad (3.1)$$

Заметим, что в таком представлении оператор свертки может быть записан в виде:

$$f(\epsilon, t) = e^{-i\omega_1 t} f(\epsilon), \quad g(\epsilon, t) = e^{-i\omega_2 t} g(\epsilon), \quad (3.2)$$

и

$$(f \circ g)(\epsilon, t) = e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} f\left(\epsilon + \frac{\omega_2}{2}\right) g\left(\epsilon - \frac{\omega_1}{2}\right). \quad (3.3)$$

Нашей целью будет нахождение функций $\hat{g}^{R(A)}$, \hat{g}^K для SINIS структуры и вычисление электрического тока. Матричное уравнение (1) в присутствии сильного упругого рассеяния на контактах должно быть дополнено граничным условием Куприянова и Лукичёва [31] на каждой из SIN границ. На правой границе оно принимает следующий вид:

$$2R_{SN}\sigma_N \check{j} = [\check{g}_o, \check{g}_r], \quad (3.4)$$

где R_{SN} - поверхностное сопротивление барьера на единицу площади в нормальном состоянии. Индексы l, r обозначают левый и правый резервуар, соответственно.

Выпишем в явном виде содержание уравнений (3.4) для опережающей компоненты Гриновской функции:

$$2R_{SN}\sigma_N j_l^R = [\hat{g}_l^R \circ, \hat{g}_r^R]. \quad (3.5)$$

Запаздывающие компоненты идентичны (с точностью до замены $R \rightarrow A$). Келдышевская компонента граничного условия (3.4) есть:

$$2R_{SN}\sigma_N \left(\partial_x \hat{h}_l - \hat{G}_l^R \circ \partial_x \hat{h}_l \circ \hat{G}_l^A \right) = \left(\hat{G}_l^R \circ \hat{u} - \hat{u} \circ \hat{G}_l^A \right) \quad (3.6)$$

где

$$\hat{u} = \hat{G}_r^R \circ \delta \hat{h} - \delta \hat{h} \circ \hat{G}_r^A, \quad \delta \hat{h} = \hat{h}_r - \hat{h}_l. \quad (3.7)$$

В следующей секции мы упрощаем эти уравнения, пользуясь малым параметром r^{-1} .

3.3 Упрощение уравнений в пределе слабого эффекта близости

В дальнейшем мы предполагаем, что к структуре приложено постоянное напряжение и пренебрегаем пространственной зависимостью всех рассматриваемых величин в направлениях, ортогональных к проволоке. Длину удобно измерять в единицах длины провода L . Будем считать, что сверхпроводники расположены в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$ под напряжениями $-\frac{V}{2}$ и $\frac{V}{2}$ соответственно. Мы предполагаем, что нормальная проводимость сверхпроводника много больше проводимости проволоки, так что электрический ток быстро растекается при входе в контакт. В таком случае можно считать, что функции Грина контактов заданы и не нужно учитывать влияние проволочки на них. Тогда $\check{G}_{l,r}$ могут быть получены калибровочным преобразованием из стандартных результатов теории БКШ \check{G}_{BCS} :

$$\check{G}_{l,r}(t_1, t_2) = \check{S}_{l,r}(t_1) \check{G}_{BCS}(t_1, t_2) \check{S}_{l,r}^+(t_2),$$

где

$$\hat{G}_{BCS}^{R(A)} = (g_S \hat{\tau}^3 + f_S \hat{\tau}^1)^{R(A)}, \quad \hat{G}_{BCS}^K = \tanh\left(\frac{\epsilon}{2T_S}\right) \left(\hat{G}_{BCS}^R - \hat{G}_{BCS}^A \right)$$

и $\check{S}_{l,r}(t) = \exp(\pm \frac{iVt}{2} \hat{\tau}^3) \check{1}$. Простое вычисление даёт:

$$\hat{G}_{l,r}^R(t, \epsilon) = \begin{pmatrix} g_S^R(\epsilon \mp V/2) & e^{\mp iVt} f_S^R(\epsilon) \\ e^{\pm iVt} f_S^R(\epsilon) & -g_S^R(\epsilon \pm V/2) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

и

$$\hat{h}_{l,r}(\epsilon) = \begin{pmatrix} \tanh\left(\frac{\epsilon \mp V/2}{2T_S}\right) & 0 \\ 0 & \tanh\left(\frac{\epsilon \pm V/2}{2T_S}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Явный вид зависящих от энергии функций $g_S^{R(A)}$, $f_S^{R(A)}$ таков:

$$g_S^{R(A)}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\Delta} (\pm \eta_S - i \xi_S), \quad f_S^{R(A)}(\epsilon) = \xi_S \pm i \eta_S, \quad (3.10)$$

где

$$\eta_S = \frac{\Delta \operatorname{sign} \epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}} \theta(|\epsilon| - \Delta), \quad \xi_S = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}} \theta(\Delta - |\epsilon|). \quad (3.11)$$

3.4 Вычисление спектральных функций

В этом параграфе мы вычисляем функции $\hat{g}^{(R,A)}$, описывающие влияние эффекта близости на спектральные корреляции в нормальной области. Удобно параметризовать Гриновскую функцию $\hat{g}^{R(A)}(x, \epsilon, t)$ следующим образом:

$$\hat{g}^{R(A)} = \begin{pmatrix} \pm(1 - g_1^{R(A)}) & f_1^{R(A)} \\ f_2^{R(A)} & \mp(1 - g_2^{R(A)}) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Условие нормировки даёт диагональные компоненты Гриновской функции в пространстве Горькова-Намбу:

$$g_1^R = \frac{1}{2} f_1^R \circ f_2^R, \quad g_2^R = \frac{1}{2} f_2^R \circ f_1^R. \quad (3.13)$$

Как мы увидим:

$$g_{1,2}^R \sim r^{-2}, \quad f_{1,2}^{R,A} \sim r^{-1}. \quad (3.14)$$

В спектральных уравнениях нужно сохранить вклады, пропорциональные r^{-1} , а в Ур. (3.5) - вклады порядка единицы, чтобы для $f_1^R(x, \epsilon, t)$ получить:

$$\partial_x^2 f_1^R + \kappa^2 f_1^R = 0, \quad (3.15)$$

$$\partial_x f_1^R|_{x=\pm\frac{1}{2}} = \pm r^{-1} e^{\pm iVt} f_S^R.$$

Здесь

$$\kappa_\epsilon = \sqrt{\frac{2i\epsilon}{E_{Th}} - \gamma} \quad (3.16)$$

и $\gamma = (\tau_{in} E_{Th})^{-1}$ - безразмерное время неупругого рассеяния. Линейное приближение, приводящее к Ур. (3.15), применимо на всех энергиях ϵ , если $(\gamma r)^{-1} \sim \tau_{in} E_g \ll 1$ (здесь E_g - наведённая эффектом близости минищель [93] при $\gamma = 0$). Оставшиеся Гриновские функции можно найти с помощью соотношений:

$$f_{1,2}^A(x, \epsilon, t) = f_{1,2}^R(x, -\epsilon, t), \quad (3.17)$$

$$f_2^{R(A)}(x, \epsilon, t) = f_1^{R(A)}(x, \epsilon, -t)$$

Уравнения (3.15) легко решить, что даёт следующий результат:

$$f_1^R = v^R \left[e^{iVt} \cos \kappa_\epsilon \left(x + \frac{1}{2} \right) + e^{-iVt} \cos \kappa_\epsilon \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.18)$$

Для удобства, мы ввели такие определения:

$$\begin{aligned} u^R &= -\frac{f_S^R(\epsilon)}{r} u(\epsilon), & v^R &= -\frac{f_S^R(\epsilon)}{r} v(\epsilon), \\ u^A &= -\frac{f_S^A(\epsilon)}{r} u(-\epsilon), & v^A &= -\frac{f_S^A(\epsilon)}{r} v(-\epsilon), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $u(\epsilon) = \frac{\cos \kappa_\epsilon}{\kappa_\epsilon \sin \kappa_\epsilon}$, $v(\epsilon) = \frac{1}{\kappa_\epsilon \sin \kappa_\epsilon}$, так что

$$f_{1,2}^{R(A)}\left(x = \frac{1}{2}\right) = u^{R(A)} e^{\pm iVt} + v^{R(A)} e^{\mp iVt}. \quad (3.20)$$

Отметим, что линейризация уравнения Узаделя по $f_{1,2}$ перестаёт работать на энергиях, близких к когерентным пикам в сверхпроводнике Δ : $|\epsilon - \Delta| \leq \frac{E_{Th}}{r^2} \max(E_{Th}/\Delta, 1)$, но получающаяся сингулярность $|\epsilon - \Delta|^{-1/2}$ не оказывает никакого влияния на наши результаты.

3.5 Вычисление функций распределения

В этом параграфе мы вычисляем электронную функцию распределения. Физическая картина, соответствующая установлению определённого распределения электронов по энергиям, состоит в следующем. Электроны диффундируют от одного сверхпроводящего контакта до другого за характерное время $\tau_D = E_{Th}^{-1}$. Достигая одного из контактов, они испытывают нормальные и Андреевские отражения на границах. В рассматриваемом переходе с сильными барьерами на границе, роль неупругого рассеяния относительно велика, так как Андреевские отражения подавлены из-за слабости эффекта близости. Это приводит к тому, что электрон проводит много времени в нормальной области, многократно нормально отражаясь от границ до того, как сможет

проникнуть в сверхпроводник в виде Куперовской пары. При $\chi = \gamma r^2 \gg 1$ функция распределения - почти тепловая, так что

$$\hat{h}(x, \epsilon, t) = \mathcal{H}(\epsilon) \hat{\tau}^0 + O(\chi^{-1}), \quad (3.21)$$

где $\mathcal{H}(\epsilon) = \tanh(\frac{\epsilon}{2T})$ равновесное распределение с температурой T .

Неравновесные поправки в Ур. (3.21), хоть и малы, но могут оказаться существенны. Дело в том, что тепловое распределение приводит (как мы обсуждаем ниже) к амплитуде $|I_s|$ переменного Джозефсоновского тока $I(t)$, которая оказывается экспоненциально мала по параметру L/ξ_T . С другой стороны, неравновесные поправки спадают с температурой и длиной намного медленнее. Они оказываются довольно интересными, так как возникают из-за когерентного Андреевского отражения.

Для того, чтобы найти их, следует упростить общие уравнения в пределе слабого эффекта близости, разделяя члены разных порядков по r^{-1} . Следует упростить граничное условие (3.6), ограничившись членами порядка r^{-1} и кинетическое уравнение, ограничившись членами порядка r^{-2} . Кроме этого, так как для нас важны малые энергии $\epsilon \ll \Delta$ (именно в этом случае отклонения от равновесия существенны), можно положить $\eta_S(\epsilon) = 0$, $\xi_S(\epsilon) = 1$.

Будем искать функцию распределения в следующем виде:

$$h_0(x, \epsilon, t) = \mathcal{H}(\epsilon) + r^{-2} h_0^{(2)}(\epsilon, x, t) \quad (3.22)$$

$$h_3(x, \epsilon, t) = r^{-2} h_3^{(2)}(\epsilon, x, t)$$

Благодаря пространственной симметрии задачи функции $h_3^{(2)}$ и $h_0^{(2)}$ оказываются нечётной и чётной функциями координаты x , соответственно. Принимая это во внимание, выписываем граничное условие (3.6) только при $x = \frac{1}{2}$. Получаем:

$$4\partial_x h_{0,3}^{(2)}|_{x=\frac{1}{2}} = J_1 \mp J_2, \quad (3.23)$$

где $J_{1,2}$ зависят только от \mathcal{H} и, следовательно, известны:

$$J_{1,2} = r \left(f_{1,2}^R \circ e^{\mp iVt} X + e^{\pm iVt} X \circ f_{2,1}^A \right) \quad (3.24)$$

$$\text{с } X(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(h_{0+}^{(0)} - h_{0-}^{(0)} \right).$$

Мы используем специальное обозначение: нижний индекс, обозначающий сдвиг аргумента функции, в которой он возникает, по энергии. Для данной функции энергии $f(\epsilon)$ мы пишем:

$$f_{\pm}(\epsilon) = f\left(\epsilon \pm \frac{V}{2}\right) \quad f_{++} = f(\epsilon + V) \quad f_{--} = f(\epsilon - V). \quad (3.25)$$

Итак, мы выписали граничные условия на функцию распределения, и перейдём к кинетическому уравнению. Слабость эффекта близости позволяет пренебречь поправками к коэффициенту диффузии, как и членами, смешивающими h_0 и h_3 в кинетическом уравнении. Придерживаясь τ -приближения для интеграла столкновений, мы получим:

$$E_{Th} \partial_x^2 h_0^{(2)} - (\partial_t h_0^{(2)} + \tau_{in}^{-1} h_0^{(2)}) = 0 \quad (3.26)$$

$$E_{Th} \partial_x^2 h_3^{(2)} - (\partial_t h_3^{(2)} + \tau_{in}^{-1} h_3^{(2)} + ir^2 \varphi_- \mathcal{H}) = 0$$

Кинетическое уравнение (3.26) следует выписать для каждой временной гармоники функции распределения. Мы будем пользоваться тем, что $V \ll T$, тогда $X = V/4T$. Запишем неравновесную поправку в таком виде:

$$h_0^{(2)}(x, \epsilon, t) = \sum_{n=0, \pm 1} A_{n, \epsilon} \cos(\kappa_n V x) e^{-2iVnt} \quad (3.27)$$

$$h_3^{(2)}(x, \epsilon, t) = \sum_{n=0, \pm 1} B_{n, \epsilon} \sin(\kappa_n V x) e^{-2iVnt}$$

Граничные условия (3.23) позволяют найти коэффициенты A , B :

$$A_{n, \epsilon} = -\frac{r V}{16 T} \frac{\tilde{A}_{n, \epsilon}}{\kappa_n V \sin(\frac{1}{2} \kappa_n V)},$$

$$B_{n, \epsilon} = \frac{r V}{16 T} \frac{\tilde{B}_{n, \epsilon}}{\kappa_n V \cos(\frac{1}{2} \kappa_n V)}.$$

где

$$\tilde{A}(n, \epsilon) = (\alpha_+ - \alpha_-) \delta_{n,0} + (v_+^R - v_-^A) \delta_{n,1} - (v_-^R - v_+^A) \delta_{n,-1},$$

$$\tilde{B}(n, \epsilon) = (\alpha_+ + \alpha_-) \delta_{n,0} + (v_+^R + v_-^A) \delta_{n,1} + (v_-^R + v_+^A) \delta_{n,-1},$$

с $\alpha = u^R + u^A$.

3.6 Вычисление электрического тока

После того как вычислена функция распределения (3.21), можно перейти к вычислению переменного электрического тока. Удобно вычислять его в окрестности правой границы, где \hat{j}^K удобно вычислить из Ур. (3.4). В выражении для тока есть множество вкладов. Мы сохраним только те из них, что пропорциональны поправке к $\hat{g}^{R(A)}$ и дают вклад в осциллирующую со временем часть тока. Это позволяет получить главные вклады как при малых, так и при низких температурах по сравнению с E_{Th} . Более подробное рассмотрение даёт поправки, которые при низких температурах имеют малость r^{-1} по сравнению с найденными, а при больших - подавлены экспоненциально длиной перехода. Напомним, что мы используем неравенство $\Delta \gg \max(E_{Th}, V)$. В этом пределе результат имеет вид:

$$I(t) = \frac{1}{8R} \int [I_\epsilon^+(t) - I_\epsilon^-(t)] d\epsilon, \quad (3.28)$$

где

$$I_\epsilon^\pm(t) = (K_{1,2} \circ e^{\mp iVt} + e^{\mp iVt} \circ K_{1,2}) \quad (3.29)$$

и R - сопротивление SINIS перехода в нормальном состоянии: $R = 2R_B$.

Для краткости, мы ввели обозначение $K_{1,2} = f_{1,2}^R \circ h_2 - h_1 \circ f_{1,2}^A$, где пространственный аргумент в аномальной функции и функции распределения есть $x = \frac{1}{2}$. Далее, заметим, что $I(t)$ представляет собой сумму двух различных вкладов, в соответствии с Ур. (3.21), которые обсуждаются далее.

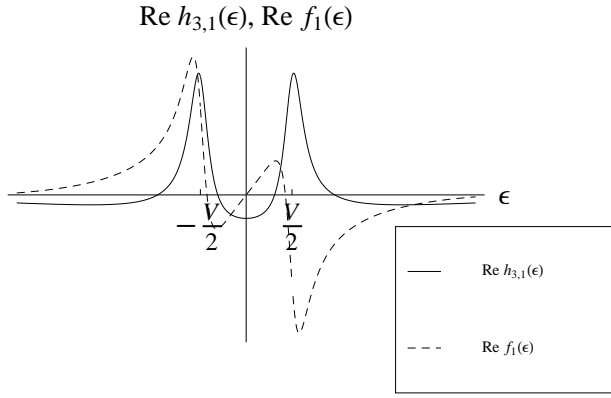


Рис. 3.1: Неравновесные поправки к функции распределения.

3.6.1 Равновесный вклад

Рассмотрим сперва равновесный вклад в электрический ток. Он имеет вид: $I_{eq} = \text{Re}[e^{-2iVt} I_1]$, где

$$I_1 = -\frac{1}{2Rr} \int [v(\epsilon + V/2) - v(-\epsilon + V/2)] \tanh \frac{\epsilon}{2T} d\epsilon. \quad (3.30)$$

Таким образом, для амплитуды I_1 воспроизводится известный результат [27] (равновесный критический ток):

$$I_1(V = 0) = -\frac{i}{Rr} \int h_S \text{Im } v d\epsilon. \quad (3.31)$$

Интеграл в Ур. (3.30) сводится к сумме по вычетах, что даёт:

$$I_1 = -\frac{2\pi iT}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n \sinh q_n}, \quad (3.32)$$

где $q_n = \sqrt{\frac{2(2n-1)\pi T - iV}{E_{Th}} + \gamma}$.

В пределе $T \gg E_{Th}$ и $\gamma \leq 1$, получим

$$|I_1| = c \frac{T}{rR\sqrt{a}} e^{-\sqrt{a}} \begin{cases} a = \frac{2\pi T}{E_{Th}} & c = 4\pi, & V \ll T, \\ a = \frac{V}{2E_{Th}} & c = 2\sqrt{2}\pi, & V \gg T. \end{cases} \quad (3.33)$$

При самых низких температурах $\tanh \frac{\epsilon}{2T} \rightarrow \text{sign } \epsilon$ и интеграл для тока можно взять в явном виде:

$$|I_1| = \frac{2E_{Th}}{rR} \left| \ln \cot \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{iV}{E_{Th}} - \gamma} \right) \right|. \quad (3.34)$$

Это выражение справедливо при любом напряжении, если $T\tau_{in} \ll 1$ и для высоких напряжений $V\tau_{in} \gg 1$ в противном случае.

3.6.2 Неравновесный вклад

Начиная вычисление с Ур. (3.28) получим:

$$I_{neq} = \text{Re}[e^{-2iVt}\Phi_1 + e^{-4iVt}\Phi_2], \quad (3.35)$$

с комплексными амплитудами $\Phi_{1,2} = -\frac{\pi E_{Th} V}{16Rr^3 T} \phi_{1,2}$, где $\phi_{1,2}$ даются следующими формулами:

$$\phi_1 = \Gamma_0(x_0 - y_0) - \Gamma_V(x_0 + y_0) + (x_V + y_V)(\Gamma_{2V} - \Gamma_V), \quad (3.36)$$

$$\phi_2 = -(x_V + y_V)\Gamma_{2V}.$$

Здесь $x_\epsilon = -\frac{\cot(\kappa_\epsilon/2)}{\kappa_\epsilon}$, $y_\epsilon = \frac{\tan(\kappa_\epsilon/2)}{\kappa_\epsilon}$ и

$$\Gamma_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2(i\epsilon/E_{Th} - \gamma)} \sin \sqrt{2(i\epsilon/E_{Th} - \gamma)}}. \quad (3.37)$$

Результаты, выписанные в Ур. (3.36) применимы при произвольных значениях параметра V/E_{Th} , но в главном порядке по V/T .

Проанализируем подробнее случай слабого неупругого рассеяния $\gamma \ll 1$. При низких напряжениях, $|\phi_2| = 2\gamma^{-1}|\phi_1| \gg |\phi_1|$ и вторая гармоника в токе преобладает. Более общая асимптотика при $V \ll E_{Th}$ имеет вид:

$$\Phi_1 = -\frac{\pi E_{Th} V}{16Rr^3 T} \begin{cases} \frac{1}{2}\gamma^{-1} + 4\gamma^{-4}(V/E_{Th})^2, & V \ll \tau_{in}^{-1} \\ -\gamma^{-2}, & \tau_{in}^{-1} \ll V \end{cases} \quad (3.38)$$

и

$$\Phi_2 = -\frac{\pi E_{Th} V}{16Rr^3 T} \begin{cases} \gamma^{-2}, & V \ll \tau_{in}^{-1} \\ -\frac{1}{4}(E_{Th}/V)^2, & \tau_{in}^{-1} \ll V \end{cases} \quad (3.39)$$

Сравнивая результаты, представленные в уравнениях (3.39) и (3.33), можно заметить, что неравновесная вторая гармоника преобладает в переменном

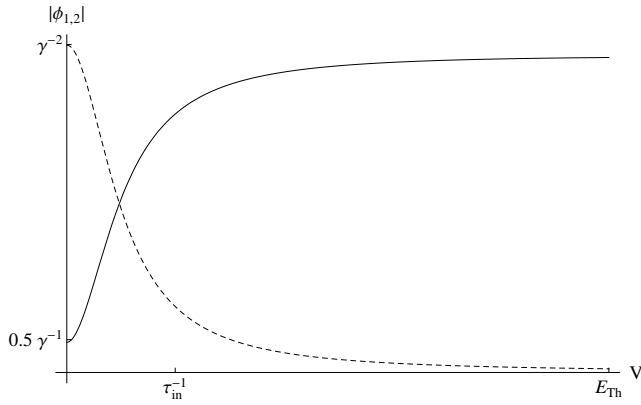


Рис. 3.2: Неравновесные амплитуды $|\phi_1(V)|$ (сплошная линия) и $|\phi_2(V)|$ (штрихованная линия) вычисленные согласно Ур. (3.36) для $\gamma = 0.2$ и $V \ll T$.

токе при $T \geq E_{Th} \ln^2(\gamma r)$ и низких напряжениях $V \ll \tau_{in}^{-1}$. Похожее явление экспериментально наблюдалось в работах [94, 5], где были обнаружены субгармонические ступеньки Шапиро, медленно спадающие с увеличением температуры T . Качественная теория этого явления была предложена Аргаманом в работе [89]. Он рассматривал переход SNS (с границами идеальной прозрачности) на языке зависящих от времени Андреевских связанных состояний с неравновесной заселенностью. Наш результат (3.39) содержит ту же зависимость V/T при низких напряжениях, что и результат этой работы [89]. Однако, мы получаем $I_{neq} \sim \chi^{-1} I_{neq}^{\text{argaman}}$. Можно предположить, что результат работы [89] справедлив (с точностью до множителя порядка единицы) при условии $\chi \leq 1$, то есть, в режиме, который мы не рассматриваем здесь.

Чтобы понять происхождение эффекта, полезно отметить, что результат работы [89] для второй гармоники в токе напоминает ответ, приведённый в формуле (9) работы [91], где изучался вклад Дебаевской релаксации в кондуктанс на нулевой частоте SNS перехода. Препринтная версия статьи этой статьи [95] содержит ту же оценку для SINIS перехода, дающую результат $\propto \tau_{in}^2$, что соответствует нашему выражению для Φ_2 .

Насколько нам известно, неравновесный переменный ток в нелинейном по V режиме не вычислялся ранее. Уравнения (3.38), (3.39) показывают, что с ростом напряжения неравновесная первая гармоника, Φ_1 , становится сравнима с Φ_2 и в последствии превышает её. С физической точки зрения, амплитуда Φ_1 происходит из пиков неравновесных стационарных вкладов в функции распределения $h_{0,3}^{(2)}(\epsilon)$ на энергиях, равных химическим потенциа-

лам контактов $\epsilon = \pm V/2$. Эти пики происходят из модуляции спектральной плотности на Джозефсоновской частоте согласно Ур. (3.20). Для примера, при $\gamma = 0.2$, абсолютные значения амплитуда $\phi_{1,2}(V)$ при низких напряжениях $V \leq E_{Th} \ll T$ построены на Рис. 3.2.

3.7 Заключение

Итак, в этой главе мы рассмотрели переменный эффект Джозефсона в длинном SINIS переходе в случае, когда температура и напряжение на контакте малы по сравнению со щелью в сверхпроводящих контактах Δ . Основные результаты даны в уравнениях (3.36), (3.38), (3.39). Они дают неравновесный вклад в том при больших температурах $T \gg E_{Th}$, когда он становится доминирующим. Мы показали, что переменный ток содержит две гармоники: на основной Джозефсоновской частоте $\omega_J = 2eV/\hbar$ и на удвоенной $2\omega_J$. Вторая гармоника наиболее существенна при низких напряжениях.

Глава 4

Отклик электрического тока в SNS переходе на гармоническую модуляцию разности фаз

4.1 Введение

В этой главе мы обсуждаем недавний эксперимент [7] по измерению отклика гибридной SNS структуры на классически слабое переменное магнитное поле. В рассматриваемом эксперименте такое поле было индуцировано переменным магнитным полем (вызывающим переменное электрическое поле согласно $E = -\frac{1}{c}\dot{B}$). Переменное электрическое поле возбуждает нестационарный электрический ток, что позволяет экспериментально изучать динамику Андреевских уровней. Рассматриваемая в этом эксперименте геометрия особенно интересна, так как подразумевает наличие двух сверхпроводников, связанных между собой эффектом близости, так что адмиттанс такой структуры зависит от их относительной фазы:

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi \cos(\omega t). \quad (4.1)$$

Одним из первых вопросов о влиянии когерентности между двумя сверхпроводниками на диссипативный транспорт в SNS структуре, изучал Лемпицкий [88]. Он рассматривал длинный переход, находящийся при высоких температурах $T \gg E_{Th}$ и под низким напряжением. Было обнаружено, что

присутствие сверхтока в системе приводит к усилению неравновесия в проволоке и показано, что это неравновесие приводит к степенному спадаению когерентного тока с температурой, вместо экспоненциального. Наиболее интересен тот факт, что такая зависимость $\propto E_{Th}/T$ выживает вплоть до самых больших температур, когда равновесный сверхток становится экспоненциально мал. Это неравновесное усиление сверхпроводящих корреляций слегка напоминает хорошо известный эффект усиления сверхпроводимости микроволнами [96], рассмотренный в контексте гибридных структур. Отметим, что модель, рассмотренная в главе 3, позволяет проанализировать это явление аналитически при произвольном напряжении, пользуясь слабостью эффекта близости в SINIS структуре, тогда как для SNS перехода такое пертурбативное рассмотрение невозможно.

Мы разложим уравнение Узаделя до первого порядка по электрическому полю, без дополнительных предположений о соотношении частоты поля ω и энергии Таулеса или температуры. Мы будем пренебрегать неупругими столкновениями, так как в таких структурах легко реализовать бесстолкновительный предел $\omega\tau_{in} \gg 1$. Как обычно, в такой задаче оказывается удобным измерять энергию в единицах E_{Th} , а длину в единицах L .

4.2 Теория линейного отклика

Наше рассмотрение построено на Ур. (1). Электрический ток может быть вычислен согласно Ур. (3). Напомним, что уравнение Узаделя (1) включает в себя спектральное и кинетическое уравнение и в отсутствие флуктуаций, применима параметризация $\hat{g}^K = \hat{g}^R \cdot \hat{H} - \hat{H} \cdot \hat{g}^A$.

Сперва обсудим свойства системы в равновесии. Функция распределения есть $\hat{H}_{eq} = h(\epsilon) \hat{\tau}_0$ с $h(\epsilon) = \tanh \frac{\epsilon}{2T}$. Для запаздывающей функции Грина в равновесии можно написать (мы опускаем индекс $R(A)$, когда это не может привести к недоразумению):

$$\hat{g}_{eq}(\epsilon, x) = \begin{pmatrix} G & F \\ \bar{F} & -G \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где $G = \cosh \theta$, $F = \sinh \theta e^{i\chi}$, $\bar{F} = -\sinh \theta e^{-i\chi}$. Напомним, что в отличие от системы, рассмотренной в главе 3, эффект близости в данном случае не является малым, поэтому необходим полный учёт нелинейности и пользоваться малостью спектрального угла θ нельзя.

В такой параметризации, θ удовлетворяет уравнению:

$$\partial_x^2 \theta + 2i\epsilon \sinh \theta + J^2 \frac{\cosh \theta}{\sinh^3 \theta} = 0. \quad (4.3)$$

Сверхпроводящая фаза χ может быть найдена из закона сохранения $\partial_x J = 0$ спектрального сверхтока, $J = i \sinh^2 \theta (\epsilon, x) \partial_x \chi (\epsilon, x)$. В низкоэнергетическом ($\epsilon \ll \Delta$) пределе, граничное условие для χ и θ имеет вид:

$$\theta(0) = \theta(1) = \frac{i\pi}{2}, \quad (4.4)$$

$$\chi(0) = -\phi_0/2, \quad \chi(1) = \phi_0/2, \quad (4.5)$$

где ϕ_0 - разность фаз параметров порядка в равновесии. Уравнение (4.3) с граничными условиями (4.4), (4.5) невозможно решить аналитически. Тем не менее, свойства его решений хорошо известны и существуют соответствующие хорошо разработанные численные методы.

После того, как найдено равновесное решение, можно сосредоточиться на эффектах слабого электрического поля $\varphi(x, t)$. Электрический потенциал $\varphi(x, t)$ задан внешним переменным полем (мы пренебрегаем экранировкой потенциала электронами в проволоке):

$$\varphi(x, t) = \delta V e^{-i\omega t} (x - 1/2) + c.c. \quad (4.6)$$

В каждом из электродов, Гриновская функция есть $\check{g}_S = \check{S} \cdot \check{g}_{eq} \cdot \check{S}^+$, где $\check{S}(t, t') = \delta(t - t') e^{ie\hat{\tau}_3 \int^t \varphi(\tau) d\tau}$. Если $\omega \ll \Delta$, возмущением спектрального угла θ в сверхпроводнике можно пренебречь, а сверхпроводящая фаза становится зависящей от времени (следствие Джозефсоновского соотношения):

$$\delta\chi|_{x=0,1} = \mp i\alpha e^{-i\omega t} + c.c.. \quad (4.7)$$

Электронная функция распределения выводится из равновесия:

$$\delta \hat{H} \Big|_{x=0,1} = \mp \frac{\alpha}{2} e^{-i\omega t} f(\epsilon_1) \hat{\tau}^3 + c.c. \quad (4.8)$$

Здесь $f(\epsilon) = h(\epsilon) - h(\epsilon - \omega)$ и $\alpha = e\delta V/\omega$. Мы будем предполагать, что этот параметр мал: $\alpha \ll 1$. Так как задача линейна, достаточно рассмотреть только одну из гармоник переменного поля: $\sim e^{-i\omega t}$.

Итак, следует решить уравнение (1) в первом порядке по α . В присутствие поля, функция Грина зависит от времени: $\check{g} = \check{g}_0 + \delta\check{g}e^{-i\omega t}$. Существует два эффекта электрического поля. Во-первых, разность фаз параметров порядка начинает зависеть от времени, в результате чего спектр энергетических уровней также меняется. Этот эффект описывается поправками к запаздывающей и опережающей функциям Грина. Во-вторых, электрическое поле перебрасывает электроны между уровнями с разницей энергии ω и таким образом изменяет числа заполнения этих уровней. Этот эффект описывается поправками к функции распределения. Эти два типа вкладов ведут себя совершенно по-разному при высоких температурах: первые спадают экспоненциально, а вторые - только степенным образом с ростом T .

Перед тем, как перейти к вычислению, обсудим свойства решений вблизи контактов. Эта область требует некоторой осторожности. Уравнения (4.9), (4.10), (4.19) становятся почти вырожденными при больших но конечных значениях параметра γ , и становятся точно вырожденными для $\gamma \rightarrow \infty$. В связи с этим, полезно иметь аналитическое решение этих уравнений вблизи контактов. Такие аналитические решения позволяют исключить область в непосредственной окрестности контакта из рассмотрения, заменив её подходящим граничным условием.

Вообще говоря, граничные условия на все компоненты функции Грина следуют из непрерывности \check{g} на контактах (мы предполагаем отсутствие барьеров). В пределе $\gamma = \Delta/\max(\epsilon, \omega) \rightarrow \infty$ непрерывность Гриновской функции не дает никакого граничного условия для h_L . Это связано с тем, что плотность состояний возбуждений, переносящих энергию, в сверхпроводнике

равна нулю. В приближении $\gamma \rightarrow \infty$, это приводит к тому, что функция распределения h_L имеет скачок при $x = 0$. При любом конечном значении параметра γ , существует небольшая область в окрестности контакта, где функция распределения быстро меняется в пространстве и перестраивается от своего значения в сверхпроводнике, где $h_L = 0$, к конечному значению в проволоке. Размер этой области стремится к нулю при $\gamma \rightarrow \infty$, и мы не будем её рассматривать (заменяя её эффективным граничным условием).

Итак, ниже мы выписываем уравнения на поправки и ищем решения для аномальных функций и функций распределения вблизи контакта. Они будут получены в виде ряда Тейлора в окрестности точки нахождения контакта x_0 , в которой $\theta(x_0) = \frac{i\pi}{2}$.

4.2.1 Неравновесные поправки

Перейдем к обсуждению неравновесных поправок к функции распределения. Они описываются уравнением $\delta\hat{H} = \delta h_L \hat{\tau}_0 + \delta h_T \hat{\tau}_3$. Определяя $h_{L,T}$ согласно $\delta h_{L,T}(\epsilon) = \alpha e^{-i\omega t} f(\epsilon) h_{L,T}(\epsilon)$, мы получим кинетические уравнения, которые удобно записать в виде законов сохранения энергии и заряда:

$$\partial_x j_L + iY\omega h_L = 0, \quad (4.9)$$

$$\partial_x j_T + iY\omega [h_T - (x - 1/2)] = 0. \quad (4.10)$$

Здесь

$$j_L = D_L \partial_x h_L - \mathcal{T} \partial_x h_T + j h_T \quad (4.11)$$

даёт ток заряда, и

$$j_T = D_T \partial_x h_T + \mathcal{T} \partial_x h_L + j h_L \quad (4.12)$$

даёт ток энергии. Транспортные коэффициенты, входящие в определение токов, имеют следующий физический смысл: $D_{L,T}$ - коэффициенты диффузии возбуждений, переносящих энергию и заряд; \mathcal{T} - аномальный транспортный коэффициент; $j = J^R - J_-^A$ - спектральный ток на конечной частоте. Наконец,

Y играет роль плотности состояний квазичастичных возбуждений. Эти величины модифицированы по сравнению со своими равновесными значениями из-за наличия переменного поля. Это подчеркивается следующим обозначением: $f_{\pm}(\epsilon) = f(\epsilon \pm \omega)$.

Транспортные коэффициенты даются следующими выражениями:

$$D_{L,T} = 1 - \cosh \theta^R \cosh \theta_-^A \pm \cos(\chi_-^A - \chi^R) \sinh \theta^R \sinh \theta_-^A,$$

$$\mathcal{T} = -i \sin(\chi_-^A - \chi^R) \sinh \theta^R \sinh \theta_-^A,$$

и

$$Y = \cosh \theta^R - \cosh \theta_-^A.$$

Раскладывая эти выражения в ряды Тейлора в окрестности контакта $x \rightarrow 0$ и подставляя их в кинетические уравнения, можно найти следующие асимптотики функций распределения:

$$h_L(\epsilon, x) = A_0(\epsilon) + A_0(\epsilon) \frac{\Omega}{\zeta(\epsilon)} x + O(x^2),$$

$$h_T(\epsilon, x) = B_0(\epsilon) + B_1(\epsilon) x + O(x^2),$$

где $A_0(\epsilon)$, $B_0(\epsilon)$, $B_1(\epsilon)$ - три произвольные функции энергии, и

$$\zeta(\epsilon) = \partial_x [\theta_-^A(x, \epsilon) - \theta^R(x, \epsilon)] \Big|_{x=0} \quad (4.13)$$

Таким образом, эффективное граничное условие имеет вид:

$$h'_L(x=0, \epsilon) = \frac{\Omega}{\zeta(\epsilon)} h_L(x=0, \epsilon). \quad (4.14)$$

Заметим, что по соображениям симметрии, задача может быть рассмотрена на интервале $[0, 1/2]$ со следующим граничным условием в центре проволоки:

$$h'_L|_{x=1/2} = 0, \quad (4.15)$$

$$h_T|_{x=1/2} = 0. \quad (4.16)$$

4.2.2 Спектральные поправки

Рассмотрим сперва поправки к спектральным величинам, описываемые $\hat{g} = \hat{g}_{eq} + \delta\hat{g}$. Эти поправки ограничены условием нормировки, которое в первом порядке по α имеет вид:

$$\delta\hat{g} \cdot \hat{g}_{eq} + \hat{g}_{eq} \cdot \delta\hat{g} = 0. \quad (4.17)$$

Условие нормировки означает, что матрица $\delta\hat{g}$ размером 2×2 на самом деле содержит только два независимых параметра вместо четырёх. Поэтому ограничение (4.17) оказывается удобно разрешить явным образом. Это достигается следующей параметризацией:

$$\delta\hat{g}(\epsilon_1, t) = \alpha e^{-i\omega t} u_i \Pi_i,$$

где:

$$\Pi_{1,2} = \begin{pmatrix} G - G_- & \mp F - F_- \\ \bar{F} \pm \bar{F}_- & \pm (G - G_-) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

см. Ур. 4.2. В такой параметризации можно получить следующее уравнение, которое описывает поправку $\delta\hat{g}$:

$$\mathcal{D}_2 \mathbf{u}'' + \mathcal{D}_1 \mathbf{u}' + i\omega [\mathcal{D}_t \mathbf{u} + \mathbf{u}_0(x - 1/2)] = 0. \quad (4.19)$$

Действуя также, как и для поправок к функции распределения, получим следующее разложение в ряд:

$$u_1(\epsilon, x) = B_0(\epsilon) + B_1(\epsilon)x + O(x^2),$$

$$u_2(\epsilon, x) = A_0(\epsilon) + A_0(\epsilon) \frac{\Omega}{\tilde{\zeta}(\epsilon)} x + O(x^2).$$

Граничные условия на функцию u_1 следуют из непрерывности функции Грина на контакте и имеют вид $u_1|_{x=0,1} = \mp \frac{1}{2}$, а граничное условие для спектральной поправки имеет вид:

$$u_2'(\epsilon, x=0) = \frac{\Omega}{\tilde{\zeta}(\epsilon)} u_2(\epsilon, x=0)$$

В этих уравнениях мы определили:

$$\tilde{\zeta}(\epsilon) = \partial_x [\theta_-^R(x, \epsilon) - \theta^R(x, \epsilon)]|_{x=0},$$

Заметим, что по соображениям симметрии, задача может быть рассмотрена на интервале $[0, 1/2]$ со следующим граничным условием в центре проволоки:

$$u_2'|_{x=1/2} = 0, \quad (4.20)$$

$$u_1|_{x=1/2} = 0. \quad (4.21)$$

4.2.3 Вычисление электрического тока

Если известны $\delta h_{L,T}$ и $u_{1,2}$, электрический ток можно вычислить согласно формуле $I = I_S(\phi_0) + \alpha e^{-i\omega t} \delta I$. Здесь $I_S(\phi_0)$ - равновесное ток-фазовое соотношение, а отклик на электрическое поле даётся формулами

$$\delta I = \frac{\pi \sigma_N S}{2} \int (d\epsilon) [f(\epsilon) j_T + h(\epsilon - \omega) \beta^R - h(\epsilon) \beta^A], \quad (4.22)$$

где j_T дано в (4.12) и описывает поправки к току, возникающие из-за неравновесия, а

$$\beta = (J - J_-) u_2 + \gamma_i \partial_x u_i \quad (4.23)$$

описывает поправки в ток, возникающие из-за временной зависимости самого спектра, где

$$\gamma_1 = -(-1 + \cosh \theta^R \cosh \theta_-^R + \cos(\chi^R - \chi_-^R) \sinh \theta^R \sinh \theta_-^R),$$

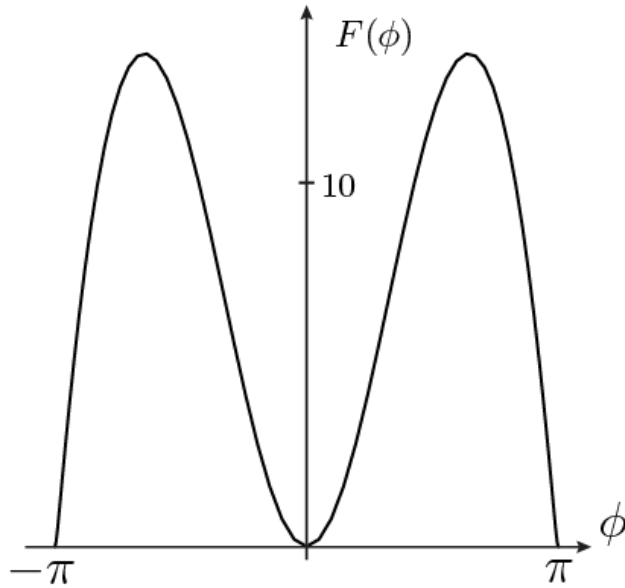


Рис. 4.1: Функция $F(\phi)$ при высоких температурах $T \gg E_{Th}$.

$$\gamma_2 = i \sin(\chi^R - \chi_-^R) \sinh \theta^R \sinh \theta_-^R.$$

Поправка в ток (4.22) может быть вычислена в любой точке интервала $[0, 1]$. Она, вообще говоря, зависит от координаты. Если бы мы учли электрическое поле, создаваемое электронами (то есть, экранировку внешнего поля), ток был бы пространственно однороден (в связи с несжимаемостью электронной жидкости). Таким образом, величина пространственной модуляции тока может служить указанием на величину неточности, которую мы допускаем, пренебрегая экранировкой потенциала. Вычисление пространственной зависимости электрического тока показывает, что его вариация по нормальному контакту при частотах $\omega \lesssim 5E_{Th}$ составляет не более 5%.

4.3 Адиабатический предел: результаты

Решение полученных уравнений, вообще говоря, возможно только численно. Однако, в пределе низких частот эта задача существенно упрощается. Это связано с тем, что в этом случае i) спектральную поправку можно рассматривать в адиабатическом пределе и ii) кинетическое уравнение, определяющее функцию распределения h_L можно решить воспользовавшись тем, что при низких частотах функция распределения почти не зависит от координаты.

Такой предел был рассмотрен Лемпицким в работе [88]. Следует воспользоваться тем, что при малых частотах граничное условие (4.14) сводится к обращению в ноль производной на контакте, и оказывается возможным пренебречь градиентом функции распределения h_L в проволоке. Это приводит к тому, что в этой области ответ для восприимчивости тока (который оказывается, в основном, бездиссипативным) по отношению к переменной разности сверхпроводящих фаз даётся следующей формулой:

$$\chi(\phi_0) = \frac{\partial I_S}{\partial \phi} - \frac{E_{Th}}{T} F(\phi). \quad (4.24)$$

Эта формула написана в бесстолкновительном пределе, когда частота внешнего поля много больше частоты неупругих столкновений. Функция $I_S(\phi)$ описывает равновесное ток-фазовое соотношение, которое синусоидально при высоких температурах: $I_S = I_c \sin \phi$ с критическим током, которые при $T \gg T_c$ даётся соотношением [97]:

$$eRI_c = \frac{32}{3 + 2\sqrt{2}} E_{Th} \left(\frac{L}{L_T} \right)^2 e^{-L/L_T}, \quad (4.25)$$

где R - сопротивление перехода в нормальном состоянии и $L_T = \sqrt{D/2T}$. Для вычисления функции $F(\phi)$ следует найти спектральный ток $j_S(\epsilon)$ и плотность состояний $\rho(\epsilon)$ из стационарного уравнение Узаделя, так что

$$F(\phi) = \int \frac{j_S^2(\epsilon)}{\langle \rho(\epsilon) \rangle} \frac{d\epsilon}{E_{Th}}. \quad (4.26)$$

Этот результат был получен в [88]. Однако, при вычислении функции $F(\phi)$, в этой работе была допущена численная ошибка. А именно, качественное поведение функции при $\phi = \pm\pi$ иное, чем представлено на Рис. 1 в этой работе. Согласно нашему вычислению, производная $F'(\phi)$ имеет разрывы в этих точках, что хорошо заметно на на экспериментальных кривых, см. Рис. 4.2.

Остановимся более подробно на используемом методе численного решения уравнения Узаделя. Заметим, что нужно решать только стационарное уравнение, что является относительно простой задачей. А именно, решение

невозмущенного уравнения может быть сведено к решению двух трансцендентных уравнений, написанных на два его 'интеграла движения'. Первый из них уже введён выше: $J(\epsilon)$, в качестве второго может быть выбрано значение спектрального угла в середине перехода: $\theta(\epsilon, x = 1/2) = \theta_0(\epsilon)$:

$$(\partial_x \theta)^2 + 4i\epsilon \cosh \theta - J^2 \coth^2 \theta = 4i\epsilon \cosh \theta_0 - J^2 \coth^2 \theta_0.$$

Получающиеся уравнения на J и θ_0 следует решить при каждом значении энергии ϵ :

$$\int_{i\pi/2}^{\theta_0} g_{J,\theta_0}(\theta) d\theta = \frac{1}{2}, \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

$$J \int_{i\pi/2}^{\theta_0} \frac{g_{J,\theta_0}(\theta) d\theta}{\sinh^2 \theta} = \frac{\phi_0}{2}. \quad (4.29)$$

Здесь

$$g_{J,\theta_0} = [J^2 (\coth^2 \theta - \coth^2 \theta_0) - 4i\epsilon/E_{Th} (\cosh \theta - \cosh \theta_0)]^{-1/2}. \quad (4.30)$$

После того, как найдены J и θ_0 , вычисление пространственной зависимости θ , а затем и ϕ сводится к решению начальной задачи для уравнения второго порядка. Когда такие зависимости найдены, следует вычислить $F(\phi)$ в соответствии с формулой (4.26). Результат приведён на Рис. 4.1.

4.4 Заключение

Рассмотрена теория линейного отклика SNS структуры на переменную разность фаз. Результаты в адиабатическом пределе удовлетворительно согласуются с данными эксперимента [7], результат которого приведен на Рис. 4.2. Для описания результатов эксперимента в большем интервале параметров (с ростом частоты, то есть в режиме $\omega \gg E_{Th}$), следует решить уравнения линейного отклика численно. Подобная попытка была предпринята в недавней

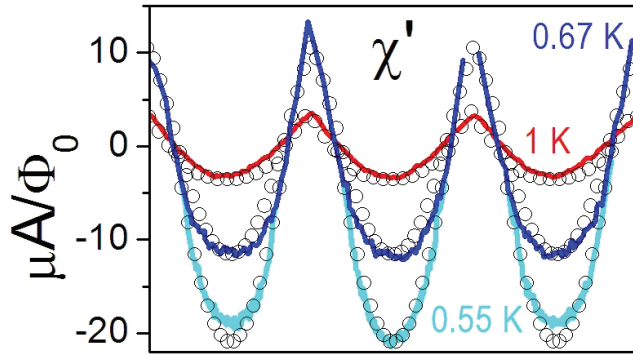


Рис. 4.2: Бездиссипативная восприимчивость SNS - перехода при частоте $\omega = 0.2E_{Th}$ как функция dc разности фаз: теория, см. Ур. (4.24), и эксперимент.

работе [98], однако результаты качественно отличаются от результатов эксперимента, поэтому изучение этого вопроса всё еще представляет интерес.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Показано, что покрытие малой площади графена сверхпроводящими островками может привести его в сверхпроводящее состояние. Критическая температура наступления глобальной фазовой когерентности может составлять $\sim 1K$ при доступных экспериментально параметрах. При низких температурах и в отсутствие магнитного поля в плотности состояний присутствует щель $E_g \lesssim T_c$, появляющаяся из-за коллективного эффекта близости.

2. Получены общие выражения для эффекта сверхпроводящих флуктуаций на тензор электрической проводимости. Эти результаты справедливы во всей области выше сверхпроводящего перехода и могут быть применены для количественного анализа экспериментальных данных. Численный расчёт флуктуационных поправок позволяет выделить на фазовой диаграмме области с различным качественным поведением проводимости как функции магнитного поля и температуры.

3. Развита теория нестационарного когерентного тока в длинной SNS структуре с сильным нормальным рассеянием на контактах. В условиях постоянного напряжения получены аналитические выражения для функций Грина и функций распределения в нормальной области. Показано, что при высоких температурах нестационарный электрический ток доминируется членами старшего порядка по прозрачности r^{-4} (когда 'обычный' вклад r^{-2} оказывается экспоненциально подавлен).

4. Рассмотрена теория линейного отклика SNS структуры на переменную разность фаз. Результаты в адиабатическом пределе удовлетворительно согласуются с данными эксперимента [7].

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю М. В. Фейгельману — за внимание к работе, научное руководство, ценные советы и поддержку. Автор также благодарен своим соавторам — И. С. Бурмистрову и М. А. Скворцову и, особенно, А. М. Финкельштейну — за совместную работу и неоднократные полезные обсуждения. Автор также благодарен А. С. Мельникову, Н. Bouchiat, И. Горному, S. Gueron, С. В. Иорданскому, А. С. Иоселевичу, А. Д. Мирлину, И. В. Колоколову, Н. Б. Копнину, К. Michaeli, В. В. Рязанову, М. Н. Сербину, G. Schwiete, Я. В. Фоминову, J. Schmalian и всем сотрудникам Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау, вопросы которых оказали большую помощь в работе.

Работа над диссертацией проходила при финансовой поддержке грантов: РФФИ 07-02- 00310, РФФИ 10-02-00554, National Science Foundation NSF-DMR-1006752 и программы РАН "Квантовая физика конденсированного состояния вещества".

Публикации по теме диссертации

1. M. V. Feigel'man, M. A. Skvortsov, K. S. Tikhonov, Proximity-induced superconductivity in graphene, *Pis'ma v ZhETF*, vol. 88, iss. 11, pp. 862 - 866 (2008).
2. K. S. Tikhonov, M. V. Feigel'man, AC Josephson effect in the long voltage-biased SINIS junction, *Pis'ma v ZhETF*, vol. 89, iss. 4, pp. 230 – 235 (2009).
3. F. Chiodi, M. Ferrier, K. Tikhonov, P. Virtanen, T. T. Heikkila, M. Feigelman, S. Gue'ron, H. Bouchiat, Probing the dynamics of Andreev states in a coherent Normal/Superconducting ring, *Scientific Reports* 1, Article number: 3 (2011).
4. K. S. Tikhonov, G. Schwiete, A. M. Finkel'stein, Fluctuation conductivity in disordered superconducting films, *Physical Review B* 85, 174527 (2012).

Литература

- [1] *Pannetier B., Courtois H.* Andreev reflection and proximity effect // *Journal of low temperature physics.* — 2000. — Vol. 118, no. 5-6. — Pp. 5–6.
- [2] *Heikkilä T., Särkkä J., Wilhelm F.* Supercurrent-carrying density of states in diffusive mesoscopic josephson weak links // *Physical Review B.* — 2002. — Vol. 66, no. 18. — P. 184513.
- [3] Effect of microwaves on the current-phase relation of superconductor–normal-metal–superconductor josephson junctions / M. Fuechsle, J. Bentner, D. Ryndyk et al. // *Physical review letters.* — 2009. — Vol. 102, no. 12. — P. 127001.
- [4] Microwave-enhanced proximity effect in superconductor-normal-metal-superconductor microjunctions / J. Warlaumont, J. Brown, T. Foxe, R. Buhrman // *Physical Review Letters.* — 1979. — Vol. 43, no. 2. — Pp. 169–172.
- [5] Nonequilibrium ac josephson effect in mesoscopic nb-inas-nb junctions / K. Lehnert, N. Argaman, H. Blank et al. // *Physical review letters.* — 1999. — Vol. 82, no. 6. — Pp. 1265–1268.
- [6] *Chiodi F., Aprili M., Reulet B.* Evidence for two time scales in long sns junctions // *Physical review letters.* — 2009. — Vol. 103, no. 17. — P. 177002.
- [7] Probing the dynamics of andreev states in a coherent normal/superconducting ring / F. Chiodi, M. Ferrier, K. Tikhonov et al. // *Scientific reports.* — 2011. — Vol. 1.
- [8] Electric field effect in atomically thin carbon films / K. Novoselov, A. Geim, S. Morozov et al. // *Science.* — 2004. — Vol. 306, no. 5696. — Pp. 666–669.
- [9] The electronic properties of graphene / A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres et al. // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Jan. — Vol. 81. — Pp. 109–162.

- [10] Bipolar supercurrent in graphene / H. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. Oostinga et al. // *Nature*. — 2007. — Vol. 446, no. 7131. — Pp. 56–59.
- [11] *Allain A., Han Z., Bouchiat V.* Electrical control of the superconducting-to-insulating transition in graphene–metal hybrids // *Nature Materials*. — 2012. — Vol. 11, no. 7. — Pp. 590–594.
- [12] *Aslamazov L. G., Larkin A. I.* Effect of fluctuations on the properties of a superconductor above the critical temperature // *Fiz. Tverd. Tela*. — 1968. — Vol. 10. — P. 1104.
- [13] *Larkin A. I., Varlamov A. A.* Theory of fluctuations in superconductors. — Oxford University Press, USA, 2005. — Vol. 127.
- [14] *Hadacek N., Sanquer M., Villégier J. C.* Double reentrant superconductor-insulator transition in thin tin films // *Phys. Rev. B*. — 2004. — Vol. 69, no. 2. — P. 024505.
- [15] *Steiner M., Kapitulnik A.* Superconductivity in the insulating phase above the field-tuned superconductor-insulator transition in disordered indium oxide films // *Physica C*. — 2005. — Vol. 422, no. 12. — Pp. 16 – 26.
- [16] From quantum corrections to magnetic-field-tuned superconductor-insulator quantum phase transition in tin films / T. I. Baturina, J. Bentner, C. Strunk et al. // *Physica B*. — 2005. — Vol. 359, no. 0. — Pp. 500 – 502.
- [17] Observation of the nernst signal generated by fluctuating cooper pairs / A. Pourret, H. Aubin, J. Lesueur et al. // *Nature Phys.* — 2006. — Vol. 2, no. 10. — Pp. 683–686.
- [18] Fluctuation superconductivity in mesoscopic aluminum rings / N. C. Koshnick, H. Bluhm, M. E. Huber, K. A. Moler // *Science*. — 2007. — Vol. 318, no. 5855. — P. 1440.
- [19] Dynamical study of phase fluctuations and their critical slowing down in amorphous superconducting films / W. Liu, M. Kim, G. Sambandamurthy, N. P. Armitage // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Jul. — Vol. 84. — P. 024511.

- [20] *Usadel K. D.* Generalized diffusion equation for superconducting alloys // *Physical Review Letters*. — 1970. — Vol. 25, no. 8. — Pp. 507–509.
- [21] *Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N.* Quasiclassical method in the theory of superconductivity // *Sov. Phys. JETP*. — 1969. — Vol. 28, no. 6. — Pp. 1200–1205.
- [22] *Kopnin N. B.* Theory of Nonequilibrium Superconductivity. — New York: Oxford University Press, 2001.
- [23] Quasiclassical green's function approach to mesoscopic superconductivity / W. Belzig, F. K. Wilhelm, C. Bruder et al. // *Superlattices Microstruct.* — 1999. — Vol. 25, no. 5-6. — Pp. 1251–1288.
- [24] *Smith H., Rammer J.* Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals // *Rev. Mod. Phys.* — 1986. — Vol. 58, no. 2.
- [25] *Levchenko A., Kamenev A.* Keldysh ginzburg-landau action of fluctuating superconductors // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Sep. — Vol. 76, no. 9. — P. 094518.
- [26] *Kamenev A., Levchenko A.* Keldysh technique and non-linear σ -model: basic principles and applications // *Adv. in Phys.* — 2009. — Vol. 58, no. 3. — Pp. 197–319.
- [27] *Aslamazov L., Larkin A., Ovchinnikov Y.* Josephson effect in superconductors separated by a normal metal // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1969. — Vol. 28. — P. 171.
- [28] *Uchoa B., Castro Neto A. H.* Superconducting states of pure and doped graphene // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Apr. — Vol. 98. — P. 146801. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.146801>.
- [29] *Profeta G., Calandra M., Mauri F.* Phonon-mediated superconductivity in graphene by lithium deposition // *Nature Physics*. — 2012.
- [30] *Beenakker C.* Specular andreev reflection in graphene // *arXiv preprint cond-mat/0604594*. — 2006.

- [31] *Kupriyanov M., Lukichev V.* Influence of boundary transparency on the critical current of dirty sss structures // *Sov. Phys. JETP.* — 1988. — Vol. 67, no. 6. — Pp. 1163–1168.
- [32] Evidence of the role of contacts on the observed electron-hole asymmetry in graphene / B. Huard, N. Stander, J. A. Sulpizio, D. Goldhaber-Gordon // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Sep. — Vol. 78. — P. 121402.
- [33] *Shih W., Stroud D.* Two-dimensional superconducting arrays in a magnetic field: Effects of lattice structures // *Physical Review B.* — 1985. — Vol. 32, no. 1. — P. 158.
- [34] Weak localization in graphene flakes / F. V. Tikhonenko, D. W. Horsell, R. V. Gorbachev, A. K. Savchenko // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Feb. — Vol. 100. — P. 056802.
- [35] *Ivanov D. A., von Roten R., Blatter G.* Minigap in a long disordered sns junction: analytical results // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Aug. — Vol. 66. — P. 052507.
- [36] *Ostrovsky P. M., Skvortsov M. A., Feigel'man M. V.* Density of states below the Thouless gap in a mesoscopic sns junction // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Jun. — Vol. 87. — P. 027002.
- [37] *Cuevas J. C., Bergeret F. S.* Magnetic interference patterns and vortices in diffusive sns junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Nov. — Vol. 99. — P. 217002.
- [38] *Spivak B., Zhou F.* Mesoscopic effects in disordered superconductors near h_{c2} // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Apr. — Vol. 74. — Pp. 2800–2803.
- [39] *Galitski V. M., Larkin A. I.* Disorder and quantum fluctuations in superconducting films in strong magnetic fields // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Aug. — Vol. 87. — P. 087001.

- [40] *Feigel'man M. V., Larkin A. I., Skvortsov M. A.* Quantum superconductor-metal transition in a proximity array // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Feb. — Vol. 86. — Pp. 1869–1872.
- [41] *Feigel'Man M., Larkin A.* Quantum superconductor–metal transition in a 2d proximity-coupled array // *Chemical physics.* — 1998. — Vol. 235, no. 1. — Pp. 107–114.
- [42] Tunable superconducting phase transition in metal-decorated graphene sheets / B. M. Kessler, i. m. c. O. Girit, A. Zettl, V. Bouchiat // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Jan. — Vol. 104. — P. 047001.
- [43] *Beasley M. R., Mooij J. E., Orlando T. P.* Possibility of vortex-antivortex pair dissociation in two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1979. — Apr. — Vol. 42. — Pp. 1165–1168.
- [44] *Epstein K., Goldman A. M., Kadin A. M.* Renormalization effects near the vortex-unbinding transition of two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. B.* — 1982. — Oct. — Vol. 26. — Pp. 3950–3953.
- [45] *Maki K.* The critical fluctuation of the order parameter in type-ii superconductors // *Prog. Theor. Phys.* — 1968. — Vol. 39, no. 4. — Pp. 897–906.
- [46] *Thompson R. S.* Microwave, flux flow, and fluctuation resistance of dirty type-ii superconductors // *Phys. Rev. B.* — 1970. — Jan. — Vol. 1. — Pp. 327–333.
- [47] *Galitski V. M., Larkin A. I.* Superconducting fluctuations at low temperature // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 63, no. 17. — P. 174506.
- [48] *Fukuyama H., Ebisawa H., Tsuzuki T.* Fluctuation of the order parameter and hall effect // *Prog. Theor. Phys.* — 1971. — Vol. 46, no. 4. — Pp. 1028–1041.
- [49] *Aronov A. G., Rapoport A. B.* Hall effect in superconductors above t_c // *Mod. Phys. Lett. B.* — 1992. — Vol. 6, no. 16-17. — P. 1083.

- [50] *Aronov A. G., Hikami S., Larkin A. I.* Gauge invariance and transport properties in superconductors above T_c // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Vol. 51, no. 6. — P. 3880.
- [51] *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzyaloshinski I. E.* *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics.* — New-Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1963.
- [52] *Volkov A. F., Nagaev K. E., Seviour R.* Fluctuation paraconductivity in mesoscopic superconductor–normal-metal contacts // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Mar. — Vol. 57, no. 9. — Pp. 5450–5456.
- [53] *Feigel'man M. V., Larkin A. I., Skvortsov M. A.* Keldysh action for disordered superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2000. — May. — Vol. 61, no. 18. — Pp. 12361–12388.
- [54] *Eilenberger G.* Transformation of gorkov's equation for type ii superconductors into transport-like equations // *Z. Phys.* — 1968. — Vol. 214. — Pp. 195–213.
- [55] *Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N.* Nonlinear fluctuation phenomena in the transport properties of superconductors // *JETP.* — 2001. — Vol. 92, no. 3. — Pp. 519–528.
- [56] *Galitski V. M., Das Sarma S.* Renormalization of the upper critical field by superconducting fluctuations // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67, no. 14. — P. 144501.
- [57] *Zala G., Narozhny B. N., Aleiner I. L.* Interaction corrections at intermediate temperatures: Magnetoresistance in a parallel field // *Physical Review B.* — 2001. — Vol. 65, no. 2. — P. 020201.
- [58] *Reizer M. Y.* Fluctuation conductivity above the superconducting transition: Regularization of the maki-thompson term // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Jun. — Vol. 45. — Pp. 12949–12958.

- [59] *Altshuler B. L., Aronov A. G., Khmel'nitsky D. E.* Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation // *Journal of Physics C*. — 1982. — Vol. 15. — P. 7367.
- [60] *Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N.* Influence of inhomogeneities on superconductor properties // *JETP*. — 1972. — Vol. 34. — P. 651.
- [61] Inelastic scattering time above the superconductivity transition in two dimensions: Dependence on disorder and magnetic field / W. Brenig, M. C. Chang, E. Abrahams, P. Wölfle // *Phys. Rev. B*. — 1985. — Vol. 31. — Pp. 7001–7005.
- [62] *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. — Dover Publ. NY, 1972.
- [63] *Smith R. A., Handy B. S., Ambegaokar V.* Upper critical field in disordered two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Mar. — Vol. 61. — Pp. 6352–6359.
- [64] Magnetoconductance of thin-film superconductors near critical disorder / W. Brenig, M. A. Paalanen, A. F. Hebard, P. Wölfle // *Phys. Rev. B*. — 1986. — Feb. — Vol. 33. — Pp. 1691–1699.
- [65] *Schmid A.* Diamagnetic susceptibility at the transition to the superconducting state // *Phys. Rev.* — 1969. — Apr. — Vol. 180. — Pp. 527–529.
- [66] *Gor'kov L. P.* Singularities of the resistive state with current in thin superconducting films // *JETP Lett.* — 1970. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 32–35.
- [67] *Varlamov A., Reggiani L.* Nonlinear fluctuation conductivity of a layered superconductor: Crossover in strong electric fields // *Physical Review B*. — 1992. — Vol. 45, no. 2. — P. 1060.
- [68] *Mishonov T., Posazhennikova A., Indekeu J.* Fluctuation conductivity in superconductors in strong electric fields // *Phys. Rev. B*. — 2002. — Jan. — Vol. 65. — P. 064519.

- [69] *Michaeli K., Finkel'stein A.* Fluctuations of the superconducting order parameter as an origin of the nernst effect // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2009. — Vol. 86, no. 2. — P. 27007.
- [70] *Michaeli K., Tikhonov K., Finkel'stein A.* Hall effect in superconducting films // *Physical Review B*. — 2012. — Vol. 86, no. 1. — P. 014515.
- [71] *Tarasinski B.* — Fluctuation corrections to conductivity in superconducting films and cylinders. — Master's thesis, Freie Universitat Berlin, 2012.
- [72] *Abrahams E., Prange R. E., Stephen M. J.* Effect of a magnetic field on fluctuations above t_c // *Physica*. — 1971. — Vol. 55. — Pp. 230–233.
- [73] *Hikami S., Larkin A.* Magnetoresistance of high temperature superconductors // *Mod. Phys. Lett. B*. — 1988. — Vol. 2, no. 5. — Pp. 693–698.
- [74] Fluctuation conductivity of layered superconductors in a perpendicular magnetic field / V. V. Dorin, R. A. Klemm, A. A. Varlamov et al. // *Phys. Rev. B*. — 1993. — Nov. — Vol. 48. — Pp. 12951–12965.
- [75] *Altshuler B. L., Varlamov A., Reizer M. Y.* Electron-interaction effects and conductivity of disordered two-dimensional systems // *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* — 1983. — Vol. 84. — Pp. 2280–2289.
- [76] *Fukuyama H.* Electron-Electron Interactions in Disordered Systems. — North-Holland Amsterdam, 1985.
- [77] *Aslamazov L. G., Varlamov A. A.* Fluctuation conductivity in intercalated superconductors // *Journal of Low Temperature Physics*. — 1980. — Vol. 38. — Pp. 223–241.
- [78] *Glatz A., Varlamov A. A., Vinokur V. M.* Fluctuation spectroscopy of disordered two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Sep. — Vol. 84. — P. 104510.

- [79] Hall conductivity dominated by fluctuations near the superconducting transition in disordered thin films / N. Breznay, K. Michaeli, K. Tikhonov et al. // *Physical Review B*. — 2012. — Vol. 86, no. 1. — P. 014514.
- [80] *Lopatin A. V., Shah N., Vinokur V. M.* Fluctuation conductivity of thin films and nanowires near a parallel-field-tuned superconducting quantum phase transition // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Jan. — Vol. 94. — P. 037003.
- [81] *Shah N., Lopatin A.* Microscopic analysis of the superconducting quantum critical point: Finite-temperature crossovers in transport near a pair-breaking quantum phase transition // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Sep. — Vol. 76. — P. 094511.
- [82] *Serbin M.* — Fluctuational Nernst effect in Superconductors. — Master’s thesis, Landau Institute for Theoretical Physics, 2009.
- [83] *Paalanen M. A., Hebard A. F., Ruel R. R.* Low-temperature insulating phases of uniformly disordered two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Sep. — Vol. 69. — Pp. 1604–1607.
- [84] *Ikeda R.* Comment on “disorder and quantum fluctuations in superconducting films in strong magnetic fields” // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Aug. — Vol. 89. — P. 109703.
- [85] *Galitski V. M., Larkin A. I.* Galitski and larkin reply: // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Aug. — Vol. 89. — P. 109704.
- [86] *Hebard A. F., Paalanen M. A.* Pair-breaking model for disorder in two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. B*. — 1984. — Oct. — Vol. 30. — Pp. 4063–4066.
- [87] Circuit theory of multiple andreev reflections in diffusive sns junctions: The incoherent case / E. V. Bezuglyi, E. N. Bratus’, V. S. Shumeiko et al. // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Dec. — Vol. 62. — Pp. 14439–14451.

- [88] *Lempitskii S. V.* Stimulation of superconductivity by a direct current in a superconductor-normal metal-superconductor junction // *Sov. Phys. JETP*. — 1983. — Vol. 58. — P. 624.
- [89] *Argaman N.* Nonequilibrium josephson-like effects in wide mesoscopic sns junctions // *Superlattices and microstructures*. — 1999. — Vol. 25, no. 5. — Pp. 861–875.
- [90] Microscopic nonequilibrium theory of double-barrier josephson junctions / A. Brinkman, A. A. Golubov, H. Rogalla et al. // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Dec. — Vol. 68. — P. 224513.
- [91] *Zhou F., Spivak B.* Resistance of superconductor-normal-metal-superconductor (sns) junctions // *JETP Letters*. — 1997. — Vol. 65, no. 4. — Pp. 369–374.
- [92] *Larkin A., Ovchinnikov Y.* Nonlinear conductivity of superconductors in the mixed state // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1975. — Vol. 41. — P. 960.
- [93] *McMillan W. L.* Tunneling model of the superconducting proximity effect // *Phys. Rev.* — 1968. — Nov. — Vol. 175. — Pp. 537–542.
- [94] Coherent low-energy charge transport in a diffusive s-n-s junction / P. Dubos, H. Courtois, O. Buisson, B. Pannetier // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Oct. — Vol. 87. — P. 206801.
- [95] *Zhou F., Spivak B.* Resistance of superconductor-normal metal-superconductor junctions // *arXiv preprint cond-mat/9604185*. — 1996.
- [96] *Eliashberg G.* Film superconductivity stimulated by a high-frequency field // *Jetp Lett.* — 1970. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 114–116.
- [97] Josephson critical current in a long mesoscopic s-n-s junction / P. Dubos, H. Courtois, B. Pannetier et al. // *Phys. Rev. B*. — 2001. — Jan. — Vol. 63. — P. 064502. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.63.064502>.

- [98] Theory of microwave-assisted supercurrent in diffusive sns junctions / P. Virtanen, T. Heikkilä, F. Bergeret, J. Cuevas // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 104, no. 24. — P. 247003.