

На правах рукописи

УДК 530.145 51-71 512.54

ТАРНОПОЛЬСКИЙ Григорий Михайлович

**Интегрируемые структуры в 2d Конформной теории поля
и 4d Суперсимметричной калибровочной теории поля.**

Специальности 01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
А. А. Белавин

Черноголовка — 2014

Оглавление

Введение	4
1 Объяснение классического АГТ соответствия	5
1.1 Гипотеза Алдая, Гаиотто и Тачикавы.	5
1.2 Специальный базис состояний в алгебре $\text{Vir} \otimes \mathcal{H}$	11
1.3 Доказательство Главного предложения	14
2 Объяснение суперсимметричного АГТ соответствия	26
2.1 Обобщение АГТ соответствия	26
2.2 Случай $p = 1$	32
2.2.1 Геометрический подход	32
2.2.2 Алгебраический подход	34
2.3 Суперсимметричный случай ($p = 2, r = 2$)	39
2.3.1 Геометрический подход	39
2.3.2 Алгебраический подход	41
2.4 Суперсимметричный случай: другая компактификация	49
2.4.1 Другая компактификация	49
2.4.2 Случай $r = 1$	52
3 Дальнейшее обобщение АГТ соответствия	56
3.1 Общая конструкция	56
3.2 Подсчет неподвижных точек действия тора на пространстве модулей инстантонов	58
3.2.1 Фиксированные точки на пространстве модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$	58
3.2.2 Подсчет не эквивалентных производящих функций цветных диаграмм Юнга	60
3.3 Первая реализация алгебры $\mathcal{A}(2, p)$	62

3.3.1	p моделей с симметрией алгебры Вирасоро	63
3.3.2	Сравнение с производящими функциями раскрашенных диаграмм Юнга . .	68
3.4	Вторая реализация алгебры $\mathcal{A}(2, p)$	68
3.4.1	Представления косета $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$	70
3.4.2	Произведение последовательных Минимальных моделей	71
3.4.3	Сравнение с первой реализацией алгебры $\mathcal{A}(2, p)$	72
3.5	Сравнение инстантонных статистических сумм	74
3.5.1	Первая компактификация	74
3.5.2	Вторая компактификация	76
Приложения		77
	Приложение 1	77
	Приложение 2	81
	Приложение 3	82
	Приложение 4	85
	Приложение 5	88
	Приложение 6	89
	Приложение 7	91
	Приложение 8	94
Заключение		96
Публикации по теме диссертации		97

Введение

Открытие АГТ явилось своего рода неожиданностью для экспертов в области двумерной конформной теории поля. Это связано с тем, что активное изучение двумерной конформной теории поля началось в 1984 году со знаменитой статьи Белавина, Полякова и Замолотчикова [2], и продолжается по настоящее время. Главная идея этих авторов состояла в одновременном использовании конформной симметрии теории и гипотезы об операторной алгебре локальных полей [3]. За это время в изучении конформной теории поля был достигнут определенный прогресс. В частности, были хорошо изучены свойства одного из основных объектов в теории — конформного блока. Но явной формулы для данного объекта известно не было. Конформный блок можно было вычислять как ряд по степеням параметров (конформных инвариантов координат локальных операторов) коэффициент за коэффициентом, но общего ответа для n -ого коэффициента ряда не было известно. С появлением АГТ соответствия [1], которое по сути устанавливало явную формулу для конформного блока в двумерной конформной теории поля, начался новый подъем интереса к двумерной конформной теории поля.

Алдай, Гаиотто и Тачикава предложили связь между двумерными конформными теориями и $\mathcal{N} = 2$ четырехмерными суперсимметричными калибровочными теориями. В частности, они связали n -точечный конформный блок на сфере с инстантонной частью статистической суммы Некрасова [8, 10, 130] для калибровочной теории с калибровочной группой $U(2)_1 \otimes \cdots \otimes U(2)_{n-3}$ и со специальным набором полей материи, который либо в (анти-)фундаментальном представлении группы $U(2)_1$ или $U(2)_{n-3}$ либо в бифундаментальном представлении $U(2)_i \otimes U(2)_{i+1}$ для $i = 1, \dots, n-2$. Теории такого типа обычно называются линейными квиверными калибровочными теориями [11–14].

Вследствие результатов статьи [1] передовыми задачами стали задачи о понимании и доказательстве АГТ соответствия.

Глава 1

Объяснение классического АГТ соответствия

1.1 Гипотеза Алдая, Гаиотто и Тачикавы.

Бутстрапный подход к двумерной конформной теории поля был предложен в известной статье [2] Белавиным, Поляковым и Замолотчиковым. Их главная идея была в одновременной использовании конформной симметрии теории и гипотезе об операторной алгебре локальных полей [3]. А именно, если предположить существование полного набора локальных полей $\{\mathcal{O}_k(\xi)\}$ в теории, то полнота такого набора локальных полей эквивалентна операторной алгебре

$$\mathcal{O}_i(\xi)\mathcal{O}_j(0) = \sum_k C_{ij}^k(\xi)\mathcal{O}_k(0). \quad (1.1)$$

Структурные константы $C_{ij}^k(\xi)$ являются однозначными функциями, которые удовлетворяют бесконечной системе уравнений, следующих из условия ассоциативности операторной алгебры (1.1). В общем, эта система уравнений очень сложна для точного решения. Однако, в двумерной Конформной теории поля можно продвинуться на этом пути намного дальше, так как конформная группа является бесконечно размерной в этом случае, что влечет за собой сильные ограничения на возможную форму структурных констант $C_{ij}^k(\xi)$. Можно показать, что полный набор полей $\{\mathcal{O}_k(\xi)\}$ раскладывается в данном случае на прямую сумму конформных семейств

$$\{\mathcal{O}_k(\xi)\} = \sum_n [\Phi_n]. \quad (1.2)$$

Прородитель каждого семейства Φ_n называется примарным полем. Оно преобразуется как

$$\Phi_n(z, \bar{z}) \longrightarrow \left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta_n} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}_n} \Phi_n(w, \bar{w}), \quad (1.3)$$

при конформных преобразованиях

$$z \rightarrow w(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z}).$$

Квантовые числа Δ_n и $\bar{\Delta}_n$ называются конформными размерностями. Другие представители конформного семейства $[\Phi_n]$ обычно называются полями-потомками. Их конформные размерности составляют бесконечную целую последовательность

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_n + k, \quad \bar{\Delta}_n^{(k)} = \bar{\Delta}_n + \bar{k},$$

и каждое конформное семейство соответствует какому-то определенному представлению старшего веса конформной группы. В двух измерениях конформная группа является тензорным произведением голоморфной и антиголоморфной алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n - m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

и поэтому конформное семейство является тензорным произведением $[\Phi_n] = \pi_n \otimes \bar{\pi}_n$ двух модулей Верма алгебры Вирасоро. Параметр c в (1.4) является важной характеристикой Конформной теории поля и называется центральным зарядом. Более того, можно показать, что все структурные константы $C_{ij}^k(\xi)$ могут быть вычислены в терминах структурных констант C_{ij}^k примарных полей [2].

Эта простая структура пространства полей в двумерной Конформной теории поля приводит к введению понятия *конформных блоков*. Они представляют голоморфный вклад в многоточечную корреляционную функцию примарных полей

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \quad (1.5)$$

с выбором определенных конформных семейств $\tilde{\Delta}_j$ в промежуточных каналах. Удобно представить

n -точечный конформный блок следующей картинкой [2]:¹

$$\Delta_1 \text{---} \Delta_2 \text{---} \tilde{\Delta}_1 \text{---} \Delta_3 \text{---} \tilde{\Delta}_2 \text{---} \dots \text{---} \tilde{\Delta}_{n-4} \text{---} \Delta_{n-2} \text{---} \tilde{\Delta}_{n-3} \text{---} \Delta_{n-1} \text{---} \Delta_n \quad (1.6)$$

которая заключает в себе способ того, как выполнено операторное разложение (1.5). n -точечный конформный блок (1.6) является функцией голоморфных координат z_1, \dots, z_n , и внешних размерностей $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, а также промежуточных размерностей $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_{n-3}$ и центрального заряда c . Удобно использовать проективную симметрию и зафиксировать $z_1 = 0$, $z_{n-1} = 1$ и $z_n = \infty$. Также удобно выбрать

$$z_{i+1} = q_i q_{i+1} \dots q_{n-3} \quad \text{для} \quad 1 \leq i \leq n-3,$$

тогда конформный блок, соответствующий картинке (1.6), является рядом [2]

$$\mathcal{F}(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) = 1 + \sum_{\vec{k}} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_{n-3}^{k_{n-3}} \mathcal{F}_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c), \quad (1.7)$$

где сумма берется по всем положительным целым $\vec{k} = (k_1, \dots, k_{n-3})$ и коэффициенты $\mathcal{F}_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c)$ являются какими-то рациональными функциями от Δ_i , $\tilde{\Delta}_j$ и центрального заряда c , который полностью определен (в общем) конформной симметрией [2]. Идея заключается в том, чтобы “разрезать” все промежуточные каналы конформного блока (1.6) и “вставить” полный набор состояний [4]. Тогда проблема вычисления коэффициентов $\mathcal{F}_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c)$ в (1.7) эквивалентна проблеме нахождения нормированных матричных элементов произвольных примарных полей между состояниями в Конформной теории поля:

$$\frac{\langle i | L_{k'_1} \dots L_{k'_m} \Phi_k(1) L_{-k_n} \dots L_{-k_1} | j \rangle}{\langle i | \Phi_k(1) | j \rangle}. \quad (1.8)$$

Для двух данных наборов целых чисел (k_1, \dots, k_n) и (k'_1, \dots, k'_m) вычисление матричного элемента (1.8) является проблемой математических манипуляций с элементами алгебры Вирасоро. Матричный элемент является некоторым полиномом от конформных размерностей Δ_i , Δ_j и Δ_k . Однако, такое математическое вычисление становится очень трудным для высоких уровней. Можно упростить эту процедуру если различать “конформные поля” и “производные” [5], но все равно задача

¹На протяжении данного текста мы будем рассматривать конформные блоки только на сфере, т.е. на поверхности рода 0.

нахождения явного ответа для матричных элементов (1.8) остается трудной. Явные выражения для низших уровней, полученные алгебраической программой, которая работает с символьными переменными, не содержат признаков общей формулы. Поэтому было бы желательно иметь более эффективный алгоритм вычисления разложения (1.7). Одна возможность известна как рекурсивная процедура, которая была предложена Алексеем Замолодчиковым в [6]. Методом развитый в [6] был изначально применен к четырехточечному конформному блоку на сфере и, хотя обобщение этого метода для общего случая кажется возможным, таких результатов немного в существующей литературе ².

Возобновившийся интерес к конформной теории поля возник после статьи [1] Алдая, Гаиотто и Тачикавы, где они предложили связь между двумерными конформными теориями и $\mathcal{N} = 2$ четырехмерными суперсимметричными калибровочными теориями (данное соответствие обычно называется как АГТ гипотеза). В частности, они связали n -точечный конформный блок на сфере (1.7) с инстантонной частью статистической суммы Некрасова [8, 10, 130] для калибровочной теории с калибровочной группой $U(2)_1 \otimes \cdots \otimes U(2)_{n-3}$ и со специальным набором полей материи, который либо в (анти-)фундаментальном представлении группы $U(2)_1$ или $U(2)_{n-3}$, либо в бифундаментальном представлении $U(2)_i \otimes U(2)_{i+1}$ для $i = 1, \dots, n-2$. Теории такого типа обычно называются линейными квиверными калибровочными теориями [11–14]. Для того, чтобы сформулировать результат [1], мы определяем новую функцию

$$Z(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n-3} \prod_{m=k}^{n-3} (1 - q_k \cdots q_m)^{2\alpha_{k+1}(Q - \alpha_{m+2})} \mathcal{F}(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c), \quad (1.9)$$

где параметры α_k и Q были введены, чтобы параметризовать внешние конформные размерности Δ_k и центральный заряд c как

$$\Delta_k = \alpha_k(Q - \alpha_k), \quad c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b}. \quad (1.10)$$

В [1] была выдвинута гипотеза, что $Z(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c)$ определенная как (1.9), обладает замечательным разложением

$$Z(q|\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) = 1 + \sum_{\vec{k}} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \cdots q_{n-3}^{k_{n-3}} Z_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c), \quad (1.11)$$

²Недавно, рекурсивная процедура [6] была обобщена на случай конформного блока на торе в [7].

с коэффициентами $Z_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c)$, которые имеют явное комбинаторное выражение

$$\begin{aligned} Z_{\vec{k}}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j, c) = & \sum_{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-3}} Z_{\text{vec}}(P_1, \vec{\lambda}_1) \dots Z_{\text{vec}}(P_{n-3}, \vec{\lambda}_{n-3}) \times \\ & \times Z_{\text{bif}}(\alpha_2|P, \emptyset; P_1, \vec{\lambda}_1) Z_{\text{bif}}(\alpha_3|P_1, \vec{\lambda}_1; P_2, \vec{\lambda}_2) Z_{\text{bif}}(\alpha_4|P_2, \vec{\lambda}_2; P_3, \vec{\lambda}_3) \times \dots \\ & \dots \times Z_{\text{bif}}(\alpha_{n-3}|P_{n-5}, \vec{\lambda}_{n-5}; P_{n-4}, \vec{\lambda}_{n-4}) Z_{\text{bif}}(\alpha_{n-2}|P_{n-4}, \vec{\lambda}_{n-4}; P_{n-3}, \vec{\lambda}_{n-3}) Z_{\text{bif}}(\alpha_{n-1}|P_{n-3}, \vec{\lambda}_{n-3}; \hat{P}, \emptyset). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Сумма в (1.12) берется по всем парам $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ диаграмм Юнга (двойных-разбиений), таких, что $|\vec{\lambda}_j| = k_j$, где $|\vec{\lambda}_j|$ полное число клеток в паре $\vec{\lambda}_j$. Параметры P, \hat{P} и P_j в (1.12) связаны с внешними размерностями Δ_1, Δ_n и промежуточными размерностями $\tilde{\Delta}_j$ как

$$\Delta_1 = \frac{Q^2}{4} - P^2, \quad \Delta_n = \frac{Q^2}{4} - \hat{P}^2 \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta}_j = \frac{Q^2}{4} - P_j^2.$$

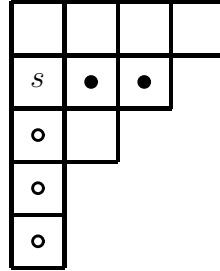
Явный вид функций Z_{bif} и Z_{vec} был выведен в [15–17]. Функция Z_{bif} дается формулой

$$Z_{\text{bif}}(\alpha|P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}) = \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in \lambda_i} (Q - E_{\lambda_i, \mu_j}(P_i - P'_j|s) - \alpha) \prod_{t \in \mu_j} (E_{\mu_j, \lambda_i}(P'_j - P_i|t) - \alpha), \quad (1.13)$$

где $\vec{P} = (P, -P)$, $\vec{P}' = (P', -P')$ и

$$E_{\lambda, \mu}(P|s) = P - b l_{\mu}(s) + b^{-1}(a_{\lambda}(s) + 1). \quad (1.13a)$$

В (2.8a) $a_{\lambda}(s)$ и $l_{\mu}(s)$ соответственно длина руки ячейки s в разбиении λ и длина ноги ячейки s в разбиении μ . Мы выбираем Английское соглашение для рисования разбиений $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$. Например, разбиение $\lambda = (4, 3, 2, 1, 1)$ представляется как:



где число заполненных кружочков равно длине руки $a_{\lambda}(s)$, тогда как число пустых кружочков равно длине ноги $l_{\lambda}(s)$. Заметим, что в (1.13a) длина руки и ноги вычисляются для разных разбиений λ и μ и ячейка s всегда принадлежит разбиению λ , которое является первым индексом функции $E_{\lambda, \mu}(P|s)$. Функция Z_{vec} определена как

$$Z_{\text{vec}}(P, \vec{\lambda}) = \frac{1}{Z_{\text{bif}}(0|P, \vec{\lambda}; P, \vec{\lambda})}. \quad (1.14)$$

АГТ гипотеза [1] привлекает внимание специалистов по калибровочным теориям и специалистов по конформным теориям поля. В частности, мы можем заметить, что комбинаторное разложение (1.11)-(1.12) было абсолютно неожиданным с точки зрения Конформной теории поля. В серии работ [18–23] это разложение было проверено для некоторых частных случаев с предсказаниями из Конформной теории поля. Однако, строгого математического доказательства (1.11)-(1.12) дано не было.

Фактор в правой части в (1.9) был назван в [1] как “ $U(1)$ фактор”, который предположительно соответствует отщеплению $U(1)$ части от инстантонной статистической суммы Некрасова, которая вычислена для $U(2)$ группы, а не $SU(2)$. Кажется естественным выразить “ $U(1)$ фактор” в терминах корреляционной функции киральных вертексных операторов некоторого бозонного поля. Мы нашли, что введение дополнительного бозонного поля есть не только удобный способ представить “ $U(1)$ фактор”, но также играет очень важную роль во всей конструкции. Мы рассматриваем алгебру $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$, которая является тензорным произведением алгебры Вирасоро и алгебры Гейзенберга, и строим специальный ортогональный базис в представлении старшего веса для данной алгебры. Матричные элементы примарных полей между двумя состояниями из нашего базиса имеют особенно простую форму, которая совпадает с Z_{bif} , определенным выше. Норма этих состояний равна $1/Z_{\text{vec}}$. Ясно, что такой базис по существу приводит к разложению (1.11)–(1.12). Похожая идея была предложена Алдаем и Тачикавой в [24]. В следующих пунктах мы доказываем существование и единственность такого базиса и находим стоящую за таким базисом квантовую интегрируемую систему (систему коммутирующих Интегралов движения, диагонализующихся в данном базисе).

Дальнейший план данной главы состоит в следующем. В разделе 1.2 мы формулируем **Главное Предложение**, которое есть основной результат Главы 1. Секция 1.3 посвящена доказательству **Главного Предложения**. В Приложении 1 мы вычисляем интеграл Сельберга со вставкой двух полиномов Джека, который использован в пункте 1.3. В Приложении 2 мы даем доказательство тождеств (1.47) и (1.64) используемых в пункте 1.3. В Приложении 3 мы обсуждаем систему квантовых интегралов движения, которая видится очень важной задачей.

1.2 Специальный базис состояний в алгебре $\text{Vir} \otimes \mathcal{H}$

Мы рассматриваем алгебру $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$, которая является тензорным произведением алгебры Вирасоро и алгебры Гейзенберга с коммутаторами:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \\ [a_n, a_m] &= \frac{n}{2}\delta_{n+m,0}, \quad [L_n, a_m] = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Мы параметризуем центральный заряд c алгебры Вирасоро так же, как это обычно делается при рассмотрении теории Лиувилля

$$c = 1 + 6Q^2, \quad \text{где } Q = b + \frac{1}{b}, \quad (1.16)$$

и определяем примарное поле V_α как:

$$V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_\alpha \cdot V_\alpha^L, \quad (1.17)$$

где V_α^L примарное поле алгебры Вирасоро с конформной размерностью $\Delta(\alpha) = \alpha(Q - \alpha)$ и \mathcal{V}_α экспонента от свободного поля ³:

$$\mathcal{V}_\alpha = e^{2(\alpha-Q)\varphi_-} e^{2\alpha\varphi_+}, \quad (1.18)$$

с $\varphi_+(z) = i \sum_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}$ и $\varphi_-(z) = i \sum_{n<0} \frac{a_n}{n} z^{-n}$. Коммутационные соотношения примарного поля $V_\alpha(z)$ с генераторами L_m и a_n могут быть записаны как:

$$\begin{aligned} [L_m, V_\alpha^L(z)] &= (z^{m+1}\partial_z + (m+1)\Delta(\alpha)z^m) V_\alpha^L(z), \\ [a_n, \mathcal{V}_\alpha(z)] &= -i\alpha z^n \mathcal{V}_\alpha(z), \quad \text{для } n < 0, \\ [a_n, \mathcal{V}_\alpha(z)] &= i(Q - \alpha)z^n \mathcal{V}_\alpha(z), \quad \text{для } n > 0, \\ [L_m, \mathcal{V}_\alpha(z)] &= [a_n, V_\alpha^L(z)] = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Существует естественный базис в пространстве состояний

$$a_{-l_m} \dots a_{-l_1} L_{-k_n} \dots L_{-k_1} |P\rangle, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n, \quad l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m, \quad (1.20)$$

где P параметризует конформную размерность Вирасоро как $\Delta(P) = \frac{Q^2}{4} - P^2$ и $|P\rangle$ вакуумное состояние, которое определено как

$$L_n |P\rangle = a_n |P\rangle = 0, \quad \text{для } n > 0, \quad L_0 |P\rangle = \Delta(P) |P\rangle, \quad \langle P | P \rangle = 1.$$

³Заметим, что такая “странная” форма вертексного оператора (1.18) была предложена в некотором другом, но отчасти связанном контексте, Карлсоном и Окуньковым в [25].

Матричные элементы ⁴

$$\frac{\langle P' | L_{k'_1} \dots L_{k'_n} a_{l'_1} \dots a_{l'_m} V_\alpha(1) a_{-l_m} \dots a_{-l_1} L_{-k_n} \dots L_{-k_1} | P \rangle}{\langle P' | V_\alpha(1) | P \rangle}, \quad (1.21)$$

являются некоторыми полиномами по α , P и P' и могут быть вычислены с использованием коммутационных правил (1.19) и явной формы координатной зависимости матричного элемента⁵

$$\langle P' | V_\alpha^L(z) | P \rangle \sim z^{P^2 - P'^2 - \Delta(\alpha)}. \quad (1.22)$$

Заметим, что состояния (1.20) являются собственными состояниями оператора $L_0 + 2 \sum_{k>0} a_{-k} a_k$ с собственными значениями равными

$$\Delta^{(k+l)}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(P) + k + l, \quad k = \sum_{i=1}^n k_i, \quad l = \sum_{j=1}^m l_j. \quad (1.23)$$

Для общих значений импульса P модуль $|P\rangle$ является неприводимым, и число состояний с данным значением $\Delta^{(N)}(P)$ равно числу пар диаграмм Юнга $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, с $|\vec{\lambda}| = N$. Поэтому естественно определить

$$\hat{a}_{-\lambda_1} \hat{L}_{-\lambda_2} |P\rangle \stackrel{\text{def}}{=} a_{-l_m} \dots a_{-l_1} L_{-k_n} \dots L_{-k_1} |P\rangle, \quad (1.24)$$

где $\lambda_1 = (l_1, \dots, l_m)$, $\lambda_2 = (k_1, \dots, k_n)$. Мы находим, что удобно использовать другой базис $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$ вместо наивного (1.24):

$$|P\rangle_{\vec{\lambda}} = \sum_{|\vec{\mu}|=|\vec{\lambda}|} C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P) \hat{a}_{-\mu_1} \hat{L}_{-\mu_2} |P\rangle, \quad (1.25)$$

где сумма берется по всем парам $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ диаграмм Юнга, таких, что $|\vec{\mu}| = |\vec{\lambda}|$ и $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P)$ некоторые неизвестные коэффициенты. Значение пар $\vec{\lambda}$ в (1.25) отличается от значения в (1.24), и ниже будет ясно почему. Отметим, что сопряжение в алгебре \mathcal{A} определено, как

$$(L_{-k_n} \dots L_{-k_1})^+ = L_{k_1} \dots L_{k_n}, \quad (a_{-n})^+ = a_n, \quad (1.26)$$

и сопряжение состояния $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$ не затрагивает комплексное сопряжение его коэффициентов, т.е. для $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$, представленном в (1.25) мы определяем сопряженное состояние ${}_{\vec{\lambda}}\langle P|$ как:

$${}_{\vec{\lambda}}\langle P| = \sum_{|\vec{\mu}|=|\vec{\lambda}|} C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P) \langle P | (\hat{a}_{-\mu_1})^+ (\hat{L}_{-\mu_2})^+. \quad (1.27)$$

⁴Далее мы не будем явно писать зависимость от точки вставки, если это возможно. Поэтому, в любом выражении ниже V_α означает $V_\alpha(1)$.

⁵Матричный элемент (1.21) получается в пределе $z \rightarrow 1$.

Как будет показано в дальнейшем, все коэффициенты $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P)$ в (1.25) однозначно определяются из требования того, чтобы все матричные элементы примарного поля (1.17) между двумя разными состояниями (1.25) совпадали с Z_{bif} , определенной выше (уравнение (1.13)). Таким образом, мы приходим к предложению, которое является главным результатом этой главы:

Главное Предложение: *Существует и единственен ортогональный базис $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$, такой, что*

$$\frac{\vec{\mu} \langle P' | V_{\alpha} | P \rangle_{\vec{\lambda}}}{\langle P' | V_{\alpha} | P \rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha | P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}). \quad (1.28)$$

Доказательство будет дано в пункте 1.3. Здесь мы приводим некоторые комментарии, которые могут быть полезны. Замечаем, что уравнение (1.28) с правой частью данной (1.13) может рассматриваться, как система уравнений для неизвестных коэффициентов $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P)$ в (1.25). Действительно вставляя (1.25) в (1.28), получаем переопределенную систему. Очень нетривиально, что такая система имеет решение. Мы нашли явную форму коэффициентов $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P)$ до уровня 6 (т.е. для $|\vec{\lambda}| \leq 6$). Первые несколько представителей базиса $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$, полученные таким образом выглядят как:

Уровень 1:

$$|P\rangle_{(1), \emptyset} = -(L_{-1} + i(Q + 2P)a_{-1}) |P\rangle,$$

$$|P\rangle_{\emptyset, (1)} = -(L_{-1} + i(Q - 2P)a_{-1}) |P\rangle,$$

Уровень 2:

$$\begin{aligned} |P\rangle_{(2), \emptyset} = & (L_{-1}^2 - b^{-1}(Q + 2P)L_{-2} + 2i(Q + b^{-1} + 2P)L_{-1}a_{-1} - \\ & -(Q + 2P)(Q + b^{-1} + 2P)a_{-1}^2 - ib^{-1}(Q + 2P)(Q + b^{-1} + 2P)a_{-2}) |P\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |P\rangle_{\emptyset, (2)} = & (L_{-1}^2 - b^{-1}(Q - 2P)L_{-2} + 2i(Q + b^{-1} - 2P)L_{-1}a_{-1} - \\ & -(Q - 2P)(Q + b^{-1} - 2P)a_{-1}^2 - ib^{-1}(Q - 2P)(Q + b^{-1} - 2P)a_{-2}) |P\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |P\rangle_{(1,1), \emptyset} = & (L_{-1}^2 - b(Q + 2P)L_{-2} + 2i(Q + b + 2P)L_{-1}a_{-1} - \\ & -(Q + 2P)(Q + b + 2P)a_{-1}^2 - ib(Q + 2P)(Q + b + 2P)a_{-2}) |P\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |P\rangle_{\emptyset, (1,1)} = & (L_{-1}^2 - b(Q - 2P)L_{-2} + 2i(Q + b - 2P)L_{-1}a_{-1} - \\ & -(Q - 2P)(Q + b - 2P)a_{-1}^2 - ib(Q - 2P)(Q + b - 2P)a_{-2}) |P\rangle, \end{aligned}$$

$$|P\rangle_{(1),(1)} = (L_{-1}^2 - L_{-2} + 2iQL_{-1}a_{-1} + (1 + 4P^2 - Q^2)a_{-1}^2 - iQa_{-2}) |P\rangle.$$

Хотелось бы отметить здесь, что довольно естественно ожидать, что такой ортогональный базис может быть решением проблемы одновременного диагонализирования некоторой бесконечной системы взаимно коммутирующих величин (обычно они называются Интегралами движения). Роль Интегралов движения в конформной теории была тщательно изучена Бажановым, Лукьяновым и Замолотчиковым в статьях [26–28]. В их случае система квантовых Интегралов движения была “квантованием” КдФ системы. Нам удалось найти интегрируемую систему, которая соответствует нашему случаю (с алгеброй симметрии, являющейся тензорным произведением алгебры Вирасоро и алгебры Гейзенберга). Результаты собраны в Приложении 3. В частности, классический аналог квантовой интегрируемой системы представлен уравнением (3.133), которое известно как уравнение Бенжамина-Оно₂ [29–31].

Наша стратегия доказательства **Главного Предложения** заключается в следующем. В начале мы предлагаем явное выражение для состояний $|P\rangle_{\bar{\lambda}}$ в случае, когда вторая диаграмма Юнга пустая (т.е. $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$), и доказываем, что матричные элементы между такими состояниями имеют форму правой части уравнения (1.28). Эти состояния выражаются в терминах полиномов Джека. Затем мы определяем рекурсивную процедуру, позволяющую построить оставшуюся часть базиса, т.е. все состояния $|P\rangle_{\bar{\lambda}}$ с обеими не пустыми диаграммами, а также доказываем, что матричные элементы даются правой частью уравнения (1.28). И, в итоге, доказываем единственность базиса $|P\rangle_{\bar{\lambda}}$.

1.3 Доказательство Главного предложения

Было бы наивно ожидать нахождения аналитического выражения для всех состояний $|P\rangle_{\bar{\lambda}}$ в компактной форме. Однако, состояния вида $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ особенно просты⁶. Они приобретают явную структуру, если выразить генераторы алгебры Вирасоро L_n в терминах бозонов. А именно, выразим генераторы Вирасоро L_n в терминах генераторов алгебры Гейзенберга c_k как:

$$L_n = \sum_{k \neq 0, n} c_k c_{n-k} + i(nQ - 2P)c_n, \quad L_0 = \frac{Q^2}{4} - P^2 + 2 \sum_{k > 0} c_{-k} c_k, \quad (1.29)$$

$$[c_n, c_m] = \frac{n}{2} \delta_{n+m, 0}, \quad [P, c_n] = 0, \quad \mathcal{P}|P\rangle = P|P\rangle, \quad \langle P|\mathcal{P} = -P\langle P|.$$

На основании явных вычислений на нижних уровнях мы формулируем следующее предложение:

⁶Аналогично состояния $|P\rangle_{\emptyset, \lambda}$ тоже имеют простое выражение (см. ниже)

Предложение 1.3.1 Матричный элемент между состояниями $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ и ${}_{\mu, \emptyset}\langle P'|$, определенными как

$$|P\rangle_{\lambda, \emptyset} = \Omega_{\lambda}(P) \mathbf{J}_{\lambda}^{(1/g)}(x)|P\rangle, \quad {}_{\mu, \emptyset}\langle P'| = \Omega_{\mu}(P') {}_{\mu}\langle P'| \mathbf{J}_{\mu}^{(1/g)}(y), \quad (1.30)$$

равен $Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\mu, \emptyset); P, (\lambda, \emptyset))$. Здесь $g = -b^2$,

$$a_{-k} - c_{-k} = -ib p_k(x), \quad a_k + c_k = -ib p_k(y),$$

и $p_k(x)$ является k -той степенной суммой симметричного полинома: $p_k(x) = \sum_j x_j^k$ и $\mathbf{J}_{\lambda}^{(1/g)}(x)$ полином Джекса, связанный с диаграммой Юнга λ , нормированный как (“интегральная форма” нормировки [93])

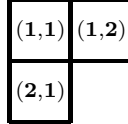
$$\mathbf{J}_{\lambda}^{(1/g)}(x) = |\lambda|! m_{[1, \dots, 1]}(x) + \dots,$$

где $m_{[\nu_1, \dots, \nu_n]}(x)$ мономиальный симметрический полином.

В (1.30) фактор $\Omega_{\lambda}(P)$ определен как

$$\Omega_{\lambda}(P) = (-b)^{|\lambda|} \prod_{(i,j) \in \lambda} (2P + ib + jb^{-1}), \quad (1.31)$$

индекс i пробегает вертикаль, а j пробегает горизонталь диаграммы λ . Например, для диаграммы $\lambda = (2, 1)$ мы имеем



Прежде чем перейти к доказательству **Предложения 1.3.1**, сделаем необходимый комментарий.

На практике соотношение (1.30) должно пониматься следующим образом. Возьмем

$$|P\rangle_{\lambda, \emptyset} = \sum_{|\mu_1| + |\mu_2| = |\lambda|} C_{\lambda}^{\mu_1, \mu_2}(P) \hat{a}_{-\mu_1} \hat{L}_{-\mu_2} |P\rangle,$$

с некоторыми неизвестными коэффициентами $C_{\lambda}^{\mu_1, \mu_2}(P)$. Затем представим генераторы Вирасоро L_k в терминах бозонов c_k как в (1.29) и приравняем результат к правой части уравнения в (1.30). В результате все коэффициенты $C_{\lambda}^{\mu_1, \mu_2}(P)$ будут однозначно определены при условии, что модуль Верма, образованный $\{L_{-\lambda}|P\rangle\}$ и Фоковский модуль, образованный $\{c_{-\lambda}|P\rangle\}$ изоморфны для общих значений импульса P . Очевидно, все коэффициенты $C_{\lambda}^{\mu_1, \mu_2}(P)$ являются рациональными функциями импульса P . По сути, вследствие специального выбора фактора $\Omega_{\lambda}(P)$ в (1.30), все они полиномы по P (см. например явные выражения для нижних уровней на странице 13).

Отметим, что можно выбрать другой знак перед оператором \mathcal{P} в (1.29). Таким способом мы определяем другую бозонизацию алгебры Вирасоро с генераторами \hat{c}_k . Известно, что эти два набора генераторов c_k и \hat{c}_k связаны некоторым унитарным преобразованием [33]. Мы не обсуждаем здесь этот интересный вопрос, а лишь упомянем, что **Предложение 1.3.1** верно для состояний $|P\rangle_{\lambda, \varnothing}$ с $c_k \rightarrow \hat{c}_k$ и $\Omega_\lambda(P) \rightarrow \Omega_\lambda(-P)$. Доказательство аналогично тому, что приведено ниже. Отметим, что состояния в модуле Верма алгебры Вирасоро, соответствующие полиномам Джека, были уже изучены в литературе [34].

Доказательство Предложения 1.3.1: Покажем, что матричный элемент между состоянием $|P\rangle_{\lambda, \varnothing}$ определенный, как (1.30)

$$\frac{\langle P' | V_\alpha | P \rangle_{\lambda, \varnothing}}{\langle P' | V_\alpha | P \rangle}. \quad (1.32)$$

дается (1.28). Заметим, что, как следует из (1.19) и (1.22), матричный элемент (1.32) является полиномом по α степени $2|\lambda| + 2|\mu|$. Следовательно, чтобы найти этот полином, достаточно найти его значения в $(2|\lambda| + 2|\mu| + 1)$ различных точках. Действительно, используя представление (1.30), мы можем найти его в бесконечном наборе точек α_n , которые удовлетворяют следующему условию “скринирования”

$$P + P' + \alpha + nb = 0, \quad c \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (1.33)$$

В данном случае матричный элемент (1.32) имеет свободно-полевое представление [35–37]. А именно, можно вести “скринирующий” заряд

$$\mathcal{S} = \oint_c e^{2b\Phi(\xi)} d\xi, \quad \Phi(\xi) = -i\mathcal{P} \log(\xi) + i \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{k} \xi^{-k}, \quad (1.34)$$

который коммутирует с алгеброй Вирасоро и определить “скринированный” вертексный оператор

$$V_{\alpha_n}^L(z) \longrightarrow \mathcal{S}^n e^{2\alpha_n \Phi(z)}, \quad (1.35)$$

где контуры интегрирования начинаются с точки z и идут вокруг точки 0 против часовой стрелки. Представляя примарное поле $V_{\alpha_n} = \mathcal{V}_{\alpha_n} \cdot V_{\alpha_n}^L$ в терминах свободных полей, можно вычислить матричный элемент (1.32), используя коммутационные соотношения двух алгебр Гейзенберга (с генераторами a_k и c_k). Заметим, что вычисление заметно упрощается, так как оператор рождающий кет состояние $|P\rangle_{\lambda, \varnothing}$ коммутирует с оператором создающим бра состояние ${}_{\mu, \varnothing}\langle P|$, так как один из них зависит от разности бозонов $a_{-k} - c_{-k}$, тогда как другой от суммы $a_k + c_k$. После завершения алгебраической части этого упражнения (мы опускаем детали в силу их простоты)

нам остается задача об отыскании некоторого многократного контурного интеграла⁷. Это может быть сформулировано следующим образом. Пусть α_n удовлетворяет уравнению (1.33), тогда матричный элемент между состояниями $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ и ${}_{\mu, \emptyset}\langle P'|$, определенных в (1.30), может быть записан как

$$\frac{{}_{\mu, \emptyset}\langle P'|V_{\alpha_n}|P\rangle_{\lambda, \emptyset}}{\langle P'|V_{\alpha_n}|P\rangle} = \Omega_\lambda(P)\Omega_\mu(P') \frac{\langle \mathbf{J}_\mu^{(1/g)}[p_k + \rho] \mathbf{J}_\lambda^{(1/g)}[p_{-k}] \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}}{\langle 1 \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}}, \quad (1.36)$$

где $\rho = (2\alpha_n - Q)/b$ и $\langle \dots \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}$ обозначает Сельберговское среднее

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{Sel}}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathcal{O}(t_1, \dots, t_n) \prod_{j=1}^n t_j^A (1 - t_j)^B \prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2g} dt_1 \dots dt_n,$$

с параметрами A , B и g равными

$$A = -b(Q + 2P), \quad B = -2b\alpha_n \quad \text{и} \quad g = -b^2. \quad (1.37)$$

В правой части уравнения (1.36) мы используем следующие обозначения из теории симметричных функций⁸: для любой симметричной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ мы определяем выражение $f[s_k]$, которое означает, что гомоморфизм, который переводит k -ый степенной симметричный полином p_k в s_k , был применен к f .

Как будет показано в Приложении 1, интеграл в правой части уравнения (1.36) может быть вычислен точно с ожидаемым результатом

$$\frac{{}_{\mu, \emptyset}\langle P'|V_{\alpha_n}|P\rangle_{\lambda, \emptyset}}{\langle P'|V_{\alpha_n}|P\rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha_n|P', (\mu, \emptyset); P, (\lambda, \emptyset)), \quad (1.38)$$

где функция $Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\mu, \emptyset); P, (\lambda, \emptyset))$ определена в (1.13). Как было объяснено выше, мы можем продолжить (1.38) на произвольные значения α , так как матричный элемент (1.32) является полиномом по α . Это доказывает, что матричные элементы между состояниями $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ и ${}_{\mu, \emptyset}\langle P'|$, определенными в **Предложении 1.3.1**, имеют определенную “факторизованную” форму (1.28) для произвольных значений параметров P , P' и α . \square

⁷Заметим, что внутри корреляционной функции контуры могут быть деформированы к контурам рассмотренным в [36, 38]. Такая деформация контуров дает некоторый фактор, появляющийся из-за неаналитичности подынтегрального выражения. В нашем случае эти факторы не важны, так как мы рассматриваем отношение трехточечной корреляционной функции, включающей поля-потомки, и трехточечной функции примарных полей (см. (1.36) ниже). Очевидно, что они сокращают друг друга при вычислении отношения.

⁸Обозначение $f[s_k]$ (квадратные скобки вместо круглых) известно в теории симметричных функций как “plethystic” замена [39]. Обычное обозначение используемое в литературе $f[s]$ (см. монографии [40, 41]).

До этого момента мы построили только состояния $|P\rangle_{\lambda}$ для пар диаграмм Юнга вида (λ, \emptyset) . Теперь определим рекурсивную процедуру, позволяющую построить остаток базиса. Заметим, что состояние $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$, выраженное в терминах Гейзенберговских генераторов a_k и c_k как в (1.30), исчезает из-за фактора (1.31) для

$$P = P_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{mb + nb^{-1}}{2}, \quad \text{для } (m, n) \in \lambda, \quad (1.39)$$

то есть при значениях импульса P , таких, что соответствующий модуль Верма становится вырожденным [2]. А именно, для $P = P_{m,n}$ существует сингулярный вектор $|\chi_{m,n}\rangle$ в модуле Верма $|P_{m,n}\rangle$ на уровне mn :

$$|\chi_{m,n}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} D_{m,n}|P_{m,n}\rangle = (L_{-1}^{mn} + \dots)|P_{m,n}\rangle, \quad (1.40)$$

такой, что $L_k|\chi_{m,n}\rangle = 0$ для всех $k > 0$. Однако, состояние $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ не исчезает, при условии, что оно выражено в терминах генераторов L_n и a_n вместо c_n и a_n . Действительно, мы доказали, что матричные элементы между состояниями $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$, даются формулой (1.28). В частности,

$$\frac{\langle P'|V_\alpha|P\rangle_{\lambda, \emptyset}}{\langle P'|V_\alpha|P\rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\emptyset, \emptyset); P, (\lambda, \emptyset)). \quad (1.41)$$

Сравнивая поведение обеих сторон уравнения (1.41) при $\alpha \rightarrow \infty$, можно оценить коэффициент в $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ перед $L_{-1}^{|\lambda|}$. Используя (1.13) и (1.19), находим

$$|P\rangle_{\lambda, \emptyset} = ((-L_{-1})^{|\lambda|} + \dots)|P\rangle,$$

где опущенные члены имеют наибольшую степень по L_{-1} равную $(|\lambda|-1)$. Видим, что коэффициент перед $L_{-1}^{|\lambda|}$ не исчезает для любых значений P и, следовательно, состояние $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ тоже не исчезает⁹. Как было показано Фейгиным и Фуксом [42], состояние, которое не исчезает в модуле Верма, но исчезает после бозонизации в Фоковском модуле, есть некоторый потомок сингулярного вектора $|\chi_{m,n}\rangle$. Таким образом, мы приходим к следующему предложению:

Предложение 1.3.2 Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ есть разбиение и $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ состояние, определенное как (1.30), тогда состояние $|P = P_{m,n}\rangle_{\lambda, \emptyset}$ для $(m, n) \in \lambda$ имеет “факторизованную” форму

$$|P_{m,n}\rangle_{\lambda, \emptyset} = (-1)^{mn} X_\lambda^{(m,n)} D_{m,n}|P_{m,n}\rangle \quad \text{для } (m, n) \in \lambda, \quad (1.42)$$

где

$$X_\lambda^{(m,n)} = \sum_{|\vec{\sigma}|=|\lambda|-mn} C_{\lambda; \vec{\sigma}}^{(m,n)} \hat{a}_{-\sigma_1} \hat{L}_{-\sigma_2},$$

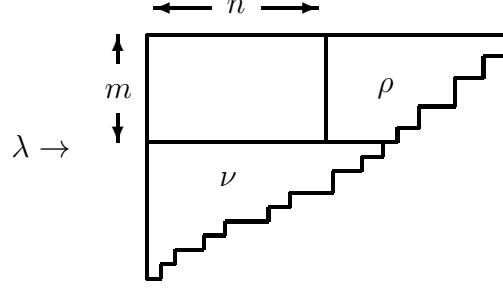
⁹Нельзя исключить возможность того, что состояние $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ может иметь полюс при $P = P_{m,n}$. Мы увидим ниже, что здесь это не так.

есть оператор, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mu, \varnothing \langle P' | V_\alpha X_\lambda^{(m,n)} | P_{m,-n} \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P_{m,-n} \rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha | P', (\mu, \varnothing); P_{m,-n}, (\rho, \nu)), \quad (1.43)$$

и пара разбиений (ρ, ν) определяется как: $\rho = (\lambda_1 - n, \dots, \lambda_m - n)$ и $\nu = (\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots)$.

Пример того, как пара разбиений (ρ, ν) определена для данных $(m, n) \in \lambda$ показан на следующей картинке:



Доказательство Предложения 1.3.2: Как было объяснено выше, (1.42) следует из результатов Фейгина и Фукса [42]. Для того, чтобы доказать (1.43) мы начнем с формулы:

$$\frac{\mu, \varnothing \langle P' | V_\alpha | P \rangle_{\lambda, \varnothing}}{\langle P' | V_\alpha | P \rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha | P', (\mu, \varnothing); P, (\lambda, \varnothing)), \quad (1.44)$$

Подставляя $P = P_{m,n}$ для $(m, n) \in \lambda$ и используя (1.42), мы находим

$$\begin{aligned} \frac{\mu, \varnothing \langle P' | V_\alpha | P_{m,n} \rangle_{\lambda, \varnothing}}{\langle P' | V_\alpha | P_{m,n} \rangle} &\stackrel{(1.42)}{=} (-1)^{mn} \frac{\mu, \varnothing \langle P' | V_\alpha X_\lambda^{(m,n)} D_{m,n} | P_{m,n} \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P_{m,n} \rangle} = \\ &= (-1)^{mn} \frac{\mu, \varnothing \langle P' | V_\alpha X_\lambda^{(m,n)} | P_{m,-n} \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P_{m,-n} \rangle} \frac{\langle P' | V_\alpha D_{m,n} | P_{m,n} \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P_{m,n} \rangle}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Во второй строчке в (1.45) мы использовали равенство $\Delta(P_{m,-n}) = \Delta(P_{m,n}) + mn$ и факт, что $L_k D_{m,n} | P_{m,n} \rangle = a_k D_{m,n} | P_{m,n} \rangle = 0$ для $k > 0$ при условии, что $D_{m,n} | P_{m,n} \rangle$ сингулярный вектор.

Последний фактор во второй линии (1.45) известен явно [43]

$$\frac{\langle P' | V_\alpha D_{m,n} | P_{m,n} \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P_{m,n} \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{m,n}(\alpha, P') = p_{m,n} \left(\frac{Q}{2} + P' - \alpha \right) p_{m,n} \left(\alpha + P' - \frac{Q}{2} \right), \quad (1.46)$$

где

$$p_{m,n}(x) = \prod_{r,s} (x + P_{r,s}),$$

и пара целых чисел r, s пробегает множество:

$$r = -m + 1, -m + 3, \dots, m - 3, m - 1,$$

$$s = -n + 1, -n + 3, \dots, n - 3, n - 1.$$

Используя (1.44), (1.45) и простое тождество (см. короткое доказательство в Приложении 2)

$$Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\mu, \emptyset); P_{m,n}, (\lambda, \emptyset)) = (-1)^{mn} \mathbb{P}_{m,n}(\alpha, P') Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\mu, \emptyset); P_{m,-n}, (\rho, \nu)), \quad (1.47)$$

с $\rho = (\lambda_1 - n, \dots, \lambda_m - n)$ и $\nu = (\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots)$, мы находим

$$\frac{\langle P' | V_\alpha X_\lambda^{(m,n)} | P_{m,-n} \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P_{m,-n} \rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\mu, \emptyset); P_{m,-n}, (\rho, \nu)), \quad (1.48)$$

и это завершает доказательство **Предложения 1.3.2**. \square

Предложение 1.3.3 *Для любой пары диаграмм Юнга (ρ, ν) существует единственный оператор*

$$\mathbf{X}_{\rho,\nu}(P) = \sum_{|\vec{\sigma}|=|\rho|+|\nu|} C_{\rho,\nu}^{\vec{\sigma}}(P) \hat{a}_{-\sigma_1} \hat{L}_{-\sigma_2}, \quad (1.49)$$

такой, что

$$\frac{\langle P' | V_\alpha \mathbf{X}_{\rho,\nu}(P) | P \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P \rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\mu, \emptyset); P, (\rho, \nu)), \quad \forall \mu \quad (1.50a)$$

где $\langle P' |$ определен в (1.30). Более того $m \geq l(\rho)$, $n \geq \nu_1 - \rho_m$

$$\mathbf{X}_{\rho,\nu}(P_{m,-n}) = X_\lambda^{(m,n)}, \quad (1.50b)$$

где $\lambda = (\rho_1 + n, \dots, \rho_m + n, \nu_1, \nu_2, \dots)$ и $X_\lambda^{(m,n)}$ оператор определенный в **Предложении 1.3.2**.

Доказательство Предложение 1.3.3 : Существование оператора $\mathbf{X}_{\rho,\nu}(P)$ эквивалентно утверждению, что бесконечная система линейных уравнений (1.50a) с коэффициентами $C_{\rho,\nu}^{\vec{\sigma}}(P)$ имеет решение. Действительно (1.50a) может быть записан как

$$\sum_{|\vec{\sigma}|=|\rho|+|\nu|} C_{\rho,\nu}^{\vec{\sigma}}(P) \mathcal{M}_{\vec{\sigma},\mu}(\alpha, P, P') = Z_{\text{bif}}(\alpha|P', (\mu, \emptyset); P, (\rho, \nu)), \quad (1.51)$$

где

$$\mathcal{M}_{\vec{\sigma},\mu}(\alpha, P, P') = \frac{\langle P' | V_\alpha \hat{a}_{-\sigma_1} \hat{L}_{-\sigma_2} | P \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P \rangle}.$$

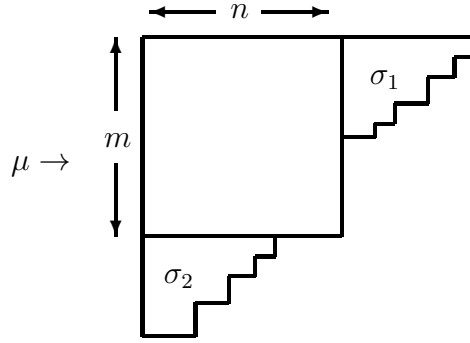
Уравнение (1.51) должно быть верно для любого разбиения μ . Можно переписать (1.51) в матричной форме и упростить с помощью метода Гаусса, сводя это выражение к верхне-треугольному виду или к некоторой вырожденной системе без решений. В любом случае, конечная система будет с коэффициентами, которые есть рациональные функции импульса P . Как было заявлено в **Предложении 1.3.2** эта система имеет решение при $P = P_{m,-n}$ для бесконечного множества целых m и n . Так как коэффициенты в (1.51) и, следовательно, в приведенной системе являются

рациональными функциями от P , то это означает, что (1.51) имеет решения для произвольного значения P .

Действительно, приведенная система имеет максимальный ранг и, следовательно, система (1.51) имеет единственное решение. Для того, чтобы доказать этот факт, предположим, что есть два оператора $\mathbf{X}_{\rho,\nu}(P)$ и $\tilde{\mathbf{X}}_{\rho,\nu}(P)$ удовлетворяющие (1.50а), и возьмем $Y_N(P) = \mathbf{X}_{\rho,\nu}(P) - \tilde{\mathbf{X}}_{\rho,\nu}(P)$, где $N = |\rho| + |\nu|$. Тогда из (1.50а) следует

$$\mu, \varnothing \langle P' | V_\alpha Y_N(P) | P \rangle = 0, \quad \forall \mu. \quad (1.52)$$

Рассмотрим диаграммы Юнга μ специального вида:



с произвольными целыми m и n такими, что $m, n \geq N$ и $|\vec{\sigma}| < N$. В силу **Предложения 1.3.2** мы имеем

$$\mu, \varnothing \langle P_{m,n} | = (-1)^{mn} \langle P_{m,n} | D_{m,n}^+ (X_\mu^{(m,n)})^+, \quad (1.53)$$

тогда (1.52) и (1.53) влекут

$$\langle P_{m,-n} | (X_\mu^{(m,n)})^+ V_\alpha Y_N(P) | P \rangle = 0. \quad (1.54)$$

Подчеркнем, что для данного значения $(|\mu| - mn)$ состояния $\langle P_{m,-n} | (X_\mu^{(m,n)})^+$ линейно независимы при условии, что полиномы Джека $\mathbf{J}_\mu^{(1/g)}(x)$ независимы для разных разбиений μ . Более того, как можно видеть из картинке выше, количество состояний $\langle P_{m,-n} | (X_\mu^{(m,n)})^+$ с $|\mu| - mn = k < N$ равно числу пар диаграмм Юнга $\vec{\sigma}$ с $|\vec{\sigma}| = k$, то есть они образуют базис. Другими словами, любое состояние $\langle P_{m,-n} | (X_\mu^{(m,n)})^+$ с $|\mu| - mn = k < N$ может быть записано как линейная комбинация состояний $\langle P_{m,-n} | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2}$ с $|\mu_1| + |\mu_2| = k$. Следовательно, уравнение (1.54) эквивалентно

$$\langle P_{m,-n} | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} V_\alpha Y_N(P) | P \rangle = 0 \quad \text{для любых } \mu_1, \mu_2 : |\mu_1| + |\mu_2| < N. \quad (1.55)$$

Состояние $Y_N(P) | P \rangle$, которое удовлетворяет (1.55), равно нулю в силу следующей леммы:

Лемма 1.3.4 Пусть $Y_N(P)$ удовлетворяет

$$\langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} V_\alpha Y_N(P) | P \rangle = 0 \quad \text{для любых } \mu_1, \mu_2 : |\mu_1| + |\mu_2| < N, \quad (1.56)$$

и любых параметров P' и α , тогда $Y_N(P) = 0$.

Доказательство основано на индукции. Для $N = 1, 2$ данное утверждение может быть доказано прямым вычислением. Предположим, что лемма верна для $n = 1, \dots, N - 1$ и возьмем

$$\langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} a_k V_\alpha Y_N(P) | P \rangle \quad \text{для любых } \mu_1, \mu_2 : |\mu_1| + |\mu_2| < N - k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.57)$$

Матричный элемент в (1.57) равен нулю в силу предположения леммы (1.56). С другой стороны

$$\begin{aligned} \langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} a_k V_\alpha Y_N(P) | P \rangle &= \langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} [a_k, V_\alpha] Y_N(P) | P \rangle + \langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} V_\alpha a_k Y_N(P) | P \rangle \stackrel{(1.19)}{=} \\ &\stackrel{(1.19)}{=} i(Q - \alpha) \langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} V_\alpha Y_N(P) | P \rangle + \langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} V_\alpha a_k Y_N(P) | P \rangle. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Первый член во второй строчке в (1.58) равен нулю в силу (1.56), что влечет

$$\langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} V_\alpha a_k Y_N(P) | P \rangle = 0 \quad \text{для любых } \mu_1, \mu_2 : |\mu_1| + |\mu_2| \leq N - k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.59)$$

и, следовательно, по предположению индукции $a_k Y_N(P) | P \rangle = 0$ для $k = 1, \dots, N - 1$. Аналогично, мы показываем, что также $L_k Y_N(P) | P \rangle = 0$ для $k = 1, \dots, N - 1$. Из этого заключаем, что для общих значений импульса P остается единственная возможность $Y_N(P) = C a_{-N}$. Используя (1.56) для $\mu_1 = \mu_2 = \emptyset$ и используя (1.19), находим, что $C = 0$. \square

Из **Леммы 1.3.4** следует, что система (1.51) имеет единственное решение и поэтому доказательство **Предложения 1.3.3** завершено. \square

Отметим, что из того факта, что система (1.51) имеет единственное решение следует, что коэффициенты $C_{\rho, \nu}^{\vec{\sigma}}(P)$ в (1.49) рациональные функции импульса P . Стоит упомянуть, что **Предложение 1.3.3** подразумевает, что

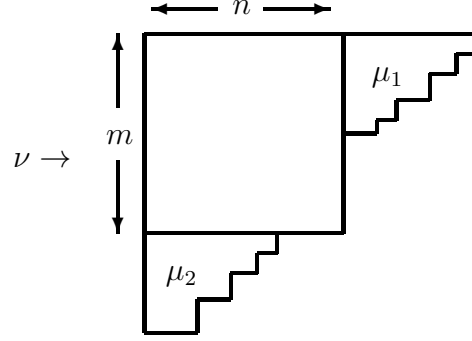
$$\mathbf{X}_{\lambda, \emptyset} | P \rangle = | P \rangle_{\lambda, \emptyset},$$

где $| P \rangle_{\lambda, \emptyset}$ состояние определенное в (1.30).

Предложение 1.3.5 Для любых двух пар диаграмм Юнга $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ и $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$

$$\frac{\langle P' | \mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P') V_\alpha \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) | P \rangle}{\langle P' | V_\alpha | P \rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha | P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}). \quad (1.60)$$

Доказательство Предложения 1.3.5: Для того, чтобы доказать **Предложение 1.3.5**, достаточно показать, что (1.60) верно при $P' = P_{m,-n}$ для некоторого бесконечного набора целых m и n , при условии, что коэффициент $C_{\vec{\lambda}}^{\vec{\nu}}(P)$ в (1.49) рациональная функция импульса P . Для $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ возьмем “мастер” разбиение ν в виде:



где m и n достаточно большие, чтобы “вместить” разбиения μ_1 и μ_2 . Затем, используя сопряженную форму (1.50b)

$$\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P_{m,-n}) = (X_{\nu}^{(m,n)})^+, \quad (1.61)$$

мы находим

$$\begin{aligned} \frac{\langle P_{m,-n} | \mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P_{m,-n}) V_{\alpha} \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) | P \rangle}{\langle P_{m,-n} | V_{\alpha} | P \rangle} &= \frac{\langle P_{m,-n} | (X_{\nu}^{(m,n)})^+ V_{\alpha} \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) | P \rangle}{\langle P_{m,-n} | V_{\alpha} | P \rangle} = \\ &= \frac{\langle P_{m,n} | D_{m,n}^+ (X_{\nu}^{(m,n)})^+ V_{\alpha} \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) | P \rangle}{\langle P_{m,n} | V_{\alpha} | P \rangle} \frac{\langle P_{m,n} | V_{\alpha} | P \rangle}{\langle P_{m,n} | D_{m,n}^+ V_{\alpha} | P \rangle}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Используя (1.46), сопряженную версию (1.42) и (1.50a), мы можем переписать правую часть (1.62) как

$$\begin{aligned} \frac{\langle P_{m,n} | D_{m,n}^+ (X_{\nu}^{(m,n)})^+ V_{\alpha} \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) | P \rangle}{\langle P_{m,n} | V_{\alpha} | P \rangle} \frac{\langle P_{m,n} | V_{\alpha} | P \rangle}{\langle P_{m,n} | D_{m,n}^+ V_{\alpha} | P \rangle} &= \\ = (-1)^{mn} \mathbb{P}_{m,n}^{-1}(\alpha, P) \frac{\langle P_{m,n} | V_{\alpha} \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) | P \rangle}{\langle P_{m,n} | V_{\alpha} | P \rangle} &\stackrel{(1.50a)}{=} (-1)^{mn} \mathbb{P}_{m,n}^{-1}(\alpha, P) Z_{\text{bif}}(\alpha | P_{m,n}, (\nu, \emptyset); P, \vec{\lambda}). \end{aligned} \quad (1.63)$$

И в конечном итоге, используя тождество (см Приложение 2)

$$Z_{\text{bif}}(\alpha | P_{m,n}, (\nu, \emptyset); P, \vec{\lambda}) = (-1)^{mn} \mathbb{P}_{m,n}(\alpha, P) Z_{\text{bif}}(\alpha | P_{m,-n}, (\mu_1, \mu_2); P, \vec{\lambda}), \quad (1.64)$$

приходим к (1.60) для $P' = P_{m,-n}$, с бесконечным набором целых m и n . Так как матричный элемент в (1.60) есть рациональная функция в P' , доказательство **Предложения 1.3.5** завершено.

□

Следствие 1.3.6 Состояния $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ образуют ортогональный базис

$$\langle P|\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P)\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle = \mathcal{N}_{\vec{\lambda}}(P) \times \delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}}, \quad (1.65)$$

где $\delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} = 0$ если $\vec{\lambda} \neq \vec{\mu}$, $\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}} = 1$ и

$$\mathcal{N}_{\vec{\lambda}}(P) = 1/Z_{\text{vec}}(P, \vec{\lambda}). \quad (1.66)$$

Доказательство Следствия 1.3.6: Во-первых, заметим, что состояния $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ и $\langle P|\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P)$ тривиально ортогональны для разных уровней, т.е. для $|\vec{\lambda}| \neq |\vec{\mu}|$. Поэтому, мы должны проверить ортогональность для состояний на одном уровне. Легко видеть, что

$$\langle P|\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P)\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle = Z_{\text{bif}}(0|P, \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}) \quad \text{для} \quad |\vec{\lambda}| = |\vec{\mu}|. \quad (1.67)$$

Анализируя явную форму (1.13) функции $Z_{\text{bif}}(0|P, \vec{\mu}; P, \vec{\lambda})$ можно показать, что она равна нулю всегда, кроме $\vec{\lambda} = \vec{\mu}$. Используя (1.14), приходим к (1.66). \square

Таким образом мы доказали существование ортогонального базиса, который удовлетворяет (1.28). Для того, чтобы завершить доказательство **Главного Предложения**, необходимо доказать его единственность.

Предложение 1.3.7 Базис состояний $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$, определенный выше, есть единственный базис удовлетворяющий

$$\frac{\langle P'|\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P')V_{\alpha}\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle}{\langle P'|V_{\alpha}|P\rangle} = Z_{\text{bif}}(\alpha|P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}). \quad (1.68)$$

Доказательство Предложения 1.3.7: Доказательство основано на индукции. Предположим, что для данного N набор состояний $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ с $|\vec{\lambda}| \leq N$ единственный. Затем предположим, что на уровне $N + 1$ есть два состояния $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ и $\tilde{\mathbf{X}}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ для некоторого разбиения $\vec{\lambda}$, которые имеют одинаковые матричные элементы со всеми состояниями $\langle P'|\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P')$ с $|\vec{\mu}| \leq N$, то есть

$$\frac{\langle P'|\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P')V_{\alpha}\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle}{\langle P'|V_{\alpha}|P\rangle} = \frac{\langle P'|\mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P')V_{\alpha}\tilde{\mathbf{X}}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle}{\langle P'|V_{\alpha}|P\rangle}. \quad (1.69)$$

Также определим оператор

$$Y_{N+1}(P) = \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) - \tilde{\mathbf{X}}_{\vec{\lambda}}(P).$$

Далее, как следует из (1.69),

$$\langle P' | \mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P') V_{\alpha} Y_{N+1}(P) | P \rangle = 0 \quad \text{для любых } \vec{\mu} : |\vec{\mu}| \leq N. \quad (1.70)$$

Так как состояния $\langle P' | \mathbf{X}_{\vec{\mu}}^+(P')$ образуют базис, (1.70) эквивалентно

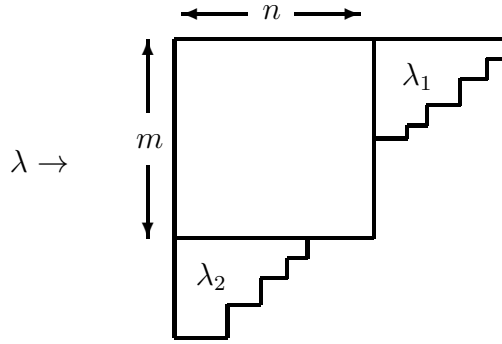
$$\langle P' | \hat{L}_{\mu_1} \hat{a}_{\mu_2} V_{\alpha} Y_{N+1}(P) | P \rangle = 0 \quad \text{для любых } \mu_1, \mu_2 : |\mu_1| + |\mu_2| \leq N, \quad (1.71)$$

что, из-за **Леммы 1.3.4** подразумевает $Y_{N+1} = 0$. \square

Доказательство **Главного Предложения** завершено. Мы показали, что базис $|P\rangle_{\vec{\lambda}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)|P\rangle$ существует и единственный. Хотелось бы прокомментировать, как наша конструкция может быть использована для нахождения базисных состояний $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$. Как было сказано в **Предложении 1.3.1**, состояния с пустой второй диаграммой $|P\rangle_{\lambda, \emptyset}$ представляются как (1.30). Остаток базиса может быть построен с помощью (1.42) и (1.50b). Так как коэффициенты $C_{\vec{\lambda}}^{\vec{\mu}}(P)$ в (1.49) рациональные функции импульса P , они могут быть восстановлены полностью из набора уравнений (1.42). Действительно, используя (1.50b) уравнение (1.42) может быть написано как

$$|P_{m,n}\rangle_{\lambda, \emptyset} = (-1)^{mn} \mathbf{X}_{(\lambda_1, \lambda_2)}(P_{m,-n}) D_{m,n} |P_{m,n}\rangle, \quad (1.72)$$

где пара (λ_1, λ_2) определяется из разбиения λ по следующему правилу



Заметим, что для данной пары диаграмм Юнга (λ_1, λ_2) уравнение (1.72) действительно для любой “мастер” диаграммы λ , которая “вмещает” (λ_1, λ_2) как показано на картинке. Это позволяет вычислить коэффициенты $C_{\vec{\lambda}}^{\vec{\mu}}(P)$ в $\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P)$ с $P = P_{m,-n}$ для некоторой бесконечной системы целых m и n и, следовательно, восстановить их полностью. На самом деле, можно доказать, что все они полиномы по P :

Следствие 1.3.8 Все коэффициенты $C_{\vec{\lambda}}^{\vec{\mu}}(P)$ в

$$\mathbf{X}_{\vec{\lambda}}(P) = \sum_{|\vec{\mu}|=|\vec{\lambda}|} C_{\vec{\lambda}}^{\vec{\mu}}(P) \hat{a}_{-\mu_1} \hat{L}_{-\mu_2}, \quad (1.73)$$

полиномы по импульсу P .

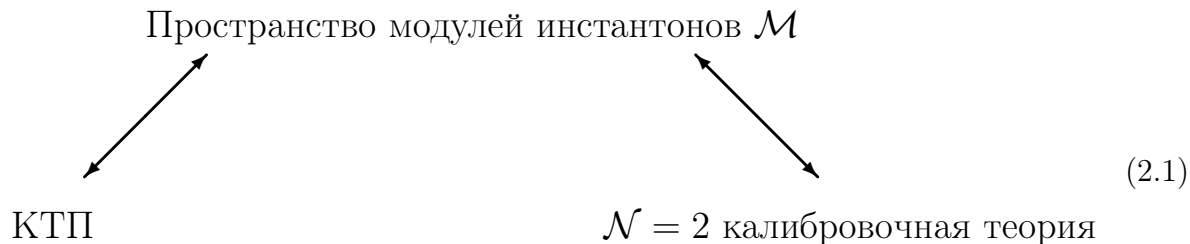
Глава 2

Объяснение суперсимметричного АГТ соответствия

2.1 Обобщение АГТ соответствия

Как мы уже говорили, двухмерные конформные теории поля и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные калибровочные теории в четырех измерениях исследовались независимо многие годы. Однако, как было обнаружено в статье Алдая, Гаиотто и Тачикавы [1], инстантонная часть статистической суммы в $\mathcal{N} = 2$ калибровочной теории совпадает с конформным блоком в 2d конформной теории поля.

Соотношение между этими разными типами теорий происходит через промежуточный объект — пространство модулей инстантонов \mathcal{M} :



Правая стрелка на этой картинке символизирует, то, что интеграл по полям для статистической суммы в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории локализуется и может быть сведен к интегралу по многообразию \mathcal{M} (многообразии \mathcal{M} не связно, его связные компоненты нумеруются некоторыми топологическими характеристиками инстантонов). Последний интеграл расходится

из-за некомпактности многообразия \mathcal{M} . Однако, можно ввести особую регуляризацию в калибровочной теории [130], которая нарушает Лоренц-симметрию, но сохраняет некоторые суперсимметрии и делает возможным применить процедуру локализации. Регуляризованный интеграл локализуется на неподвижных точках абелевой группы (тора), которая действует на \mathcal{M} пространственно-временными поворотами, сохранившимися после нарушения Лоренц-инвариантности, и калибровочными преобразованиями на бесконечности. Преимущество при использовании деформированной теории в том, что неподвижные точки тора изолированы. Следовательно, статистическая сумма, дается суммой вкладов каждой неподвижной точки. Статистическая сумма, определенная таким способом, обычно называется статистической суммой Некрасова.

Нетривиальная часть (2.1) представлена левой стрелкой, которая означает, что есть естественное действие алгебры симметрии \mathcal{A} некоторой конформной теории поля на эквивариантных когомологиях \mathcal{M} (см. статьи Накаджимы [64, 65] для основных примеров такого действия). Базис в (локализованном) эквивариантном пространстве когомологий может быть занумерован неподвижными точками тора [66]. Поэтому геометрическая конструкция дает некоторые специальные базисные состояния в представлении старшего веса $\pi_{\mathcal{A}}$ алгебры \mathcal{A} . Этот базис уже является особенным просто из его геометрического происхождения и обладает многими замечательными свойствами. Приведем некоторые из них:

- Каждой неподвижной точке тора $p \in \mathcal{M}$ соответствует базисный вектор $v_p \in \pi_{\mathcal{A}}$. Более того, если $p \in \mathcal{M}_N$, где N топологическое число, то вектор v_p имеет степень N .
- Есть геометрически построенное скалярное произведение в $\pi_{\mathcal{A}}$. Базис v_p ортогонален относительно этого скалярного произведения, и норма вектора v_p равна детерминанту векторного поля v в касательном пространстве p . Последнее выражение обозначается как Z_{vec}^{-1} (вклад векторного мультиплетта).
- Матричные элементы геометрически определенного вертексного оператора имеют полностью факторизованную форму. Последнее выражение обозначается как Z_{bif} (вклад бифундаментального мультиплетта).
- Существует коммутативная алгебра (Интегралы движения), которая диагонализуется в базисе v_p . Геометрически эта алгебра возникает из произведения на классах когомологий.

Знание функций Z_{vec} и Z_{bif} позволяет вычислить многоточечные конформные блоки на поверхностях рода 0 и 1. В КТП они дают явное и замечательно простое выражение для коэффициентов

операторной алгебры.

В этом пункте мы рассмотрим частный случай схемы описанной выше. А именно, рассмотрим случай когда \mathcal{M} является пространством модулей $U(r)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, где \mathbb{Z}_p действует формулой (z_1 и z_2 координаты на \mathbb{C}^2)

$$(z_1, z_2) \mapsto (\omega z_1, \omega^{-1} z_2), \quad \text{где } \omega^p = 1.$$

Есть несколько гладких частичных компактификаций этого пространства. Одна из них может быть построена следующим образом. Обозначим за $\mathcal{M}(r, N)$ гладкое компактифицированное пространство модулей $U(r)$ инстантонов на \mathbb{C}^2 с топологическим числом N . Множество $\mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_p}$ \mathbb{Z}_p -инвариантных точек на $\mathcal{M}(r, N)$ является гладкой компактификацией пространства инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Действие тора на $\mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_p}$ индуцировано действием на \mathbb{C}^2 и на тривиализации на бесконечности. Фиксированные точки этого тора нумеруются набором из r : (Y_1, \dots, Y_r) диаграмм Юнга, раскрашенных в p цветов. Далее, должен быть базис занумерованный (Y_1, \dots, Y_r) в представлении некоторой алгебры \mathcal{A} .

В [67] было предложено, что инстантонное многообразие $\mathcal{M} = \bigsqcup_N \mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_p}$ соответствует конформной теории с симметрией косета

$$\mathcal{A}(r, p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}, \quad (2.2)$$

где параметр n связан с эквивариантными параметрами и в общем может быть любым комплексным числом. Используя известную “уровень-ранг” дуальность такой косет может быть переписан как:

$$\mathcal{A}(r, p) = \widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r} = \mathcal{H} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(p)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}, \quad (2.3)$$

где \mathcal{H} алгебра Гейзенберга. Принимая во внимание конструкцию [68] некоторые из этих алгебр могут быть переписаны как:

	
$p = 3$	$\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(3)_1$
$p = 2$	$\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$	$\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_2 \oplus \text{NSR}$
$p = 1$	\mathcal{H}	$\mathcal{H} \oplus \text{Vir}$	$\mathcal{H} \oplus W_3$...
	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	

(2.4a)

где Vir алгебра Вирасоро, W_3 есть $\mathfrak{sl}(3)$ W алгебра и NSR алгебра Невьё-Шварца-Рамона, $\mathcal{N} = 1$ супераналог алгебры Вирасоро. Используя свободно-полевое представление алгебр $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$, $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_2$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}(3)_1$ и ограничиваясь только на некоторых компонентах \mathcal{M} , данная таблица может быть переписана как:

	
$p = 3$	$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$
$p = 2$	$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$	$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$
$p = 1$	\mathcal{H}	$\mathcal{H} \oplus \text{Vir}$	$\mathcal{H} \oplus W_3$...
	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	

(2.4b)

где \mathcal{F} алгебра Майорановских фермионов.

В терминах схемы (2.1) гипотеза [67] подразумевает, что существует конструкция геометрического действия алгебры (2.2) на эквивариантных когомологиях $\mathcal{M} = \bigsqcup_N \mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}^p}$. Это действие было построено явно в случае ранга один ($r = 1$) в [65]. Для высших рангов $r > 1$ подобная конструкция пока еще не разработана. Однако, ее можно получить как предел геометрического действия более общей алгебры, построенной Накаджимой в [70]. Более точно, автор в [70] построил действие так называемой \mathfrak{gl}_p -тороидальной алгебры уровня r на эквивариантной K -теории пространства $\mathcal{M} = \bigsqcup_N \mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}^p}$. В некотором пределе эквивариантная K -теория вырождается в эквивариантную когомологию и тороидальная алгебра вырождается в алгебру Вертексных операторов, связанную с косетом $\mathcal{A}(r, p)^1$. Конструкция основанная на пределе тороидальной алгебры трудно выполнима (для случая $p = 1$ см. [74]). Однако, используя геометрическую интуицию можно предсказать свойства базиса, упомянутого выше. Он позволяет получить выражения для конформных блоков, которые могут быть сравнены с выражениями для тех же конформных блоков, но полученных обычными методами Конформной теории поля. Ниже мы перечисляем основные на сегодняшний день достижения в этом направлении:

- Для случая $p = 1$, $r = 1$ Накаджима [64] определил геометрическое действие алгебры Гейзенберга. Базис неподвижных точек соответствует полиномам Джека, см. например [75]. Карлсон и Окуньков дали геометрическую конструкцию вертексного оператора в [25].

¹Алгебраическая конструкция такого предела тороидальной алгебры дана в случае $r = 1$ в [71,72], для $r > 1$ [73]. Геометрическая интерпретация полученной алгебры косета очень неясная.

- Случай $p = 1, r = 2$ был рассмотрен в статье [1]. Авторы предположили, выражение для многоточечных конформных блоков в терминах статистических сумм Некрасова. Алдай и Тачикава в [24] предположили существование базиса, который бы объяснял эти выражения. В Главе 1, [76] была дана явная алгебраическая конструкция этого базиса.
- Случай $p = 1, r > 2$ был рассмотрен по аналогии с [1] Виллардом [44] (см. также [45]). Конструкция базиса была дана в [78].
- Для случая $p = 2, r = 2$ В. Белавин и Б. Фейгин предложили выражение для Виттекеровского предела четырехточечного суперконформного блока в секторе Невьё-Шварца в терминах статистических сумм Некрасова [67]. Этот результат был обобщен в [79] для общего четырехточечного блока. О результатах в секторе Рамона смотрите [80, 81]
- Для $p > 2$. Проверка центрального заряда косета $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n$ из рассмотрения M -теории была дана в [82]. Виллард [83] рассмотрел Виттекеровский предел в случае $p = 4, r = 2$. Некоторые дальнейшие проверки для этого случае были сделаны в [84]. В случае общего p и r некоторые нетривиальные проверки были сделаны в [83] с использованием детерминанта Каца Конформной теории поля с симметрией косета.

Существует другая компактификация пространства инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Обозначим за X_p минимальное разрешение $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Пространство модулей $\mathcal{M}(X_2, r, N)$ тривиализованных на бесконечности пучков свободных от кручения ранга r на X_p есть гладкая компактификация пространства инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Действие тора на $\mathcal{M}(X_2, r, N)$ индуцировано действием тора на X_p и на тривиализации на бесконечности. Неподвижные точки занумерованы p наборами по r штук диаграмм Юнга и $p - 1$ векторами $(k_1^i, k_2^i, \dots, k_r^i), 1 \leq i \leq p - 1$ из целых чисел. Заметим, что такое комбинаторное описание отличается от описания неподвижных точек тора на $\mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_p}$ в терминах, раскрашенных в p цветов диаграмм Юнга. Естественно предположить, что подобные алгебры действуют на эквивариантных когомологиях $\mathcal{M}(X_2, r, N)$. В [85, 128] авторы использовали пространство $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$ для выражений Некрасовского типа для конформных блоков в суперконформной теории поля.

Алгебра симметрии косета

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n} \quad (2.5)$$

с общими r и p не известна в явной форме. Например для $r = 2$ и общего p алгебра симметрии генерируется током $G(z)$ дробного спина $(p+4)/(p+2)$ [87]. Такой ток является током с неабелевым

“брэ́йдингом”, т.е. операторное разложение $G(z)$ со собой содержит сингулярности с непропорциональными степенями. Данный факт приносит огромные трудности для изучения таких моделей. Ситуация упрощается в трех случаях: $p = 1$, который соответствует алгебре Вирасоро, $p = 2$, который соответствует алгебре Невьё-Шварца-Рамона и $p = 4$, который может быть выражен через модель с абелевым “брэ́йдингом”, называемую спин-4/3 парафермионной Конформной теорией поля [88, 89]. Для старших рангов алгебраическое описание косетной модели (2.5) становится еще более проблематичным. Уже даже в случае $p = 1$ коммутационные соотношения соответствующей алгебры (W_r алгебры в данном случае) известны в явном виде только для маленьких рангов. Замечательно, что такая трудность не возникает на геометрической стороне соответствия (2.1) и случай общих p и r может быть изучен полностью.

В данной главе мы продолжим изучение случая $p = 2$, $r = 2$, как следующий пример (после $p = 1$ и $r = 2$), где алгебраическое описание относительно просто². Общая философия говорит о существовании базиса в представлении алгебры $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$ (см. (2.4b)). Этот базис имеет геометрическое происхождение и дает выражения для конформных блоков, упомянутых выше. Более того, разные многообразия $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$ и $\mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_2}$ могут соответствовать разным базисам.

Появление разных базисов является новым эффектом в случае $p > 1$ в сравнении с $p = 1$. Геометрически это связано с тем фактом, что многообразия $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$ и $\mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_2}$ являются \mathbb{C}^* -диффеоморфными, но не $(\mathbb{C}^*)^2$ -диффеоморфными. Алгебраически это приводит к тому, что формулы в [67, 79], с одной стороны и в [85, 128] с другой стороны, разные. Они дают одинаковый результат, потому что многообразия $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$ и $\mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_2}$ являются компактификациями одного и того же многообразия и, следовательно, интегралы равны. Другими словами эти две компактификации дают два разных способа вычислить один и тот же интеграл. Равенство между результатами означает нетривиальное комбинаторное тождество.

В пункте 2.3 мы строим базис, который соответствует многообразию $\mathcal{M}_2(2, N)$ (более точно его компоненте с $c_1 = 0$). Этот базис дает [85, 128] выражение для конформных блоков в суперконформной теории поля и объясняет суперсимметричное АГТ соответствие. Как главный метод мы используем супералгебру

$$(\mathcal{H} \oplus \text{Vir}) \oplus (\mathcal{H} \oplus \text{Vir}) \subset (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}).$$

Другими словами мы используем вложение прямой суммы двух алгебр для $p = 1$ в алгебру для $p = 2$ (см. (2.4b)). Геометрически появление этой подалгебры связано с существованием двух

²Некоторые анализы случая $p = 4$ и $r = 2$ были сделаны в [83, 84].

точек на X_2 инвариантных относительно действия тора. Алгебраическое объяснение основано на формуле для косета

$$\frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-1)_r} \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-1)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-2)_r} \subset \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-2)_r}.$$

Используя эти подалгебры мы сводим проблему базиса к случаю $p = 1$ и используем конструкцию Главы 1.

В пункте 2.4 мы изучаем базис соответствующий многообразию $\mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_2}$ (более точно только одной связной компоненте для каждого N). Мы не можем дать явную конструкцию этого базиса, но мы предлагаем факторизованную формулу для матричных элементов вертексных операторов (Z_{bif}) в этом базисе. Мы проверили эту формулу, сравнивая два вычисления пятиточечного конформного блока. В первом случае используем формулу упомянутую выше, связанную с гипотетическим базисом, который соответствует многообразию $\mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_2}$. Во втором случае мы используем базис, построенный в пункте 2.3. Данный базис соответствует многообразию $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$.

Во второй части пункта 2.4 мы изучаем все связные компоненты $\mathcal{M}(1, N)^{\mathbb{Z}_2}$. Другими словами это означает, что мы рассматриваем алгебру $\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$ из таблицы (2.4a) вместо алгебры $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ из таблицы (2.4b). Мы увидим, что есть несколько классов связных компонент занумерованных целым числом d и разные классы соответствуют разным базисам. Базис построенный в пункте 2.3 оказывается пределом, когда $d \rightarrow \infty$.

Дальнейший план изложения Главы 2 такой. В пункте 2.2 воспроизведем все известные факты о базисе в случае $p = 1$, включая краткий пересказ Главы 1. Контент пункта 2.3 и 2.4 был описан выше. В Приложении 4 обсуждаем вложение $\text{Vir} \oplus \text{Vir} \subset \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$ в деталях. В Приложениях 5 и 6 приводим явные формулы, используемые в пунктах 2.3 и 2.4.

2.2 Случай $p = 1$

В этом разделе мы делаем обзор конструкции базиса в случае $p = 1$ и произвольного ранга r . Этот пример используется, чтобы продемонстрировать общую схему сформулированную выше. Более того, некоторые конструкции будут использованы ниже в пункте 2.3.

2.2.1 Геометрический подход

В данном случае геометрический объект исследования есть многообразие $\mathcal{M} = \bigsqcup_N \mathcal{M}(r, N)$, где $\mathcal{M}(r, N)$ компактифицированное пространство модулей $U(r)$ инстантонов на \mathbb{C}^2 с инстантонным

числом N (см. [90] Параграф 2 или [91] Параграф 3)

$$\mathcal{M}(r, N) \cong \left\{ (B_1, B_2, I, J) \left| \begin{array}{l} \text{(i)} \quad [B_1, B_2] + IJ = 0 \\ \text{И нет подпространства } S \subsetneq \mathbb{C}^n, \text{ такого, что} \\ \text{(ii)} \quad B_\sigma S \subset S \ (\sigma = 1, 2) \text{ и } I_1, \dots, I_r \in S \end{array} \right. \right\} / \text{GL}_N, \quad (2.6)$$

где B_j, I и J $N \times N$, $N \times r$ и $r \times N$ комплексные матрицы с действие GL_N , выраженным как:

$$g \cdot (B_1, B_2, I, J) = (gB_1g^{-1}, gB_2g^{-1}, gI, Jg^{-1}),$$

для $g \in \text{GL}_N$. В (2.6) I_1, \dots, I_r обозначают столбцы матрицы I . Тор $T = (\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^r$ действует на многообразии \mathcal{M} . Действие $(\mathbb{C}^*)^2$ возникает из действия двух поворотов на \mathbb{C}^2 и действие $(\mathbb{C}^*)^r$ возникает из действия на тривиализации в бесконечности. Точная формула записывается как

$$B_1 \mapsto t_1 B_1; \quad B_2 \mapsto t_2 B_2; \quad I \mapsto It; \quad J \mapsto t_1 t_2 t^{-1} J, \quad (2.7)$$

где $(t_1, t_2, t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^*)^r = T$. Неподвижные точки относительно действия тора занумерованы r диаграммами Юнга: $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_r)$ и T действует на касательное пространство любой неподвижной точки $p_{\vec{Y}} = p_{Y_1, \dots, Y_r}$. Для любого элемента $v = (\epsilon_1, \epsilon_2, a) \in \text{Lie}(T)$, где $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{C}$, a диагональная матрица $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_r)$ и детерминант v на касательном пространстве $p_{\vec{Y}}$ равен [16, 92]:

$$\det v \Big|_{p_{\vec{Y}}} = \prod_{i,j=1}^r \prod_{s \in Y_i} E_{Y_i, Y_j}(a_i - a_j | s) (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, Y_j}(a_i - a_j | s)), \quad (2.8)$$

где

$$E_{Y, W}(x | s) = x - \epsilon_1 l_W(s) + \epsilon_2 (a_Y(s) + 1). \quad (2.8a)$$

В (2.8a) $a_Y(s)$ и $l_W(s)$ соответственно длина руки клетки s в разбиении Y и длина ноги клетки s в разбиении W (см. (1.13a) и ниже в Главе 1). Обратное значение детерминанта (2.8) обычно называется вкладом векторного гипермультиплета и обозначается как:

$$Z_{\text{vec}}^{(r)}(\vec{a}, \vec{Y} | \epsilon_1, \epsilon_2) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i,j=1}^r \prod_{s \in Y_i} \left(E_{Y_i, Y_j}(a_i - a_j | s) (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, Y_j}(a_i - a_j | s)) \right)^{-1}, \quad (2.9)$$

где $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r)$. Эта величина входит в инстантонную часть статистической суммы Некрасова для чистой $U(r)$ калибровочной теории (без материи)

$$Z_{\text{pure}}^{(r)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\vec{Y}|=k} Z_{\text{vec}}^{(r)}(\vec{a}, \vec{Y} | \epsilon_1, \epsilon_2) \Lambda^{4k}, \quad (2.10)$$

где $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r)$ интерпретируется как вакуумное значение скалярного поля и Λ — масштаб в калибровочной теории.

Важной величиной является вклад бифундаментального гипермультиплетта [15–17]. Эта величина определена геометрически и дается детерминантом векторного поля в расслоении определенного пучка над неподвижной точкой³ тора на $\mathcal{M}(r, N) \times \mathcal{M}(r, N')$:

$$Z_{\text{bif}}^{(r)}(m; \vec{a}', \vec{W}; \vec{a}, \vec{Y} | \epsilon_1, \epsilon_2) = \prod_{i,j=1}^r \prod_{s \in Y_i} (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, w_j}(a_i - a'_j | s) - m) \prod_{t \in W_j} (E_{W_j, Y_i}(a'_j - a_i | t) - m), \quad (2.11)$$

где параметр m совпадает с массой бифундаментального гипермультиплетта. Так как выражения Z_{vec} и Z_{bif} оказываются однородными относительно $a_i \rightarrow \lambda a_i$, $m \rightarrow \lambda m$ и $\epsilon_j \rightarrow \lambda \epsilon_j$, можно зафиксировать эту свободу дополнительным условием $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$. Мы принимаем обозначения, распространенные в литературе о Конформной теории поля:

$$\epsilon_1 = b, \quad \epsilon_2 = b^{-1}.$$

Более того, мы предполагаем, что $\sum_{j=1}^r a_j = 0$. В частности, ниже мы рассматриваем в деталях случаи $r = 1$ и $r = 2$. Для $r = 2$ было бы удобно ввести

$$\mathbb{F}(\alpha | P', \vec{W}; P, \vec{Y}) \stackrel{\text{def}}{=} Z_{\text{bif}}^{(2)}(\alpha; (P', -P'), \vec{W}; (P, -P), \vec{Y} | b, 1/b) \quad (2.12)$$

и

$$\mathbb{N}(P, \vec{Y}) \stackrel{\text{def}}{=} Z_{\text{vec}}^{(2)}((P, -P), \vec{Y} | b, 1/b). \quad (2.13)$$

2.2.2 Алгебраический подход

В данном случае рассматриваемая Конформная теория поля имеет алгебру симметрии $\mathcal{H} \oplus \mathcal{W}_r$. Существует особый базис состояний в представлении старшего веса данной алгебры, соответствующий неподвижным точкам векторного поля, действующего на \mathcal{M} . Этот базис состояний диагонализует бесконечную систему коммутирующих величин (Интегралов Движения) \mathbf{I}_k :

$$[\mathbf{I}_k, \mathbf{I}_l] = 0, \quad (2.14)$$

которые есть элементы универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{H} \oplus \mathcal{W}_r$. Напомним конструкцию базиса состояний в двух частных случаях $r = 1$ и $r = 2$. Для случая общего ранга см. [78].

³Эта неподвижная точка занумерована парой из r диаграмм Юнга \vec{Y} и \vec{W} .

Случай $r = 1$

В данном случае наша алгебра является алгеброй Гейзенберга с компонентами \mathbf{a}_k и коммутационными соотношениями ⁴

$$[\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_m] = n \delta_{n+m,0}. \quad (2.15)$$

Представление старшего веса этой алгебры (Фоковский модуль) определено как вакуумное состояние $|0\rangle$

$$\mathbf{a}_n|0\rangle = 0 \quad \text{для } n > 0,$$

и образовано векторами вида

$$\mathbf{a}_{-k_1} \dots \mathbf{a}_{-k_n}|0\rangle, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n. \quad (2.16)$$

Можно определить другой базис

$$|Y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_Y^{(1/g)}(x)|0\rangle, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{J}_Y^{(1/g)}(x)$ полином Джека в интегральной нормировке [93] с параметром $g = -b^2$, связанным с разбиением Y и, где сделано следующее отождествление:

$$\mathbf{a}_{-k} = -ib p_k,$$

где p_k симметрические полиномы вида

$$p_k = p_k(x) = \sum_j x_j^k.$$

Базис состояний $|Y\rangle$ обычно называется Джековским базисом по очевидным причинам. Существует система Интегралов Движения \mathbf{I}_k , которая действует диагонально в Джековском базисе (2.17). Два первых представителя этого семейства (здесь $Q = b + 1/b$):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \sum_{k>0} \mathbf{a}_{-k} \mathbf{a}_k, \\ \mathbf{I}_2 &= iQ \sum_{k>0} k \mathbf{a}_{-k} \mathbf{a}_k + \frac{1}{3} \sum_{i+j+k=0} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Другое важное свойство Джековского базиса было отмечено в [25]. А именно, рассмотрим вертексный оператор

$$\mathbf{V}_\alpha = e^{(\alpha-Q)\varphi_{-(1)}} e^{\alpha\varphi_{+(1)}}, \quad (2.19)$$

⁴Здесь и далее мы предполагаем, что наша алгебра Гейзенберга не имеет нулевой моды, так как она играет искусственную роль в нашей конструкции. Другими словами мы предполагаем, что рассматриваем представление со старшим весом, такое, что $a_0|0\rangle = 0$.

с $\varphi_+(z) = i \sum_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}$ и $\varphi_-(z) = i \sum_{n<0} \frac{a_n}{n} z^{-n}$. Определим также дуальный базис $\langle W|$, который ортогонален Джековскому базису, по отношению к обычному скалярному произведению в алгебре Гейзенберга. В [25] было доказано, что

$$\langle W|V_\alpha|Y\rangle = \prod_{s \in Y} \left(b(l_W(s) + 1) - b^{-1}a_Y(s) - \alpha \right) \prod_{t \in W} \left(b^{-1}(a_W(t) + 1) - bl_Y(t) - \alpha \right). \quad (2.20)$$

Подчеркнем, что Джековский базис $|Y\rangle$ интерпретируется как базис фиксированных точек p_Y векторного поля на многообразии инстантонов \mathcal{M} (В случае ранга один и $\epsilon_1 = b$, $\epsilon_2 = 1/b$) [75]. Интегралы Движения понимаются как операторы умножения на классах когомологий. Отметим, что правая часть уравнения (2.20) совпадает с (2.11) в случае $r = 1$, $a = a' = 0$, $m = \alpha$ и $\epsilon_1 = b$, $\epsilon_2 = 1/b$.

$$\langle W|V_\alpha|Y\rangle = Z_{\text{bif}}^{(1)}(\alpha; 0, W; 0, Y|b, b^{-1}).$$

Случай $r = 2$ (Глава 1)

Мы рассматриваем конформную теорию поля с алгеброй симметрии $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \text{Vir}$ (используем соглашения, которые особенные в данном случае: в коммутационных соотношениях для генераторов a_k присутствует фактор $1/2$ в сравнении с (2.15)):

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \\ [a_n, a_m] &= \frac{n}{2}\delta_{n+m,0}, \quad [L_n, a_m] = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Будем параметризовать центральный заряд c алгебры Вирасоро как в теории Лиувилля:

$$c = 1 + 6Q^2, \quad \text{где } Q = b + \frac{1}{b}. \quad (2.22)$$

Мы также вводим операторы:

$$V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_\alpha \cdot V_\alpha^{\text{vir}}, \quad (2.23)$$

где V_α^{vir} примарное поле алгебры Вирасоро с конформной размерностью

$$\Delta(\alpha, b) = \alpha(Q - \alpha) \quad (2.24)$$

и \mathcal{V}_α свободная экспонента:

$$\mathcal{V}_\alpha = e^{2(\alpha-Q)\varphi_-} e^{2\alpha\varphi_+}, \quad (2.25)$$

с $\varphi_+(z) = i \sum_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}$ и $\varphi_-(z) = i \sum_{n<0} \frac{a_n}{n} z^{-n}$.

Рассмотрим представление старшего веса алгебры $\mathcal{H} \oplus \text{Vir}$, параметризованное импульсом P и определенное вакуумным состоянием $|P\rangle$:

$$L_n|P\rangle = a_n|P\rangle = 0, \quad \text{для } n > 0, \quad L_0|P\rangle = \Delta(P)|P\rangle, \quad \langle P|P\rangle = 1.$$

Конформная размерность состояния $|P\rangle$ выражается через импульс P как:

$$\Delta(P) = \frac{Q^2}{4} - P^2.$$

Представление старшего веса образовано векторами вида

$$a_{-l_m} \dots a_{-l_1} L_{-k_n} \dots L_{-k_1} |P\rangle, \quad (2.26)$$

$$k = (k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n), \quad l = (l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m).$$

Это представление неприводимо для общего значения импульса P .

В принципе, можно выбрать другой базис, отличающийся от наивного (2.26). Среди всех возможных базисов существует особенно интересный для нас. Определенное свойство этого базиса сформулировано следующим предложением, доказанным в Главе 1 (**Главное Предложение**).

Предложение 2.1 *Существует и единственный ортогональный базис $|P\rangle_{\vec{Y}}$, такой, что*

$$\frac{\vec{w} \langle P' | V_\alpha | P \rangle_{\vec{Y}}}{\langle P' | V_\alpha | P \rangle} = \mathbb{F}(\alpha | P', \vec{W}; P, \vec{Y}). \quad (2.27)$$

В **Предложении 2.1** мы обозначили элементы базиса как $|P\rangle_{\vec{Y}}$, где $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$ обозначает пару диаграмм Юнга. В (2.27) функция $\mathbb{F}(\alpha | P', \vec{Y}'; P, \vec{Y})$ определена как (2.11)–(2.12). Отметим, что на геометрическом языке базисное состояние $|P\rangle_{\vec{Y}}$ соответствует фиксированной точке $p_{\vec{Y}}$ векторного поля. Как следует из **Предложения 2.1**, состояния $|P\rangle_{\vec{Y}}$ образуют ортогональный базис

$$\vec{w} \langle P | P \rangle_{\vec{Y}} = \frac{\delta_{\vec{Y}, \vec{w}}}{\mathbb{N}(P, \vec{Y})}, \quad (2.28)$$

где $\delta_{\vec{Y}, \vec{w}} = 0$ если $\vec{Y} \neq \vec{W}$, $\delta_{\vec{Y}, \vec{Y}} = 1$ и функция $\mathbb{N}(P, \vec{Y})$ определена в (2.13).

Далее будет удобно ввести операторы $X_{\vec{Y}}(P, b)$:

$$|P\rangle_{\vec{Y}} \stackrel{\text{def}}{=} X_{\vec{Y}}(P, b) |P\rangle, \quad (2.29)$$

и такие, что $X_{\vec{Y}}(P, b)$ не содержит положительных компонент \mathcal{A} , то есть

$$X_{\vec{Y}}(P, b) = \sum_{l+k=|Y|} C_{\vec{Y}}^{l, k}(P, b) a_{-l_m} \dots a_{-l_1} L_{-k_n} \dots L_{-k_1}, \quad (2.30)$$

где $l = \sum l_i$ и $k = \sum k_j$. Можно показать, что все коэффициенты $C_{\vec{r}}^{i,k}(P, b)$ — некоторые полиномы по импульсу P (см. примеры в Главе 1).

Система Интегралов Движения, которая действует диагонально в базисе $|P\rangle_{\vec{r}}$ рассмотрена в Приложении 3. Первые два представителя этой системы записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= L_0 + 2 \sum_{k>0} a_{-k} a_k, \\ \mathbf{I}_2 &= \sum_{k \neq 0} a_{-k} L_k + 2iQ \sum_{k>0} k a_{-k} a_k + \frac{1}{3} \sum_{i+j+k=0} a_i a_j a_k. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Эта интегрируемая система была изучена в Приложении 3 и в [76, 94, 95]. В частности в Главе 1, было замечено, что базис собственных состояний очень подобен Джековскому базису изученному выше. Состояния $|P\rangle_{Y,\emptyset}$, а также состояния $|P\rangle_{\emptyset,Y}$ становятся Джековскими состояниями (2.17), если выразить генераторы алгебры Вирасоро L_n в терминах бозонов (см. **Предложение 1.3.1**). На самом деле, существует два способа сделать это

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k \neq 0, n} c_k c_{n-k} + i(nQ \mp 2P)c_n, \quad L_0 = \frac{Q^2}{4} - P^2 + 2 \sum_{k>0} c_{-k} c_k, \\ [c_n, c_m] &= \frac{n}{2} \delta_{n+m, 0}, \quad [P, c_n] = 0, \quad \mathcal{P}|P\rangle = P|P\rangle, \quad \langle P|\mathcal{P} = -P\langle P|, \end{aligned} \quad (2.32)$$

соответствующие выбору знака напротив оператора нулевой моды \mathcal{P} . Эти два варианта определяют разные наборы бозонов c_k , которые связаны унитарным преобразованием, также называемым оператором отражения [33]. Знак “−” выбирается для состояний $|P\rangle_{Y,\emptyset}$, тогда как “+” для $|P\rangle_{\emptyset,Y}$. Например, взяв “−” в (1.29) можно показать, что

$$|P\rangle_{Y,\emptyset} = \Omega_Y(P) \mathbf{J}_Y^{(1/g)}(x)|P\rangle, \quad (2.33)$$

где $\mathbf{J}_Y^{(1/g)}(x)$ полином Джека с $g = -b^2$,

$$a_{-k} - c_{-k} = -ib p_k(x),$$

и $\Omega_Y(P)$ нормировочный фактор, явная форма которого дана в (1.31). Утверждение, подобное (2.33), верно для состояния $|P\rangle_{\emptyset,Y}$, если взять знак “+” в (1.29). При значении $Q = 0$ эти два набора бозонов различаются только знаком и общее состояние $|P\rangle_{\vec{r}}$ может быть записано как тензорное произведение двух Джековских состояний [94]. Замечательно, что утверждение, что некоторые состояния становятся Джековскими состояниями после бозонизации верно для любого r (см. [78]). Используя этот факт и “бутстрапные” уравнения, предложенные в Главе 1 и в [76, 78] можно построить рекуррентно все базисные состояния.

2.3 Суперсимметричный случай ($p = 2, r = 2$)

В этом пункте мы строим базис соответствующий случаю $p = 2, r = 2$ из общей схемы. С алгебраической стороны мы ожидаем иметь дело с алгеброй $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$.

2.3.1 Геометрический подход

За X_2 мы обозначаем АЛЕ пространство, которое является минимальным разрешением фактор пространства $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Это пространство может быть построено склеиванием двух карт \mathbb{C}^2 с координатами:

$$1: \quad \mathbb{C}^2 (u_1, v_1) \quad u_2 = v_1^{-1}, \quad v_2 = u_1 v_1^2 \qquad 2: \quad \mathbb{C}^2 (u_2, v_2) \quad u_1 = u_2^2 v_2, \quad v_1 = u_2^{-1}$$

Существует отображение $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow X_2$ выражающиеся в координатах $u_1 = z_1^2, v_1 = z_2/z_1$ в первой карте и координатами $u_2 = z_1/z_2, v_2 = z_2^2$ во второй карте. Точки (z_1, z_2) и $(-z_1, -z_2)$ имеют одинаковый образ под действием этого отображения. Следовательно, получаем проекцию

$$\pi: X_2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2,$$

которая оказывается минимальным разрешением сингулярности. Прообраз точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ есть исключительный дивизор $C \in X_2$. В первой и во второй картах C дается уравнениями $u_1 = 0$ и $v_2 = 0$ соответственно.

Действие тора на X_2 возникает из действия тора на \mathbb{C}^2 :

$$1: \quad (u_1, v_1) \mapsto (t_1^2 u_1, t_1^{-1} t_2 v_1); \qquad 2: \quad (u_2, v_2) \mapsto (t_1 t_2^{-1} u_2, t_2^2 v_2).$$

Есть две точки, которые инвариантны относительно действия тора, а именно начала координат p_1 и p_2 в первой и во второй картах соответственно.

Пусть $\mathcal{M} = \bigsqcup_N \mathcal{M}(X_2, 2, N)$ есть пространство модулей тривиализованных на бесконечности пучков свободных от кручения на X_2 ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0, c_2 = N$ [96]. Тор $T = (\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ действует на многообразии \mathcal{M} . Действие первого $(\mathbb{C}^*)^2$ возникает из действия двух поворотов на \mathbb{C}^2 , и действие второго $(\mathbb{C}^*)^2$ возникает из действия на тривиализации в бесконечности.

Неподвижные точки тора были описаны в [97]. Они могут быть занумерованы парой пар диаграмм Юнга $\vec{Y}^{(\sigma)} = (Y_1^{(\sigma)}, Y_2^{(\sigma)})$, $\sigma = 1, 2$ и одним целым числом $k \in \mathbb{Z}$. Пара диаграмм Юнга $\vec{Y}^{(\sigma)}$ описывает соответствующий пучок $\mathcal{E}_{\vec{Y}^{(\sigma)}, k}$ вблизи инвариантной точки p_σ и k означает, что $\mathcal{E}_{\vec{Y}^{(\sigma)}, k}$ является подпучком $\mathcal{O}(kC) + \mathcal{O}(-kC)$.

Детерминант векторного поля $v = (\epsilon_1, \epsilon_2, a)$ в фиксированной точке $p_{\vec{Y}^{(\sigma)}, k}$ равен [97]:

$$\det v \Big|_{p_{\vec{Y}^{(\sigma)}, k}} = \frac{l_{\vec{k}}(\vec{a}|\epsilon_1, \epsilon_2)}{Z_{\text{vec}}^{(2)}(\vec{a} + \epsilon_1 \vec{k}, \vec{Y}^{(1)}|2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1) Z_{\text{vec}}^{(2)}(\vec{a} + \epsilon_2 \vec{k}, \vec{Y}^{(2)}|\epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2)}, \quad (2.34)$$

где $\vec{k} = (k, -k)$, функция $Z_{\text{vec}}^{(2)}(\vec{a}, \vec{Y}|\epsilon_1, \epsilon_2)$ дана в (2.9) и фактор $l_{\vec{k}}(\vec{a}|\epsilon_1, \epsilon_2)$ равен

$$l_{\vec{k}}(\vec{a}|\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1)^k \times \begin{cases} l(2a, k)l(\epsilon_1 + \epsilon_2 + 2a, k) & \text{если } k > 0, \\ l(-2a, -k)l(\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2a, -k) & \text{если } k < 0, \end{cases} \quad (2.35)$$

где

$$l(x, n) = \prod_{\substack{i, j \geq 1, i+j \leq 2n \\ i+j \equiv 0 \pmod{2}}} (x + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2).$$

Два фактора $Z_{\text{vec}}^{(2)}$ в (2.34) возникают из точек $p_1, p_2 \in X_2$, инвариантных относительно действия тора. Фактор $l_{\vec{k}}$ возникает из исключительного дивизора. Мы будем называть этот фактор как "блоу-ап" фактор.

Инстантонная часть статистической суммы Некрасова для чистой $U(2)$ калибровочной теории на X_2 может быть записана как [85]:

$$Z_{\text{pure}}^{(2, X_2)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2|\Lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\Lambda^{2k^2}}{l_{\vec{k}}(\vec{a}|\epsilon_1, \epsilon_2)} Z_{\text{pure}}^{(2)}(\vec{a} + \epsilon_1 \vec{k}, 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1|\Lambda) Z_{\text{pure}}^{(2)}(\vec{a} + \epsilon_2 \vec{k}, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2|\Lambda), \quad (2.36)$$

где $Z_{\text{pure}}^{(2)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2|\Lambda)$ дается в (2.10). Уравнения (2.34) и (2.36) дают некоторую подсказку о структуре базиса состояний в данном случае. А именно, правая часть уравнения (2.36) выражена в терминах двух статистических сумм (соответствующих случаю $p = 1, r = 2$ из нашей схемы) с параметрами

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{(1)} &= 2\epsilon_1, & \epsilon_2^{(1)} &= \epsilon_2 - \epsilon_1, \\ \epsilon_1^{(2)} &= \epsilon_1 - \epsilon_2, & \epsilon_2^{(2)} &= 2\epsilon_2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Заметим, что если мы определим параметры в конформной теории поля $b^{(\sigma)}$ как:

$$(b^{(\sigma)})^2 = \frac{\epsilon_1^{(\sigma)}}{\epsilon_2^{(\sigma)}},$$

то они будут удовлетворять соотношению

$$(b^{(1)})^2 + (b^{(2)})^{-2} = -2. \quad (2.38)$$

Можно предположить, что подобное соотношение должно иметь место также в конформной теории поля. А именно, на алгебраическом языке мы ожидаем, что в алгебре $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$ есть две коммутирующие подалгебры $\mathcal{H} \oplus \text{Vir}$ с параметрами $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$, удовлетворяющими (2.38). В следующем пункте мы опишем явную конструкцию этих двух подалгебр.

2.3.2 Алгебраический подход

Как было заявлено выше, данный случай соответствует алгебре $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$. Введем для начала обозначения. Коммутационные соотношения в алгебре Невье-Шварца-Рамона есть:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c_{\text{NSR}}}{8}(n^3 - n)\delta_{n+m}, \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{1}{2}c_{\text{NSR}}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}, \\ [L_n, G_r] &= \left(\frac{1}{2}n - r\right)G_{n+r}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Центральный заряд c_{NSR} параметризован как:

$$c_{\text{NSR}} = 1 + 2Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b}. \quad (2.40)$$

Индексы r и s в (2.39) либо целые (в секторе Рамона), либо полуцелые и нечетные целые (в секторе Невье-Шварца). Ниже мы рассмотрим только сектор Невье-Шварца (сектор Рамона был изучен в статьях [80,81]). Представление старшего веса в данном случае определяется вакуумным состоянием $|P\rangle_{\text{NS}}$:

$$L_n|P\rangle_{\text{NS}} = G_r|P\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad \text{для } n, r > 0, \quad L_0|P\rangle_{\text{NS}} = \Delta_{\text{NS}}(Q/2 + P, b)|P\rangle_{\text{NS}}, \quad (2.41)$$

где

$$\Delta_{\text{NS}}(\alpha, b) = \frac{1}{2}\alpha(Q - \alpha). \quad (2.42)$$

Две коммутирующие алгебры Вирасоро

Мы расширяем нашу алгебру, умножая ее на две дополнительные алгебры Гейзенберга \mathcal{H} и одну фермионную алгебру \mathcal{F} . Для начала мы умножим NSR алгебру на дополнительный фермион (в секторе Невье-Шварца):

$$\{f_r, f_s\} = \delta_{r+s,0}, \quad r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \quad (2.43)$$

и также предположим, что генераторы данной алгебры антикоммутируют с генераторами G_r :

$$\{G_r, f_s\} = 0. \quad (2.44)$$

Как было указано в [98, 120, 122] существует нетривиальное вложение двух коммутирующих алгебр Вирасоро в тензорное произведение $\mathcal{F} \oplus \text{NSR}$, которое будет основной частью нашей конструк-

ции⁵. Следуя [98, 120, 122], мы можем заметить, что комбинации:

$$\begin{aligned} L_n^{(1)} &= \frac{1}{1-b^2}L_n - \frac{1+2b^2}{2(1-b^2)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} r : f_{n-r}f_r : + \frac{b}{1-b^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{n-r}G_r, \\ L_n^{(2)} &= \frac{1}{1-b^{-2}}L_n - \frac{1+2b^{-2}}{2(1-b^{-2})} \sum_{r=-\infty}^{\infty} r : f_{n-r}f_r : + \frac{b^{-1}}{1-b^{-2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{n-r}G_r, \end{aligned} \quad (2.45)$$

коммутируют с друг другом и удовлетворяют коммутационным условиям алгебры Вирасоро т.е.

$$\begin{aligned} [L_n^{(1)}, L_m^{(2)}] &= 0, \\ [L_n^{(\sigma)}, L_m^{(\sigma)}] &= (n-m)L_{n+m}^{(\sigma)} + \frac{c^{(\sigma)}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

с

$$c^{(\sigma)} = 1 + 6Q^{(\sigma)2}, \quad Q^{(\sigma)} = b^{(\sigma)} + 1/b^{(\sigma)} \quad \text{и} \quad b^{(1)} = \frac{2b}{\sqrt{2-2b^2}}, \quad (b^{(2)})^{-1} = \frac{2b^{-1}}{\sqrt{2-2b^{-2}}}. \quad (2.46a)$$

Заметим, что параметры $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ удовлетворяют соотношению (2.38).

Рассмотрим представление старшего веса $\pi_{\mathcal{F} \oplus \text{NSR}} = \pi_{\mathcal{F}} \otimes \pi_{\text{NSR}}$ алгебры $\mathcal{F} \oplus \text{NSR}$. Другими словами, мы расширяем определение вектора старшего веса (2.41) требуя, что

$$f_r |P\rangle_{\text{NS}} = 0, \quad \text{для} \quad r > 0.$$

Для общих значений импульса P представление старшего веса $\pi_{\mathcal{F} \oplus \text{NSR}}$ неприводимо. Его характер дается формулой

$$\chi_{\mathcal{F} \oplus \text{NSR}}(q) = \chi_{\mathcal{F}}(q)^2 \chi_{\text{B}}(q), \quad (2.47)$$

где

$$\chi_{\mathcal{F}}(q) = \prod_{k>0} (1 + q^{k-\frac{1}{2}}), \quad \chi_{\text{B}}(q) = \prod_{k>0} \frac{1}{(1 - q^k)}$$

фермионный и бозонный характеры⁶.

Мы видим из (2.45), что существует естественное действие двух алгебр Вирасоро в представлении $\pi_{\mathcal{F} \oplus \text{NSR}}$. Как представление $\text{Vir} \oplus \text{Vir}$ оно больше не является неприводимым и для общих значений импульса P может быть разложено в прямую сумму модулей Верма $\pi_{\text{Vir} \oplus \text{Vir}}$ над алгеброй $\text{Vir} \oplus \text{Vir}$. Характер любого из $\pi_{\text{Vir} \oplus \text{Vir}}$ равен

$$\chi_{\text{Vir} \oplus \text{Vir}}(q) = \chi_{\text{B}}(q)^2. \quad (2.48)$$

⁵Возможность использования такой конструкции [98, 120, 122] в данном контексте также было предложено Виллардом в [83].

⁶Обычно характер, который определяется как $\text{Tr} q^{L_0} |_{\pi_{\Delta}}$, пропорционален q^{Δ} . Мы исключаем этот фактор для простоты.

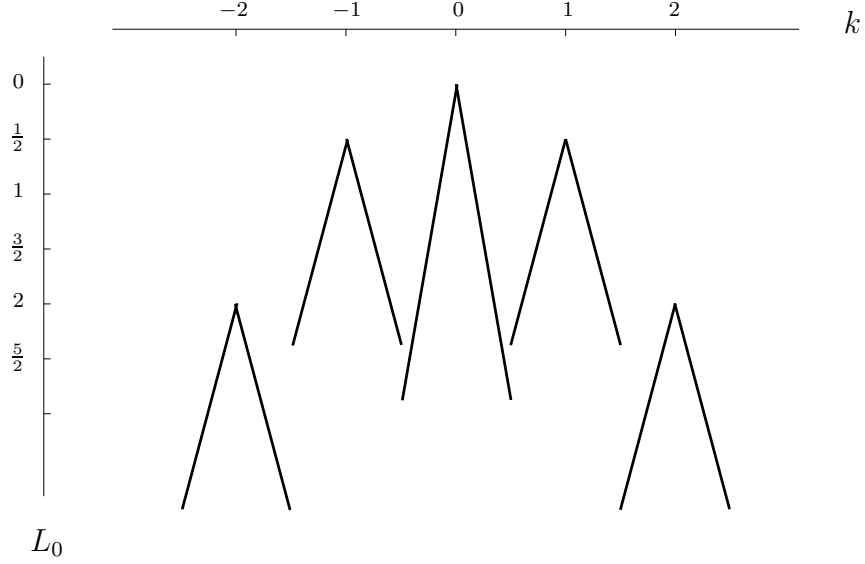


Рис. 2.1: Разложение неприводимого представления алгебры $\mathcal{F} \oplus \text{NSR}$ в прямую сумму представлений алгебры $\text{Vir} \oplus \text{Vir}$. Каждый внутренний угол соответствует модулю Верма $\pi_{\text{Vir} \oplus \text{Vir}}^k$ над алгеброй $\text{Vir} \oplus \text{Vir}$, чья конформная размерность сдвинута на $k^2/2$ как в (2.52).

Используя следствие тождества тройного произведения Якоби:

$$\prod_{k>0} (1 + q^{k-\frac{1}{2}})^2 (1 - q^k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\frac{k^2}{2}} = 1 + 2q^{\frac{1}{2}} + 2q^2 + 2q^{\frac{9}{2}} + \dots,$$

мы видим, что

$$\chi_{\mathcal{F} \oplus \text{NSR}}(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\frac{k^2}{2}} \chi_{\text{Vir} \oplus \text{Vir}}(q), \quad (2.49)$$

это влечет разложение (см. рисунок 2.1):

$$\pi_{\mathcal{F} \oplus \text{NSR}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \pi_{\text{Vir} \oplus \text{Vir}}^k, \quad (2.50)$$

где $\pi_{\text{Vir} \oplus \text{Vir}}^k$ есть модуль Верма $\text{Vir} \oplus \text{Vir}$ со старшим весом $|P, k\rangle$. Состояние старшего веса $|P, k\rangle$ определено как

$$\begin{aligned} L_n^{(1)} |P, k\rangle &= L_n^{(2)} |P, k\rangle = 0 \quad \text{для} \quad n > 0, \\ L_0^{(1)} |P, k\rangle &= \Delta^{(1)}(P, k) |P, k\rangle, \quad L_0^{(2)} |P, k\rangle = \Delta^{(2)}(P, k) |P, k\rangle, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где конформные размерности $\Delta^{(1)}(P, k)$ и $\Delta^{(2)}(P, k)$ удовлетворяют соотношению

$$\Delta^{(1)}(P, k) + \Delta^{(2)}(P, k) = \Delta_{\text{NS}}(Q/2 + P, b) + \frac{k^2}{2}. \quad (2.52)$$

Уравнение (2.52) следует из соотношения

$$L_0^{(1)} + L_0^{(2)} = L_0 + L_0^f,$$

где L_0^f нулевая компонента тензора энергии-импульса для свободных фермионов

$$L_0^f = \sum_{r=1/2}^{\infty} r f_{-r} f_r.$$

Для того, чтобы построить состояние старшего веса $|P, k\rangle$ в более явном виде и вычислить конформные размерности $\Delta^{(1)}(P, k)$ и $\Delta^{(2)}(P, k)$, мы рассматриваем представление алгебры NSR через свободные поля. Существуют два альтернативных свободно-полевых представления (соответствующие выбору знака перед оператором \mathcal{P}):

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0, n} c_k c_{n-k} + \frac{1}{2} \sum_r (r - \frac{n}{2}) \psi_{n-r} \psi_r + \frac{i}{2} (Qn \mp 2\mathcal{P}) c_n, \\ L_0 &= \sum_{k>0} c_{-k} c_k + \sum_{r>0} r \psi_{-r} \psi_r + \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4} - \mathcal{P}^2 \right), \\ G_r &= \sum_{n \neq 0} c_n \psi_{r-n} + i(Qr \mp \mathcal{P}) \psi_r, \quad \mathcal{P}|P\rangle_{\text{NS}} = P|P\rangle_{\text{NS}}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

где оператор нулевой моды \mathcal{P} , бозонные генераторы c_n и фермионные компоненты ψ_r удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [c_n, c_m] &= n \delta_{n+m, 0}, \quad \{\psi_r, \psi_s\} = \delta_{r+s, 0}, \\ [\mathcal{P}, c_n] &= [\mathcal{P}, \psi_r] = 0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Удобно ввести комбинацию:

$$\chi_r = f_r - i\psi_r,$$

тогда можно показать, что состояние

$$|P, k\rangle = \Omega_k(P) \chi_{-\frac{1}{2}} \chi_{-\frac{3}{2}} \cdots \chi_{-\frac{2|k|-1}{2}} |\text{vac}\rangle, \tag{2.55}$$

есть вектор старшего веса, т.е. оно удовлетворяет условиям (2.51) и $|\text{vac}\rangle$ есть вакуумное состояние определенное как:

$$c_n |\text{vac}\rangle = \psi_r |\text{vac}\rangle = f_r |\text{vac}\rangle = 0, \quad \text{для } n, r > 0.$$

Последнее утверждение может быть получено используя соотношения

$$\begin{aligned} [L_n^{(1)} + L_n^{(2)}, \chi_r] &= -\left(\frac{n}{2} + r\right) \chi_{r+n}, \\ [bL_n^{(1)} + b^{-1}L_n^{(2)}, \chi_r] &= -((n+r)Q \mp \mathcal{P}) \chi_{r+n} + i \sum_{m \neq 0} c_m \chi_{r+n-m}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Выбор знака перед оператором нулевой моды \mathcal{P} в (2.53) соответствует случаю $k > 0$ или $k < 0$ в (2.55). Выбирая “ \mp ” в (2.53), мы определяем два разных набора генераторов c_k и ψ_r . Подобно

бозонному случаю они связаны некоторым унитарным преобразованием (в частности если $Q = 0$ они просто отличаются знаком).

Используя (2.55), можно вычислить

$$\Delta^{(1)}(P, k) = \frac{(Q^{(1)})^2}{4} - \left(P^{(1)} + \frac{kb^{(1)}}{2} \right)^2, \quad \Delta^{(2)}(P, k) = \frac{(Q^{(2)})^2}{4} - \left(P^{(2)} + \frac{k}{2b^{(2)}} \right)^2, \quad (2.57)$$

где параметры $b^{(\sigma)}$ и $Q^{(\sigma)}$ даны в (2.46а) и

$$P^{(1)} = \frac{P}{\sqrt{2-2b^2}} \quad \text{и} \quad P^{(2)} = \frac{P}{\sqrt{2-2b^{-2}}}. \quad (2.58)$$

Можно также определить состояние $\langle k', P' |$, сопряженное к (2.55)

$$\langle k', P' | = \Omega_{k'}(P') \langle \text{vac} | \chi_{\frac{2|k'-1}{2}} \dots \chi_{\frac{1}{2}}. \quad (2.59)$$

Такой выбор согласован со следующим сопряжением $f_r^+ = -f_{-r}$. Мы выбираем нормировочные факторы $\Omega_k(P)$ в (2.55) и (2.59) такие, что

$$|P, k\rangle = \left((G_{-\frac{1}{2}})^{k^2} + \dots \right) |P\rangle, \quad \langle k', P' | = \langle P' | \left((G_{\frac{1}{2}})^{k'^2} + \dots \right), \quad (2.60)$$

где опущенные члены имеют меньшую степень по G . Можно найти, что

$$\Omega_k(P) = \frac{1}{2} \prod_{m+n \leq 2|k|} (2P + mb + nb^{-1}). \quad (2.61)$$

Такая нормировка стандартна в конформной теории поля и с другой стороны она совпадает с геометрической нормировкой. Норма состояния $|P, k\rangle$ равна детерминанту векторного поля⁷

$$\langle k, P | P, k \rangle = \det v \Big|_{P(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset), k} \quad (2.62)$$

и совпадает с фактором (2.35).

Построение базиса

Теперь мы можем помножить нашу алгебру $\mathcal{F} \oplus \text{NSR}$ на две дополнительные алгебры Гейзенберга $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ с генераторами h_n и w_n :

$$[h_n, h_m] = [w_n, w_m] = n\delta_{n+m, 0}, \quad [h_n, w_m] = 0. \quad (2.63)$$

Набор бозонов w_n и h_n имеет разную природу. В частности, бозоны w_n аналогичны бозонам a_n и a_n , рассмотренных в пункте 2.2, и входят в вертексный оператор несимметричным образом

⁷Заметим, что состояния $|P, k\rangle$ и $\langle k', P' |$ не могут быть представлены в виде (2.51) и (2.59) одновременно.

(см. например (2.69)–(2.70) и сравните это с (2.19) и (2.25)). Наоборот, бозоны h_n всегда входят в вертексный оператор симметричным образом (см. (2.71)). С точки зрения схемы (2.4а), бозоны w_n соответствуют фактору \mathcal{H} в $\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_2 \oplus \text{NSR}$, тогда как бозоны h_n принадлежат к свободно-полевому представлению $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_2$ алгебры.

Мы определяем также другой набор генераторов

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2-2b^2}}(w_n - ibh_n), \quad a_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2-2b^{-2}}}(w_n - ib^{-1}h_n), \quad (2.64)$$

такой, что

$$[a_n^{(\sigma)}, a_m^{(\rho)}] = \frac{n}{2} \delta_{n+m,0} \delta_{\sigma,\rho}, \quad \sigma, \rho = 1, 2. \quad (2.65)$$

Поэтому в алгебре $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$ мы имеем две подалгебры $\mathcal{H} \oplus \text{Vir}$ с генераторами $a_n^{(\sigma)}$ и $L_n^{(\sigma)}$ для $\sigma = 1, 2$, и которые удовлетворяют (2.46), (2.65) и очевидным соотношениям:

$$[L_n^{(\sigma)}, a_m^{(\rho)}] = 0.$$

Заметим, что бозоны $a_n^{(1)}$ и $a_n^{(2)}$ входят в нашу конструкции полностью симметричным образом (вместе с симметрией $b \rightarrow 1/b$). Для каждой из этих подалгебр мы можем определить интегрируемую систему (2.31):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^{(\sigma)} &= L_0^{(\sigma)} + 2 \sum_{k>0} a_{-k}^{(\sigma)} a_k^{(\sigma)}, \\ \mathbf{I}_2^{(\sigma)} &= \sum_{k \neq 0} a_{-k}^{(\sigma)} L_k^{(\sigma)} + 2iQ \sum_{k>0} k a_{-k}^{(\sigma)} a_k^{(\sigma)} + \frac{1}{3} \sum_{i+j+k=0} a_i^{(\sigma)} a_j^{(\sigma)} a_k^{(\sigma)}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Собственные вектора для этой интегрируемой системы могут быть легко найдены. Вначале, мы переопределяем состояния старшего веса (2.51) требуя, что

$$h_n |P, k\rangle = w_n |P, k\rangle = 0 \quad \text{для} \quad n > 0.$$

Затем собственные вектора могут быть записаны в форме

$$|P, k\rangle_{\vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}} \stackrel{\text{def}}{=} X_{\vec{Y}^{(1)}} \left(P^{(1)} + \frac{kb^{(1)}}{2}, b^{(1)} \right) X_{\vec{Y}^{(2)}} \left(P^{(2)} + \frac{k}{2b^{(2)}}, b^{(2)} \right) |P, k\rangle, \quad (2.67)$$

где $\vec{Y}^{(1)}$ и $\vec{Y}^{(2)}$ две пары диаграмм Юнга и параметры $b^{(\sigma)}$ и $P^{(\sigma)}$ даются формулами (2.46а) и (2.58).

Операторы $X_{\vec{Y}^{(\sigma)}}(P^{(\sigma)}, b^{(\sigma)})$ в (2.67) даются (2.29) и состоят из генераторов $L_{-n}^{(\sigma)}$ и $a_{-n}^{(\sigma)}$.

Мы утверждаем, что базис (2.67) факторизует определенные примарные операторы по аналогии с (2.23). Удивительно, что в сравнение со случаем $p = 1$, мы имеем бесконечно много таких операторов

$$\mathbb{V}_\alpha^{(m)} \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (2.68)$$

которые соответствуют состояниям старшего веса $|P, m\rangle$ в силу соответствия между операторо-
мами и состояниями. Только поле $V_\alpha^{(0)}$ соответствует примарному полю NSR алгебры, остальные
поля соответствуют потомкам полей с конформными размерностями относительно “полного” тен-
зора энергии-импульса $T(z) + T^f(z)$:

$$\Delta_{\text{NS}}(\alpha) + \frac{m^2}{2},$$

где $T^f(z)$ — тензор энергии импульса для Майорановских фермионов f_r . Первые несколько при-
меров полей $V_\alpha^{(m)}$ могут быть легко вычислены:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\alpha^{(0)}(z) &= \Phi_\alpha^{\text{NS}}(z) \cdot \mathcal{W}_\alpha(z), \\ \mathbb{V}_\alpha^{(1)}(z) &= (\alpha f(z) \Phi_\alpha^{\text{NS}}(z) + \Psi_\alpha^{\text{NS}}(z)) e^{i\phi(z)} \mathcal{W}_\alpha(z), \\ \mathbb{V}_\alpha^{(-1)}(z) &= ((Q - \alpha) f(z) \Phi_\alpha^{\text{NS}}(z) + \Psi_\alpha^{\text{NS}}(z)) e^{-i\phi(z)} \mathcal{W}_\alpha(z), \end{aligned} \quad (2.69)$$

где Φ_α^{NS} примарное поле NSR алгебры с конформной размерностью $\Delta(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(Q - \alpha)$, а Ψ_α^{NS} его
суперпартнер с размерностью $\Delta(\alpha) + 1/2$,

$$f(z) = \sum_r f_r z^{r+1/2}, \quad \phi(z) = i \sum_{n \neq 0} \frac{h_n}{n} z^{-n}$$

и \mathcal{W}_α экспонента от свободного поля:

$$\mathcal{W}_\alpha = e^{(\alpha-Q)\varphi_-} e^{\alpha\varphi_+}, \quad (2.70)$$

с $\varphi_+ = i \sum_{n>0} \frac{w_n}{n} z^{-n}$ и $\varphi_-(z) = i \sum_{n<0} \frac{w_n}{n} z^{-n}$. Для общих m поле $\mathbb{V}_\alpha^{(m)}$ имеет вид:

$$\mathbb{V}_\alpha^{(m)} = D^m[\Phi_\alpha^{\text{NS}}(z), f(z)] e^{im\phi(z)} \mathcal{W}_\alpha(z), \quad (2.71)$$

где $D^m[\Phi_\alpha^{\text{NS}}(z), f(z)]$ поле-потомок на уровне $m^2/2$.⁸

Коммутационные соотношения примарных полей Φ_α^{NS} , Ψ_α^{NS} и \mathcal{W}_α с генераторами L_n , a_n , w_n , G_r
и f_r записываются как:

$$\begin{aligned} [L_n, \Phi_\alpha^{\text{NS}}] &= (z^{n+1} \partial_z + (n+1)\Delta(\alpha)z^n) \Phi_\alpha^{\text{NS}}, \\ [L_n, \Psi_\alpha^{\text{NS}}] &= (z^{n+1} \partial_z + (n+1)(\Delta(\alpha) + 1/2)z^n) \Psi_\alpha^{\text{NS}}, \\ [G_r, \Phi_\alpha^{\text{NS}}] &= z^{r+1/2} \Psi_\alpha^{\text{NS}}, \\ \{G_r, \Psi_\alpha^{\text{NS}}\} &= (z^{r+1/2} \partial_z + (2r+1)\Delta(\alpha)z^{r-1/2}) \Phi_\alpha^{\text{NS}}, \\ [w_n, \mathcal{W}_\alpha(z)] &= -i\alpha z^n \mathcal{W}_\alpha, \quad \text{для } n < 0, \\ [w_n, \mathcal{W}_\alpha(z)] &= i(Q - \alpha) z^n \mathcal{W}_\alpha, \quad \text{для } n > 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

⁸Геометрическое определение вертексного оператора в [25] (для случая схем Гильберта) зависит от линейного
расслоения на поверхности. Следует ожидать, что вертексный оператор $\mathbb{V}_\alpha^{(m)}$ соответствует линейному расслоению
 $\mathcal{O}(mC)$ на поверхности X_2

Рассмотрим матричный элемент

$$\mathfrak{F}(\alpha, m|P', k', \vec{W}^{(1)}, \vec{W}^{(2)}; P, k, \vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle k', P' | \mathbb{V}_\alpha^{(m)} | P, k \rangle_{\vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}}}{\langle k', P' | \mathbb{V}_\alpha^{(m)} | P, k \rangle}. \quad (2.73)$$

Предложение 2.2 Мы утверждаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\alpha, m|P', k', \vec{W}^{(1)}, \vec{W}^{(2)}; P, k, \vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}) &= \mathbb{F}\left(\alpha^{(1)} + \frac{mb^{(1)}}{2}, b^{(1)} \middle| P'_1 + \frac{k'b^{(1)}}{2}, \vec{W}^{(1)}, P_1 + \frac{kb^{(1)}}{2}, \vec{Y}^{(1)}\right) \times \\ &\times \mathbb{F}\left(\alpha^{(2)} + \frac{m}{2b^{(2)}}, b^{(2)} \middle| P'_2 + \frac{k'}{2b^{(2)}}, \vec{W}^{(2)}, P_2 + \frac{k}{2b^{(2)}}, \vec{Y}^{(2)}\right), \end{aligned} \quad (2.74)$$

где

$$\alpha^{(1)} = \frac{\alpha}{\sqrt{2 - 2b^2}}, \quad \alpha^{(2)} = \frac{\alpha}{\sqrt{2 - 2b^{-2}}};$$

и параметры b_j и P_j даются формулами (2.46а) и (2.58) и функция \mathbb{F} определяется в (2.11)–(2.12).

Заметим, что **Предложение 2.2** предполагает следующее отождествление

$$\mathbb{V}_\alpha^{(m)}(z) = V_{\alpha^{(1)} + mb^{(1)}/2}^{(1)}(z) \cdot V_{\alpha^{(2)} + m/2b^{(2)}}^{(2)}(z), \quad (2.75)$$

где $V_\alpha^{(\sigma)}$ с $\sigma = 1, 2$ обозначают примарные операторы (2.23) построенные для одной из двух подалгебр $\mathcal{H} \oplus \text{Vir}$:

$$(\mathcal{H} \oplus \text{Vir})_\sigma \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}.$$

Мы проверили тождество (2.74) явными вычислениями для первых нескольких уровней. Дальнейшие обоснования см. в Приложении 4.

Для практических целей также удобно вычислить отношение матричных элементов (“блоу-ап” факторов):

$$l(\alpha, m|P', k', P, k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\langle k', P' | \mathbb{V}_\alpha^{(m)} | P, k \rangle}{\langle P' | \mathbb{V}_\alpha^{(0)} | P \rangle}, & \text{если } k + k' + m = 2n, \\ \frac{\langle k', P' | \mathbb{V}_\alpha^{(m)} | P, k \rangle}{\langle P' | \mathbb{V}_\alpha^{(\pm 1)} | P \rangle}, & \text{если } k + k' + m = 2n + 1. \end{cases} \quad (2.76)$$

Предложение 2.3 Факторы (2.76) даются формулой

$$l(\alpha, m|P', k', P, k) = \begin{cases} \prod_{i,j} s_{\text{even}}\left(\alpha + P'_i + P_j, \frac{m+k'_i+k_j}{2}\right), & \text{если } m + k + k' \text{ четно} \\ \prod_{i,j} s_{\text{odd}}\left(\alpha + P'_i + P_j, \text{int}\left(\frac{m+k'_i+k_j}{2}\right)\right), & \text{если } m + k + k' \text{ нечетно} \end{cases} \quad (2.77)$$

где $\vec{P} = (P, -P)$, $\vec{k} = (k, -k)$, $\vec{P}' = (P', -P')$, $\vec{k}' = (k', -k')$ и $\text{int}(x) = \text{sgn}(x)\lfloor|x|\rfloor$ целая часть от x и для $n \geq 0$

$$s_{\text{even}}(x, n) = 2^{-\frac{n^2}{2}} \prod_{\substack{i, j \geq 1, i+j \leq 2n \\ i+j \equiv 0 \pmod{2}}} (x + (i-1)b + (j-1)b^{-1}),$$

$$s_{\text{odd}}(x, n) = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{\substack{i, j \geq 1, i+j \leq 2n+1 \\ i+j \equiv 1 \pmod{2}}} (x + (i-1)b + (j-1)b^{-1}),$$

тогда как для $n < 0$ мы имеем

$$s_{\text{even}}(x, n) = (-1)^n s_{\text{even}}(Q - x, -n), \quad s_{\text{odd}}(x, n) = s_{\text{odd}}(Q - x, -n).$$

Доказательство **Предложения 2.3** может быть осуществлено, используя метод Кулоновских интегралов. (см. также Приложение 4).

2.4 Суперсимметричный случай: другая компактификация

Базис, построенный в пункте 2.3 соответствует многообразию модулей тривиализованных на бесконечности пучков свободных от кручения на X_2 . Как было упомянуто вначале: существует другая компактификация пространства модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Эта компактификация будет изучена в данном пункте.

2.4.1 Другая компактификация

Напомним, что $\mathcal{M}(r, N)$ обозначает компактифицированное пространство модулей $U(r)$ инстантонов на \mathbb{C}^2 с инстантонным числом N . Для любых чисел $q_1, q_2, \dots, q_r = 0, 1$ есть естественное действие \mathbb{Z}_2 на $\mathcal{M}(r, N)$:

$$B_1 \mapsto -B_1; \quad B_2 = -B_2; \quad I = Iq; \quad J = qJ,$$

где $q = \text{diag}((-1)^{q_1}, \dots, (-1)^{q_r})$. Обозначим за $\mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_2}$ \mathbb{Z}_2 инвариантную часть $\mathcal{M}(r, N)$.

Многообразие $\mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_2}$ является гладким, но не связным. Для того, чтобы описать связанные компоненты, рассмотрим, N -мерное тавтологическое векторное расслоение \mathcal{V} на $\mathcal{M}(r, N)$. Его слой в точке $p = (B_1, B_2, I, J)$ совпадает с векторным пространством V , полученным из векторов I_1, \dots, I_r действием алгебры генерируемой операторами B_1 и B_2 . Если $p \in \mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_2}$, тогда \mathbb{Z}_2 действует на слой \mathcal{V} в p . Затем V может быть разложено $V_+ \oplus V_-$, где V_+ тривиальное представление и V_- знак представления \mathbb{Z}_2 . Две точки p, q принадлежат одной и той же компоненте, если

размерности V_+ в этих точках совпадают. Мы обозначаем связные компоненты как $\mathcal{M}(r, d, N)$, где $d = N_+ - N_-$, и N_+, N_- равны рангу расслоений \mathcal{V}_+ и \mathcal{V}_- соответственно⁹. Ясно, что $d \equiv N \pmod{2}$.

Действие тора на $\mathcal{M}(r, N)^{\mathbb{Z}_2}$ дается формулой (2.7). Точки $p_{\vec{W}}$, фиксированные под действием тора, нумеруются r диаграммами Юнга $\vec{W} = (W_1, \dots, W_r)$. Удобно раскрасить данные диаграммы следующим образом: клетка $s \in W_k$ с координатами (i, j) белая, если $i - j + q_k \equiv 0 \pmod{2}$ и черная в противном случае. Числа N_+ и N_- равны числам белых и черных клеток соответственно.

Детерминант векторного поля $v = (\epsilon_1, \epsilon_2, a)$ в фиксированной точке $p_{\vec{W}}$ равен [131, 132]:

$$\det v \Big|_{p_{\vec{W}}} = Z_{\text{vec}}^\diamond(\vec{a}, \vec{W} | \epsilon_1, \epsilon_2)^{-1} = \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in W_i^\diamond} E_{W_i, W_j}(a_i - a_j | s) (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{W_i, W_j}(a_i - a_j | s)), \quad (2.78)$$

где знак \diamond означает, что произведение берется по клеткам $s \in W_i$ удовлетворяющим:

$$a_{W_i}(s) + l_{W_j}(s) + 1 + q_i - q_j \equiv 0 \pmod{2}.$$

В этом подпункте мы рассмотрим случай $r = 2$. Следуя работе [67], мы выбираем компоненты $\mathcal{M}(2, 0, N)$ для $(q_1, q_2) = (0, 0)$ и $\mathcal{M}(2, -1, N)$ для $(q_1, q_2) = (1, 1)$ ¹⁰. Можно вычислить статистическую сумму Некрасова для чистой $U(r)$ калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, используя эти компоненты:

$$Z_{\text{pure}}^\diamond(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\diamond} Z_{\text{vec}}^\diamond(\vec{a}, \vec{W} | \epsilon_1, \epsilon_2) \Lambda^{2k}, \quad (2.79)$$

где вторая сумма берется по парам диаграмм \vec{W} с $|W| = k$, $N_+ = N_-$ и с белыми углами или по парам диаграмм с $|W| = k$, $N_+ = N_- - 1$ и с черными углами. Как было предположено и проверено в [67] эта функция совпадает с Виттекеровским пределом четырех-точечного конформного блока в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной конформной теории поля.

С другой стороны было предположено и проверено в [85], что функция $Z_{\text{pure}}^{(2, X_2)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | q)$, определенная в (2.36), также совпадает с тем же конформным блоком. Следовательно, эти статистические суммы равны друг другу:

$$Z_{\text{pure}}^\diamond(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | q) = Z_{\text{pure}}^{(2, X_2)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | q). \quad (2.80)$$

Слагаемые в левой части формулы нумеруются парами раскрашенных диаграмм Юнга W_1, W_2 . Слагаемые в правой части формулы нумеруются парами пар диаграмм Юнга $\vec{Y}^{(\sigma)} = (Y_1^{(\sigma)}, Y_2^{(\sigma)})$,

⁹Несвязность $\mathcal{M}(r, d, N)$ следует из его описания в терминах квиверных переменных Накаджимы.

¹⁰Такие компоненты удовлетворяют условию $q_1 + q_2 + 2(N_+ - N_-) = 0$, которое может интерпретироваться как зануление первого класса Черна [131].

$\sigma = 1, 2$ и одним целым числом $k \in \mathbb{Z}$. Существует биекция между двумя типами комбинаторных данных (см. например [93, Sec 1.1 Ex. 8] или [132]). Однако набор слагаемых в левой части формулы и в правой части формулы (2.80) различен (см Приложение 6). Тожество (2.80) является нетривиальным — мы имеем равенство сумм от разных рациональных функций.

Формула (2.80) следует из того факта, что для $N \in \mathbb{Z}$ многообразия $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$ и $\mathcal{M}(2, 0, 2N)$ являются компактификациями одного и того же многообразия (пространства модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$). Следовательно, интегралы от эквивариантных форм должны быть равны. Подобно для $N \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ интегралы по $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$ и $\mathcal{M}(2, -1, 2N)$ должны быть равны (см. также [96] и [103]).

Геометрические аргументы из пункта 2.1 предлагают существование базиса нумеруемого парами цветных диаграмм Юнга в представлении алгебры $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} \oplus \text{NSR}$. В обозначении базиса мы использовали знак \diamond : $|P\rangle_{\vec{W}}^\diamond$. Норма вектора $|P\rangle_{\vec{W}}^\diamond$ должна быть равна $Z_{\text{vec}}^\diamond(\vec{a}, \vec{W}|\epsilon_1, \epsilon_2)^{-1}$. Базис $|P\rangle_{\vec{W}}^\diamond$ отличается от базиса $|P, k\rangle_{\vec{Y}^1, \vec{Y}^2}$, построенного в пункте 2.3, так как наборы слагаемых в (2.80) разные.

Хотя мы не имеем явной конструкции такого базиса, мы предлагаем следующую формулу для матричных элементов вертексного оператора $\mathbb{V}_\alpha^{(0)}$ (2.69) в этом базисе

$$\frac{\diamond \langle P' | \mathbb{V}_\alpha^{(0)} | P \rangle_{\vec{Y}}^\diamond}{\diamond \langle P' | \mathbb{V}_\alpha^{(0)} | P \rangle^\diamond} = Z_{\text{bif}}^\diamond(\alpha; \vec{P}', \vec{W}; \vec{P}, \vec{Y} | b, b^{-1}), \quad (2.81)$$

где

$$Z_{\text{bif}}^\diamond(m; \vec{a}', \vec{W}; \vec{a}, \vec{Y} | \epsilon_1, \epsilon_2) = \prod_{i,j=1}^r \prod_{\diamond} (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, W_j}(a_i - a'_j | s) - m) \prod_{\diamond} (E_{W_j, Y_i}(a'_j - a_i | t) - m),$$

и произведение идет по всем клеткам $s \in Y_i$ и $t \in W_j$ удовлетворяющим

$$a_{Y_i}(s) + l_{W_j}(s) + 1 + q_{Y_i} - q_{W_j} \equiv 0 \pmod{2}; \quad a_{W_j}(t) + l_{Y_i}(t) + 1 + q_{W_j} - q_{Y_i} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Мы проверили формулу (2.81) вычислением пятиточечного конформного блока

$$\langle P' | \mathbb{V}_\alpha^{(0)}(q_1) \mathbb{V}_\alpha^{(0)}(q_1 q_2) \mathbb{V}_\alpha^{(0)}(1) | P \rangle,$$

используя два разных базиса, то есть сравнивая нижние порядки по q_1 и q_2 , результатов полученных с помощью (2.74) и (2.81).

Заметим, что (2.81) может рассматриваться как система уравнений для неизвестных базисных векторов $|P\rangle_{\vec{Y}}^\diamond$. К сожалению, решение данной системы не единственно. Это тесно связано с тем фактом, что вертексный оператор $\mathbb{V}_\alpha^{(0)}$ не зависит от $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_2$ бозонов h_n . Дополнительные ограничения могут быть явными выражениями для матричных элементов операторов отличающихся от

$\mathbb{V}_\alpha^{(0)}$. Это маловероятно, что матричные элементны операторов $\mathbb{V}_\alpha^{(m)}$, введенные в пункте 2.3, имеют простую факторизованную форму подобную (2.81) для $m \neq 0$.

Заметим, что если $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ (в обозначениях конформной теории поля $Q = 0$), тождество (2.80) становится тривиальным. Геометрически это связано с тем фактом, что многообразия $\mathcal{M}(X_2, 2, N)$ и $\mathcal{M}(2, 0, 2N)$ являются \mathbb{C}^* -диффеоморфными, где \mathbb{C}^* действие на \mathbb{C}^2 по формуле $(z_1, z_2) \mapsto (wz_1, w^{-1}z_2)$. Однако эти многообразия не диффеоморфны как $(\mathbb{C}^*)^2$ -многообразия, поэтому детерминанты в фиксированных точках отличаются друг от друга.

2.4.2 Случай $r = 1$

В этом пункте мы обсуждаем явление существования различных базисов упомянутых выше. Для простоты мы ограничимся случаем $r = 1$.

Обозначим за $\mathcal{M}(X_2, 1, N)$ пространство модулей тривиализованных на бесконечности пучков свободных от кручения на X_2 ранга 1 с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = N$. Неподвижные точки тора занумерованны парами диаграмм Юнга $(Y^{(1)}, Y^{(2)})$, $|Y^{(1)}| + |Y^{(2)}| = N$ и детерминант векторного поля $v = (\epsilon_1, \epsilon_2, a)$ в фиксированной точке $p_{Y^{(1)}, Y^{(2)}}$ равен (см. [97]):

$$\det v \Big|_{p_{Y^{(1)}, Y^{(2)}}} = Z_{\text{vec}}(Y^{(1)}, Y^{(2)} | \epsilon_1, \epsilon_2)^{-1} = Z_{\text{vec}}(Y^{(1)} | 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1)^{-1} Z_{\text{vec}}(Y^{(2)} | \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2)^{-1}, \quad (2.82)$$

где Z_{vec} дана в (2.9) и мы опустили \vec{a} , так как в случае $r = 1$ \vec{a} не появляется в формулах. Обозначим

$$\mathcal{Z}_N = \sum_{|Y^{(1)}| + |Y^{(2)}| = N} Z_{\text{vec}}(Y^{(1)}, Y^{(2)} | \epsilon_1, \epsilon_2)$$

коэффициент в статистической сумме Некрасова. Выражение \mathcal{Z}_N равно интегралу по пространству модулей $\mathcal{M}(X_2, 1, N)$. Из общей схемы следует, что должен существовать базис, занумерованный $(Y^{(1)}, Y^{(2)})$ в представлении алгебры $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ (см. (2.4b)). Алгебраическая конструкция этого базиса подобна той, которая была рассмотрена в Пункте 2.3.

Со стороны цветной статистической суммы рассмотрим все компоненты $\mathcal{M}(1, d, N)$ (с $q_1 = 0$). Неподвижные точки тора $p_W \in \mathcal{M}(1, d, N)$ нумеруются цветными диаграммами Юнга W с $d(W) = d$, $|W| = N$. Детерминант векторного поля $v = (\epsilon_1, \epsilon_2, a)$ в фиксированной точке p_W равен [131, 132]:

$$\det v \Big|_{p_W} = Z_{\text{vec}}^\diamond(a, \vec{W} | \epsilon_1, \epsilon_2)^{-1} = \prod_{s \in W^\diamond} E_{w,w}(0|s) (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{w,w}(0|s)), \quad (2.83)$$

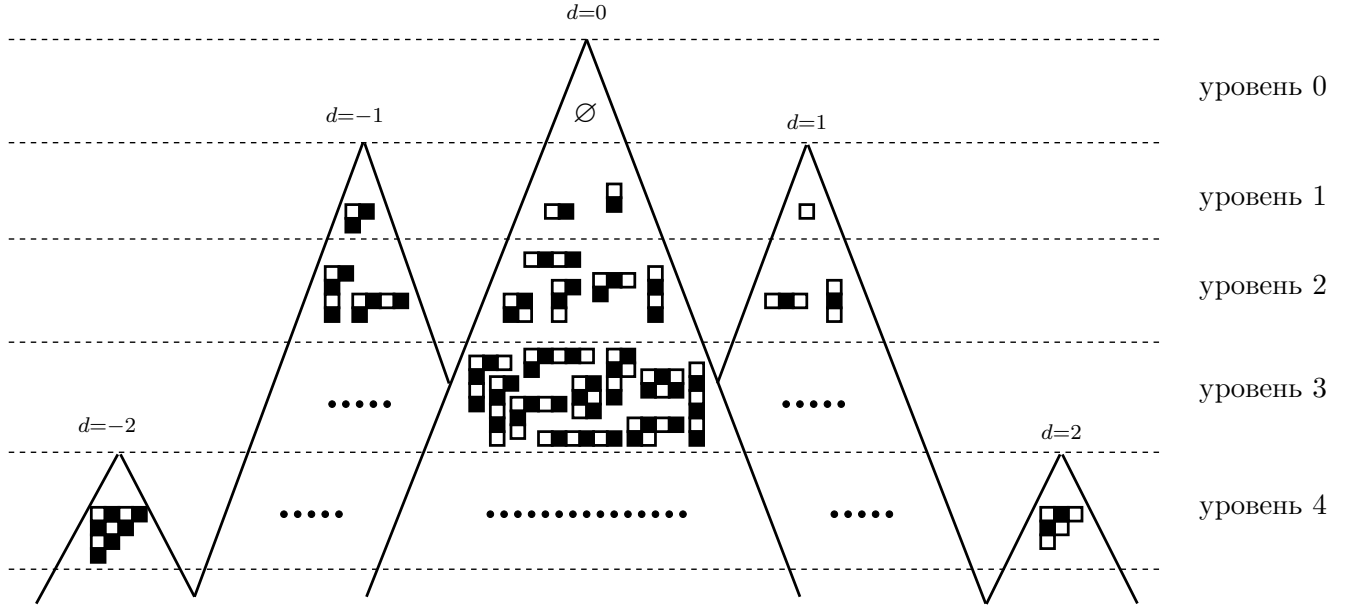


Рис. 2.2: Цветной базис в представлении $\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$. Внутренность каждого угла соответствует представлению $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \subset \mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$ с определенным значением h_0 . Каждая цветная диаграмма определяет вектор в таком представлении.

где произведение берется по клеткам $s \in W$ удовлетворяющим $a_w(s) + l_w(s) + 1 \equiv 0 \pmod{2}$.

Вектора v_w , соответствующие p_w , образуют базис в представлении алгебры $\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$ (см. (2.4a)). Комбинаторная градуировка $d(W)$ и $|W|$ совпадают с h_0 градуировкой и главной градуировкой представления этой алгебры. Структура представления алгебры $\mathcal{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$ показана на рис. 2.2.

Генераторы e_i из $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$ сдвигают d на $+1$, генераторы f_i на -1 и генераторы h_i действуют в подпространстве с данным d . Элементы h_i образуют алгебру Гейзенберга $\mathcal{H} \subset \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1$.

Вектора v_w с определенным $d(W) = d$ образуют базис в представлении алгебры $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Легко видеть, что наименьшая диаграмма W_0 с $d(W_0) = d$ состоит из $2d^2 - d$ клеточек и имеет “треугольную” форму с длиной ребра $2|d|$ для $d \leq 0$ и $2d - 1$ для $d > 0$

для $d < 0$

для $d > 0$

(2.84)

Обозначим за

$$Z_{d,N} = \sum_{W, d(W)=d, |W|=N} Z_{\text{vec}}^{\diamond}(W|\epsilon_1, \epsilon_2)$$

коэффициент в статистической сумме Некрасова. Выражение $Z_{d,N}$ равно интегралу по пространству модулей $\mathcal{M}(1, d, N)$.

Предложение 2.4.1 *Для любого целого d*

$$Z_{d,2d^2-d+2N} = Z_{0,2N} = \mathcal{Z}_N. \quad (2.85)$$

Это предложение следует из того факта, что многообразия $\mathcal{M}(1, d, 2d^2 - d + 2N)$ и $\mathcal{M}(X_2, 1, N)$ являются бирационально изоморфными для схемы Гильберта N точек на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

Равенство (2.85) есть равенство сумм. Число слагаемых с левой стороны и с правой стороны одинаково (это следует из биекции упомянутой выше). Мы будем писать $\sum \equiv \sum$, если суммы равны и, более того, наборы слагаемых с обеих сторон одинаковы. Соответственно мы пишем $\sum \not\equiv \sum$, если суммы равны, но наборы слагаемых различные. Прямые вычисления показывают:

$$Z_{0,0} \equiv Z_{1,1} \equiv Z_{-1,3} \equiv Z_{2,6} \equiv Z_{-2,10} \equiv \mathcal{Z}_0.$$

$$Z_{0,2} \equiv Z_{1,3} \equiv Z_{-1,5} \equiv Z_{2,8} \equiv Z_{-2,12} \equiv \mathcal{Z}_1.$$

$$Z_{0,4} \equiv Z_{1,5} \equiv Z_{-1,7} \equiv Z_{2,10} \equiv Z_{-2,14} \equiv \mathcal{Z}_2.$$

$$Z_{0,6} \not\equiv Z_{1,7}, \quad Z_{1,7} \equiv Z_{-1,9} \equiv Z_{2,12} \equiv Z_{-2,16} \equiv \mathcal{Z}_3.$$

$$Z_{0,8} \not\equiv Z_{1,9}, \quad Z_{0,8} \not\equiv Z_{-1,11}, \quad Z_{1,9} \not\equiv Z_{-1,11}, \quad Z_{-1,11} \equiv Z_{2,14} \equiv Z_{-2,18} \equiv \mathcal{Z}_4.$$

$$Z_{0,10} \not\equiv Z_{1,11}, \quad Z_{0,10} \not\equiv Z_{-1,13}, \quad Z_{1,11} \not\equiv Z_{-1,13},$$

$$Z_{0,10} \not\equiv Z_{2,16}, \quad Z_{1,11} \not\equiv Z_{2,16}, \quad Z_{-1,12} \not\equiv Z_{2,16}, \quad Z_{2,16} \equiv Z_{-2,20} \equiv Z_{3,25} \equiv \mathcal{Z}_5.$$

Эти результаты влекут следующие предложения ¹¹:

- Для любых d_1, d_2 существует N такое, что $Z_{d_1, 2d_1^2 - d_1 + 2N} \not\equiv Z_{d_2, 2d_2^2 - d_2 + 2N}$
- Для любого N существует D такое, что $Z_{d, 2d^2 - d + 2N} \equiv \mathcal{Z}_N$ для любых d , $|d| \geq D$.

¹¹Это явление также было независимо открыто Р. Погосяном в [104].

В терминах базиса эти предложения означают, что существует бесконечное число различных базисов в представлении алгебры $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Эти базисы нумеруются целым числом d . Базисные вектора в d -ом базисе нумеруются диаграммами Юнга W с $d(W) = d$. Базис занумерованный парами диаграмм Юнга $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ появляется в пределе $d \rightarrow \infty$. Мы доказываем второе утверждение:

Предложение 2.4.2 *Если $|d| \geq N$, то*

$$Z_{d, 2d^2-d+2N} \equiv Z_N. \quad (2.86)$$

Доказательство основано на явном построении биекции: для любой пары диаграмм Юнга $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ с $|Y^{(1)}| + |Y^{(2)}| = N$ мы строим раскрашенные диаграммы Юнга W с $|W| = 2d^2 - d + 2N$, $d(W) = d$ такие, что

$$Z_{\text{vec}}^\diamond(W|\epsilon_1, \epsilon_2) = Z_{\text{vec}}(Y^{(1)}, Y^{(2)}|\epsilon_1, \epsilon_2). \quad (2.87)$$

Биекция строится следующим образом. Обозначим за W_0 наименьшую диаграмму Юнга с $d(W_0) = d$. Тогда $|W_0| = 2d^2 - d$ и W_0 имеют “треугольную” форму (2.84). Обозначим за $\tilde{Y}^{(1)}$ диаграмму, полученную из $Y^{(1)}$ дублированием всех столбцов. Аналогично обозначим, за $\tilde{Y}^{(2)}$ диаграмму полученную из $Y^{(2)}$ дублированием всех строк. Затем W получается добавлением диаграмм $\tilde{Y}^{(1)}$ и $\tilde{Y}^{(2)}$ снизу и справа к диаграмме W_0 соответственно (см рис. 2.3).

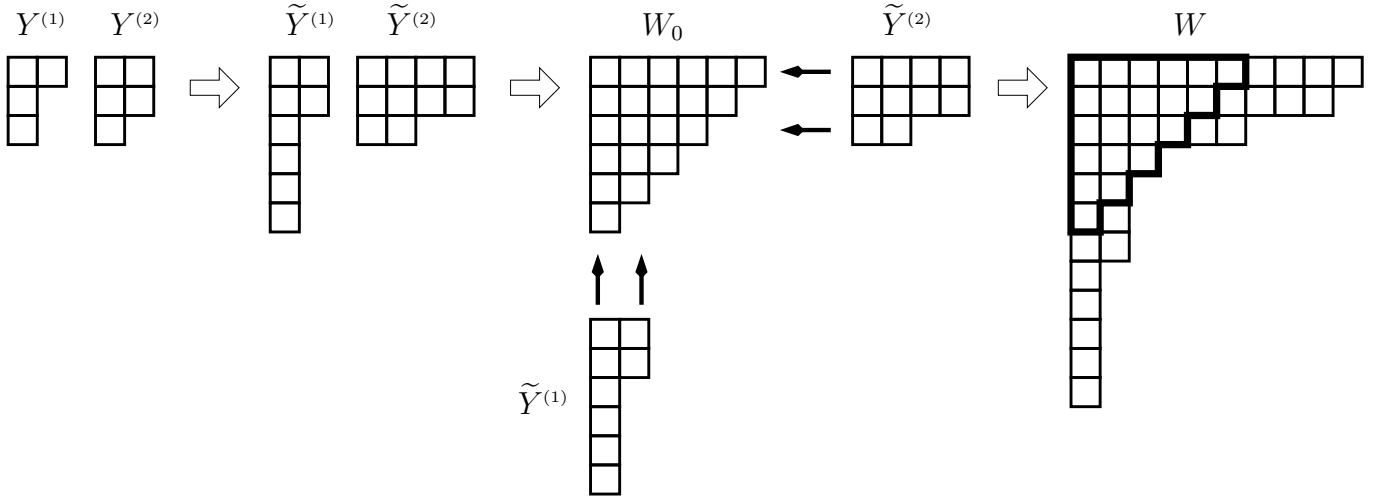


Рис. 2.3: Биекция между парой $(Y^{(1)}, Y^{(2)})$ и W .

Добавленные диаграммы $\tilde{Y}^{(1)}$ и $\tilde{Y}^{(2)}$ не взаимодействуют, так как $|d| \geq N$. Тогда тождество (2.87) следует из простой комбинаторики. \square

В этом пункте мы рассмотрели только случай $r = 1$. Для общего r ситуация вполне аналогична: должна быть последовательность базисов, нумеруемых целым числом d . Базис соответствующий $\mathcal{M}_2(r, N)$ появляется в пределе $d \rightarrow \infty$.

Глава 3

Дальнейшее обобщение АГТ соответствия

3.1 Общая конструкция

В данной главе мы продолжаем рассматривать $U(r)$ инстантоны на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ — решения самодуального уравнения с дополнительным условием для калибровочного поля:

$$A_\mu(z_1, z_2) = A_\mu(\omega z_1, \omega^{-1} z_2), \quad \omega^p = 1. \quad (3.1)$$

Как было уже сказано в Главе 2, нетривиальный факт о пространстве модулей инстантонов \mathcal{M} заключается в том, что можно построить действие некоторой алгебры симметрии \mathcal{A} на эквивариантных кохомологиях пространства модулей \mathcal{M} . Первые примеры такого действия были предложены Накаджимой в [64, 65] для случая алгебр Гейзенберга и Каца-Муди. В [66] было показано, что базис в пространстве эквивариантных кохомологий может быть занумерован неподвижными точками тора, действующего на пространстве модулей. Поэтому, естественно, предположить существование специального базиса геометрического происхождения в представлении \mathcal{A} , элементы которого находятся в соответствии с неподвижными точками действия тора. Такой базис имеет ряд замечательных свойств, которые уже были перечислены в Главе 1 и в Главе 2.

В работе [67] было предположено, что пространство модулей инстантонов $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $U(r)$ калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ связано с алгеброй $\mathcal{A}(r, p)$, которая реализуется косетом

$$\mathcal{A}(r, p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}, \quad (3.2)$$

где n связано с эквивариантными параметрами (детали данного соответствия подробно рассмотрены в Главе 2). Другими словами, существует специальный базис в представлении $\mathcal{A}(r, p)$, элемен-

ты которого находятся в соответствии с неподвижными точками действия тора на пространстве модулей инстантонов \mathcal{M} . С другой стороны, эти неподвижные точки могут быть занумерованы r диаграммами Юнга, раскрашенными в p цветов. Поэтому мы можем привязать определенный набор из r цветных диграмм Юнга каждому элементу такого геометрического базиса. Такие базисы были явно построены для $r = 2$ и $p = 1$ в Главе 1 [76], а также для $r = 2$ и $p = 2$ в Главе 2 [77]. И еще для $r = 1, 2$ и $p = 2$ в [135].

Данная Глава может рассматриваться как продолжение Глав 1 и 2. Главной задачей данной главы является нахождение нетривиальных аргументов в поддержку предположенного соответствия между алгеброй $\mathcal{A}(2, p)$ и пространством модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, которые мы обозначаем как $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$. А именно, проверяем соответствие между неподвижными точками пространства модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ и векторов в представлении алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ путем сравнения производящих функций неподвижных точек с характерами представлений алгебры $\mathcal{A}(2, p)$.

Используя “уровень-ранг” дуальность, алгебра $\mathcal{A}(2, p)$ может быть представлена двумя способами:

$$\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p} \xleftarrow{1} \mathcal{A}(2, p) \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{array} \begin{array}{l} (\mathcal{H} \times \text{Vir}^{(1)}) \times \dots \times (\mathcal{H} \times \text{Vir}^{(p)}) \\ \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n \times \mathcal{M}(3/4) \times \dots \times \mathcal{M}(p+1/p+2) \times \mathcal{H}^p \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow 4 \end{array} \quad (3.3)$$

где $\text{Vir}^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, \dots, p$ алгебры Вирасоро со специальными центральными зарядами c_σ , \mathcal{H} алгебра Гейзенберга, $\mathcal{M}(m/m+1)$ минимальная модель¹ и $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ есть алгебра косета. В данной главе мы изучаем в деталях разные связи на картинке (3.3).

Дальнейший план состоит в следующем: в пункте 3.2 мы находим производящие функции для фиксированных точек пространства модулей. В пункте 3.3 изучаем первую реализацию $\mathcal{A}(2, p)$, изображенную стрелкой 2 в (3.3) и концентрируемся на характерах представления $\mathcal{A}(2, p)$ в данной реализации и сравниваем их с производящими функциями неподвижных точек пространства модулей. В пункте 3.4 мы изучаем вторую реализацию $\mathcal{A}(2, p)$, представленную стрелкой 3 в (3.3). Также находим совпадение характеров первой и второй реализаций $\mathcal{A}(2, p)$ (стрелка 4 в (3.3)).

¹Здесь мы уже использовали другую “уровень-ранг” дуальность, которая приводит к равенству $\widehat{\mathfrak{sl}}(p)_2 = \mathcal{M}(3/4) \times \dots \times \mathcal{M}(p+1/p+2)$.

В пункте 3.5 находим равенства между инстантонными статистическими суммами $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $U(2)$ чистой калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, вычисленными для двух различных компактификаций пространства модулей.

3.2 Подсчет неподвижных точек действия тора на пространстве модулей инстантонов

В данном пункте мы сосредоточимся на вычислении неподвижных точек на пространстве модулей инстантонов. Рассмотрим компактификацию пространства модулей, где группа \mathbb{Z}_p действует на пространстве модулей инстантонов на \mathbb{C}^2 . В данном случае удобно нумеровать фиксированные точки тора r диаграммами Юнга, раскрашенными в p цветов. Далее мы определим производящие функции таких диаграмм Юнга и изучим их свойства.

3.2.1 Фиксированные точки на пространстве модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$

Здесь мы изучаем только лишь случай $r = 2$, который означает, что мы рассматриваем $U(2)$ инстантоны на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, пространство модулей которых есть $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$. Удобно занумеровать фиксированные точки тора в данном случае парой диаграмм Юнга, раскрашенных в p цветов. Раскраска производится следующим образом. Мы приписываем цвет c (от 0 до $p - 1$) угловой клетке и цвета $c + i - j \pmod p$ клеткам с координатами (i, j) . Например, даиграмма с $c = 3$ и $p = 4$ выглядит как:

3	0	1	2	3	0
2	3	0	1		
1	2	3	0		
0	1				
3					

В данном пункте мы вычисляем производящие функции для таких фиксированных точек. Так как число пар диаграмм Юнга, раскрашенных в p цветов, бесконечно, мы должны ввести градуировку для диаграмм. Один из возможных способов — вычислять пары диаграмм Юнга с фиксированным общим размером, фиксированными цветами угловых клеток r_1, r_2 и разностями k_m между числом клеток с цветом $m > 0$ и числом клеток с цветом 0 в обеих диаграммах. Мы будем называть раскраской набор чисел r_1, r_2 и k_1, \dots, k_{p-1} ($k_0 = 0$ по определению). Теперь можем

определить производящую функцию пары диаграмм Юнга с данной раскраской как:

$$\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \sum_{(Y_1, Y_2) \in \nabla} q^{\frac{|Y_1|+|Y_2|}{p}}, \quad (3.4)$$

где

$$\nabla = \{(Y_1, Y_2) \mid \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_1 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_2 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \#(\overline{m}) - \#(\overline{0}) = k_m\}. \quad (3.5)$$

и $|Y|$ есть число клеток в диаграмме Юнга Y .

Следует отметить, что параметры раскраски диаграмм Юнга связаны с топологическими характеристиками инстантонов, соответствующих фиксированным точкам действия тора на пространстве модулей инстантонов. Пусть $c_1(E)$ есть первый класс Черна калибровочного расслоения и $c_1(T_r)$ — первый класс Черна векторного расслоения на пространстве АЛЕ, тогда

$$c_1(E) = \sum_{r=1}^{p-1} c_{(r)} c_1(T_r). \quad (3.6)$$

Обозначая за n_r число диаграмм Юнга с угловой клеткой раскрашенной в цвет r , мы получим

$$c_{(r)} = n_r + k_{r+1} - 2k_r + k_{r-1}, \quad r = 1, \dots, p-1. \quad (3.7)$$

Используя (3.7), можно перейти от описания производящих функций диаграмм Юнга в терминах раскраски к эквивалентному описанию в терминах классов Черна.

Производящий функционал пары раскрашенных диаграмм Юнга может быть построен из производящего функционала одной раскрашенной диаграммы Юнга, который, в свою очередь, был вычислен в [119]. Пусть r есть цвет угловой клетки, тогда для $r = 0, \dots, p-1$ производящая функция одной раскрашенной диаграммы Юнга определяется как:

$$\chi_r(k_1, \dots, k_{p-1}|q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Y \in \diamond} q^{\frac{|Y|}{p}}, \quad (3.8)$$

где \diamond есть множество диаграмм Юнга с определенной раскраской

$$\diamond = \{Y \mid \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \#(\overline{m}) - \#(\overline{0}) = k_m\}, \quad (3.9)$$

где клетка с координатами (i, j) раскрашена в цвет $r + i - j \bmod p$ и $\#(\overline{m}), \#(\overline{0})$ — число клеток с m и 0 цветом соответственно. Например, мы имеем

$$\begin{aligned} \chi_2(0, 1|q) &= q^{\frac{1}{3}} \cdot \#\{\overline{2}\} + q^{\frac{4}{3}} \cdot \#\left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \overline{2|0|1|2}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right\} + O(q^{\frac{7}{3}}) = \\ &= q^{\frac{1}{3}} + 3q^{\frac{4}{3}} + O(q^{\frac{7}{3}}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вводя удобное обозначение для характера представления старшего веса алгебры Гейзенберга \mathcal{H}

$$\chi_B(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}, \quad (3.11)$$

можно записать ответ для производящей функции одной раскрашенной диаграммы Юнга (здесь подразумевается $k_0 = k_p = 0$):

$$\chi_r(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = q^{\sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 + \frac{k_i}{p} - k_i k_{i+1}) - k_r} \cdot (\chi_B(q))^p. \quad (3.12)$$

Далее легко получить производящую функцию пары раскрашенных диаграмм Юнга. Производящая функция пары диаграмм Юнга с раскраской r_1, r_2 и k_1, \dots, k_{p-1} равна

$$\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \sum_{\substack{m_i + n_i = k_i \\ i=1, \dots, p-1}} \chi_{r_1}(m_1, \dots, m_{p-1}|q) \chi_{r_2}(n_1, \dots, n_{p-1}|q). \quad (3.13)$$

Далее, используя формулу (3.12) мы находим

$$\begin{aligned} \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) &= \\ &= (\chi_B(q))^{2p} \sum_{m_1, \dots, m_{p-1} \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} ((2m_i - k_i)^2 - (2m_i - k_i)(2m_{i+1} - k_{i+1}) + k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) - m_{r_1} + m_{r_2} - k_{r_2}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

И поэтому мы можем, очевидно, получить

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, \dots, k_{p-1} = 0}^1 q^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{1}{2} (k_{r_1} + k_{r_2})} \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) &= \\ &= (\chi_B(q))^{2p} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{p-1} (n_{\sigma}^2 - n_{\sigma} n_{\sigma+1}) + \frac{1}{2} (n_{r_2} - n_{r_1})}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.2 Подсчет не эквивалентных производящих функций цветных диаграмм Юнга

Две производящие функции называются эквивалентными, если они отличаются только домножением на фактор q в некоторой степени (для данного определения все производящие функции (3.12) эквивалентны). Ниже мы показываем, что весь бесконечный набор производящих функций (3.14) может быть разбит на конечное число не эквивалентных классов. Из (3.14) заключаем, что производящие функции имеют следующие симметрии:

- Инвариантность относительно преобразования $k_m \rightarrow k_m + 2$:

$$\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_m + 2, \dots, k_{p-1}|q) = q^{2k_m - k_{m+1} - k_{m-1} + \frac{2}{p} + \delta_{m, r_1} + \delta_{m, r_2}} \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q), \quad (3.16)$$

где $\delta_{m, n}$ символ Кронекера.

- Инвариантность относительно перестановки $r_1 \leftrightarrow r_2$:

$$\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \chi_{r_2, r_1}(k_1, \dots, k_{p-1}|q). \quad (3.17)$$

- Инвариантность относительно замены $r_1, r_2 \rightarrow r_1 + 1, r_2 + 1$:

$$\chi_{r_1+1, r_2+1}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = q^{k_{r_1} - k_{r_1+1} - \frac{r_2 - r_1}{p}} \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{r_1+1} + 1, \dots, k_{r_2} + 1, \dots, k_{p-1}|q), \quad (3.18)$$

где предполагается, что $r_1 \leq r_2$.

Применяя симметрии (3.16 - 3.18), заключаем, что произвольная производящая функция с раскраской r_1, r_2 и k_1, \dots, k_{p-1} эквивалентна одной из производящих функций с $r_1 = 0$ и всеми k_m равными либо 0 либо 1:

$$\chi_{0, s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q), \quad (3.19)$$

где $s = 0, 1, \dots, p-1$. Поэтому мы можем сосредоточиться на рассмотрении производящих функций вида (3.19).

Можно показать (см Приложение 7), что для каждого $s = 0, \dots, p-1$ производящие функции (3.19) разбиваются на $[s/2] + [(p-s)/2] + 1$ классов эквивалентности². Первый класс эквивалентности содержит производящие функции эквивалентные

$$\chi_{0, s}(0, \dots, 0|q), \quad (3.20)$$

и мощность этого класса: $\binom{p}{s} = \frac{p!}{s!(p-s)!}$. Для каждых следующих $[s/2]$ классов эквивалентности удобно выбрать представителя

$$\chi_{0, s}(0, \dots, \overset{s-2l+1}{0}, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, \overset{s}{0}, 0, \dots, 0|q), \quad (3.21)$$

где l принимает целые значения от 1 до $[s/2]$, и от k_{s-2l+1} до k_s мы имеем чередующиеся 1 и 0, а все остальные $k_i = 0$. Мощность класса эквивалентности с данным l равна $\binom{p}{s-2l}$. И для всех оставшихся $[(p-s)/2]$ классов эквивалентности мы выбираем представителя

$$\chi_{0, s}(0, \dots, 0, \overset{s}{0}, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, 1, \overset{s+2n-1}{0}, \dots, 0|q), \quad (3.22)$$

где n принимает значения от 1 до $[(p-s)/2]$, и от k_s до k_{s+2n-1} имеем чередующиеся 0 и 1, а все остальные $k_i = 0$. Можно легко проверить, что сумма мощностей классов эквивалентности действительно равна числу производящих функций (3.19) с данным s

$$\binom{p}{s} + \sum_{l=1}^{[s/2]} \binom{p}{s-2l} + \sum_{n=1}^{[(p-s)/2]} \binom{p}{p-s-2n} = 2^{p-1}. \quad (3.23)$$

²Знак [...] означает целую часть от числа, например $[3/2]=1$.

Теперь видно, что производящие функции неподвижных точек на пространстве модулей эквивалентны одной из производящих функций (3.20 - 3.22) и мы получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1, \dots, k_{p-1}=0}^1 q^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{ks}{2}} \chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) &= \binom{p}{s} \chi_{0,s}(0, \dots, 0|q) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \binom{p}{s-2n} q^{-\frac{n}{2}(1+\frac{2}{p})} \chi_{0,s}(0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, \overset{s}{0}, 0, \dots, 0|q) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\lfloor (p-s)/2 \rfloor} \binom{p}{s+2n} q^{-\frac{n}{2}(1+\frac{2}{p})} \chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s}{0}, 1, 0, 1, \dots, 0, \overset{s+2n-1}{1}, 0, 0, \dots, 0|q). \quad (3.24)
\end{aligned}$$

3.3 Первая реализация алгебры $\mathcal{A}(2, p)$

В данном пункте мы изучим реализацию алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ в виде произведения p моделей с симметрией Вирасоро. Эта реализация представлена стрелкой 2 на картинке (3.3). Начнем с определения алгебры $\mathcal{A}(r, p)$:

$$\mathcal{A}(r, p) = \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}. \quad (3.25)$$

Следует отметить, что определение (3.25) имеет смысл только для положительных целых значений параметра n , но использование “уровень-ранг” дуальности позволяет нам расширить определение $\mathcal{A}(r, p)$ на случай произвольных комплексных n . Формально умножая и деля (3.25) на алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(n-\sigma+1)_r$ с $\sigma = 1, \dots, p$, мы можно записать

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p+1)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r} \times \dots \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-1)_r}. \quad (3.26)$$

Умножая и деля каждый множитель из (3.26) на $\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r$ и используя “уровень-ранг” дуальность,³ получаем

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \left(\mathcal{H} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p+1}} \right) \times \dots \times \left(\mathcal{H} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-1}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n} \right). \quad (3.27)$$

Заметим, что косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-\sigma} / \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-\sigma+1}$ для $\sigma = 1, \dots, p$ являются W_r теориями с центральными зарядами

$$c_\sigma = 1 + \frac{(r^2-1)(n-\sigma)}{n-\sigma+r} - \frac{(r^2-1)(n-\sigma+1)}{n-\sigma+r+1}. \quad (3.28)$$

³Здесь мы использовали следующую “уровень-ранг” дуальность: $\frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(k)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r \times \widehat{\mathfrak{gl}}(k-1)_r} = \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{k-1}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_k}$, а также изоморфизм $\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r \cong \mathcal{H}$.

В случае $r = 2$ мы получим для (3.27):

$$\mathcal{A}(2, p) \supset \mathcal{H}^p \times \text{Vir}^{(1)} \times \dots \times \text{Vir}^{(p)}, \quad (3.29)$$

где $\mathcal{H}^p = \mathcal{H} \times \dots \times \mathcal{H}$ и благодаря ГКО соответственно [69] косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma+1}$ являются алгебрами Вирасоро $\text{Vir}^{(\sigma)}$ со следующими центральными зарядами (см. Приложение 8)

$$c_\sigma = 1 + \frac{3(n-\sigma)}{n-\sigma+2} - \frac{3(n-\sigma+1)}{n-\sigma+3} = 1 + 6(Q_\sigma)^2, \quad (3.30)$$

где $Q_\sigma = b_\sigma + b_\sigma^{-1}$ и $b_\sigma^2 = -\frac{n-\sigma+3}{n-\sigma+2}$ параметризация, которая будет удобна в дальнейшем. Легко проверить, что параметры b_σ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$b_\sigma^2 + b_{\sigma+1}^{-2} = -2, \quad \sigma = 1, \dots, p-1. \quad (3.31)$$

Поэтому мы имеем $p-1$ уравнение для p переменных. Это означает, что мы можем выразить эти переменные в терминах только одного параметра b :

$$b_\sigma^2 = \frac{(\sigma-1)Q - pb}{\sigma Q - pb}, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (3.32)$$

В следующем пункте мы расширим правую часть (3.29) до полной алгебры $\mathcal{A}(2, p)$. Для того, чтобы выполнить это, добавляем набор из $p-1$ голоморфных токов спина $1/2$ к p тензорам энергии-импульса.

3.3.1 p моделей с симметрией алгебры Вирасоро

В случае, когда параметр n в $\mathcal{A}(2, p) = \widehat{\mathfrak{gl}}(n)_2 / \widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_2$ является положительным целым, косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma+1}$ в (3.27) описывают Минимальные модели $\mathcal{M}(n-\sigma+1/n-\sigma+2)$, и стрелка 4 на схеме (3.3) точно воспроизводит соответствие между Минимальными моделями, которое было широко изучено в [120]. В данном пункте, в стиле работы [120], мы строим первую реализацию алгебры $\mathcal{A}(2, p)$.

Напомним, что алгебра Вирасоро состоит из бесконечного числа генераторов L_n , $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующим коммутационным соотношениям:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \quad (3.33)$$

где c центральный заряд, параметризованный как $c = 1 + 6Q^2$ с $Q = b + b^{-1}$. Обозначим состояние старшего веса этой алгебры как V_λ , которое уничтожается L_n с $n > 0$ и имеет конформную размерность

$$\Delta(\lambda) = \frac{Q^2}{4} - \lambda^2. \quad (3.34)$$

Состояния старшего веса вырожденного представления алгебры Вирасоро обозначаются как $V_{m,n} \equiv V_{\lambda_{m,n}}$, где

$$\lambda_{m,n} = \frac{mb^{-1} + nb}{2} \quad (3.35)$$

и их размерность

$$\Delta_{m,n} = \frac{Q^2}{4} - \lambda_{m,n}^2. \quad (3.36)$$

Вдобавок к p тензорам энергии-импульса $T^{(\sigma)}$ мы формируем набор из $p - 1$ -ого голоморфного тока

$$J^{(\sigma)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} V_{1,2}^{(\sigma)}(z)V_{2,1}^{(\sigma+1)}(z), \quad \sigma = 1, \dots, p-1, \quad (3.37)$$

где $V_{m,n}^{(\sigma)}$ вырожденное примарное поле по отношению к $T^{(\sigma)}$. В силу соотношения (3.31) для b_σ , левая конформная размерность тока $J^{(\sigma)}(z)$ равна

$$\Delta_{J^{(\sigma)}} = \Delta_{1,2}^{(\sigma)} + \Delta_{2,1}^{(\sigma+1)} = \frac{1}{2}, \quad (3.38)$$

тогда как правая конформная размерность равна нулю. Можно проверить, что токи $T^{(\sigma)}(z)$ и $J^{(\sigma)}(z)$ генерируют ассоциативную киральную алгебру [120, 121]. Мы называем эту алгебру первой реализацией $\mathcal{A}(2, p)$.

Теперь перейдем к построению представления $\mathcal{A}(2, p)$. Первое требование для состояния старшего веса алгебры заключается в том, что данное состояние должно быть примарным полем по отношению к p тензорам энергии-импульса $T^{(\sigma)}$. Если $V_{\lambda_\sigma}^{(\sigma)}$ есть примарное поле для σ тензора энергии-импульса, то ясно, что состояние

$$V_{\lambda_1}^{(1)}V_{\lambda_2}^{(2)} \dots V_{\lambda_p}^{(p)} \quad (3.39)$$

является примарным для всех тензоров энергии-импульса.

Рассмотрим операторное разложение токов $J^{(\sigma)}(z)$ с состоянием $V_{\lambda_1}^{(1)} \dots V_{\lambda_p}^{(p)}$. Из правил слияния следует

$$J^{(\sigma)}(z)V_{\lambda_1}^{(1)}(0) \dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) = \sum_{m_\sigma, m_{\sigma+1} = \pm 1} z^{m_\sigma \lambda_\sigma b_\sigma + m_{\sigma+1} \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1}} \times \\ \times C^{(\sigma)}(m_\sigma, m_{\sigma+1}; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1}^{(1)} \dots V_{\lambda_\sigma + \frac{m_\sigma b_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1} + \frac{m_{\sigma+1}}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \dots V_{\lambda_p}^{(p)} \right], \quad (3.40)$$

где $C^{(\sigma)}(m_\sigma, m_{\sigma+1}; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ структурные константы. Для локальности теории необходимо сделать проекцию [120] и удерживать только два члена в сумме (3.40), скажем, с $m_\sigma = m_{\sigma+1} = \pm 1$ и также

наложить условие $\lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z} + 1/2$. Теперь моды $J^{(\sigma)}$, которые действуют на состояния в представлении, являются соответственно полуцелыми и целыми

$$J^{(\sigma)}(z)V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} z^{n-\frac{1}{2}} J_n^{(\sigma)} V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0), \quad \text{если } \lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} \in \mathbb{Z},$$

$$J^{(\sigma)}(z)V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-\frac{1}{2}} J_n^{(\sigma)} V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0), \quad \text{если } \lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

Второе требование заключается в том, что состояние (3.39) является примарным для токов $J^{(\sigma)}$, т.е. оно уничтожается положительными модами всех токов $J^{(\sigma)}(z)$:

$$J_n^{(\sigma)} V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) = 0, \quad n > 0, \quad \sigma = 1, \dots, p-1. \quad (3.41)$$

Это условие приводит нас к следующему соотношению для Лиувиллевских импульсов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$:

$$\lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} = 0, \quad (3.42)$$

если моды σ тока $J^{(\sigma)}(z)$ являются полуцелыми и

$$\lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} = \pm \frac{1}{2}, \quad (3.43)$$

если эти моды целые. По аналогии с представлениями алгебры NSR мы будем называть примарное состояние, состоянием Невье-Шварца (NS) по отношению к σ току, если верно (3.42), и называть Рамоновским (R) состоянием по отношению к σ току, если верно (3.43) со знаком плюс или минус. В дальнейшем мы будем интересоваться представлениями, которые есть NS по отношению ко всем токам $J^{(\sigma)}(z)$, и представлениями, которые R по отношению только к одному из токов и NS по отношению к остальным $p-2$ токам $J^{(\sigma)}(z)$.

Вначале необходимо рассмотреть представление, которое является NS по отношению ко всем $p-1$ токам $J^{(\sigma)}(z)$. Мы будем использовать следующее обозначение примарного состояния этого представления

$$V_{\lambda_1^0}^{(1)} V_{\lambda_2^0}^{(2)} \dots V_{\lambda_p^0}^{(p)}, \quad (3.44)$$

где импульсы Лиувилля λ_σ^0 удовлетворяют: условию

$$\lambda_\sigma^0 b_\sigma + \lambda_{\sigma+1}^0 b_{\sigma+1}^{-1} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, p-1. \quad (3.45)$$

Поэтому мы имеем $p-1$ уравнение для p переменных. Это означает, что есть только один независимый параметр, и представление может быть характеризованно только одной переменной λ .

Удобно параметризовать λ_σ^0 следующим способом:

$$\lambda_\sigma^0 = \frac{\lambda}{\sqrt{(\sigma Q - pb)(pb - (\sigma - 1)Q)}}, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad (3.46)$$

который автоматически согласован с (3.45). Теперь легко вычислить конформную размерность примарного состояния (3.44):

$$\Delta_{p,0}(\lambda) = \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \lambda^2 \right). \quad (3.47)$$

Операторное разложение всех токов $J^{(\sigma)}(z)$ с соответствующим примарным состоянием:

$$J^{(\sigma)}(z) V_{\lambda_1^0}^{(1)}(0) \dots V_{\lambda_p^0}^{(p)}(0) = \sum_{m=\pm 1} C^{(\sigma)}(m, m; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1^0}^{(1)} \dots V_{\lambda_\sigma^0 + \frac{mb_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1}^0 + \frac{m}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \dots V_{\lambda_p^0}^{(p)} \right]. \quad (3.48)$$

Теперь рассмотрим представления, которые являются R по отношению к s -тому току $J^{(s)}(z)$ ($s = 1, \dots, p-1$) и NS по отношению ко всем остальным токам. Обозначим s -тое представление такого типа как

$$V_{\lambda_1^s}^{(1)} V_{\lambda_2^s}^{(2)} \dots V_{\lambda_p^s}^{(p)}, \quad (3.49)$$

где

$$\lambda_\sigma^s b_\sigma + \lambda_{\sigma+1}^s b_{\sigma+1}^{-1} = \begin{cases} 0, & \sigma \neq s, \\ -\frac{1}{2}, & \sigma = s. \end{cases} \quad (3.50)$$

Конечно, можно взять $+\frac{1}{2}$ вместо $-\frac{1}{2}$, но это даст нам эквивалентное представление. Заметим, что существует $p-1$ представление, которое есть R по отношению к одному из токов.

Для s -того представления мы опять получаем $p-1$ уравнение (3.50) на p переменных λ_σ^s и, поэтому, представления такого типа могут быть параметризованы только одной переменной. Существует удобная параметризация λ_σ^s в терминах λ_σ^0 (3.46), которая автоматически удовлетворяет (3.50). Вводя новые переменные d_σ^s

$$d_\sigma^s = \begin{cases} \frac{1}{p} \sigma (p-s), & \text{если } \sigma \leq s \\ \frac{1}{p} s (p-\sigma), & \text{если } \sigma > s \end{cases}, \quad s = 0, \dots, p-1, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad (3.51)$$

мы имеем для λ_σ^s :

$$\lambda_\sigma^s = \lambda_\sigma^0 + d_{\sigma-1}^s \frac{b_\sigma^{-1}}{2} + d_\sigma^s \frac{b_\sigma}{2}, \quad (3.52)$$

где λ_σ^0 даются (3.46). Конформная размерность примарного состояния (3.49) равна

$$\Delta_{p,s}(\lambda) = \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \lambda^2 \right) + \frac{s(p-s)}{4p}. \quad (3.53)$$

Операторное разложение токов $J^{(\sigma)}(z)$ с соответствующим примарным состояниями дается формулами:

$$\begin{aligned} J^{(\sigma)}(z)V_{\lambda_1^s}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p^s}^{(p)}(0) &= \sum_{m=\pm 1} C^{(\sigma)}(m, m; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1^s}^{(1)} \dots V_{\lambda_\sigma^s + \frac{mb_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1}^s + \frac{m}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \dots V_{\lambda_p^s}^{(p)} \right], \quad \sigma \neq s, \\ J^{(s)}(z)V_{\lambda_1^s}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p^s}^{(p)}(0) &= \sum_{m=\pm 1} z^{-\frac{m}{2}} C^{(s)}(m, m; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1^s}^{(1)} \dots V_{\lambda_\sigma^s + \frac{mb_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1}^s + \frac{m}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \dots V_{\lambda_p^s}^{(p)} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Теперь опишем структуру рассматриваемого представления и вычислим его характеры. Состояния во всех представлениях генерируются p тензорами энергии-импульса и $p - 1$ голоморфными токами. Структура операторного разложения этих токов с примарным состоянием (3.48) и (3.54) говорит нам, что представление, помимо потомков Вирасоро, содержит также состояния, чьи Ливиллевские импульсы σ и $\sigma + 1$ полей сдвинуты на $\pm b_\sigma/2$ и $\pm b_{\sigma+1}^{-1}/2$ соответственно и которые также примарные по отношению к p тензорам энергии-импульса. Поэтому, сделав операторное разложение тока $J^{(\sigma)}(z)$ с этими состояниями со сдвинутыми импульсами λ_σ и $\lambda_{\sigma+1}$, мы будем генерировать бесконечное число состояний, которые являются примарными для всех p тензоров энергии-импульса. Для s -того представления эти состояния даются формулой:

$$V_{\lambda_1^s + n_1 \frac{b_1}{2}}^{(1)} V_{\lambda_2^s + n_1 \frac{b_2^{-1}}{2} + n_2 \frac{b_2}{2}}^{(2)} \dots V_{\lambda_p^s + n_{p-1} \frac{b_p^{-1}}{2}}^{(p)}, \quad (3.55)$$

где $n_\sigma \in \mathbb{Z}$ и $n_0 = n_p = 0$. К тому же, p тензоров энергии-импульса генерируют Вирасоровские подмодули от каждого состояния (3.55). Поэтому, s -тое представление первой реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$, которое мы обозначаем за $\pi_{p,s}^1$, дается следующим выражением:

$$\pi_{p,s}^1 = \bigoplus_{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z}} \left[V_{\lambda_1^s + n_1 \frac{b_1}{2}}^{(1)} \right] \times \left[V_{\lambda_2^s + n_1 \frac{b_2^{-1}}{2} + n_2 \frac{b_2}{2}}^{(2)} \right] \times \dots \times \left[V_{\lambda_p^s + n_{p-1} \frac{b_p^{-1}}{2}}^{(p)} \right], \quad (3.56)$$

где $s = 0, \dots, p - 1$ и квадратные скобки обозначают модуль Вирасоро.

Характер представления $\pi_{p,s}^1$ может быть легко вычислен. Мы получаем

$$\chi_p^s(q) = \text{tr} \left\{ q^{\sum_{\sigma=1}^p L_0^{(\sigma)}} \right\}_{\pi_{p,s}^1}, \quad (3.57)$$

где $L_0^{(\sigma)}$ элемент Вирасоровской подалгебры генерируемый тензором $T^{(\sigma)}$. Поэтому

$$\chi_p^s(q) = (\chi_B(q))^p \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\sum_{\sigma=1}^p \Delta^{(\sigma)} (\lambda_\sigma^s + n_{\sigma-1} \frac{b_\sigma^{-1}}{2} + n_\sigma \frac{b_\sigma}{2})}. \quad (3.58)$$

Вычисляя сумму конформных размерностей можно получить

$$\chi_p^s(q) = q^{\Delta_{p,s}(\lambda)} (\chi_B(q))^p \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{p-1} (n_\sigma^2 - n_\sigma n_{\sigma+1}) + \frac{1}{2} n_s}, \quad (3.59)$$

где $\Delta_{p,s}(\lambda) = (Q^2/4 - \lambda^2)/p + s(p - s)/(4p)$, и $\chi_B(q)$ определен в (3.11).

3.3.2 Сравнение с производящими функциями раскрашенных диаграмм Юнга

Как было показано во вступлении, причина АГТ соответствия есть утверждение, что можно построить действие алгебры симметрии $\mathcal{A}(2, p)$ на эквивариантных когомологиях пространства модулей инстантонов $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$. Теперь из (3.15) и (3.59) видно совпадение производящих функций фиксированных точек на пространстве модулей и характеров первой реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$:

$$q^{-\Delta_{p,s}(\lambda)} (\chi_B(q))^p \chi_p^s(q) = \sum_{k_1, \dots, k_{p-1}=0}^1 q^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{k_s}{2}} \chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q), \quad (3.60)$$

где $s = 0, \dots, p-1$ и производящая функция $\chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1})$ дается в (3.14). Заметим, что полученное тождество устанавливает соответствие между характерами представлений алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ в первом представлении и производящих функций фиксированных точек пространства модулей нумерованных раскрашенными диаграммами Юнга. Ниже мы иллюстрируем полученные тождества приводя примеры для $p = 2, 3, 4$. Используя формулу (3.24), находим:

Случай $p = 2$:

$$\begin{aligned} q^{-\Delta_{2,0}(\lambda)} (\chi_B(q))^2 \chi_2^0(q) &= \chi_{0,0}(0|q) + q^{-1} \chi_{0,0}(1|q) \\ q^{-\Delta_{2,1}(\lambda)} (\chi_B(q))^2 \chi_2^1(q) &= 2\chi_{0,1}(0|q). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Случай $p = 3$:

$$\begin{aligned} q^{-\Delta_{3,0}(\lambda)} (\chi_B(q))^3 \chi_3^0(q) &= \chi_{0,0}(0, 0|q) + 3q^{-\frac{5}{6}} \chi_{0,0}(1, 0|q), \\ q^{-\Delta_{3,1}(\lambda)} (\chi_B(q))^3 \chi_3^1(q) &= 3\chi_{0,1}(0, 0|q) + q^{-\frac{5}{6}} \chi_{0,1}(0, 1|q). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Случай $p = 4$:

$$\begin{aligned} q^{-\Delta_{4,0}(\lambda)} (\chi_B(q))^4 \chi_4^0(q) &= \chi_{0,0}(0, 0, 0|q) + 6q^{-\frac{3}{4}} \chi_{0,0}(1, 0, 0|q) + q^{-\frac{3}{2}} \chi_{0,0}(1, 0, 1|q), \\ q^{-\Delta_{4,1}(\lambda)} (\chi_B(q))^4 \chi_4^1(q) &= 4\chi_{0,1}(0, 0, 0|q) + 4q^{-\frac{3}{4}} \chi_{0,1}(0, 0, 1|q), \\ q^{-\Delta_{4,2}(\lambda)} (\chi_B(q))^4 \chi_4^2(q) &= 6\chi_{0,2}(0, 0, 0|q) + 2q^{-\frac{3}{4}} \chi_{0,2}(1, 0, 0|q). \end{aligned} \quad (3.63)$$

3.4 Вторая реализация алгебры $\mathcal{A}(2, p)$

Данный пункт посвящен другой реализации $\mathcal{A}(2, p)$ как произведения последовательных Минимальных моделей и косета. Данная реализация обозначена стрелкой 3 на картинке (3.3). Начнем

опять с определения алгебры $\mathcal{A}(r, p)$:

$$\mathcal{A}(r, p) = \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}. \quad (3.64)$$

Использование “уровень-ранг” дуальности позволяет нам записать (3.64) следующим образом

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \mathcal{H} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(p)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \quad (3.65)$$

Используя метод [120, 122], т.е. формально умножая и деля (3.65) на алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(k)_r$ с $k = 2, \dots, p-1$ имеем

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(2)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r} \times \dots \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(p-1)_r} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \quad (3.66)$$

Затем, применяя “уровень-ранг” дуальность, как мы делали в (3.26), получаем

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \mathcal{H}^p \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_2} \times \dots \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{p-1}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \quad (3.67)$$

Косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{m-1}/\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_m$ с $m = 2, \dots, p$ являются последовательными Минимальными моделями с W_r -симметрией [123] и с центральными зарядами

$$c_{r,m}^{\text{MM}} = (r-1) \left(1 - \frac{r(r+1)}{(m+r-1)(m+r)} \right), \quad m = 2, \dots, p, \quad (3.68)$$

тогда как косет $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}/\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p$ определяет конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c_{\text{WPF}} = \frac{p(r^2-1)}{p+r} \left(1 - \frac{r(p+r)}{(n-p+r)(n+r)} \right). \quad (3.69)$$

В случае $\mathcal{A}(2, p)$ (т.е. когда $r = 2$), косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{m-1}/\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_m$ изоморфны алгебре симметрии Минимальных моделей $\mathcal{M}(m+1/m+2)$ [68, 69]. И мы имеем⁴

$$\mathcal{A}(2, p) \supset \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n} \times \mathcal{M}(3/4) \times \dots \times \mathcal{M}(p+1/p+2) \times \mathcal{H}^p. \quad (3.70)$$

Далее покажем, что характер определенной суммы представлений правой части (3.70) совпадает с характером представления первой реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$, что означает, что две реализации $\mathcal{A}(2, p)$ согласованы. Тогда автоматически все характеры будут равны сумме производящих функций пар раскрашенных диаграмм Юнга.

⁴Симметрия \mathbb{Z}_p парафермионной теории Лиувилля описывается косетом $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}/\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ [83, 124, 125].

3.4.1 Представления косета $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$

В данном пункте дается краткий обзор представлений косета $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ [68, 69]. Обозначим интегральное представление $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p$ за $\pi_{p, \frac{m}{2}}$, где $0 \leq m \leq p$ и представление $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}$ за $\pi_{n-p, j}$, где j непрерывный параметр. Представление числителя $\pi_{p, \frac{m}{2}} \times \pi_{n-p, j}$ раскладывается в сумму неприводимых представлений произведения знаменателя и самого косета:

$$\pi_{p, \frac{m}{2}} \otimes \pi_{n-p, j} = \bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ m-s=0 \pmod{2}}} \pi_{n, j+\frac{s}{2}} \otimes V_s^m(p, j), \quad (3.71)$$

где $\pi_{n, j+\frac{s}{2}}$ — представление знаменателя $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ и $V_s^m(p, j)$ представление косета $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$.

Характеры $c_s^m(q)$ представлений $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ даются функциями ветвления, которые могут быть найдены из соотношения для характеров следующего из (3.71):

$$\chi_{p, \frac{m}{2}}^{\mathfrak{sl}(2)}(q, z) \chi_{n-p, j}^{\mathfrak{sl}(2)}(q, z) = \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ m-s=0 \pmod{2}}} \chi_{n, j+\frac{s}{2}}^{\mathfrak{sl}(2)}(q, z) c_s^m(q). \quad (3.72)$$

Эти характеры нумеруются целыми параметрами m и s и непрерывным параметром j и представлены формулами [126]:

$$c_s^m(q) = q^{\delta_s^m(j)} \chi_B^3(q) \sum_{r, l=0}^{+\infty} (-1)^{r+l} q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1)} \times \\ \times \left(q^{l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2}} - q^{p+1-m+l(p+1-\frac{m-s}{2})+r(p+1-\frac{m+s}{2})} \right), \quad (3.73)$$

где $0 \leq m \leq p$, $m - s = 0 \pmod{2}$, и

$$\delta_s^m(j) = \frac{j(j+1)}{n-p+2} + \frac{m(m+2)}{4(p+2)} - \frac{(2j+s)(2j+s+2)}{4(n+2)}. \quad (3.74)$$

Используя формулу (3.73) можно показать, что $c_s^m(q)$ удовлетворяет следующим симметриям

$$c_{-s}^m(q) = c_s^m(q), \quad (3.75)$$

$$c_{s+2p}^m(q) = c_s^m(q).$$

Поэтому можно ограничиться рассмотрением тех s , которые являются целыми от 0 до p .

Далее переходим к другой параметризации состояния старшего веса и характера представления старшего веса. Итак, перейдем от параметров n и j к b и μ по формулам

$$b^2 = -\frac{n+2}{n-p+2}, \quad j = \frac{1}{Q} \left(\mu - \frac{Q}{2} - \frac{s}{2b} \right), \quad Q = b + b^{-1}. \quad (3.76)$$

Обозначим представление старшего веса косета за $\Psi_s^m(\mu)$ и его представления $[\Psi_s^m(\mu)]$. Размерность состояния старшего веса и характер данного представления равны

$$\Delta_s^m(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(m-s)(m+s+2)}{4(p+2)}, & m \geq s \\ \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(s-m)(2p-m-s+2)}{4(p+2)}, & m < s \end{cases} \quad (3.77)$$

$$c_s^m(q) = q^{D_s^m(\mu)} \chi_B^3(q) \sum_{r,l=0}^{\infty} (-1)^{r+l} q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1)} \times \\ \times \left(q^{l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2}} - q^{p+1-m+l(p+1-\frac{m-s}{2})+r(p+1-\frac{m+s}{2})} \right). \quad (3.78)$$

где $0 \leq m, s \leq p$, $m - s = 0 \pmod{2}$ и

$$D_s^m(\mu) = \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(m-s)(m+s+2)}{4(p+2)}$$

для всех m и s .

3.4.2 Произведение последовательных Минимальных моделей

Другая важная часть (3.70) — это произведение Минимальных моделей. Минимальная модель $\mathcal{M}(m/m+1)$ имеет центральный заряд $c_{2,m}^{\text{MM}} = 1 - 6/(m(m+1))$ и также обладает конечным набором примарных полей $\phi_{r,s}^{(m)}$ с $r = 1, 2, \dots, m-1$, и $s = 1, 2, \dots, m$ [2]. Размерности этих примарных полей выражаются формулой

$$h_{r,s}^{(m)} = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}. \quad (3.79)$$

Следующие поля отождествляются с друг другом: $\phi_{r,s}^{(m)} = \phi_{m-r, m+1-s}^{(m)}$. Будем обозначать неприводимое представление алгебры Вирасоро, построенное от состояния старшего веса $\phi_{r,s}^{(m)}$ за $M_{r,s}^{(m)}$. Характер такого представления равен

$$\chi_{r,s}^{(m)}(q) = \text{Tr}(q^{L_0}) \Big|_{M_{r,s}^{(m)}} = \Delta_{r,s}^m(q) \chi_B(q), \quad (3.80)$$

где

$$\Delta_{r,s}^m(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (q^{\alpha_{r,s}^m(k)} - q^{\alpha_{r,-s}^m(k)}), \quad \alpha_{r,s}^m(k) = \frac{(2m(m+1)k - sm + r(m+1))^2 - 1}{4m(m+1)}. \quad (3.81)$$

Рассмотрим произведение $p-1$ состояний старшего веса Минимальных моделей $\phi_{1k_1}^{(3)} \times \phi_{k_1 k_2}^{(4)} \times \dots \times \phi_{k_{p-2}^{(p+1)}}$, где k_i пробегает от 1 до $i+2$ и n пробегает от 1 до $p+1$. Это составное состояние

старшего веса имеет размерность (здесь и далее мы подразумеваем, что $k_0 = 1, k_{p-1} = n$)

$$h_n(k_1, \dots, k_{p-2}) = \sum_{i=1}^{p-1} h_{k_{i-1}k_i}^{(i+2)} = \frac{(n^2 - 1)(p + 1)}{4(p + 2)} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-2} (k_i^2 - k_i k_{i+1}). \quad (3.82)$$

Неприводимое представление, которое построено с таким композитным состоянием старшего веса, обозначается, как $M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1,k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2},n}^{(p+1)}$. Ниже будем рассматривать следующую сумму представлений:

$$\bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1,k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2},n}^{(p+1)} \quad (3.83)$$

Обозначим характер такой суммы представлений как:

$$\text{ch}_n(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2, k_{p-1} = n}} \prod_{i=1}^{p-1} \chi_{k_{i-1}k_i}^{(i+2)}(q). \quad (3.84)$$

В следующем пункте мы покажем, что харакетры произведения последовательных Минимальных моделей и косета совпадают с характерами первой реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$.

3.4.3 Сравнение с первой реализацией алгебры $\mathcal{A}(2, p)$

Начнем с рассмотрения следующей суммы представлений косета и последовательных Минимальных моделей:

$$[\Psi_s^m(\mu)] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1,k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2},n}^{(p+1)} \quad (3.85)$$

где $1 \leq n \leq p + 1, 0 \leq m, s \leq p$ с $m - s = 0 \pmod{2}$. Характер такого представления равен

$$c_s^m(q) \text{ch}_n(q). \quad (3.86)$$

Заметим, что представление (3.85) нумеруется тремя целыми параметрами $0 \leq m, s \leq p, m - s = 0 \pmod{2}, 1 \leq n \leq p + 1$ и одним непрерывным параметром μ . Напомним, что мы ищем сумму представлений вида (3.85), характер которой совпадает с характером $\chi_p^s(q)$ представления первой реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$, который нумеруется целым параметром $0 \leq s \leq p - 1$ и непрерывным параметром λ .

Характер (3.59) представления p моделей $\chi_p^s(q)$ выглядит как $q^{\Delta_{p,s}(\lambda)}$, помноженное на некоторый ряд, содержащий целые и полуцелые степени q , и характер (3.86) есть сумма по k_i от

$q^{\Delta_s^m(\lambda) + h_n(k_1, \dots, k_{p-2})}$, помноженная на ряд содержащий целые степени. Так как $h_n(k_1, \dots, k_{p-2}) - h_n(k'_1, \dots, k'_{p-2}) \in \mathbb{Z}/2$, необходимым условием для совпадения характеров будет

$$\Delta_s^m(\mu) + h_n(k_1, \dots, k_{p-2}) - \Delta_{p,s}(\lambda) \in \mathbb{Z}/2. \quad (3.87)$$

Выполняя некоторые математические манипуляции, получаем:

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{4p} + \frac{(m+1)^2 - n^2}{4(p+2)} - \frac{s}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-2} (k_i^2 - k_i k_{i+1}) \in \mathbb{Z}/2. \quad (3.88)$$

Так как левая часть выражения должна быть полуцелой и не должна зависеть от какого-либо непрерывного параметра, естественно предположить, что $\mu = \lambda$. Это приводит к следующему Дифантовому уравнению:

$$\frac{(m+1)^2 - n^2}{4(p+2)} - \frac{s}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-2} (k_i^2 - k_i k_{i+1}) \in \mathbb{Z}/2, \quad (3.89)$$

из которого следует, что

$$\frac{(m-n+1)(m+n+1)}{p+2} \in \mathbb{Z}. \quad (3.90)$$

Так как $-p \leq m-n+1 \leq p$ и $2 \leq m+n+1 \leq p+2$, существует две возможности

$$n = m+1, \quad n = p-m+1. \quad (3.91)$$

Поэтому, принимая во внимание (3.91), заключаем, что мы должны взять представления косета и произведения Минимальных моделей, которые имеют вид⁵:

$$\begin{aligned} [\Psi_s^m(\lambda)] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1, k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2}, m+1}^{(p+1)}, \\ [\Psi_s^m(\lambda)] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1, k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2}, p-m+1}^{(p+1)}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Поэтому представление алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ во второй реализации равно

$$\pi_{p,s}^2 = \bigoplus_{\substack{0 \leq m \leq p \\ m-s=0 \pmod{2}}} [\Psi_s^m(\lambda)] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1, k_2}^{(4)} \times \dots \times (M_{k_{p-2}, m+1}^{(p+1)} \oplus M_{k_{p-2}, p-m+1}^{(p+1)}). \quad (3.93)$$

⁵Эти два решения (3.91) для n приводят к следующим уравнениям для k_i

$$\sum_{i=0}^{p-2} (k_{i+1} - k_i)^2 = \begin{cases} s, & \text{если } n = m+1 \\ p+s-2m & \text{если } n = p-m+1. \end{cases}$$

Характер такого представления:

$$\sum_{\substack{0 \leq m \leq p \\ m-s=0 \pmod{2}}} c_s^m(q) (\text{ch}_{m+1}(q) + \text{ch}_{p-m+1}(q)). \quad (3.94)$$

Гипотеза состоит в том, что представление $\pi_{p,s}^2$ является другой формой представления алгебры $\mathcal{A}(2, p)$, т.е.

$$\pi_{p,s}^1 \cong \pi_{p,s}^2, \quad (3.95)$$

приводит нас к следующему нетривиальному тождеству:

$$\sum_{\substack{0 \leq m \leq p \\ m-s=0 \pmod{2}}} c_s^m(q) (\text{ch}_{m+1}(q) + \text{ch}_{p-m+1}(q)) = q^{\Delta_{p,s}(\lambda)} (\chi_B(q))^p \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{p-1} (n_\sigma^2 - n_\sigma n_{\sigma+1}) + \frac{1}{2} n_s}, \quad (3.96)$$

где выражения для характеров даны в (3.59), (3.78), (3.84). Мы проверили данное тождество (3.96) для случаев $p = 2, \dots, 8$ порядок за порядком до q^6 . Тождество (3.96) доказывает согласованность представлений алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ в первой и второй реализациях. Следует заметить, что в [127] было показано, что для случая, когда эквивариантный параметр $n = 1$ (и в принципе для всех $n \in \mathbb{Z}$), характеры представлений второй реализации $\mathcal{A}(2, p)$ могут быть записаны как определенные ряды, используя обобщенные тождества Роджера-Рамануджана.

3.5 Сравнение инстантонных статистических сумм

Существует два подхода к вычислению инстантонных статистических суммы в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Разница в этих подходах заключается в выборе компактификации пространства модулей инстантонов. Как результат можно получить различные выражения для одной и той же инстантонной статистической суммы. Первая компактификация пространства модулей связана с первой реализацией алгебры $\mathcal{A}(2, p)$. Однако, к сожалению, мы не знакомы с каким-либо геометрическим объяснением второй реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$.

3.5.1 Первая компактификация

Один из подходов к вычислению инстантонной статистической суммы на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ является интегрирование по пространству модулей инстантонов $\bigsqcup_N \mathcal{M}(X_p, r, N)$ на пространстве с регуляризованными сингулярностями $X_p = \widetilde{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p}$. Статистическая сумма в данном подходе была вычислена

в [128, 129] и равна:

$$Z_{\text{inst}}^{p,s}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} \frac{\Lambda^{(n_i + d_i^s) C_{ij} (n_j + d_j^s)}}{l_{p,s}^{\text{vec}}(a, n_1, \dots, n_{p-1})} \prod_{\sigma=1}^p Z_{\text{inst}}^{\mathbb{C}^2}(\vec{a}_s^{(\sigma)}, \epsilon_1^{(\sigma)}, \epsilon_2^{(\sigma)} | \Lambda), \quad s = 0, \dots, p-1, \quad (3.97)$$

где $\vec{a} = (a, -a)$, $\vec{a}_s^{(\sigma)} = (a_s^{(\sigma)}, -a_s^{(\sigma)})$, и $a_s^{(\sigma)} = a + (n_{\sigma+1} + d_{\sigma+1}^s) \epsilon_1^{(\sigma)} + (n_{\sigma} + d_{\sigma}^s) \epsilon_2^{(\sigma)}$, и параметры регуляризации $\epsilon_1^{(\sigma)} = (p - \sigma) \epsilon_1 - \sigma \epsilon_2$, $\epsilon_2^{(\sigma)} = (\sigma + 1 - p) \epsilon_1 + (\sigma + 1) \epsilon_2$. Сдвиги d_{σ}^s даются формулой (3.51):

$$d_{\sigma}^s = \begin{cases} \frac{1}{p} \sigma (p - s), & \text{если } \sigma \leq s \\ \frac{1}{p} s (p - \sigma), & \text{если } \sigma > s \end{cases}, \quad s = 0, \dots, p-1, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad (3.98)$$

и C_{ij} есть $(p-1) \times (p-1)$ матрица Картана простой алгебры Ли A_{p-1} .

$SU(2)$ инстантонная статистическая сумма на \mathbb{C}^2 была вычислена в [130]:

$$Z_{\text{inst}}^{\mathbb{C}^2}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) = \sum_{(Y_1, Y_2)} \Lambda^{|Y_1| + |Y_2|} \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in Y_i} \frac{1}{E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j) (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j))}, \quad (3.99)$$

где $|Y|$ общее число клеток в диаграмме Юнга Y , s обозначает клетку в диаграмме Юнга Y , и

$$E_{Y,W}(a | s) = a - l_W(s) \epsilon_1 + (a_Y(s) + 1) \epsilon_2, \quad (3.100)$$

где $a_Y(s)$ и $l_Y(s)$ рука и нога соответственно, т.е. число клеток в Y справа и ниже клетки $s \in Y$ (см. Глава 1).

Функции $l_{p,s}^{\text{vec}}(a, n_1, \dots, n_{p-1})$ называются "блоу-ап" факторами, были вычислены геометрически-ми методами в [129] и даются выражением:

$$l_{p,s}^{\text{vec}}(a, n_1, \dots, n_{p-1}) = \prod_{\sigma=0}^{p-1} g^{(\sigma)}(2a_s^{(\sigma)}, \epsilon_1^{(\sigma)}, \epsilon_2^{(\sigma)}, n_{\sigma} + d_{\sigma}^s, n_{\sigma+1} + d_{\sigma+1}^s) \times \\ \times g^{(\sigma)}(-2a_s^{(\sigma)}, \epsilon_1^{(\sigma)}, \epsilon_2^{(\sigma)}, -(n_{\sigma} + d_{\sigma}^s), -(n_{\sigma+1} + d_{\sigma+1}^s)), \quad (3.101)$$

где

$$g^{(\sigma)}(a, e_1, e_2, \mu, \nu) = \begin{cases} \prod_{\substack{m \geq 0, n \leq -1 \\ \sigma(\nu+m) \leq (\sigma+1)(\mu+n)}} (a + m e_1 + n e_2), & \text{если } \sigma \nu < (\sigma + 1) \mu \\ 1, & \text{если } \sigma \nu = (\sigma + 1) \mu \\ \prod_{\substack{m \leq -1, n \geq 0 \\ \sigma(\nu+m) > (\sigma+1)(\mu+n)}} (a + m e_1 + n e_2), & \text{если } \sigma \nu > (\sigma + 1) \mu. \end{cases} \quad (3.102)$$

3.5.2 Вторая компактификация

Другая компактификация пространства модулей инстантонов получается поднятием действия группы \mathbb{Z}_p в $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ на пространство модулей $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)$ на \mathbb{C}^2 . Получающееся пространство модулей обозначается, как $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$. Его неподвижные точки нумеруются парами диаграмм Юнга, раскрашенных в p цветов. Поэтому, в такой инстантонной статистической сумме, соответствующей данной компактификации пространства модулей, мы суммируем только эти диаграммы Юнга и также учитываем только специальные клетки в этих диаграммах Юнга. Итак, как и в пункте 3.2, мы берем суммы по набору \diamond пар диаграмм Юнга (Y_1, Y_2) :

$$\diamond = \{(Y_1, Y_2) \mid \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_1 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_2 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \#(\overline{m}) - \#(\overline{0}) = k_m\}, \quad (3.103)$$

где клетка в Y_1 с координатами (i, j) имеет цвет $r_1 + i - j \bmod p$ и клетка (i, j) в Y_2 имеет цвет $r_2 + i - j \bmod p$ и $\#(\overline{m}), \#(\overline{0})$ – число клеток в (Y_1, Y_2) с m и 0 цветом соответственно.

Также представим формулу [16, 131, 132]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1} | \vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) &= \\ &= \sum_{(Y_1, Y_2) \in \diamond} \Lambda^{\frac{|Y_1| + |Y_2|}{p}} \prod_{i, j=1}^2 \prod_{s \in Y_i}^{\sim} \frac{1}{E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j)(\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j))}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

где произведение \prod^{\sim} идет только по $s \in Y_i$, которые удовлетворяют $l_{Y_j}(s) + a_{Y_i}(s) + 1 \equiv r_j - r_i \bmod p$. После того, как все обозначения были введены, можем записать выражение для инстантонной статистической суммы во второй компактификации:

$$\mathcal{Z}_{\text{inst}}^{p, s}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) = \sum_{k_1, \dots, k_{p-1}=0}^1 \Lambda^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{k_s}{2}} \mathcal{Z}_{0, s}(k_1, \dots, k_{p-1} | \vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda). \quad (3.105)$$

Два выражения для инстантонной статистической суммы (3.97) и (3.105) совпадают, как было проверено в [129, 133]. Наше рассмотрение алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ в данной Главе содержит веские аргументы в пользу объяснения данного совпадения с точки зрения двумерной Конформной теории поля.

Приложения

Приложение 1. Интегралы Сельберга со вставкой двух полиномов Джека

В данном приложении мы вычисляем интеграл, возникающий в правой части в (1.36). Это эквивалентно вычислению следующего интеграла, который обобщает интегралы Каделля [47] и Хуа-Каделля [48–50]. А именно, пусть λ и μ разбиения такие, что λ имеет длину не больше, чем n , тогда определим:

$$I_{\lambda, \mu}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{n!} \int_{[0,1]^n} \mathbf{P}_{\lambda}^{(1/\gamma)}[p_k] \mathbf{P}_{\mu}^{(1/\gamma)}[p_k + (\beta - \gamma)/\gamma] \prod_{j=1}^n t_j^{\alpha-1} (1-t_j)^{\beta-1} \prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt_1 \dots dt_n, \quad (3.106)$$

где интегрирование идет по n -мерному кубу $t_i \in [0, 1]$ для $i = 1, \dots, n$ и параметры α , β и γ удовлетворяют условиям, которые обеспечивают сходимость интеграла (3.106). Полином $\mathbf{P}_{\lambda}^{(1/\gamma)}[p_k] = \mathbf{P}_{\lambda}^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n)$ является полиномом Джека, нормированным как в [93]:

$$\mathbf{P}_{\lambda}^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n) = m_{\lambda}(t) + \sum_{\mu \prec \lambda} u_{\lambda, \mu} m_{\mu}(t),$$

где $m_{\lambda}(t)$ симметрический моном и сумма берется по всем разбиениям μ , доминируемым λ . Отметим, что в пункте 1.3 мы использовали другую нормировку полиномов Джека. Они связаны как

$$\mathbf{J}_{\lambda}^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n) = c_{\lambda}(\gamma) \mathbf{P}_{\lambda}^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n), \quad (3.107)$$

с

$$c_{\lambda}(\gamma) = \prod_{s \in \lambda} (1 + l_{\lambda}(s) + \gamma^{-1} a_{\lambda}(s)),$$

где $a_\lambda(s)$ и $l_\mu(s)$ соответственно длина руки и ноги клетки s в разбиении λ . Мы утверждаем, что интеграл (3.106) может быть вычислен точно⁶. Прежде чем продолжить далее, прокомментируем, как интеграл (3.106) может быть связан с интегралом в правой части в (1.36). Используем следующее тождество, доказанное Каделлем [47]:

$$\mathbf{P}_\lambda^{(1/\gamma)}[p_{-k}] = \prod_{j=1}^n t_j^{-\lambda_1} \mathbf{P}_{\hat{\lambda}}^{(1/\gamma)}[p_k], \quad (3.108)$$

где для данных диаграмм $\lambda = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots\}$, а диаграмма со “шляпкой” $\hat{\lambda} = \{\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots\}$ определяется как:

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_1 - \lambda_{n-j+1}. \quad (3.109)$$

Затем интеграл в правой части (1.36) может быть связан с интегралом (3.106) как:

$$\langle \mathbf{J}_\mu^{(1/g)}[p_k + \rho] \mathbf{J}_\lambda^{(1/g)}[p_{-k}] \rangle_{\text{Sel}}^{(n)} = c_\lambda(g) c_\mu(g) I_{\hat{\lambda}, \mu}^{(n)}(1 + A - \lambda_1, 1 + B, g), \quad (3.110)$$

где $\rho = (1+B-g)/g$. Для дальнейшего удобства мы также вводим обобщенный символ Похгаммера:

$$[x]_\lambda = \prod_{j \geq 1} (x + (1-j)\gamma)_{\lambda_j} = \prod_{j \geq 1} \frac{\Gamma(x + \lambda_j + (1-j)\gamma)}{\Gamma(x + (1-j)\gamma)}. \quad (3.111)$$

Наш метод вычисления интеграла (3.106) есть точная копия вычисления интеграла Каделля, рассмотренного в [51]⁷, и мы будем отталкиваться от двух интегральных тождеств. Первое тождество принадлежит Окунькову и Ольшанскому [57] (см. также [58]):

Тождество 4.1: Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяют свойству чередования

$$t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \dots < t_{n-1} < \tau_{n-1} < t_n,$$

обозначаемого как $\tau \prec t$. Далее для разбиения $\nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots)$ длины не большей, чем $n-1$:

$$\begin{aligned} \prod_{i < j=1}^n (t_j - t_i)^{2\gamma-1} \mathbf{P}_\nu^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n) &= \Lambda_\nu(\gamma) \times \\ &\times \int_{\tau \prec t} \mathbf{P}_\nu^{(1/\gamma)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \prod_{i < j=1}^{n-1} (\tau_j - \tau_i) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^n |\tau_i - t_j|^{\gamma-1} d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}, \end{aligned} \quad (3.112)$$

⁶Заметим, что для $\mu = \emptyset$ он совпадает с интегралом Каделля [47], тогда как для $\beta = \gamma$ и произвольных диаграмм λ и μ , с интегралом Хуа-Каделля [48, 49].

⁷Отметим, что предложенный в [51] метод есть обобщение Андерсоновского вычисления интеграла Сельберга [52] (см. также [53]). Подобный метод был применен к “комплексной” версии интегралов Сельберговского типа в [54–56]

где

$$\Lambda_\nu(\gamma) = \frac{\Gamma(n\gamma)}{\Gamma^n(\gamma)} \frac{[n\gamma]_\nu}{[(n-1)\gamma]_\nu},$$

и $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Второе тождество записывается как

Тождество 4.2: Пусть $t = (t_1, \dots, t_n)$ и $\tau = (0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}, 1)$ удовлетворяют свойству чередования

$$0 < t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \dots < t_{n-1} < \tau_{n-1} < t_n < 1$$

обозначаемого, как $t \prec \tau$. Тогда для разбиения $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots)$

$$\begin{aligned} \int_{t \prec \tau} \mathbf{P}_\mu^{(1/\gamma)} [p_k(t) + (\beta - \gamma)/\gamma] \prod_{i < j=1}^n (t_j - t_i) \prod_{j=1}^n t_j^{\alpha-1} (1 - t_j)^{\beta-1} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} |t_i - \tau_j|^{\gamma-1} dt_1 \dots dt_n = \\ = \Xi_\mu(\alpha, \beta, \gamma) \prod_{j=1}^{n-1} \tau_j^{\alpha+\gamma-1} (1 - \tau_j)^{\beta+\gamma-1} \prod_{i < j=1}^{n-1} (\tau_j - \tau_i)^{2\gamma-1} \mathbf{P}_\mu^{(1/\gamma)} [p_k(\tau) + \beta/\gamma], \end{aligned} \quad (3.113)$$

где

$$\Xi_\mu(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma^{n-1}(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n-1)\gamma)} \frac{[\alpha + \beta + (n-2)\gamma]_\mu}{[\alpha + \beta + (n-1)\gamma]_\mu}.$$

Заметим, что **Тождество 4.2** немедленно следует из **Тождества 4.1** для $\alpha = N\gamma$ и $\beta = M\gamma$ и для неотрицательных целых M и N . Действительно, пусть число интегрирований $(n-1)$ в (3.112) намного больше, чем длина диаграммы λ . Тогда мы можем рассмотреть общий предел $t_1, \dots, t_N \rightarrow 0$ и $t_{n-M+1}, \dots, t_n \rightarrow 1$ в (3.112)⁸. Используя факт, что

$$\mathbf{P}_\lambda^{(1/\gamma)}(\underbrace{0, \dots, 0}_N, t_1, \dots, t_n) = \mathbf{P}_\lambda^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}_\lambda^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n, \underbrace{1, \dots, 1}_M) = \mathbf{P}_\lambda^{(1/\gamma)}[p_k(t) + M],$$

мы приходим к (3.113) с $\alpha = N\gamma$ и $\beta = M\gamma$, $M, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Итак, мы предлагаем (3.113) как продолжение с целых чисел M и N . Такое “аналитическое” продолжение обычно требует использования теоремы Карлсона [59]. Более строгое доказательство (3.113) может быть скорее всего выполнено в рамках рассуждений [58].

⁸Взятие данного предела не является друдной задачей, но несколько комментариев к этому могут быть полезны. Взятие $t_1 \rightarrow 0$ в (3.112) не порождает расходимости, и поэтому мы можем просто положить $t_1 = 0$ в (3.112). Затем, беря предел $t_2 \rightarrow 0$, мы видим, что переменная τ_1 заключена между точками 0 и t_2 , которые приближаются друг к другу. Такой интеграл сингулярен, и лидирующая сингулярность может быть легко вычислена: $\int_0^{t_2} \tau_1^{\gamma-1} (\tau_1 - t_2)^{\gamma-1} d\tau_1 = t_2^{2\gamma-1} \Gamma^2(\gamma) / \Gamma(2\gamma)$. Она имеет тоже самое поведение при $t_2 \rightarrow 0$, как и левая часть (3.112). Взятие предела $t_3 \rightarrow 0$ и далее $t_{n-m+i} \rightarrow 1$, $i = 1, \dots, M$ аналогично.

Теперь мы продолжим вычисление интеграла (3.106). Прежде чем делать это, мы используем симметрию подынтегрального выражения в (3.106) и сделаем замену:

$$\frac{1}{n!} \int_{[0,1]^n} \longrightarrow \int_{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1} \dots \int$$

Можно сократить число интегрирований в (3.106), выполняя следующие шаги:

- Во-первых, для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ мы используем формулу

$$\mathbf{P}_\lambda^{(1/\gamma)}[p_k(t)] = (t_1 \dots t_n)^{\lambda_n} \mathbf{P}_\nu^{(1/\gamma)}[p_k(t)],$$

где $\nu = (\lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 0)$

- Во-вторых, представляем

$$\prod_{i < j=1}^n (t_j - t_i)^{2\gamma-1} \mathbf{P}_\nu^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n)$$

в (3.106), используя (3.112).

- И, наконец, вычисляем оставшийся интеграл

$$\int_{t < \tau} \mathbf{P}_\mu^{(1/\gamma)}[p_k(t) + (\beta - \gamma)/\gamma] \prod_{i < j=1}^n (t_j - t_i) \prod_{j=1}^n t_j^{\alpha + \lambda_n - 1} (1 - t_j)^{\beta-1} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} |t_i - \tau_j|^{\gamma-1} dt_1 \dots dt_n,$$

используя (3.113).

В результате, мы свели наш изначальный интеграл (3.106) к интегралу того же вида, но с меньшим числом интегрирований $n \rightarrow n - 1$:

$$I_{\lambda, \mu}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{[n\gamma]_\nu}{[(n-1)\gamma]_\nu} \frac{\Gamma(\alpha + \lambda_n)\Gamma(\beta)\Gamma(n\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n-1)\gamma + \lambda_n)\Gamma(\gamma)} \frac{[\alpha + \beta + (n-2)\gamma + \lambda_n]_\mu}{[\alpha + \beta + (n-1)\gamma + \lambda_n]_\mu} \times \\ \times I_{\nu, \mu}^{(n-1)}(\alpha + \gamma, \beta + \gamma, \gamma), \quad (3.114)$$

где $\nu = (\lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 0)$. Так как правая часть в (3.114) это опять интеграл вида (3.106), то мы можем продолжить далее методом индукции. Используя формулу:

$$\frac{[n\gamma]_\nu}{[(n-1)\gamma]_\nu} = \frac{\mathbf{P}_\lambda^{1/\gamma}[n]}{\mathbf{P}_\nu^{1/\gamma}[n-1]},$$

находим

$$I_{\lambda, \mu}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{P}_\lambda^{1/\gamma}[n] \mathbf{P}_\mu^{1/\gamma}[n + (\beta - \gamma)/\gamma] \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + (n-j)\gamma + \lambda_j)\Gamma(\beta + (j-1)\gamma)\Gamma(j\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + (2n-j-1)\gamma + \lambda_j)\Gamma(\gamma)} \times \\ \times \prod_{j=1}^n \frac{[\alpha + \beta + (2n-j-2)\gamma + \lambda_j]_\mu}{[\alpha + \beta + (2n-j-1)\gamma + \lambda_j]_\mu}. \quad (3.115)$$

Теперь, как было заявлено в (3.110)

$$\frac{\langle \mathbf{J}_\mu^{(1/g)}[p_k + \rho] \mathbf{J}_\lambda^{(1/g)}[p-k] \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}}{\langle 1 \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}} = c_\lambda(g) c_\mu(g) \frac{I_{\hat{\lambda}, \mu}^{(n)}(1 + A - \lambda_1, 1 + B, g)}{I_{\emptyset, \emptyset}^{(n)}(1 + A, 1 + B, g)}, \quad (3.116)$$

где разбиение $\hat{\lambda}$ определяется (3.109). Используя формулу из [60]:

$$\mathbf{P}_\lambda^{(1/\gamma)}[N] = \gamma^{-|\lambda|} \frac{[n\gamma]_\lambda}{c_\lambda(\gamma)}, \quad (3.117)$$

и (3.115), находим

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{J}_\mu^{(1/g)}[p_k + \rho] \mathbf{J}_\lambda^{(1/g)}[p-k] \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}}{\langle 1 \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}} &= g^{-|\lambda| - |\mu|} [ng]_\lambda [1 + B + (n-1)g]_\mu \times \\ &\times \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1 + A + (j-1)g - \lambda_j)}{\Gamma(1 + A + (j-1)g)} \frac{\Gamma(2 + A + B + (n+j-2)g)}{\Gamma(2 + A + B + (n+j-2)g - \lambda_j)} \frac{[2 + A + B + (n+j-3)g - \lambda_j]_\mu}{[2 + A + B + (n+j-2)g - \lambda_j]_\mu} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Заметим, что если m является целым, превышающим длину μ (т.е. $l(\mu) \leq m$), мы можем также переписать правую часть (3.118), как

$$\begin{aligned} &g^{-|\lambda| - |\mu|} [ng]_\lambda [1 + B + (n-1)g]_\mu \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1 + A + (j-1)g - \lambda_j)}{\Gamma(1 + A + (j-1)g)} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(2 + A + B + (2n-1-j)g)}{\Gamma(2 + A + B + (2n-1-j)g + \mu_j)} \times \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^m \Gamma(2 + A + B + \mu_j - \lambda_i + (n+i-j-2)g)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m+1} \Gamma(2 + A + B + \mu_j - \lambda_i + (n+i-j-1)g)} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(2 + A + B + (n+j-2)g)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(2 + A + B + (2n-j-1)g)} \end{aligned} \quad (3.119)$$

Используя (1.31), (1.37), (3.122) и (3.123), находим

$$\frac{\langle \mathbf{J}_\mu^{(1/g)}[p_k + \rho] \mathbf{J}_\lambda^{(1/g)}[p-k] \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}}{\langle 1 \rangle_{\text{Sel}}^{(n)}} = \Omega_\lambda^{-1}(P) \Omega_\mu^{-1}(P') Z_{\text{bif}}(\alpha_n | P', (\mu, \emptyset); P, (\lambda, \emptyset)), \quad (3.120)$$

что ведет к (1.38).

Приложение 2. Доказательство тождеств (1.47) и (1.64)

Заметим, что функция $Z_{\text{bif}}(\alpha | P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda})$, определенная в (2.11), может быть записана как

$$Z_{\text{bif}}(\alpha | P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}) = b^{-|\vec{\lambda}| - |\vec{\mu}|} \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 \mathcal{F}(x_{ij}, \lambda_i, \mu_j), \quad (3.121)$$

где $x_{ij} = b(Q - P_i + P'_j - \alpha)$ и

$$\mathcal{F}(x, \nu, \mu) = \prod_{s \in \nu} (x - l_\mu(s)g - (a_\nu(s) + 1)) \prod_{t \in \mu} (x + (l_\nu(t) + 1)g + a_\mu(t)), \quad (3.122)$$

с $g = -b^2$. Существует другое представление для функции $\mathcal{F}(x, \nu, \mu)$. Пусть N и M целые, такие, что $N \geq l(\nu)$, $M \geq l(\mu)$, тогда [10]:

$$\mathcal{F}(x, \nu, \mu) = \frac{\prod_{i=1}^{N+1} \prod_{j=1}^M \Gamma(x + \mu_j - \nu_i + (i-j)g)}{\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{M+1} \Gamma(x + \mu_j - \nu_i + (i-j+1)g)} \frac{\prod_{i=1}^N \Gamma(x + ig)}{\prod_{j=1}^M \Gamma(x + (N+1-j)g)}. \quad (3.123)$$

Для любых $(m, n) \in \lambda$ мы находим из (3.123)

$$\mathcal{F}(x, \lambda, \mu) = \prod_{j=1}^m (x - n + jg)_n \frac{\mathcal{F}(x - n, \rho, \mu) \mathcal{F}(x + mg, \nu, \mu)}{\mathcal{F}(x - n + mg, \emptyset, \mu)}, \quad (3.124)$$

где $\rho = (\lambda_1 - n, \dots, \lambda_m - n, 0, 0, \dots)$ и $\nu = (\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots)$. Тожество (1.47) следует из использования (3.121) и (3.124). Аналогично, используя свойство

$$Z_{\text{bif}}(\alpha | P', \vec{\mu}; P, \vec{\lambda}) = Z_{\text{bif}}(Q - \alpha | P, \vec{\lambda}; P', \vec{\mu}), \quad (3.125)$$

можно доказать (1.64).

Приложение 3. Система Интегралов движения

Можно проверить, что состояния $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$ являются собственными состояниями следующей бесконечной системы коммутирующих Интегралов Движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= L_0 - \frac{c}{24} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_k, \\ \mathbf{I}_3 &= \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} a_{-k} L_k + 2iQ \sum_{k=1}^{\infty} k a_{-k} a_k + \frac{1}{3} \sum_{i+j+k=0} a_i a_j a_k, \\ \mathbf{I}_4 &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} L_{-k} L_k + L_0^2 - \frac{c+2}{12} L_0 + 6 \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \sum_{i+j=k} L_{-k} a_i a_j + 12 \left(L_0 - \frac{c}{24} \right) \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_k + \\ &+ 6iQ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} |k| a_{-k} L_k + 2(1 - 5Q^2) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_{-k} a_k + 6iQ \sum_{i+j+k=0} |k| a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k+l=0} a_i a_j a_k a_l : \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.126)$$

Заметим, что система интегралов (3.126) может быть использована, для построения базиса $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$. Даже интеграл \mathbf{I}_3 уже содержит много информации. Его собственные вектора есть наши состояния $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$

$$\mathbf{I}_3 |P\rangle_{\vec{\lambda}} = h_{\vec{\lambda}}^{(3)}(P) |P\rangle_{\vec{\lambda}}, \quad (3.127)$$

с собственными значениями $h_\lambda^{(3)}(P)$, которые являются линейными функциями импульса P

$$h_{\lambda_1, \lambda_2}^{(3)}(P) = h_{\lambda_1}^{(3)}(P) + h_{\lambda_2}^{(3)}(-P), \quad (3.128)$$

где $h_\lambda^{(3)}(P)$ выражается как

$$h_\lambda^{(3)}(P) = i \left(|\lambda| \left(P - \frac{b}{2} \right) + \frac{1}{2b} \sum_k \lambda_k (\lambda_k + 2kb^2) \right). \quad (3.129)$$

Используя (3.128), можно показать, что \mathbf{I}_3 не вырожден на уровнях 1, 2 и 3, тогда как на уровне 4 он имеет два собственных вектора с одинаковыми собственными значениями. На уровне 5 он опять не вырожден. Мы ожидаем, что при рассмотрении более высоких интегралов \mathbf{I}_k вырождение исчезнет.

Мы утверждаем, что интегралы (3.126) являются квантовыми аналогами классических Интегралов Движения $I_k = \int G_k(x) dx$:

$$\begin{aligned} G_2 &= u + v^2, \\ G_3 &= uv + vDv + \frac{1}{3}v^3, \\ G_4 &= u^2 + 6uv^2 + 6uDv + 5v_x^2 + 6v^2Dv + v^4, \\ G_5 &= u^2v + \frac{1}{2}uDu + 2u_xv_x + 4uvDv + v^2Du + 2uv^3 + \frac{3}{2}v_xDv_x + \\ &\quad + 3vv_x^2 + 2v(Dv)^2 + \frac{4}{3}v^3Dv + \frac{1}{2}v^2Dv^2 + \frac{1}{5}v^5, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.130)$$

где $D = \frac{d}{dx}H$ и H оператор преобразования Гильберта, определяемый как главное значение интеграла

$$H F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(y) \cot \frac{1}{2}(y-x) dy, \quad (3.131)$$

Система (3.130) получается в квазиклассическом пределе $b \rightarrow 0$ из системы (3.126) при замене

$$T \rightarrow -Q^2u, \quad \partial\varphi \rightarrow -iQv, \quad [,] \rightarrow -\frac{2i\pi}{Q^2} \{ , \}, \quad (3.132)$$

где мы выбрали периодические граничные условия $T(x+2\pi) = T(x)$, $\partial\varphi(x+2\pi) = \partial\varphi(x)$ с разложением по модам

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n e^{-inx} - \frac{c}{24}, \quad \partial\varphi(x) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} a_n e^{-inx}.$$

Классические ИД $I_k = \int G_k(x)dx$ являются сохраняющимися во времени величинами, связанными с интегрируемой системой уравнений, которые известны как уравнения Бенжамина-Оно₂ [29–31]

$$\begin{cases} u_t + vu_x + 2uv_x + \frac{1}{2}v_{xxx} = 0, \\ v_t + \frac{u_x}{2} + H v_{xx} + vv_x = 0, \end{cases} \quad (3.133)$$

Система (3.133) может быть записана в Гамильтоновой форме:

$$u_t = \{\mathcal{H}, u(x)\}, \quad v_t = \{\mathcal{H}, v(x)\}, \quad (3.134)$$

с $\mathcal{H} = \int G_3(y)dy$ и “второй” Гамильтоновой структурой КдФ типа:

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= (u(x) + u(y)) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} \delta'''(x - y), \\ \{v(x), v(y)\} &= \frac{1}{2} \delta'(x - y), \quad \{u(x), v(y)\} = 0. \end{aligned}$$

Классические ИД I_k образуют коммутативную алгебру скобок Пуассона с этой Гамильтоновой структурой. Если мы возьмем в качестве Гамильтониана $\int G_4(y)dy$, то далее мы получим следующих представителей иерархии, связанной с интегрируемой системой (3.133).

Также удобно переписать систему (3.133) в другой форме. Введем функцию

$$\psi = v + iw, \quad (3.135)$$

где $u = w_x - w^2$, тогда система (3.133) может быть записана как уравнение для одной комплексной функции ψ

$$\psi_t + \frac{i}{2} \psi_{xx}^* + \psi \psi_x + H \operatorname{Re} \psi_{xx} = 0, \quad (3.136)$$

которое выглядит как комплексифицированная версия уравнения Бенжамина-Оно [61, 62]. Уравнение (3.136) упрощается для функции $\psi(x)$ аналитической в верхней полуплоскости. В данном случае оно принимает форму уравнения Бюргерса:

$$\psi_t + \frac{i}{2} \psi_{xx} + \psi \psi_x = 0, \quad (3.137)$$

которое может быть линеаризовано с помощью замены Коула-Хопфа $\psi = i(\log \theta)_x$:

$$\theta_t + \frac{i}{2} \theta_{xx} = 0. \quad (3.138)$$

Заметим, что уравнение (3.136) эквивалентно двунаправленному уравнению БО, рассмотренного в [63]. А именно, пусть

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2}(\psi + \psi^* - iH(\psi + \psi^*)), \\ u_1 &= \frac{1}{2}(\psi - \psi^* + iH(\psi + \psi^*)), \end{aligned}$$

тогда уравнение (3.136) может быть записано как (сравните с (27)–(28) в [63])

$$\psi_t + \frac{i}{2} \tilde{\psi}_{xx} + \psi\psi_x = 0, \quad (3.139)$$

где $\psi = u_0 + u_1$ и $\tilde{\psi} = u_0 - u_1$.

Приложение 4. Дополнительно о двух алгебрах Вирасоро $\mathcal{F} \oplus \text{NSR}$

В пункте 2.3 мы наблюдали “странное” соответствие (2.75) которое эквивалентно⁹

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha^{\text{NS}}(z) &\simeq V_{\alpha^{(1)}}^{\text{Vir}_1}(z) \cdot V_{\alpha^{(2)}}^{\text{Vir}_2}(z), \\ \alpha f(z) \Phi_\alpha^{\text{NS}}(z) + \Psi_\alpha^{\text{NS}}(z) &\simeq V_{\alpha^{(1)}+b^{(1)}/2}^{\text{Vir}_1}(z) \cdot V_{\alpha^{(2)}+1/2b^{(2)}}^{\text{Vir}_2}(z), \\ (Q - \alpha) f(z) \Phi_\alpha^{\text{NS}}(z) + \Psi_\alpha^{\text{NS}}(z) &\simeq V_{\alpha^{(1)}-b^{(1)}/2}^{\text{Vir}_1}(z) \cdot V_{\alpha^{(2)}-1/2b^{(2)}}^{\text{Vir}_2}(z), \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.140)$$

т.е. для любых $m \in \mathbb{Z}$ произведение

$$V_{\alpha^{(1)}+mb^{(1)}/2}^{\text{Vir}_1}(z) \cdot V_{\alpha^{(2)}+m/2b^{(2)}}^{\text{Vir}_2}(z)$$

двух примарных полей в двух Конформных теория поля Vir_1 и Vir_2 с параметрами удовлетворяющими (2.38) равно с точностью до нормировки полю-потомку на уровне $m^2/2$ поля $\Phi_\alpha^{\text{NS}}(z)$ в теории с алгеброй симметрии $\mathcal{F} \oplus \text{NSR}$. На операторном языке это поле-потомок соответствует состоянию старшего веса (2.51). Первая проверка, которую мы можем сделать — это проверить конформные размерности. Можно легко найти, что

$$\Delta(\alpha^{(1)} + mb^{(1)}/2, b^{(1)}) + \Delta(\alpha^{(2)} + m/2b^{(2)}, b^{(2)}) = \Delta_{\text{NS}}(\alpha, b) + \frac{m^2}{2},$$

где $\Delta(\alpha, b)$ и $\Delta_{\text{NS}}(\alpha, b)$ конформные размерности параметризованные в духе Вирасоро (теории Лиувилля) (2.24) и (2.42) NSR (теории Супер-Лиувилля).

Другой, более конкретной проверкой, было бы сравнение трехточечных корреляционных функций. Мы рассмотрим соответствие (другие соответствия (3.140) могут быть рассмотрены аналогично)

$$\Phi_\alpha^{\text{NS}}(z) \simeq V_{\alpha^{(1)}}^{\text{Vir}_1}(z) \cdot V_{\alpha^{(2)}}^{\text{Vir}_2}(z). \quad (3.141)$$

⁹Для $m = 0$ это соответствие было замечено в [120].

Правая часть (3.141) есть произведение двух примарных операторов в двух Конформных теориях поля Vir_1 и Vir_2 с центральными зарядами $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$ параметризованными как

$$c^{(\sigma)} = 1 + 6 \left(b^{(\sigma)} + \frac{1}{b^{(\sigma)}} \right)^2,$$

где $b^{(\sigma)}$ даются формулами

$$b^{(1)} = \frac{2b}{\sqrt{2-2b^2}}, \quad (b^{(2)})^{-1} = \frac{2b^{-1}}{\sqrt{2-2b^{-2}}}.$$

Рассмотрим область $b < 1$. В данном случае $b^{(1)}$ действительно, тогда как $b^{(2)}$ мнимое. Для общих значений параметров мы можем рассматривать теории Vir_1 и Vir_2 , как теорию поля Лиувилля [33] с константой связи $b^{(1)}$ и обобщенную минимальную модель [43] (время-подобная теория поля Лиувилля) с константой связи $\hat{b}^{(2)}$ (мы провели разрез так, что $b^{(2)} = -i\hat{b}^{(2)}$). Трехточечные функции в обеих теориях:

$$\begin{aligned} C(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)} | b^{(1)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle V_{\alpha_1^{(1)}}(0) V_{\alpha_2^{(1)}}(1) V_{\alpha_3^{(1)}}(\infty) \rangle_{b^{(1)}}, \\ \hat{C}(\hat{\alpha}_1^{(2)}, \hat{\alpha}_2^{(2)}, \hat{\alpha}_3^{(2)} | \hat{b}^{(2)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle V_{\hat{\alpha}_1^{(2)}}(0) V_{\hat{\alpha}_2^{(2)}}(1) V_{\hat{\alpha}_3^{(2)}}(\infty) \rangle_{\hat{b}^{(2)}}, \end{aligned} \quad (3.142)$$

где

$$\begin{aligned} b^{(1)} &= \frac{2b}{\sqrt{2-2b^2}}, & \alpha^{(1)} &= \frac{\alpha}{\sqrt{2-2b^2}}, \\ (\hat{b}^{(2)})^{-1} &= \frac{2}{\sqrt{2-2b^2}}, & \hat{\alpha}^{(2)} &= \frac{b\alpha}{\sqrt{2-2b^2}}. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Эти трехточечные функции известны в явном виде [33]:

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | b) = \frac{\Upsilon_b(b) \Upsilon_b(2\alpha_1) \Upsilon_b(2\alpha_2) \Upsilon_b(2\alpha_3)}{\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2) \Upsilon_b(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)} \quad (3.144a)$$

и [43]

$$\begin{aligned} \hat{C}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | b) &= \\ &= \frac{\Upsilon_b(b) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - b^{-1} + 2b) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + b) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + b) \Upsilon_b(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 + b)}{\Upsilon_b(2\alpha_1 + b) \Upsilon_b(2\alpha_2 + b) \Upsilon_b(2\alpha_3 + b)}, \end{aligned} \quad (3.144b)$$

где $\Upsilon_b(x)$ есть полная самодуальная функция (по отношению к преобразованию $b \rightarrow 1/b$), которая была определена в [33] с помощью интегрального представления:

$$\log \Upsilon_b(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\left(\frac{b+b^{-1}}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2 \left(\frac{b+b^{-1}}{2} - x \right) \frac{t}{2}}{\sinh \frac{bt}{2} \sinh \frac{t}{2b}} \right]. \quad (3.145)$$

Уравнения (3.144) написаны с точностью до некоторых факторов, которые могут быть устранены изменением нормировки примарных операторов, что всегда в нашей силе. Для полей в левой части (3.141) мы можем определить трехточечную функцию:

$$C_{\text{NS}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Phi_{\alpha_1}^{\text{NSR}}(0) \Phi_{\alpha_2}^{\text{NSR}}(1) \Phi_{\alpha_3}^{\text{NSR}}(\infty) \rangle_b, \quad (3.146)$$

где среднее понимается как среднее в теории поля Супер-Лиувилля с константой связи b . Из результатов [105, 106], она имеет следующую явную форму (опять с точностью до нормировки примарных полей):

$$C_{\text{NS}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\Upsilon_b^{\text{NS}}(2\alpha_1) \Upsilon_b^{\text{NS}}(2\alpha_2) \Upsilon_b^{\text{NS}}(2\alpha_3)}{\Upsilon_b^{\text{NS}}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q) \Upsilon_b^{\text{NS}}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon_b^{\text{NS}}(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2) \Upsilon_b^{\text{NS}}(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)}, \quad (3.147)$$

где

$$\Upsilon_b^{\text{NS}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Upsilon_b\left(\frac{x}{2}\right) \Upsilon_b\left(\frac{x+Q}{2}\right).$$

Используя соотношение ¹⁰

$$\frac{\Upsilon_{b^{(1)}}(\alpha^{(1)})}{\Upsilon_{\hat{b}^{(2)}}(\hat{\alpha}^{(2)} + \hat{b}^{(2)})} = \frac{\Upsilon_{b^{(1)}}(b^{(1)})}{\Upsilon_{\hat{b}^{(2)}}(\hat{b}^{(2)}) \Upsilon_b(b)} b^{\frac{b^2 \alpha(Q-\alpha)}{2-2b^2}} \left(\frac{1-b^2}{2}\right)^{\frac{\alpha(Q-\alpha)}{4} - \frac{1}{2}} \Upsilon_b^{\text{NS}}(\alpha), \quad (3.148)$$

можно проверить, что

$$C(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)} | b^{(1)}) \hat{C}(\hat{\alpha}_1^{(2)}, \hat{\alpha}_2^{(2)}, \hat{\alpha}_3^{(2)} | \hat{b}^{(2)}) \simeq C_{\text{NS}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (3.149)$$

Отметим, что выбирая подходящую нормировку полей, можно всегда сделать коэффициент пропорциональности в (3.149) равным 1.

Отношение матричных элементов (2.76) может быть интерпретировано в рамках следующего рассмотрения. А именно, предположим, что $m + k + k'$ есть четное число, тогда

$$l(\alpha, m | P', k', P, k)^2 \simeq \frac{C(\alpha_1^{(1)} + kb^{(1)}/2, \alpha_2^{(1)} + k'b^{(1)}/2, \alpha^{(1)} + mb^{(1)}/2 | b^{(1)})}{C(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha^{(1)} | b^{(1)})} \times \frac{\hat{C}(\hat{\alpha}_1^{(2)} + k/2\hat{b}^{(2)}, \hat{\alpha}_2^{(2)} + k'/2\hat{b}^{(2)}, \hat{\alpha}^{(2)} + m/2\hat{b}^{(2)} | \hat{b}^{(2)})}{\hat{C}(\hat{\alpha}_1^{(2)}, \hat{\alpha}_2^{(2)}, \hat{\alpha}^{(2)} | \hat{b}^{(2)})}, \quad (3.150)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{Q}{2} + P, \quad \alpha_2 = \frac{Q}{2} + P',$$

¹⁰Заметим, что это соотношение очень похоже на соотношение, которое было использовано в [125], где была изучена связь между парафермионной теорией Лиувилля и трех-экспоненциальной моделью [108].

и наборы $(\alpha_1^{(\sigma)}, \alpha_2^{(\sigma)}, \alpha^{(\sigma)})$ и $(\hat{\alpha}_1^{(\sigma)}, \hat{\alpha}_2^{(\sigma)}, \hat{\alpha}^{(\sigma)})$ связаны с $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha)$, как в (3.143). Уравнение (3.150) может быть проверено (опять с точностью до нормировки полей), используя соотношение

$$\frac{\Upsilon_{b^{(1)}}(\alpha^{(1)})}{\Upsilon_{b^{(1)}}(\alpha^{(1)} + nb^{(1)})} \frac{\Upsilon_{\hat{b}^{(2)}}(\hat{\alpha}^{(2)} + \hat{b}^{(2)} + n/\hat{b}^{(2)})}{\Upsilon_{\hat{b}^{(2)}}(\hat{\alpha}^{(2)} + \hat{b}^{(2)})} = \frac{(-1)^n}{(2 - 2b^2)^{n^2}} b^{\frac{2bn}{(1-b^2)}(x+nb^{-1}-Q/2)} \times \\ \times \prod_{\substack{i,j \geq 1, \\ i+j \equiv 0 \pmod{2}}} (\alpha + (i-1)b + (j-1)b^{-1})^2. \quad (3.151)$$

Случай, когда $m + k + k'$ есть нечетное число, может быть рассмотрен аналогично.

Приложение 5. Вектора старшего веса

В данном приложении мы представляем явные выражения для векторов старшего веса $|P, k\rangle$, определенных в (2.51) с размерностями:

$$\Delta^{(1)}(P, k) = \frac{(Q^{(1)})^2}{4} - \left(P^{(1)} + \frac{kb^{(1)}}{2}\right)^2, \quad \Delta^{(2)}(P, k) = \frac{(Q^{(2)})^2}{4} - \left(P^{(2)} + \frac{k}{2b^{(2)}}\right)^2. \quad (3.152)$$

Состояние $|P, k\rangle$ принадлежит уровню $k^2/2$ представления старшего веса $|P\rangle$ алгебры $\mathcal{F} \oplus \text{NSR}$. Для каждого значения $k^2/2$ есть ровно два состояния $|P, k\rangle$ и $|P, -k\rangle$, ортогональные друг другу. Например, на уровне $1/2$ мы имеем:

$$\begin{aligned} |P, 1\rangle &= \left(G_{-\frac{1}{2}} + (Q/2 + P)f_{-\frac{1}{2}}\right) |P\rangle_{\text{NS}}, \\ |P, -1\rangle &= \left(G_{-\frac{1}{2}} + (Q/2 - P)f_{-\frac{1}{2}}\right) |P\rangle_{\text{NS}} \end{aligned} \quad (3.153)$$

и на уровне 2

$$\begin{aligned} |P, 2\rangle &= \left(G_{-\frac{1}{2}}^4 + (Q/2 + P)^2 G_{-\frac{1}{2}} G_{-\frac{3}{2}} - (Q/2 + P + b)(Q/2 + P + b^{-1}) G_{-\frac{3}{2}} G_{-\frac{1}{2}} - 2(Q + P) G_{-\frac{1}{2}}^3 f_{-\frac{1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - 2(Q/2 + P)^2 (Q + P) G_{-\frac{3}{2}} f_{-\frac{1}{2}} + 2(Q/2 + P + b)(Q/2 + P + b^{-1})(Q + P) G_{-\frac{1}{2}} f_{-\frac{3}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2(Q/2 + P)(Q/2 + P + b)(Q/2 + P + b^{-1})(Q + P) f_{-\frac{1}{2}} f_{-\frac{3}{2}}\right) |P\rangle_{\text{NS}}, \end{aligned} \quad (3.154a)$$

$$\begin{aligned} |P, -2\rangle &= \left(G_{-\frac{1}{2}}^4 + (Q/2 - P)^2 G_{-\frac{1}{2}} G_{-\frac{3}{2}} - (Q/2 - P + b)(Q/2 - P + b^{-1}) G_{-\frac{3}{2}} G_{-\frac{1}{2}} - 2(Q - P) G_{-\frac{1}{2}}^3 f_{-\frac{1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - 2(Q/2 - P)^2 (Q - P) G_{-\frac{3}{2}} f_{-\frac{1}{2}} + 2(Q/2 - P + b)(Q/2 - P + b^{-1})(Q - P) G_{-\frac{1}{2}} f_{-\frac{3}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2(Q/2 - P)(Q/2 - P + b)(Q/2 - P + b^{-1})(Q - P) f_{-\frac{1}{2}} f_{-\frac{3}{2}}\right) |P\rangle_{\text{NS}}. \end{aligned} \quad (3.154b)$$

Заметим, что есть очевидное соответствие

$$|P, k\rangle = |-P, -k\rangle. \quad (3.155)$$

Для общих значений целого числа k можно построить состояние $|P, k\rangle$, как описано в пункте 2.3. Благодаря (3.155) достаточно рассмотреть только случай $k > 0$. Далее мы можем искать выражение для вектора $|P, k\rangle$ в виде

$$|P, k\rangle = (G_{-\frac{1}{2}}^{k^2} + C_1(P)G_{-\frac{1}{2}}^{k^2-3}G_{-\frac{3}{2}} + \dots)|P\rangle_{\text{NS}}, \quad (3.156)$$

где $(C_1(P) \dots)$ коэффициенты, которые нужно найти. Как было объяснено в пункте 2.3, состояние $|P, k\rangle$ имеет красивое представление в терминах свободных полей. Это означает, что если мы выразим генераторы G_r как в (2.53) (для $k > 0$ мы должны выбрать знак “ $-$ ” в (2.53)), и используем коммутационные соотношения (2.54), то получим:

$$|P, k\rangle = \Omega_k(P) \chi_{-\frac{1}{2}} \chi_{-\frac{3}{2}} \dots \chi_{-\frac{2|k|-1}{2}} |\text{vac}\rangle, \quad (3.157)$$

где

$$\chi_r = f_r - i\psi_r.$$

Сравнивая (3.157) и (3.156) мы однозначно находим все коэффициенты $C_j(P)$.

Приложение 6. Сравнение $Z_{\text{pure}}^{X_2}$ и Z_{pure}^\diamond

Мы утверждали в пункте 2.4, что наборы слагаемых с левой стороны и правой стороны тождества (2.80) различны. В этом приложении мы даем пример такого явления. Выражения в (2.80) впервые начинают отличаться при коэффициенте Λ^8 в Λ разложении. Для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$\epsilon_{i,j} = i\epsilon_1 + j\epsilon_2, \quad a_{i,j} = 2a + i\epsilon_1 + j\epsilon_2.$$

Левая часть (2.80) может быть вычислена с использованием формулы (2.78) (мы опускаем \vec{a} , ϵ_1 , ϵ_2 в обозначениях). В порядке Λ^8 результат записывается:

$$\begin{aligned}
& Z_{\text{vec}}^\diamond((4), \emptyset) + Z_{\text{vec}}^\diamond((3, 1), \emptyset) + Z_{\text{vec}}^\diamond(((2, 2), \emptyset) + Z_{\text{vec}}^\diamond(((2, 1, 1), \emptyset) + \\
& Z_{\text{vec}}^\diamond(((1, 1, 1, 1), \emptyset) + Z_{\text{vec}}^\diamond((2, 1), (1)) + Z_{\text{vec}}^\diamond(((2), (2)) + Z_{\text{vec}}^\diamond(((2), (1, 1)) + \\
& Z_{\text{vec}}^\diamond((1, 1), (2)) + Z_{\text{vec}}^\diamond((1, 1), (1, 1)) + Z_{\text{vec}}^\diamond(((1), (2, 1)) + Z_{\text{vec}}^\diamond(\emptyset(4)) + \\
& Z_{\text{vec}}^\diamond(\emptyset, (3, 1)) + Z_{\text{vec}}^\diamond(\emptyset, (2, 2)) + Z_{\text{vec}}^\diamond(\emptyset, (2, 1, 1)) + Z_{\text{vec}}^\diamond(\emptyset, (1, 1, 1, 1)) = \\
& \frac{1}{\epsilon_1, -3\epsilon_0, 4\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2a_1, 1a_0, 0a_1, 3a_0, 2} + \frac{1}{\epsilon_2, -2\epsilon_{-1}, 3\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2a_1, 3a_0, 2a_1, 1a_0, 0} + \\
& \frac{1}{\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2a_2, 2a_1, 1a_1, 1a_0, 0} + \frac{1}{\epsilon_3, -1\epsilon_{-2}, 2\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1a_3, 1a_2, 0a_1, 1a_0, 0} + \\
& \frac{1}{\epsilon_4, 0\epsilon_{-3}, 1\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1a_3, 1a_2, 0a_1, 1a_0, 0} + \frac{1}{a_2, 0a_1, -1a_1, 1a_{-0}, 0a_1, 1a_0, 0a_{-1}, 1a_0, 2} + \\
& \frac{1}{\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2a_1, -1a_0, -2a_{-1}, 1a_0, 2} + \frac{1}{\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1a_1, 1a_0, 0a_1, 1a_0, 0} + \\
& \frac{1}{\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1a_1, 1a_0, 0a_1, 1a_0, 0} + \frac{1}{\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1a_2, 0a_1, -1a_{-2}, 0a_{-1}, 1} + \\
& \frac{1}{a_1, -1a_0, 2a_{-2}, 0a_{-1}, 1a_{-1}, -1a_0, 0a_{-1}, -1a_0, 0} + \frac{1}{\epsilon_1, -3\epsilon_0, 4\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2a_{-1}, -1a_0, 0a_{-1}, -3a_0, -2} + \\
& \frac{1}{\epsilon_2, -2\epsilon_{-1}, 3\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2a_{-1}, -3a_0, -2a_{-1}, -1a_0, 0} + \frac{1}{\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1\epsilon_1, -1\epsilon_0, 2a_{-2}, -2a_{-1}, -1a_{-1}, -1a_0, 0} + \\
& \frac{1}{\epsilon_3, -1\epsilon_{-2}, 2\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1a_{-3}, -1a_{-2}, 0a_{-1}, -1a_0, 0} + \frac{1}{\epsilon_4, 0\epsilon_{-3}, 1\epsilon_2, 0\epsilon_{-1}, 1a_{-3}, -1a_{-2}, 0a_{-1}, -1a_0, 0} = \\
& \frac{16a^4 - 52a^2\epsilon_1^2 + 36\epsilon_1^4 - 92a^2\epsilon_1\epsilon_2 + 177\epsilon_1^3\epsilon_2 - 52a^2\epsilon_2^2 + 294\epsilon_1^2\epsilon_2^2 + 177\epsilon_1\epsilon_2^3 + 36\epsilon_2^4}{2\epsilon_1\epsilon_2a_{-1}, -1a_1, 1a_{-2}, -2a_2, 2a_{-3}, -1a_{-1}, -3a_1, 3a_3, 1}.
\end{aligned}$$

Правая часть (2.80) может быть вычислена с использованием формулы (2.34)

$$\begin{aligned}
& Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, -2) + Z_{\text{vec}}(\{(2), \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{(1, 1), \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, 0) + \\
& Z_{\text{vec}}(\{\{1\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \emptyset\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, (2)\}, \{\emptyset, \emptyset\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, (1, 1)\}, \{\emptyset, \emptyset\}, 0) + \\
& Z_{\text{vec}}(\{(1), \emptyset\}, \{(1), \emptyset\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{(1), \emptyset\}, \{\emptyset, (1)\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, (1)\}, \{(1), \emptyset\}, 0) + \\
& Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, (1)\}, \{\emptyset, (1)\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, \emptyset\}, \{(2), \emptyset\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, \emptyset\}, \{(1, 1), \emptyset\}, 0) + \\
& Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, \emptyset\}, \{(1), (1)\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, (2)\}, 0) + Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, (1, 1)\}, 0) + \\
& Z_{\text{vec}}(\{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, 2) = \\
& \frac{1}{a_{0,0}a^{-2,0}a_{0,-2}a_{-1,-1}a_{-1,-1}a_{-1,-3}a_{-3,-1}a_{-2,-2}} + \frac{1}{\epsilon_{3,-1}\epsilon^{-2,2}\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}a_{1,1}a_{0,0}a_{0,2}a_{-1,1}} + \\
& \frac{1}{\epsilon_{4,0}\epsilon^{-3,1}\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}a_{3,1}a_{2,0}a_{1,1}a_{0,0}} + \frac{1}{\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}a_{2,0}a_{1,-1}a_{-2,0}a_{-1,1}} + \\
& \frac{1}{\epsilon_{3,-1}\epsilon^{-2,2}\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}a_{-1,-1}a_{0,0}a_{0,-2}a_{1,-1}} + \frac{1}{\epsilon_{4,0}\epsilon^{-3,1}\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}a_{-3,-1}a_{-2,0}a_{-1,-1}a_{0,0}} + \\
& \frac{1}{\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{1,1}a_{0,0}a_{1,1}a_{0,0}} + \frac{1}{\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{1,1}a_{0,0}a_{-1,-1}a_{0,0}} + \\
& \frac{1}{\epsilon_{-1,1}\epsilon_{0,2}\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}a_{1,1}a_{0,0}a_{-1,-1}a_{0,0}} + \frac{1}{\epsilon_{2,0}\epsilon^{-1,1}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{-1,-1}a_{0,0}a_{-1,-1}a_{0,0}} + \\
& \frac{1}{\epsilon_{1,-3}\epsilon_{0,4}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{1,1}a_{0,0}a_{1,3}a_{0,2}} + \frac{1}{\epsilon_{2,-2}\epsilon^{-1,3}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{2,0}a_{1,-1}a_{1,1}a_{0,0}} + \\
& \frac{1}{\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{1,-1}a_{0,-2}a_{-1,1}a_{0,2}} + \frac{1}{\epsilon_{1,-3}\epsilon_{0,4}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{-1,-1}a_{0,0}a_{-1,-3}a_{0,-2}} + \\
& \frac{1}{\epsilon_{2,-2}\epsilon^{-1,3}\epsilon_{1,-1}\epsilon_{0,2}a_{-2,0}a_{-1,1}a_{-1,-1}a_{0,0}} + \frac{1}{a_{0,0}a_{2,0}a_{0,2}a_{1,1}a_{1,1}a_{1,3}a_{3,1}a_{2,2}} = \\
& \frac{16a^4 - 52a^2\epsilon_1^2 + 36\epsilon_1^4 - 92a^2\epsilon_1\epsilon_2 + 177\epsilon_1^3\epsilon_2 - 52a^2\epsilon_2^2 + 294\epsilon_1^2\epsilon_2^2 + 177\epsilon_1\epsilon_2^3 + 36\epsilon_2^4}{2\epsilon_1\epsilon_2a_{-1,-1}a_{1,1}a_{-2,-2}a_{2,2}a_{-3,-1}a_{-1,-3}a_{1,3}a_{3,1}}.
\end{aligned}$$

Видим, что результаты одинаковы, но наборы слагаемых разные. Например, есть только два слагаемых, которые имеют степень 8 по переменной a , и эти слагаемые разные.

Приложение 7. Симметрии производящих функций

Цель данного приложения проанализировать симметрии производящих функций диаграмм Юнга $\chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q)$ с $s = 0, 1, \dots, p-1$ и k_i равными 0 или 1. Вспомним формулу (3.14) для

производящих функций и напишем ее для дальнейшего рассмотрения в более удобной форме

$$\begin{aligned} \chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) &= (\chi_B(q))^{2p} q^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) - \frac{1}{2} k_s} \times \\ &\times \sum_{\{m_i\} \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{s-1} (2m_{i+1} - 2m_i - k_{i+1} + k_i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=s-1}^{p-1} (2m_{i+1} - 2m_i - k_{i+1} + k_i)^2 - \frac{s}{4}}. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Взяв некоторое $j \neq s$ и полагая, что $k_j = 0$ и $k_{j-1} = 0$, $k_{j+1} = 1$, делаем подстановку переменной суммирования m_j в (3.158)

$$m_j = m_{j+1} + m_{j-1} - \tilde{m}_j, \quad (3.159)$$

которая эффективно приводит к $k_j = 0 \rightarrow k_j = 1$. После некоторых вычислений имеем

$$\chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{j}{0}, 1, \dots |q) = q^{-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{j}{1}, 1, \dots |q), \quad j \neq s. \quad (3.160)$$

Такая же подстановка, как и в (3.159), доказывает, что

$$\chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{j}{0}, 0, \dots |q) = q^{-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{j}{1}, 0, \dots |q), \quad j \neq s. \quad (3.161)$$

Затем рассмотрим ситуацию, когда $k_s = 0$. Полагая, что $k_{s-1} = 0$ и $k_{s+1} = 0$, делаем подстановку для переменной суммирования m_s в (3.158)

$$m_s = m_{s+1} + m_{s-1} - \tilde{m}_s, \quad (3.162)$$

которая по сути приводит к $k_s = 0 \rightarrow k_s = 1$. После некоторых вычислений мы имеем

$$\chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{s}{0}, 0, \dots |q) = q^{-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{s}{1}, 0, \dots |q). \quad (3.163)$$

Если $k_{s-1} = 1$ и $k_{s+1} = 1$, то подходящей заменой было бы

$$m_s = m_{s+1} + m_{s-1} - \tilde{m}_s - 1, \quad (3.164)$$

которая опять, по сути, приводит к $k_s = 0 \rightarrow k_s = 1$. После необходимых вычислений имеем

$$\chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{s}{0}, 1, \dots |q) = q^{1-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{s}{1}, 1, \dots |q). \quad (3.165)$$

Следующей задачей является определение неэквивалентных классов производящих функций для каждого s с k_i равным 0 или 1.

Начнем со случая $s = 0$. Как мы помним, массив k_i есть ряд из $p - 1$ нулей и единиц. Мы можем рассматривать этот массив, как островки единиц в море из нулей. Далее, можно легко

заметить, что симметрии (3.160) и (3.161) запрещают островкам сливаться (по крайней мере один 0 должен быть между ними), но позволяют им менять свой размер. Поэтому, класс эквивалентности определяется, как число островков n , которое принимает значения $0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. Удобно выбрать следующих представителей n -ого класса:

$$\chi_{0,0}(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 0, \dots, 0|q). \quad (3.166)$$

Поэтому для $s = 0$ мощность n -ого класса равна $\binom{p}{2n}$ (это число способов распределить $2n$ границ островков между p местами).

Теперь продолжим также вычисление для случая $s > 0$. Опять, смотря на массив k_i , который состоит из 0 и 1, замечаем, что, если есть островок единиц, содержащий позицию s , мы можем разрушить этот остров, получив производящую функцию, эквивалентную $\chi_{0,s}$. Далее, благодаря симметриям (3.163) и (3.165) мы можем аннигилировать островки слева от позиции s с островками справа от позиции s . Это означает, что в конце мы останемся только с некоторым числом островков с одной стороны (левой или правой). Это приводит нас к заключению, что класс эквивалентности в этом случае определяется разностью числа островков слева и справа от позиции s . Поэтому число классов эквивалентности равно

$$\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{p-s}{2} \rfloor + 1. \quad (3.167)$$

Пусть l есть разность количества островков слева и справа от позиции s . Тогда, число производящих функций в соответствующем классе эквивалентности с $k_s = 0$ дается

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - l} \binom{s}{2n+2j} \binom{p-s}{2j} \quad (3.168)$$

Число производящих функций в одном классе с $k_s = 1$ (что по сути приводит к добавлению одной границы островка к каждой стороне) дается выражением

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - l} \binom{s}{2l+2j+1} \binom{p-s}{2j+1}. \quad (3.169)$$

Суммируя оба вклада, используя тождество Вандермонда, получаем:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - n} \left(\binom{s}{2l+2j} \binom{p-s}{2j} + \binom{s}{2l+2j+1} \binom{p-s}{2j+1} \right) = \binom{p}{s-2l}. \quad (3.170)$$

Удобный выбор представителя l -ого класса это

$$\chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s-2l+1}{1}, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, \overset{s}{0}, 0, \dots, 0). \quad (3.171)$$

Такая же ситуация, когда мы имеем n островков с правой стороны, за исключением того, что нам следует в данном случае заменить s на $p - s$, что дает мощность класса $\binom{p}{p-s-2n}$. Удобным представителем будет

$$\chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s}{0}, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, \overset{s+2n-1}{1}, 0, \dots, 0). \quad (3.172)$$

Приложение 8. Конформная теория поля с симметрией косета

В данном приложении мы приводим некоторые общие факты о конформных теориях с симметрией косета

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{l_1} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{l_2}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{l_1+l_2}}. \quad (3.173)$$

В случае общего целого $r \geq 2$ и произвольных комплексных l_1 и l_2 косет (3.173) описывает конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(r, l_1, l_2) = (r^2 - 1) \left(\frac{l_1}{r + l_1} + \frac{l_2}{r + l_2} - \frac{l_1 + l_2}{r + l_1 + l_2} \right). \quad (3.174)$$

В случае $l_1 = 1$ мы получаем конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(r, 1, l_2) = (r - 1) \frac{l_2(2r + l_2 + 1)}{(r + l_2)(r + l_2 + 1)}, \quad (3.175)$$

которая имеет W_r -симметрию [134]. Далее, если l_2 является положительным целым, центральный заряд дается такой же формулой (3.175) и косет описывает Минимальную модель с W_r -симметрией.

Теперь рассмотрим случай ранга $r = 2$, который изучался в Главе 3. Косет (3.173) принимает форму

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{l_1} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{l_2}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{l_1+l_2}}. \quad (3.176)$$

В случае произвольных комплексных l_1 и l_2 косет (3.176) описывает конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(2, l_1, l_2) = 3 \left(\frac{l_1}{l_1 + 2} + \frac{l_2}{l_2 + 2} - \frac{l_1 + l_2}{l_1 + l_2 + 2} \right). \quad (3.177)$$

В случае $l_1 = 1$ получаем конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(2, 1, l_2) = \frac{l_2(l_2 + 5)}{(l_2 + 2)(l_2 + 3)} = 1 - \frac{6}{(l_2 + 2)(l_2 + 3)}, \quad (3.178)$$

которая имеет симметрию Вирасоро. Далее, если l_2 положительно целое, центральный заряд дается той же формулой (3.178) и косет описывает Минимальную модель $\mathcal{M}(l_2 + 1/l_2 + 2)$, как было показано в [68, 69].

Заключение

В Главе 1 был построен ортогональный базис состояний и предъявлен специальный вертексный оператор в тензорном произведении алгебры Вирасоро и Гейзенберга: $\text{Vir} \otimes \mathcal{H}$. Результатом этого является доказательство классического АГТ соответствия для случая конформной теории поля с симметрией алгебры Вирасоро Vir .

В Главе 2 был построен ортогональный базис состояний и предъявлены специальные вертексные операторы в тензорном произведении алгебр: $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{F} \otimes \text{NSR}$. Результатом этого является доказательство суперсимметричного АГТ соответствия для случая конформной теории поля с симметрией алгебры Супер-Вирасоро: NSR .

В Главе 3 было рассмотрено обобщение АГТ соответствия для конформной теории с алгеброй симметрии: $\mathcal{A}(2, p) = \widehat{\mathfrak{gl}}(n)_2 / \widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_2$. Показано, что данная алгебра может быть реализована двумя способами. Эквивалентность двух способов приводит к нетривиальным тождествам для конформных блоков данной теории.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю А. А. Белавину — за внимание к работе, научное руководство, ценные советы и постоянную поддержку. Автора также благодарен своим соавторам — М. А. Берштейну, В. А. Альба, М. Н. Алфимову, В. А. Фатееву, Б. Л. Фейгину и, особенно, А. В. Литвинову — за совместные работы и неоднократные полезные обсуждения. Автор также благодарен Я. П. Пугаю, М. Ю. Лашкевичу, С. Е. Пархоменко, И. В. Полюбину и Ю. В. Вахтеевой и всем сотрудникам Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау, вопросы которых оказали большую помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

1. Alba, Vasyl A. and Fateev, Vladimir A. and Litvinov, Alexey V. and Tarnopolskiy, Grigory M. *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, Lett.Math.Phys. **98**, (2011), 33-64, arXiv:1012.1312
2. Belavin, A.A. and Bershtein, M.A. and Feigin, B.L. and Litvinov, A.V. and Tarnopolsky, G.M. *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **319(1)**, (2013) 269-301, arXiv:1111.2803.
3. Belavin, A.A. and Bershtein, M.A. and Tarnopolsky, G.M., *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, JHEP, **1303**, (2013) 019 arXiv:1211.2788.
4. Alfimov, M.N. and Belavin, A.A. and Tarnopolsky, G.M. *Coset conformal field theory and instanton counting on C^2/Z_p* , JHEP **1308** (2013) 134, arXiv:1306.3938.

Литература

- [1] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167–197, arXiv:0906.3219
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333–380.
- [3] A. M. Polyakov, *Nonhamiltonian approach to conformal quantum field theory*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **66** (1974) 23–42.
- [4] G. W. Moore and N. Seiberg, *Classical and Quantum Conformal Field Theory*, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989) 177.
- [5] V. P. Yurov and A. B. Zamolodchikov, *Truncated conformal space approach to scaling Lee-Yang model*, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 3221–3246.
- [6] A. B. Zamolodchikov, *Conformal symmetry in two-dimensions: an explicit recurrence formula for the conformal partial wave amplitude*, *Commun. Math. Phys.* **96** (1984) 419–422.
- [7] L. Hadasz, Z. Jaskolski, and P. Suchanek, *Recursive representation of the torus 1-point conformal block*, *JHEP* **01** (2010) 063, arXiv:0911.2353
- [8] G. W. Moore, N. Nekrasov, and S. Shatashvili, *Integrating over Higgs branches*, *Commun. Math. Phys.* **209** (2000) 97–121, hep-th/9712241
- [9] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 831–864, hep-th/0206161
- [10] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, hep-th/0306238
- [11] M. R. Douglas and G. W. Moore, *D-branes, Quivers, and ALE Instantons*, hep-th/9603167

- [12] D. Gaiotto and J. Maldacena, *The gravity duals of $N=2$ superconformal field theories*, arXiv:0904.4466
- [13] D. Gaiotto, *$N=2$ dualities*, arXiv:0904.2715
- [14] F. Benini, S. Benvenuti, and Y. Tachikawa, *Webs of five-branes and $N=2$ superconformal field theories*, *JHEP* **09** (2009) 052, arXiv:0906.0359
- [15] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Instantons on quivers and orientifolds*, *JHEP* **10** (2004) 037, hep-th/0408090
- [16] R. Flume and R. Poghossian, *An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential*, *Int. J. Mod. Phys.* **A18** (2003) 2541, hep-th/0208176
- [17] S. Shadchin, *Cubic curves from instanton counting*, *JHEP* **03** (2006) 046, hep-th/0511132
- [18] A. Mironov and A. Morozov, *The Power of Nekrasov Functions*, *Phys. Lett.* **B680** (2009) 188–194, arXiv:0908.2190
- [19] A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, *Zamolodchikov asymptotic formula and instanton expansion in $N = 2$ SUSY $N_f = 2N_c$ QCD*, *JHEP* **11** (2009) 048, arXiv:0909.3338
- [20] A. Mironov and A. Morozov, *Proving AGT relations in the large- c limit*, *Phys. Lett.* **B682** (2009) 118–124, arXiv:0909.3531
- [21] V. Alba and A. Morozov, *Check of AGT Relation for Conformal Blocks on Sphere*, *Nucl. Phys.* **B840** (2010) 441–468, arXiv:0912.2535
- [22] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *On AGT conjecture*, *JHEP* **02** (2010) 014, arXiv:0912.0504
- [23] L. Hadasz, Z. Jaskolski, and P. Suchanek, *Proving the AGT relation for $N_f = 0, 1, 2$ antifundamentals*, *JHEP* **06** (2010) 046, arXiv:1004.1841
- [24] L. F. Alday and Y. Tachikawa, *Affine $SL(2)$ conformal blocks from $4d$ gauge theories*, *Lett. Math. Phys.* **94** (2010) 87–114, arXiv:1005.4469
- [25] E. Carlsson and A. Okounkov, *Exts and vertex operators*, arXiv:0801.2565

- [26] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz*, *Commun. Math. Phys.* **177** (1996) 381–398, hep-th/9412229
- [27] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, *Integrable Structure of Conformal Field Theory II. Q- operator and DDV equation*, *Commun. Math. Phys.* **190** (1997) 247–278, hep-th/9604044
- [28] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory. III: The Yang-Baxter relation*, *Commun. Math. Phys.* **200** (1999) 297–324, hep-th/9805008
- [29] D. Lebedev and A. Radul, *Generalized internal long waves equations: Construction, Hamiltonian structure, and conservation laws*, *Commun. Math. Phys.* **91** (1983) 543–555.
- [30] A. Degasperis, D. Lebedev, M. Olshanetsky, S. Pakuliak, A. Perelomov, and P. Santini, *Nonlocal integrable partners to generalized MKdV and two-dimensional Toda lattice equation in the formalism of a dressing method with quantized spectral parameter*, *Commun. Math. Phys.* **141** (1991) 133–151.
- [31] A. Degasperis, D. Lebedev, M. Olshanetsky, S. Pakuliak, A. Perelomov, and P. Santini, *Generalized Intermediate Long-Wave hierarchy in zero-curvature representation with noncommutative spectral parameter*, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 3783–3793.
- [32] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press, 1995.
- [33] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 577–605, hep-th/9506136
- [34] R. Sakamoto, J. Shiraishi, D. Arnaudon, L. Frappat, and E. Ragoucy, *Correspondence between conformal field theory and Calogero-Sutherland model*, *Nucl. Phys.* **B704** (2005) 490–509, hep-th/0407267
- [35] Y. Kanie and A. Tsuchiya, *Fock space representations of Virasoro algebra and intertwining operators*, *Proc. Japan Acad. Ser.* **A62** (1986) 12–15.
- [36] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2d statistical models*, *Nucl. Phys.* **B240** (1984) 312.
- [37] G. Felder, *BRST Approach to Minimal Models*, *Nucl. Phys.* **B317** (1989) 215.

- [38] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Four point correlation functions and the operator algebra in the two-dimensional conformal invariant theories with the central charge $c < 1$* , *Nucl. Phys.* **B251** (1985) 691.
- [39] E. M. Rains, *BC_n-symmetric polynomials*, *Transform. Groups* **10** (2005) 63–132.
- [40] J. Haglund, *The q,t -Catalan numbers and the space of diagonal harmonics*, vol. 41 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. With an appendix on the combinatorics of Macdonald polynomials.
- [41] A. Lascoux, *Symmetric functions and combinatorial operators on polynomials*, vol. 99 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Washington, DC, 2003.
- [42] B. L. Feigin and D. Fuks, *Verma modules over Virasoro algebra*, *Lectures Notes in Math.* **1060** (1984) 230.
- [43] Al. B. Zamolodchikov, *Three-point function in the minimal Liouville gravity*, *Theor. Math. Phys.* **142** (2005) 183–196, hep-th/0505063
- [44] N. Wyllard, *A_{N-1} conformal Toda field theory correlation functions from conformal $N = 2$ $SU(N)$ quiver gauge theories*, *JHEP* **11** (2009) 002, arXiv:0907.2189
- [45] A. Mironov and A. Morozov, *On AGT relation in the case of $U(3)$* , *Nucl. Phys.* **B825** (2010) 1–37, arXiv:0908.2569
- [46] S. O. Warnaar, *A Selberg integral for the Lie algebra A_n* , *Acta Math.* **203** (2009) 269–304, arXiv:0708.1193
- [47] K. W. J. Kadell, *The Selberg-Jack symmetric functions*, *Adv. Math.* **130** (1997) 33–102.
- [48] K. W. J. Kadell, *An integral for the product of two Selberg–Jack symmetric functions*, *Compositio Math.* **87** (1993) 5–43.
- [49] L. K. Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains*, vol. 6 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979.

- [50] P. J. Forrester and S. O. Warnaar, *The importance of the Selberg integral*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **45** (2008) 489–534, arXiv:0710.3981
- [51] S. O. Warnaar, *On the generalised Selberg integral of Richards and Zheng*, *Adv. App. Math.* **40** (2008) 212, arXiv:0708.3107.
- [52] G. W. Anderson, *A short proof of Selberg’s generalized beta formula*, *Forum Math.* **3** (1991) 415–417.
- [53] P. Forrester, *Log-gases and Random matrices*. Princeton University Press, 2010.
- [54] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *Multipoint correlation functions in Liouville field theory and minimal Liouville gravity*, *Theor. Math. Phys.* **154** (2008) 454–472, arXiv:0707.1664
- [55] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *Correlation functions in conformal Toda field theory I*, *JHEP* **11** (2007) 002, arXiv:0709.3806
- [56] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *Correlation functions in conformal Toda field theory II*, *JHEP* **01** (2009) 033, arXiv:0810.3020
- [57] A. Okounkov, *(Shifted) Macdonald polynomials: q -integral representation and combinatorial formula*, *Compositio Math.* **112** (1998) 147–182, q-alg/9605013
- [58] V. B. Kuznetsov, V. V. Mangazeev, and E. K. Sklyanin, *Q -operator and factorised separation chain for Jack polynomials*, *Indag. Math.* **14** (2003) 451, math/0306242
- [59] F. Carlson, *Sur une classe de séries de Taylor*. PhD thesis, Uppsala, Sweden, 1914.
- [60] R. P. Stanley, *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, *Adv. Math.* **77** (1989) 76–115.
- [61] T. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, *J. Fluid Mech.* **29** (1967) 559–562.
- [62] H. Ono, *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, *J. Phys. Soc. Japan* **39** (1975) 1082–1091.
- [63] A. G. Abanov, E. Bettelheim, and P. Wiegmann, *Integrable hydrodynamics of Calogero-Sutherland model: Bidirectional Benjamin-Ono equation*, *J. Phys. A* **42** (2009) 135201, arXiv:0810.5327

- [64] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, *Ann. of Math.* **145** (1997) 379–388, alg-geom/9507012
- [65] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, *Duke Math. J.* **91** (1998) 515–560.
- [66] M. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, *Topology* **23** (1984) 1–28.
- [67] V. Belavin and B. Feigin, *Super Liouville conformal blocks from $N=2$ $SU(2)$ quiver gauge theories*, *JHEP* **1107** (2011) 079, arXiv:1105.5800
- [68] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and Supervirasoro algebras*, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 105–119.
- [69] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, *Virasoro Algebras and Coset Space Models*, *Phys.Lett.* **B152** (1985) 88.
- [70] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001) 145–238, math/9912158
- [71] K. Miki, *$A(q, \gamma)$ analog of the $W_{1+\infty}$ algebra*, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 123520.
- [72] B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, and S. Yanagida, *Kernel function and quantum algebras*, *RIMS Kokyuroku* **1689** (2010) 133–152, arXiv:1002.2485
- [73] B. Feigin, unpublished.
- [74] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, and S. Yanagida, *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture*, arXiv:1106.4088
- [75] W.-P. Li, Z. Qin, and W. Wang, *The cohomology rings of Hilbert schemes via Jack polynomials*, math/0411255v1.
- [76] Alba, Vasyl A. and Fateev, Vladimir A. and Litvinov, Alexey V. and Tarnopolskiy, Grigory M. *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, *Lett.Math.Phys.* **98**, (2011), 33-64, arXiv:1012.1312
- [77] Belavin, A.A. and Bershtein, M.A. and Feigin, B.L. and Litvinov, A.V. and Tarnopolsky, G.M. *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, *Comm. Math. Phys.* **319(1)**, (2013) 269-301, arXiv:1111.2803.

- [78] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *Integrable structure, W-symmetry and AGT relation*, *JHEP* **01** (2012) 051, arXiv:1109.4042
- [79] A. Belavin, V. Belavin, and M. Bershtein, *Instantons and 2d Superconformal field theory*, *JHEP* **1109** (2011) 117, arXiv:1106.4001
- [80] Y. Ito, *Ramond sector of super Liouville theory from instantons on an ALE space*, *Nucl.Phys.* **B861** (2012) 387–402, arXiv:1110.2176
- [81] A. Belavin and B. Mukhametzhanov, *$N=1$ superconformal blocks with Ramond fields from AGT correspondence*, *JHEP* **1301** (2013) 178, arXiv:1210.7454.
- [82] T. Nishioka and Y. Tachikawa, *Para-Liouville/Toda central charges from M5-branes*, *Phys. Rev.* **D84** (2011) 046009, arXiv:1106.1172
- [83] N. Wyllard, *Coset conformal blocks and $N = 2$ gauge theories*, arXiv:1109.4264
- [84] M. Alfimov and G. Tarnopolsky, *Parafermionic Liouville field theory and instantons on ALE spaces*, *JHEP* **1202** (2012) 036, arXiv:1110.5628.
- [85] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Instantons on ALE spaces and Super Liouville Conformal Field Theories*, *JHEP* **1108** (2011) 056, arXiv:1106.2505
- [86] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Gauge Theories on ALE Space and Super Liouville Correlation Functions*, arXiv:1107.4609
- [87] P. C. Argyres, A. LeClair, and S. H. H. Tye, *On the possibility of fractional superstrings*, *Phys. Lett.* **B253** (1991) 306–312.
- [88] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Representations of the algebra of parafermion currents of spin $4/3$ in two-dimensional conformal field theory. Minimal models and the tricritical Potts $Z(3)$ model*, *Theor. Math. Phys.* **71** (1987) 451–462.
- [89] R. G. Pogosian, *Operator algebra in two-dimensional conformal quantum field theory containing spin $4/3$ parafermionic conserved currents.*, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991) 2005–2023.
- [90] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*. University Lecture Series. 18. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xi, 132 p., 1999.

- [91] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Lectures on Instanton Counting*, math/0311058
- [92] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, *Invent. Math.* **162** (2005) 313–355, math/0306198
- [93] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press, 1995.
- [94] A. Belavin and V. Belavin, *AGT conjecture and Integrable structure of Conformal field theory for $c=1$* , *Nucl. Phys.* **B850** (2011) 199–213, arXiv:1102.0343
- [95] B. Estienne, V. Pasquier, R. Santachiara, and D. Serban, *Conformal blocks in Virasoro and W theories: Duality and the Calogero-Sutherland model*, *Nucl.Phys.* **B860** (2012) 377–420, arXiv:1110.1101
- [96] H. Nakajima, *Sheaves on ALE spaces and quiver varieties*, *Mosc. Math. J.* **7** (2007) 699–722.
- [97] U. Bruzzo, R. Poghossian, and A. Tanzini, *Poincaré Polynomial of Moduli Spaces of Framed Sheaves on (Stacky) Hirzebruch Surfaces*, *Commun. Math. Phys.* **304** (2011) 395–409, arXiv:0909.1458
- [98] C. Crnkovic, G. Sotkov, and M. Stanishkov, *Renormalization group flow for general $SU(2)$ coset models*, *Phys.Lett.* **B226** (1989) 297.
- [99] C. Crnkovic, R. Paunov, G. Sotkov, and M. Stanishkov, *Fusions of conformal models*, *Nucl.Phys.* **B336** (1990) 637.
- [100] M. Lashkevich, *Superconformal 2-D minimal models and an unusual coset construction*, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 851–860, hep-th/9301093
- [101] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Multi instanton calculus on ALE spaces*, *Nucl. Phys.* **B703** (2004) 518–536, hep-th/0406243
- [102] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Instanton on toric singularities and black hole countings*, *JHEP* **12** (2006) 073, hep-th/0610154
- [103] K. Nagao, *Quiver varieties and Frenkel-Kac construction*, *Journal of Algebra* **321** (2007) 3764–3789, math/0703107
- [104] R. Poghossian, unpublished.

- [105] R. C. Rashkov and M. Stanishkov, *Three-point correlation functions in $N = 1$ Super Liouville Theory*, *Phys. Lett.* **B380** (1996) 49–58, hep-th/9602148
- [106] R. H. Poghossian, *Structure constants in the $N = 1$ super-Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B496** (1997) 451–464, hep-th/9607120
- [107] M. A. Bershtein, V. A. Fateev, and A. V. Litvinov, *Parafermionic polynomials, Selberg integrals and three-point correlation function in parafermionic Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B847** (2011) 413–459, arXiv:1011.4090
- [108] V. A. Fateev, *The sigma model (dual) representation for a two-parameter family of integrable quantum field theories*, *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 509–538.
- [109] R. Poghossian, *Recursion relations in CFT and $N=2$ SYM theory*, *JHEP* **12** (2009) 038, arXiv:0909.3412.
- [110] R. Dijkgraaf and C. Vafa, *Toda theories, matrix models, topological strings, and $N=2$ gauge systems*, arXiv:0909.2453.
- [111] M. C. Cheng, R. Dijkgraaf, and C. Vafa, *Non-perturbative topological strings and conformal blocks*, *JHEP* **1109** (2011) 022, arXiv:1010.4573.
- [112] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, *A direct proof of AGT conjecture at $\beta = 1$* , *JHEP* **1102** (2011) 067, arXiv:1012.3137.
- [113] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, *Towards a proof of AGT conjecture by methods of matrix models*, arXiv:1011.5629.
- [114] A. Braverman, B. Feigin, M. Finkelberg, and L. Rybnikov, *A finite analog of the AGT relation I: finite W -algebras and quasimaps' spaces*, *Commun. Math. Phys.* (2011) arXiv:1008.3655.
- [115] P. C. Argyres and S. H. H. Tye, *Tree scattering amplitudes of the spin $4/3$ fractional superstring. 1. The Untwisted sectors*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 5326–5348, hep-th/9310131.
- [116] U. Bruzzo, R. Poghossian, and A. Tanzini, *Poincare polynomial of moduli spaces of framed sheaves on (stacky) Hirzebruch surfaces*, *Commun. Math. Phys.* **304** (2011) 395–409, arXiv:0909.1458.

- [117] U. Bruzzo, F. Fucito, J. F. Morales, and A. Tanzini, *Multi-instanton calculus and equivariant cohomology*, *JHEP* **05** (2003) 054, hep-th/0211108.
- [118] T. Sasaki, *$O(-2)$ blow-up formula via instanton calculus on $C^{**2}/Z(2)$ - hat and Weil conjecture*, hep-th/0603162.
- [119] S. Fujii and S. Minabe, *A Combinatorial Study on Quiver Varieties*, *ArXiv Mathematics e-prints* (Oct., 2005)
- [120] C. Crnkovic, R. Paunov, G. Sotkov, and M. Stanishkov, *Fusions of conformal models*, *Nucl.Phys.* **B336** (1990) 637.
- [121] L. Spodyneiko, “Implicit symmetries of the composite models of conformal field theory.” unpublished.
- [122] M. Lashkevich, *Superconformal 2-D minimal models and an unusual coset construction*, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 851–860, hep-th/9301093.
- [123] S. L. Lukyanov and V. Fateev, *Exactly solvable models of conformal quantum theory associated with simple Lie algebra $D(N)$. (in Russian)*, *Sov.J.Nucl.Phys.* **49** (1989) 925–932.
- [124] P. Baseilhac and V. Fateev, *Fermion boson duality in integrable quantum field theory*, *Mod.Phys.Lett.* **A13** (1998) 2807–2818, hep-th/9905221.
- [125] M. A. Bershtein, V. A. Fateev, and A. V. Litvinov, *Parafermionic polynomials, Selberg integrals and three- point correlation function in parafermionic Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B847** (2011) 413–459, arXiv:1011.4090.
- [126] Z. Kakushadze and S. Tye, *Kac and new determinants for fractional superconformal algebras*, *Phys.Rev.* **D49** (1994) 4122–4138, hep-th/9310160.
- [127] A. Belavin and D. Gepner, *Generalized Rogers Ramanujan Identities from AGT Correspondence*, arXiv:1212.6600.
- [128] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Gauge Theories on ALE Space and Super Liouville Correlation Functions*, arXiv:1107.4609.

- [129] G. Bonelli, K. Maruyoshi, A. Tanzini, and F. Yagi, *N=2 gauge theories on toric singularities, blow-up formulae and W-algebras*, arXiv:1208.0790.
- [130] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 831–864, hep-th/0206161.
- [131] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Multi instanton calculus on ALE spaces*, *Nucl.Phys.* **B703** (2004) 518–536, hep-th/0406243.
- [132] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Instanton on toric singularities and black hole countings*, *JHEP* **12** (2006) 073, hep-th/0610154.
- [133] Y. Ito, K. Maruyoshi, and T. Okuda, *Scheme dependence of instanton counting in ALE spaces*, *JHEP* **1305** (2013) 045, arXiv:1303.5765.
- [134] V. A. Fateev and S. L. Lukyanov, *The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $Z(n)$ symmetry*, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 507.
- [135] A. Belavin, M. Bershtein, and G. Tarnopolsky, *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, *JHEP* **1303** (2013) 019, arXiv:1211.2788.