

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Л. Д. ЛАНДАУ РАН

На правах рукописи

ИОСЕЛЕВИЧ Павел Алексеевич

**Майорановские фермионы в сверхпроводящих гибридных
структурах**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
М. В. Фейгельман

Москва – 2013

Оглавление

Введение	4
1 Формализм и Майорановские операторы	11
1.1 Гамильтониан Боголюбова-де Жена	11
1.2 Топологическая защита уединенной Майорановской моды	12
1.3 Майорановский базис	13
2 Аномальный ток Джозефсона в SNS-контакте на топологическом изоляторе	14
2.1 Введение	14
2.2 4π -периодичная зависимость от фазы и фермионная четность	15
2.3 Спектр системы	18
2.4 Джозефсоновский ток	21
2.5 Заключение	23
3 Туннельный кондактанс системы с дискретным спектром Андреевских состояний	25
3.1 Введение	25
3.2 Система и формализм	28
3.3 Одноуровневый резонанс для произвольного туннельного контакта	31
3.3.1 Майорановский пик	34
3.3.2 Точечный контакт	34
3.3.3 Температурная зависимость	35
3.4 Одноканальный контакт и многоуровневая система	36
3.4.1 Квантование проводимости при нулевом напряжении	38

3.4.2	Проводимость при конечных V и интерференция	39
3.5	Обсуждение	43
3.6	Заключение	44
4	Майорановский фермион на поверхности неупорядоченного топологического изолятора	46
4.1	Введение	46
4.2	Суперсимметричная σ -модель	48
4.3	Плотность состояний	52
4.4	Туннельный ток	54
4.5	Заключение	56
	Заключение	58
	Приложение	61
A	Приложение к главе 1	61
A.1	Уравнения шивки	61
A.2	Уравнение спектра	61
A.3	Вычисление аномального тока	64
B	Приложение к главе 3	66
B.1	Вывод сигма-модели	66
B.2	Вычисление плотности состояний	74
	Публикации по теме диссертации	79
	Литература	80

Введение

Одна из тем теории конденсированного состояния, получившая бурное развитие в последние несколько лет – топологические фазы вещества. В середине 2000х годов было предсказано существование трехмерных топологических изоляторов¹⁻⁷ – кристаллических веществ, являющихся диэлектриками в объеме, и при этом имеющих металлические поверхностные состояния. Эти предсказания были подтверждены в экспериментах на гетероструктурах с колодцами из HgTe,⁸ а также для трехмерных образцов $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$, Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 , Bi_2SeTe_2 и т.д.⁹⁻¹¹ Определяющим свойством топологических изоляторов является щель в объемном спектре, сосуществующая с защищенной поверхностной модой. Под защищенностью понимается свойство, что поверхностная мода не исчезает при слабых возмущениях. Например, на поверхности трехмерного Bi_2Se_3 в присутствии немагнитных примесей не происходит Андерсоновская локализация – поверхность остается металлической. Для топологических изоляторов существует так называемый принцип соответствия объема и поверхности (bulk-boundary correspondence) – по гамильтониану в объеме можно судить о свойствах поверхности. По объемному гамильтониану, в рамках заданного класса симметрии (например, рассматриваются системы, инвариантные по отношению к обращению времени T) можно вычислить топологический индекс ν . На границе областей с разными ν обязательно существует бесщелевая краевая мода. Подчеркнем, что системы с разными ν имеют одинаковые симметрии, но при этом находятся в разных топологических фазах. Фазы с одинаковым ν могут быть получены друг из друга непрерывным изменением системы, не закрывающем объемной щели. Фазы с различными ν имеют разный топологический порядок^{12,13} и могут переходить одна в другую только в процессе перехода, закрывающего объемную щель. Топологический фазовый переход не меняет симметрии системы, и

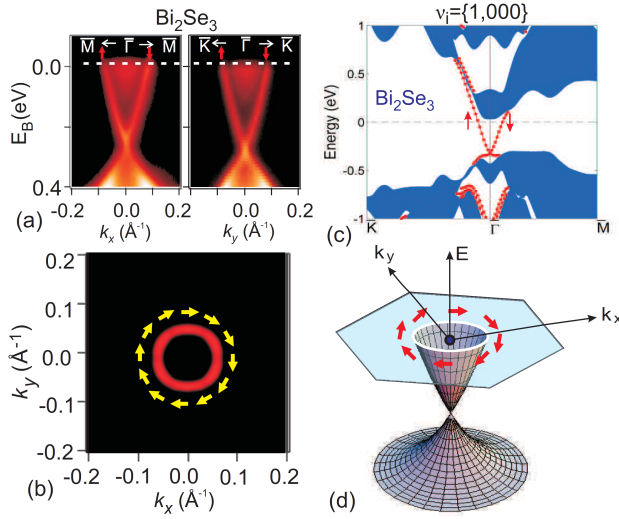


Рис. 1: Спектр состояний в трехмерном топологическом изоляторе Bi₂Se₃. (a): измеренный ARPES спектр вдоль двух направлений в поверхностной зоне Бриллюэна. (b): сечение Дираковского конуса с разрешением по спину. (c): полученный численно объемный (синий сплошной) и поверхностный (красный пунктирный) спектр. (d): схематическое изображение поверхностного спектра в топологического изолятора Bi₂X₃ (в качестве X выступает Se, Te или их смесь). Рисунок из обзора.²²

поэтому имеет мало общего с теорией фазовых переходов Ландау.¹⁴

Топологические фазы существуют в разных размерностях пространства: примером двумерного топологического изолятора является целочисленный квантовый эффект Холла, а одномерного – модель Су-Шриффера-Хеегера.¹⁵ Система может быть и сверхпроводящей (спектр квазичастиц в сверхпроводниках, как правило, имеет щель и в этом смысле система является объемным изолятором) — такие топологические изоляторы обычно называют топологическими сверхпроводниками. Все множество одночастичных гамильтонианов может быть разбито на десять классов симметрии, в каждом из которых, в зависимости от размерности пространства, могут существовать определенные топологические фазы.^{16,17} Результат такой классификации — периодическая таблица, приведенная на Рис. 2. Заметим, что различать топологические фазы можно не только с помощью объемного гамильтониана, но и основываясь на функциях Грина. Классификацию на основе гамильтониана, называемую также топологической зонной теорией, можно вывести как невзаимодействующий предел топологической теории поля.¹⁸ Топологические инварианты типа ν , переписанные в терминах функций Грина, сохраняют смысл и для взаимодействующих систем.^{18–21} Подробный обзор топологических фаз можно найти в

Symmetry				d							
AZ	Θ	Ξ	Π	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
AIII	0	0	1	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
AI	1	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
BDI	1	1	1	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
D	0	1	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2
DIII	-1	1	1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	0
AII	-1	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}
CII	-1	-1	1	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
C	0	-1	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
CI	1	-1	1	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0

Рис. 2: Периодическая таблица топологических изоляторов и сверхпроводников. В первом столбце — класс симметрии в обозначениях Картана, три следующих столбца — значения \mathcal{T}^2 , Ξ^2 , $(\mathcal{T}\Xi)^2$ ("0" означает отсутствие данной симметрии). В правой части дано пространство, содержащее топологический индекс ν в данном классе симметрии в размерности d . Например, в симплектическом классе AII в $d = 3$ $\nu \in \mathbb{Z}_2$, то есть существует две различных топологических фазы — топологический и тривиальный изолятор. В унитарном классе A в $d = 2$ $\nu \in \mathbb{Z}$, причем ν имеет смысл Холловской проводимости. Для класса DIII в трехмерье $\nu \in \mathbb{Z}$, примером топологической фазы является ${}^3\text{He B}^{86,87}$. При $d = 3$ у класса A стоит 0 — $\nu \equiv 0$, существует только одна фаза (тривиальная). Рисунок из презентации С. Л. Кане.

работах.^{21,22} В дальнейшем мы будем преимущественно обсуждать топологические сверхпроводники — сверхпроводящие гибридные структуры, находящиеся в топологически нетривиальной фазе.

В случае одномерного топологического сверхпроводника краевыми модами оказываются так называемые Майорановские состояния. Майорановское состояние является самосопряженным (его операторы рождения и уничтожения совпадают) и имеет нулевую энергию. В конечном образце пара Майорановских состояний, расположенных на противоположных концах образца, гибридизуются и образует один Андреевский уровень с конечной энергией. Простой пример одномерного сверхпроводника — так называемая цепочка Китаева²³ — решеточная модель бесспинового p -волнового сверхпроводника. В определенной области значений параметров (химического потенциала, сверхпроводящего параметра

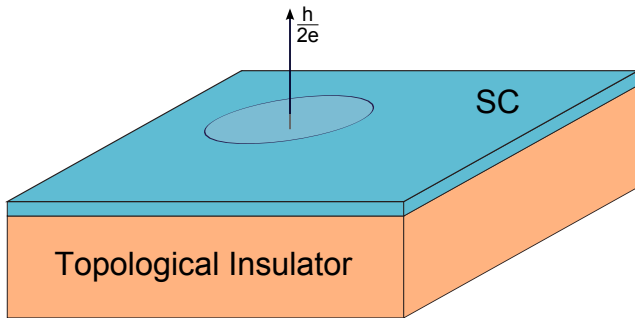


Рис. 3: Вихрь, пронизывающий трехмерный топологический изолятор, покрытый s -волновым сверхпроводником. В нормальном ядре вихря на поверхности топологического изолятора имеются связанные подщелевые состояния типа Кароли-де Жена-Матрикона с целыми моментами. Состояние с нулевым моментом является Майорановским.

порядка, амплитуды перескока) цепочка находится в топологической фазе и имеет по одному Майорановскому состоянию на каждом конце. Другой, более реалистичный вариант топологического сверхпроводника — нанопроволока со спин-орбитальным взаимодействием и наведенной s -волновой сверхпроводимостью, помещенная в сильное магнитное поле.^{24,25} В системах с нанопроволоками уже поставлены эксперименты, свидетельствующие в пользу наличия в них Майорановских состояний.^{26–29} Другая система, в которой предсказано появление Майорановского состояния, — это кор вихря на поверхности трехмерного топологического изолятора с наведенной s -волновой сверхпроводимостью.³⁰ В этой системе Майорановское состояние является состоянием типа Кароли-де Жена-Матрикона³¹ с нулевым моментом.

Интерес к Майорановским фермионам в физике конденсированного состояния вызван многими причинами. Уже сам по себе Майорановский фермион — весьма экзотическая квазичастица: энергия изолированного Майорановского состояния равна строго нулю, а размерность его гильбертова пространства $\sqrt{2}$ (система из $2N$ Майорановских фермионов описывается гильбертовым пространством размера 2^N). Кроме того, Майорановские фермионы имеют нетривиальную обменную статистику:^{32,33} обвод одного Майорановского фермиона вокруг другого не возвращает волновую функцию к исходному значению. Эти необычные свойства, кроме несомненной теоретической, имеют и прикладную ценность: из изолированных Майорановских состояний предлагается создавать кубиты²³ — за счет топологической защиты Майорановских состояний такие

кубиты должны быть устойчивы к дефазировке локальными возмущениями. Экспериментальные успехи²⁶⁻²⁸ служат дополнительным стимулом для исследований систем с Майорановскими фермионами.

Инертность Майорановского состояния, его устойчивость к возмущениям, например, электрическому и магнитному полю, примесям, привлекательна с точки зрения кубитостроения, но одновременно затрудняет его экспериментальное обнаружение. На данный момент основное внимание уделяется транспортным явлениям, связанным с Майорановским состоянием. Хотя Майорановский фермион не несет ни заряда, ни энергии, он, тем не менее, влияет на транспортные свойства системы. Так, Майорановское состояние должно быть видно при непосредственном измерении туннельной плотности состояний.^{26,34} Кроме того, Майорановские фермионы приводят к аномальному, 4π -периодическому Джозефсоновскому току.^{23,35,36} Настоящая работа посвящена Майорановским фермионам и их транспортным свойствам в сверхпроводящих гибридных системах и включает в себя три основных части:

1. Описание стационарного эффекта Джозефсона в SNS-контакте, содержащем пару Майорановских фермионов. Определение условий, в которых можно обнаружить аномальную, 4π -периодическую ток-фазовую характеристику такого SNS-контакта.
2. Построение теории туннельной проводимости системы с дискретным спектром Андреевских уровней и приложение этой теории к системам, содержащим локализованные Майорановские фермионы.
3. Изучение статистики электронных уровней в системе, содержащей уединенное Майорановское состояние, в условиях сильного беспорядка

В процессе решения перечисленных проблем получены следующие оригинальные результаты:

1. Рассмотрена SNS-система, представляющая собой сэндвич из покрытого с двух сторон сверхпроводящей пленкой куска трехмерного топологического изолятора, в котором просверлен цилиндрический канал, соединяющий

две поверхности. Через этот канал пропущен Абрикосовский вихрь, приводящий к появлению Майорановской моды в коре вихря на обеих поверхностях. При конечной разности фаз φ между поверхностями через канал протекает Джозефсоновский ток, содержащий наряду с 2π -периодической по φ частью еще и аномальную 4π -периодическую компоненту. Ток вычислен при разных параметрах системы и температуре. Установлена связь аномальной компоненты с сохранением фермионной четности в контакте, и получена характеристическая температура, при которой аномальный ток подавляется.

2. Рассмотрена в общем виде ситуация андреевского отражения электрона, туннелирующего в сверхпроводящую систему с дискретным спектром Андреевских состояний. Получены общие формулы для резонансного отражения при энергиях, близких к энергиям дискретного спектра системы. Исследована интерференция различных андреевских процессов и получена точная формула для одноканального контакта в терминах дискретных уровней системы. С помощью этой формулы рассмотрена система с парой почти неспаренных Майорановских мод. В этой ситуации в проводимости имеется Лорентцевский пик при нулевом напряжении высотой $2e^2/h$, на фоне которого имеется параметрически узкий, топологически защищенный провал до нуля на самых низких энергиях. В реалистичных системах этот провал не виден при достижимых температурах, что проясняет результаты некоторых недавних экспериментов и численных работ.
3. Рассмотрен кор вихря на сверхпроводящей поверхности топологического изолятора в пределе сильного беспорядка. С помощью метода нелинейной суперсимметричной σ -модели найдена средняя локальная плотность состояний. Показано, что эта система относится к нульмерному классу симметрии В (также известному как D-odd) и имеет δ -пик в плотности состояний при нулевой энергии, описывающий Майорановское состояние, и отталкивающий ближайшие уровни с конечной энергией. Вычислено уширение пика в ситуации, когда к поверхности топологического изолятора в области кора вихря подключен туннельного контакт, и получена проводимость в

туннельном эксперименте для такой системы.

Настоящая диссертация организована следующим образом: В **главе 1** представлен используемый в работе формализм и описаны ключевые свойства Майорановских фермионов. В **главе 2** изучается стационарный Джозефсоновский ток в SNS-системе с вихрем. В **главе 3** рассматривается туннельный контактанс системы с дискретным Андреевским спектром. В **главе 4** изучается статистика уровней в коре вихря, содержащем Майорановскую моду. В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

Глава 1

Формализм и Майорановские операторы

1.1 Гамильтониан Боголюбова-де Жена

Для описания сверхпроводимости в интересующих нас системах мы будем пользоваться гамильтонианом Боголюбова де Жена

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \hat{\Delta}(\mathbf{r}) \\ \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{r}) & -\mathcal{T}\hat{H}_0\mathcal{T}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

действующим в пространстве Намбу. Матрицы Паули в этом пространстве мы будем обозначать τ_i . Оператор \mathcal{T} есть оператор обращения времени $\mathcal{T} = i\sigma_y\hat{C}$, где \hat{C} – комплексное сопряжение. Мы будем пользоваться базисом

$$\hat{\Psi} = \left(\hat{\psi}_\uparrow \quad \hat{\psi}_\downarrow \quad \hat{\psi}_\downarrow^\dagger \quad -\hat{\psi}_\uparrow^\dagger \right)^T \quad (1.2)$$

В главах 1 и 3 мы будем рассматривать наведенную s -волновую сверхпроводимость, при которой $\hat{\Delta}$ и $\hat{\Delta}^\dagger$ тривиальны в спиновом пространстве. Гамильтониан H_{BdG} по построению обладает электрон-дырочной симметрией (также называемой симметрией зарядового сопряжения¹⁷):

$$\Xi H_{BdG} = -H_{BdG}\Xi, \quad (1.3)$$

$$\Xi = -i\tau_y\mathcal{T} = \sigma_y\tau_y\hat{C}. \quad (1.4)$$

Поскольку $\Xi^2 = 1$ и Ξ антикоммутирует с H_{BdG} , собственные состояния системы разбиваются на пары из состояний Ψ_E и $\Psi_{-E} = \Xi\Psi_E$, обладающих противоположными энергиями. Оператор Ξ на языке электронных операторов $\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}$ есть эрмитово сопряжение, поэтому решения Ψ_E и $\Xi\Psi_E$ описывают уничтожение и

рождение одной и той же фермионной квазичастицы с положительной энергией $|E|$. Двойной учет – следствие удвоения переменных, возникающего при введении пространства Намбу. Существенно, что кроме пар $\psi_E, \Xi\psi_E$ гамильтониан может иметь самосопряженные собственные функции, $\gamma = \Xi\gamma$. Именно эти решения называются Майорановскими модами. Оператор рождения и уничтожения для такой моды совпадают, поэтому его общий вид

$$\hat{\gamma} = \int f(\mathbf{r})_{\alpha} \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + h.c. \quad (1.5)$$

Мы будем использовать часто использовать словосочетания "Майорановское состояние" и "Майорановский фермион" в одном и том же значении — для обозначения состояния, описываемого Майорановским оператором $\hat{\gamma}$. Отметим, что некоторые авторы называют γ Майорановской модой, а Андреевское состояние, образованное парой таких мод – Майорановским состоянием.

1.2 Топологическая защита уединенной Майорановской моды

Рассмотрим систему, спектр которой имеет щель (континуум начинается с ненулевой энергии) и некоторое количество дискретных состояний внутри щели. Если среди этих состояний есть единственное Майорановское состояние γ , то оно защищено от возмущений: при плавном изменении гамильтониана в системе в любой момент будет существовать нулевая мода. В самом деле, дискретные уровни разбиты на пары с противоположными энергиями и некоторое число N_0 Майорановских мод. Если в процессе изменений системы щель в спектре не закрывается, то число N_0 сохраняет четность, поскольку нулевые моды должны уходить и появляться парами, чтобы не нарушать симметрию уровней с ненулевой энергией. Таким образом, если в системе с щелью есть единственная Майорановская мода, можно утверждать, что она не исчезнет, если включать различные возмущения, например, примесный беспорядок, магнитное поле и т.п., если только в процессе не будет закрыта щель. Если же щель закроется, четность N_0 может измениться, и это будет означать, что произошел топологический фазовый переход.

1.3 Майорановский базис

От операторов $\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_i^\dagger$ (i может обозначать координату, импульс и т.п.) можно перейти к операторам²³

$$\hat{\gamma}_{2i-1} = \frac{\hat{\psi}_i + \hat{\psi}_i^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (1.6)$$

$$\hat{\gamma}_{2i} = \frac{\hat{\psi}_i - \hat{\psi}_i^\dagger}{i\sqrt{2}} \quad (1.7)$$

Новые операторы Майорановские, и гамильтониан в их базисе имеет вид

$$\hat{H} = i \sum A_{lm} \hat{\gamma}_l \hat{\gamma}_m, \quad (1.8)$$

где A_{lm} – вещественная антисимметричная матрица. Рассмотренному в предыдущем пункте случаю единственной Майорановской моды соответствует матрица A и базис нечетного размера. Отсюда $\det A = \det(A^T) = \det(-A) = -\det A = 0$, что доказывает присутствие нулевой моды. Однако в реальной конечной системе Майорановский базис всегда четного размера (поскольку каждый электронный уровень эквивалентен двум Майорановским операторам), поэтому общее количество Майорановских мод четно. Например, в одномерном примере Китаева есть две Майорановские моды, локализованные на двух концах образца. Существенно то, что перекрытие этих мод экспоненциально мало по параметру длины образца, и именно это понимается под топологической защищенностью – только связь одной Майорановской моды с другой способна сдвинуть их от нулевой энергии. При этом гибридованная пара двух Майорановских мод – это Андреевский уровень, который отличается от других Андреевских уровней двумя свойствами: во-первых, его энергия очень мала, во-вторых, его в.ф. сильно нелокальна и "живет" сразу на двух концах.

Глава 2

Аномальный ток Джозефсона в SNS-контакте на топологическом изоляторе

2.1 Введение

С момента предсказания связанных майорановских состояний в твердотельных системах было предложено несколько способов их экспериментального обнаружения. Одно из ярких явлений, вызываемых Майорановскими состояниями — аномальная 4π -периодическая зависимость джозефсоновского тока от разности фаз φ в SNS-контакте. Китаевым было показано,²³ что в SNS-структуре, имеющей по одному Майорановскому состоянию на каждом NS-контакте, фермионная четность основного состояния системы меняется при адиабатическом изменении разности фаз φ на 2π . Таким образом, если в цепочке сохраняется фермионная четность, ее поведение должно быть 4π -периодичным.

В данной главе изучается SNS-система, построенная на поверхности трехмерного топологического изолятора с наведенной сверхпроводимостью. Именно, рассматривается пластина из трехмерного топологического изолятора, обе стороны которой покрыты тонкой пленкой s -волнового сверхпроводника. В пластине, вместе с пленками, просверлено цилиндрическое отверстие радиуса R , см. Рис. (2.1) В отверстии расположен Абрикосовский вихрь с потоком $\Phi_0 = hc/2e$. Вдали от отверстия сверхпроводящие поверхности замыкаются, образуя SNS-контур, в котором роль нормальной области играет отверстие:

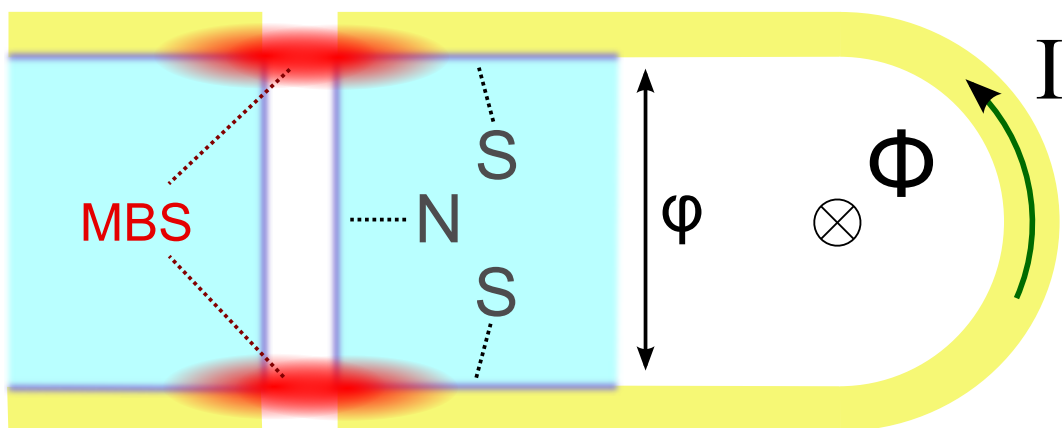


Рис. 2.1: Изучаемая система (вид в сечении вдоль линии вихря). Толстая пластина топологического изолятора (бирюзовая область) покрыта с двух сторон сверхпроводящей пленкой (желтая область). В пластине вместе с пленками просверлено отверстие, через которое пропущен вихрь. В коре этого вихря на каждой поверхности имеется майорановский фермион (подсвечены красным). Поверхности пластины сверхпроводящие за счет эффекта близости, в то время как поверхность топологического изолятора внутри отверстия – металлическая. Разность сверхпроводящих фаз φ между поверхностями регулируется потоком Φ , проходящий через SNS-контур, состоящий из сверхпроводящих поверхностей и металлической поверхности в отверстии. Изучается стационарный Джозефсоновский ток I в этой системе.

цилиндрическая поверхность отверстия (в дальнейшем мы будем называть ее просто "трубкой") является металлической. Ниже мы показываем, что в этой системе действительно возникают Майорановские фермионы и вычисляем аномальную, 4π -периодическую компоненту $I_a(\varphi)$ сверхтока, текущего по трубке. Похожая система рассматривалась в работе³⁷ в терминах инварианта Хопфа и его связи с фермионной четностью. Отметим, что в нашей системе инвариант Хопфа не может быть определен, поскольку не на всей поверхности топологического изолятора имеется щель в спектре.

2.2 4π -периодичная зависимость от фазы и фермионная четность

Как было показано в пункте 1.3, в Майорановском базисе гамильтониан оказывается антисимметричной матрицей четного размера iA_{lm} . Для такой матрицы определен Пфаффиан $\text{Pf } H$ — полином элементов H , квадрат которого равен $\det H$. Существование Пфаффиана защищает двукратно вырожденные нули

спектра H от расщепления при адиабатических возмущениях. Действительно, рассмотрим зависящий от параметра гамильтониан $H(\varphi)$, имеющий двукратный нуль при $\varphi = \varphi_0$. Тогда вблизи φ_0 мы будем иметь $\det H \propto (\varphi - \varphi_0)^2$ и, следовательно, $\text{Pf } H \propto (\varphi - \varphi_0)$. При слабом возмущении $\text{Pf } H(\varphi)$ по-прежнему будет менять знак в окрестности φ_0 из соображений непрерывности. Таким образом, двукратный нуль $H(\varphi)$ может менять свое положение на оси φ , но не может исчезнуть, расщепившись. Заметим, что здесь нет противоречия с классическими результатами для обычной сверхпроводящей квантовой точки,³⁸ спектр которой $E_{\pm} = \pm\Delta\sqrt{1 - T \sin^2(\varphi/2)}$, так что сколь угодно малая вероятность рассеяния $r = 1 - T$ ведет к расщеплению нулевых уровней при $\varphi = \pi$. Дело в том, что классическая квантовая точка (и ее спектр) вырождена по спину, так что нуль в спектре четырехкратный, а $\text{Pf } H \propto (\varphi - \varphi_0)^2$, так что нуль не защищен от возмущений.

Знак $\text{Pf } H$ меняется одновременно с фермионной четностью основного состояния H .^{23,37} В самом деле, собственные состояния гамильтониана $|e\rangle$ и $|o\rangle$, вырождающиеся когда $E_{e,o} = 0$ при $\varphi = \varphi_0$, имеют фермионные числа, отличающиеся на единицу. Когда фаза φ проходит через φ_0 , основное и первое возбужденное состояние меняются ролями. Если фермионная четность системы сохраняется (что мы и будем иметь в виду в этой главе), мы можем утверждать следующее: при каждом пересечении нуля парой уровней система переходит из основного состояния в возбужденное, или наоборот. Следовательно, если количество нулей в интервале $(0, 2\pi)$ нечетно, то после адиабатического изменения φ на 2π система не возвращается в исходное состояние.

Рассмотрим сначала систему с Рис. 1 в отсутствие отверстия, то есть систему с двумя корами вихря, расположенными в двух поверхностях пластины топологического изолятора. В каждом из коров имеется одна Майорановская мода.³⁰ За счет конечной толщины пластины изолятора между ними имеется слабое туннелирование, приводящее к зависящему от φ расщеплению. Записав в общем виде $\gamma_{\alpha} = e^{i\varphi_{\alpha}/2}\chi_{\alpha} + e^{-i\varphi_{\alpha}/2}\chi_{\alpha}^{\dagger}$, где $\alpha = 1, 2$ обозначает две поверхности, и включив произвольный туннельный электронный гамильтониан, получим, что расщепление Майорановских мод описывается $H = it\gamma_1\gamma_2 \sin((\varphi - \varphi_0)/2)$, где

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность фаз. Из соображений симметрии следует, что $\varphi_0 = \pi$, так что разница в энергии между $|e\rangle$ и $|o\rangle$ есть

$$E(\varphi) = \cos(\varphi/2) \cdot \text{const}, \quad (2.1)$$

что соответствует классическому ответу.³⁸ $E(\varphi)$ меняет знак единожды на отрезке $(0, 2\pi)$, и этим обеспечивает 4π -периодическую адиабатическую динамику энергии и тока. Однако, константа в формуле (2.1) экспоненциально мала, поскольку описывает амплитуду туннелирования электронов через диэлектрическую пластину. Именно поэтому в пластине предлагается проделать металлическое отверстие, которое позволит измерить гораздо больший аномальный Джозефсоновский ток. Дискретная величина $\text{sign Pf } H(\varphi) \text{sign Pf } H(\varphi + 2\pi) = \pm 1$ остается постоянной при непрерывном изменении системы, поэтому энергия и ток системы останутся 4π -периодическими при открытии отверстия в топологическом изоляторе. Отметим, что эффект Джозефсона с 4π -периодической ток-фазовой характеристикой называют дробным,^{35,36} поскольку такая периодичность соответствует переносу тока отдельными электронами, а не только куперовскими парами. Остаток данной главы посвящен изучению стационарного Джозефсоновского тока в режиме, когда

$$p_f R \gg 1 \quad (2.2)$$

$$L \ll \xi_0, \xi_{sc} \quad (2.3)$$

$$R \lesssim \xi_{sc} \ll \xi_0 \quad (2.4)$$

Первое условие означает, что трубка поддерживает много металлических мод, а второе – что мы находимся в режиме короткого SNS-контакта: трубка короче длины когерентности $\xi_0 = v_f/\Delta$, а также грязной длины когерентности в сверхпроводящей пленке. Третье условие означает, что из сверхпроводящей пленки вырезана значительная часть нормального кора вихря. Поверхности топологического изолятора в данной главе считаются чистыми.

2.3 Спектр системы

В простейшем случае электроны на поверхности топологического изолятора, например Bi_2Se_3 или Bi_2Te_3 , описываются гамильтонианом $H_{TI} = v_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} - E_f$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – оператор спина, а E_f – энергия Ферми поверхностных электронов. Ниже мы рассматриваем квазиклассический предел $\Delta \ll E_f$. В присутствии сверхпроводящей пленки поверхность топологического изолятора описывается гамильтонианом (1.1):³⁰

$$H = (v(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) - E_f)\tau_z + \Delta(r)(\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) \quad (2.5)$$

Здесь сверхпроводящая фаза совпадает с полярным углом θ (начало системы координат совпадает с центром вихря). Мы предполагаем, что сверхпроводящее покрытие является достаточно тонкой пленкой, так что магнитная длина гораздо больше длины когерентности ξ , и вектор-потенциалом можно пренебречь. Переменные θ и r разделяются:

$$\Psi = e^{i(\nu - \sigma_z/2 - \tau_z/2)\theta} \begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

уравнения на радиальные волновые функции u и v гласят

$$\begin{pmatrix} H_{\nu-1/2} - \epsilon & \Delta(r) \\ \Delta(r) & -H_{\nu+1/2} - \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (2.7)$$

где за H_m обозначено $v(\sigma_x(-i\partial_r - i/2r) + \sigma_y m/r) - E_f$. Уравнения (2.7) решаются в пределе $\epsilon \ll \Delta$ ³⁹ и в первом порядке дают:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-i\phi} w_{\nu-1/2}^{(1)} - i c_2 e^{i\phi} w_{\nu-1/2}^{(2)} \\ -i c_1 e^{i\phi} w_{\nu+1/2}^{(1)} + c_2 e^{-i\phi} w_{\nu+1/2}^{(2)} \end{pmatrix} e^{-K}. \quad (2.8)$$

Входящие сюда величины ϕ , K , w являются функциями координат и определяются так:

$$K(r) = \int_0^r \Delta(\rho) d\rho \quad (2.9)$$

$$\phi(r, \epsilon) = e^{2K(r)} \int_r^\infty \left(\epsilon + \frac{\nu \Delta(\rho)}{p_f \rho} \right) e^{-2K(\rho)} d\rho \quad (2.10)$$

$$w_m^{(1,2)}(r) = e^{\pm im/2} \begin{pmatrix} H_{m-1/2}^{(1,2)}(p_f r) \\ i H_{m+1/2}^{(1,2)}(p_f r) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $H_m^{(1,2)}$ – функции Ганкеля первого и второго рода, соответственно. Отметим, что при $\nu = 0, \epsilon = 0$ решение (2.8) становится точным.⁴² Благодаря множителю e^{-K} Майорановская мода локализована на длине порядка ξ_0 .

Прежде, чем перейти к рассмотрению трубки, рассмотрим сначала поверхность без нее. В этом случае спектр низших уровней в коре вихря приобретает вид $E_\nu = \nu \omega_0$ с целым ν – аналогичный ответ получается в вихре в p -волновом двумерном сверхпроводнике,³² а также в вихре в сверхтекучем ${}^3\text{He}$.^{39,40} Электроны на поверхности графена также описываются Дираковским гамильтонианом,⁴¹ поэтому и для них спектр такой же.⁴² Ключевым отличием топологического изолятора является невырожденность спектра. Во всех остальных системах имеется вырождение по спину (а в графене еще и по долине). Это означает, что во всех этих системах будут пары Майорановских состояний с одинаковой пространственной волновой функцией, но разным спином. Такие состояния неустойчивы к возмущениям – нарушение симметрии по спину немедленно приведет к их расщеплению. Интерес же представляет пространственно уединенное Майорановское состояние – только оно обладает топологической защитой. На языке топологических фаз система с дополнительной симметрией (например, по отношению к вращению спина) представляет собой две копии системы с некоторым индексом ν_1 каждая. Топологический индекс полной системы в этом случае оказывается четным, $\nu_2 = 2\nu_1$. А поскольку в одномерной системе класса симметрии D (отсутствие любых симметрий, кроме Ξ -симметрии) $\nu \in \mathbb{Z}_2$,^{16,17} то система с четным индексом оказывается топологически тривиальной.

Вернемся к вычислению спектра, наш следующий шаг — описание электронных мод внутри трубки. Гамильтониан для цилиндрической поверхности топологического изолятора имеет вид⁴³

$$H_c = \left(\sigma_z p_z + \sigma_\theta p_\theta + \frac{i}{2R} \sigma_r \right), \quad (2.12)$$

где $\sigma_\theta = -\sigma_x \sin \theta + \sigma_y \cos \theta$, а $\sigma_r = \sigma_x \cos \theta + \sigma_y \sin \theta$. Собственные функции (2.12) имеют вид

$$\psi = e^{ipz} e^{i\theta\mu} e^{-i\sigma_z\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ i \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где $\alpha = \arctan \frac{\mu}{Rp}$. Спектр, отсчитанный от E_f есть $\epsilon_{\mu,\mathbf{p}} = \sqrt{p^2 + \frac{\mu^2}{R^2}}$. Состояния обладают полуцелым моментом $\mu = \frac{1}{2} + n$. Это связано с тем, что спин Дираковского электрона коллинеарен его импульсу. При обороте электрона вокруг трубки спин совершает полный оборот, за счет чего волновая функция меняет знак. Эта фаза Берри π компенсируется полуцелостью момента μ . Мы пренебрегаем магнитным потоком $\Phi_R \ll \Phi_0$ внутри трубки. Заметим, что наличие проводящих мод достигается за счет большого радиуса трубки, $p_f R \gg 1$. В обратном, ультраквантовом пределе $p_f R \leq 1$ незатухающая мода возникает только при потоке $\Phi_R = \Phi_0$.⁴⁴

Имея выражения для волновых функций на поверхностях и в трубке (2.8,2.13), мы должны сшить их на краях трубки. Уравнение сшивки волновых функций на ребре топологического изолятора гласит

$$\Psi_1 = \exp \left[-i \frac{\theta}{2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\theta) \right] \Psi_2 \quad (2.14)$$

Здесь \mathbf{n}_θ — единичный вектор в направлении ребра, а θ угол поворота, равный в нашем случае $\frac{\pi}{2}$. $\Psi_{1,2}$ — четырехкомпонентные волновые функции по разные стороны ребра. Оператор в правой части равенства (2.14) поворачивает спин на угол θ вокруг направления \mathbf{n}_θ . Детальный вывод граничного условия (2.14), а также описание сшивки волновых функций и вывод спектра помещены в приложение А. Спектр состояний с энергией $\epsilon(\varphi) \ll \Delta$ оказывается следующим (с

точностью до поправок порядка $\sim \delta\varepsilon \sim \nu\Delta/(p_f R)^2$:

$$\epsilon_{\nu k}(\varphi) = \pm\varepsilon_0(\varphi - \pi - 2\pi k) - \varepsilon_1 \left[\arcsin \frac{\nu}{p_f R} + \frac{\nu L}{2p_f R^2} \left(1 - \frac{\nu^2}{(p_f R)^2} \right)^{-1/2} \right] \quad (2.15)$$

где $\varepsilon_1 \approx \Delta$, а $\varepsilon_0 \approx \Delta/2$ в рассматриваемом нами случае $\xi_{sc} \ll \xi_0$, угловой момент $|\nu| < p_f R$, а k – целое число. При $\nu > p_f R$ мода в трубке становится затухающей, так что состояния из коров вихрей с разных поверхностей с такими ν слабо расщепляются. Их энергии задаются формулой $\epsilon_\nu = \nu \frac{\Delta}{p_f \xi_0} \log \frac{\xi_0}{\xi_{sc}}$ с точностью до экспоненциально малых поправок, зависящих от φ . Результат (2.15) неприменим в области $|\nu - p_f R| \sim (p_f R)^{1/3}$, где происходит переход от сильно гибридных состояний к слабо гибридным.

2.4 Джозефсоновский ток

Сверхток через короткий SNS-контакт выражается через спектр Андреевских уровней, локализованных в этом контакте³⁸

$$I(\varphi) = -\frac{2e}{\hbar} \sum_{j:\epsilon_j>0} \tanh\left(\frac{\epsilon_j}{2T}\right) \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \varphi}. \quad (2.16)$$

Ток пропорционален числу каналов в трубке $I \sim \frac{e\Delta}{\hbar}(p_f R)$, и термодинамически учитывает все возможные состояния контакта, вне зависимости от их фермионной четности. Чтобы учесть эффекты четности, формулу нужно переписать для системы с сохраняющейся фермионной четностью. Для этого введем два термодинамических потенциала $\Omega_{odd/even}$, описывающие ансамбли с нечетным/четным числом квазичастиц.⁴⁵ Представляя полный ток $I(\varphi)$ в виде суммы $I_n(\varphi) + I_a(\varphi)$, где $I_n(\varphi)$ не зависит от четности, мы получаем

$$I_a = (-1)^{F_0} \frac{e}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Omega_{odd} - \Omega_{even}), \quad (2.17)$$

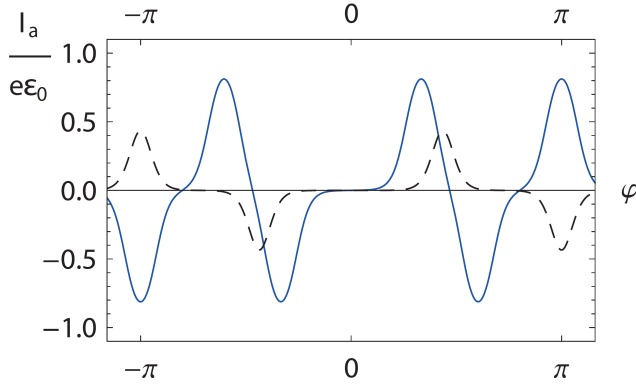


Рис. 2.2: Аномальный ток $I_a(\varphi)$, вычисленный при $p_f R = 2$ (пунктирная линия) и $p_f R = 3$ (синяя линия). Остальные параметры имеют значения $p_f \xi = 10$, $p_f \xi_{sc} = 5$, $p_f L = 6$, $T = 0.05\Delta$. Экстремумы функции $I_a(\varphi)$ расположены в тех точках, где пара сопряженных уровней пересекается в $\epsilon = 0$.

где F_0 – четность основного состояния системы (см. приложение А). В терминах дискретного спектра системы формула (2.17) переписывается как

$$I_a(\varphi) = (-1)^{F_0} \frac{2ef}{\hbar(1-f^2)} \sum_j \frac{1}{\sinh \frac{\epsilon_j}{T}} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \varphi}, \quad (2.18)$$

$$f = \prod_j \tanh \frac{\epsilon_j}{2T} = f_{hyb} \cdot f_{non}, \quad (2.19)$$

где все суммирования и произведения берутся по положительным собственным энергиям ϵ_j . Множители f_{hyb} и f_{non} соответствуют гибридизованной (и несущей ток) и негибридизованной части спектра. Величина I_a представляет собой разность между током в четном и нечетном состоянии системы при конечной температуре. Нормальный ток $I_n \sim \frac{2e\Delta}{\hbar}(p_f R)$ является 2π -периодичным и, в отличие от 4π -периодического тока I_a , при $T = 0$ пропорционален числу проводящих каналов в нормальной области SNS-системы.

Уравнения (2.15,2.18) составляют основной аналитический результат данной главы. Два примера зависимости $I_a(\varphi)$, вычисленной с помощью формул (2.15,2.18) представлены на Рис. 2.2. $I_a(\varphi)$ испытывает $\approx 2p_f R$ осцилляций в интервале $(-\pi, +\pi)$ и имеет разные знаки при $\varphi = \pm\pi$, где амплитуда $I_a(\varphi)$ максимальна. Учет поправок к формуле (2.15) может привести к деформации $I_a(\varphi)$, и к неравномерному сдвигу осцилляций на величины порядка $\delta\varphi \sim (p_f R)^{-1}$. Однако эти поправки не должны повлиять на амплитуды максимумов I_a^{\max} аномального тока. Температурная зависимость I_a^{\max} представлена на Рис. 2.3.

Для выяснения температурной зависимости $I_a(\varphi)$ рассмотрим формулу (2.18) в нескольких предельных случаях. При T много больше типичного

межуровневого расстояния $\varepsilon_1/p_f R$ мы имеем $f_{hyb} \sim e^{-\pi^2 T p_f R/4\varepsilon_1}$ (см. приложение А). Если кроме того $T \gg E_0 \equiv \Delta \frac{R}{\xi_0} \ln \frac{\xi_0}{\xi_{sc}}$, то и f_{non} будет малым: $f_{non} = e^{-\pi^2 T/2\delta}$, где $\delta = (\Delta/p_f \xi_0) \ln \frac{\xi_0}{\xi_{sc}}$ — межуровневое расстояние в отдельном коре вихря. Таким образом, I_a экспоненциально затухает с температурой при $T > T_1 = \min(\frac{\Delta}{p_f R}, \frac{\Delta R}{\xi_0} \ln \frac{\xi_0}{\xi_{sc}})$.

При более низких температурах $T \ll T_1$ мы получаем $f_{hyb} = \tanh(\varepsilon_1/2T)$, где $\varepsilon_1(\varphi)$ — энергия наинизшего гибридного уровня, так что

$$I_a(\varphi) \simeq \frac{e}{\hbar} \frac{\varepsilon_0 \cdot f_{non}}{\cosh^2 \frac{\varepsilon_1}{2T} - f_{non}^2 \sinh^2 \frac{\varepsilon_1}{2T}} \quad (2.20)$$

с $f_{non} = \exp\left[-\frac{4e^{-E_0/T}}{1-e^{-\delta/T}}\right]$. Несложный анализ уравнения (2.20) позволяет определить вторую характеристическую температуру $T_2 = E_0/\ln(p_f \xi_0)$, выше которой ток I_a экспоненциально мал. В зависимости от параметров T_2 может быть как меньше, так и больше T_1 . Отметим, что помимо состояний на поверхности топологического изолятора, существуют также состояния Кароли-де Жена-Матрикона в сверхпроводящих пленках, которые могли бы понизить характеристическую температуру системы. Однако, ввиду $R \lesssim \xi_{sc}$, заметная часть кора, содержащая нижнюю часть спектра, вырезана, так что энергии спектров пленках начинаются с величины $\lesssim \Delta$ и ими можно пренебречь на фоне уровней негибридного спектра на поверхности топологического изолятора. Наконец, имеется характеристическая температура обычного сверхпроводящего эффекта четности $T_3 = \Delta/\ln(\nu V \Delta)$,⁴⁵ при которой число надщелевых квазичастиц становится заметным. В итоге, для обнаружения аномальной компоненты тока I_a температура должна быть ниже всех трех температур подавления

$$T \leq \min\left(\frac{\Delta}{p_f R}, \frac{2\Delta R \ln(\xi_0/\xi_{sc})}{\xi_0 \ln(p_f \xi_0)}, \frac{\Delta}{\ln(\nu V \Delta)}\right) \quad (2.21)$$

Температурная зависимость аномального тока изображена на Рис.2.3 для случая $T_2 < T_1 < T_3$.

2.5 Заключение

Мы изучили SNS-систему, изображенную на Рис. 2.1, и показали, что в ней существует пара Майорановских состояний, приводящая к появлению 4π -

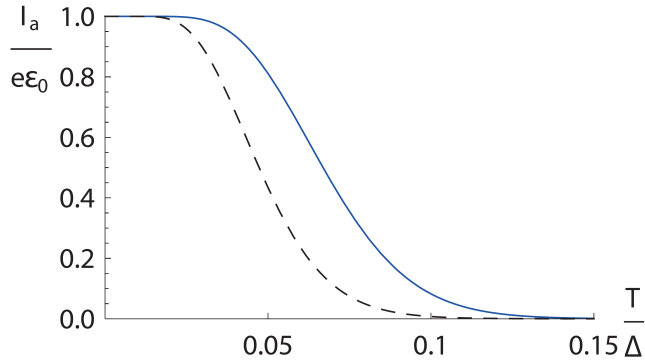


Рис. 2.3: Температурная зависимость компоненты $I_a(\varphi = \pi)$ при тех же значениях параметров, что и на Рис.2.2. Синяя и пунктирная кривые соответствуют $p_f R = 3$ и $p_f R = 2$.

периодической компоненты сверхтока $I_a(\varphi)$, сосуществующая с основной, 2π -периодической частью. В режиме, когда в трубке имеется много проводящих каналов, был рассчитан спектр системы, и с его помощью $I_a(\varphi)$. Была найдена температурная зависимость аномального тока, учитывающая сохранение фермионной четности в контакте, и выяснены условия на температуру и параметры системы, при которых аномальный ток возможно обнаружить экспериментально.

Глава 3

Туннельный кондактанс системы с дискретным спектром Андреевских состояний

3.1 Введение

Сканирующий туннельный микроскоп — эффективный инструмент исследования электронных свойств поверхностей материалов. Электроны с острия микроскопа туннелируют в систему, формируя стационарный ток при фиксированном напряжении. При низких температурах кондактанс G туннельного контакта пропорционален плотности электронных состояний ρ на поверхности под острием микроскопа, а также вероятности туннелирования через потенциальный барьер, существующий между острием и образцом.

$$G(V) \propto |t^2| \rho(r, eV). \quad (3.1)$$

Это соотношение позволяет измерять локальную плотность состояний с энергетическим и пространственным разрешением. Соотношение выполняется, если спектр электронных состояний можно считать непрерывным, а именно, когда межуровневое расстояние в образце много меньше неупругого уширения уровней. В этой главе рассматриваются различные ситуации, в которых это условие нарушено, так что дискретность уровней необходимо учитывать.

В недавних работах^{24,25,34,36,46–56} транспортные измерения предлагались в качестве способа обнаружить Майорановский фермион в сверхпроводящих

структурах с нетривиальными топологическими свойствами, такими как нанопроволоки с сильным спин-орбитальным взаимодействием, наведенной сверхпроводимостью и магнитным полем,^{24,25,56} или кор вихря на поверхности топологического изолятора с наведенной s -волновой сверхпроводимостью.^{30,47,51,57} Существует два основных транспортных эффекта, связываемых с Майорановскими фермионами. Первый – 4π -периодическая ток-фазовая зависимость Джозефсоновского тока, рассмотренная в предыдущей главе. Следствием такой зависимости является нестационарный эффект – удвоение ступенек Шапиро,⁵² которому посвящен недавний эксперимент.²⁹ Второй, и более простой транспортный эффект, – пик проводимости на нулевом напряжении. Такой пик был измерен в системах с нанопроволоками,²⁶⁻²⁸ причем пик, как и предсказывалось, устойчив к изменению параметров системы, например, внешнего магнитного поля и затворных напряжений. В условиях перечисленных экспериментов было локализовано отдельное Майорановское состояние, и пик в проводимости предсказывался в качестве непосредственного следствия пика в плотности состояния, в соответствии с квазиклассической формулой (3.1). Для кора вихря также предлагалось провести прямые измерения туннельным микроскопом^{51,57} и предсказывался аналогичный пик в кондактансе.

Идея обнаружения связанного Майорановского состояния с помощью туннельного транспортного измерения привела нас к вопросу о перевыводе классического соотношения (3.1) для ситуации с Майорановским состоянием, а также к общей ситуации дискретного спектра Андреевских связанных состояний. В настоящей главе изучается кондактанс туннельного контакта, связывающего нормальный металл со сверхпроводящей системой, в которой имеется дискретный спектр подщелевых уровней E_j . Естественно ожидать, что зависимость $G(V)$ должна отражать спектр измеряемой сверхпроводящей системы и иметь пики при напряжениях, близких к E_j/e . В то же время, очевидно, что квазиклассическая формула (3.1) не работает для нашей системы, хотя бы потому, что плотность состояний под щелью есть набор δ -пикув, в то время как проводимость ограничена числом каналов туннельного контакта. Вообще, выражение (3.1) получается непосредственно из золотого правила Ферми,⁵⁸ описывающе-

го утеkanie электронов в непрерывный спектр измеряемой системы. В нашей сверхпроводящей системе все состояния под щелью локализованы, и электроны не могут в них утекать в стационарном режиме. Единственный процесс, формирующий стационарный ток в нашей системе, это Андреевское отражение,⁵⁹ при котором электроны при отражении от NS-контакта превращаются в дырки. При этом дискретные Андреевские уровни внутри сверхпроводящей системы играют роль квазистационарных состояний: налетающий электрон занимает энергетически близкий уровень в сверхпроводнике, и затем испускается обратно в металл в качестве электрона или дырки. При напряжениях, близких к E_{j_0} такой процесс имеет резонанс и не может быть описан пертурбативно по отношению к туннельной амплитуде. Наша цель – описать такие резонансы для туннельного контакта общего вида.

Другое явление, проистекающее из дискретности спектра, это интерференция процессов Андреевского отражения, проходящих через разные квазистационарные уровни. В простой формуле (3.1) интерференции нет и проводимость прямо пропорциональна числу доступных состояний на измеряемой поверхности. Андреевское отражение — процесс второго порядка: электрон туннелирует в систему, а затем обратно. При одном и том же конечном отраженном состоянии есть много возможных промежуточных состояний — весь спектр E_j . Амплитуды процессов, проходящих через разные промежуточные состояния, следует складывать, поэтому роль интерференции может быть существенной. Интерференция сильнее для контактов с малым числом каналов, особенно для одноканального контакта. Самая интересная ситуация в этом отношении при низких напряжениях, когда симметрия спектра (1.3) становится важной и определяет интерференцию между сопряженными уровнями $\pm E_j$.

Ниже мы сперва формально определяем изучаемую систему и развиваем используемый формализм. Записывается формула Ландауэра для сверхпроводников, формула Кубо для Андреевского отражения, и выражения для точных функций Грина в терминах \check{T} -матрицы и туннельного гамильтониана. Затем решается задача о резонансе на отдельном уровне E_{j_0} . Выводится общая формула, описывающая пик в кондактансе, рассматриваются частные случаи Май-

орановского уровня, точечного контакта и конечных температур. Затем изучается одноканальный контакт и выводится точная формула, учитывающая сразу весь спектр E_j . С ее помощью мы изучаем интерференцию и выводим квантование проводимости при нулевом напряжении в зависимости от ее топологической тривиальности/нетривиальности. Мы рассматриваем также систему с парой слабо спаренных Майорановских фермионов. Мы находим, что в такой системе имеется пик проводимости при нулевом напряжении, на фоне которого имеется очень узкий провал до нуля при $V = 0$, свидетельствующий о топологической тривиальности системы. Мы обсуждаем экспериментальные условия, в которых подобную картину с пиком и провалом можно обнаружить и показываем, что условия на температуру становятся более сильными с увеличением проницаемости туннельного контакта. В конце настоящей главы мы обсуждаем некоторые экспериментальные системы, в которых межуровневое расстояние Андреевского спектра достаточно велико, чтобы разрешать отдельные уровни.

3.2 Система и формализм

Изучаемая нами система состоит из металлического острья, описываемого гамильтонианом H_M , сверхпроводящей системы H_S и туннельного гамильтониана H_T , позволяющего электронам туннелировать с острья в сверхпроводник и обратно.

$$H = H_M + H_T + H_S. \quad (3.2)$$

Мы будем рассматривать напряжения и температуры много меньше сверхпроводящей щели и учитываем только дискретные уровни сверхпроводящей системы

$$H_S = \sum_j E_j |j\rangle \langle j| \quad (3.3)$$

Электронный туннельный гамильтониан, описывающий контакт, в общем виде записывается как

$$H_T = \sum_{m,s} |\theta_m\rangle t_{ms} \langle \sigma_s| + h.c. \quad (3.4)$$

где $|\theta_m\rangle, |\sigma_s\rangle$ – некоторые волновые функции в острие и сверхпроводнике, соответственно. В формализме Боголюбова-де Жена H_T приобретает структуру в пространстве Намбу

$$\check{H}_T = \begin{pmatrix} H_T & 0 \\ 0 & -\hat{\mathcal{T}}H_T\hat{\mathcal{T}}^{-1} \end{pmatrix} = \sum_{m,s} |\theta_m\rangle t_{ms} \langle \sigma_s| - |\theta_m^*\rangle t_{ms}^* \langle \sigma_s^*| + h.c. \quad (3.5)$$

где за $|\theta_m^*\rangle$ обозначен электрон-дырочно сопряженный партнер состояния $|\theta_m\rangle$, то есть $|\theta_m^*\rangle = \check{\Xi}|\theta_m\rangle$. В данной главе галка, как в \check{H} , означает структуру в пространстве Намбу.

При подщелевых энергиях $E < \Delta$ электроны, налетающие из острия, отражаются обратно либо в виде электронов, либо в виде дырок. Второй вариант есть Андреевское отражение и формирует стационарный ток через NS-контакт. Этот ток можно написать в формализме Ландауэра. Формула, дающая постоянный сверхток (мы выводим ее из общей формулы Лесовика-Левитова⁶⁰ в приложении к сверхпроводящей системе)

$$I = \frac{2e}{h} \int_0^\infty T_A(E) [f_0(E - eV) - f_0(E + eV)] dE \quad (3.6)$$

Отметим, что множитель $2e$ есть квант заряда в процессе Андреевского отражения и не связан со спином. $f_0(E)$ есть равновесная функция распределения Ферми, а $T_A(E)$ – вероятность Андреевского отражения, просуммированная по всем каналам:

$$T_A(E) = \text{tr} (S_{eh}(E)^\dagger S_{eh}(E)), \quad (3.7)$$

где $S_{eh}(E)$ – электрон-дырочный блок S -матрицы, описывающей наш NS-контакт. Используя соотношения $T_A(E) = T_A(-E)$ и $f_0(E) + f_0(-E) = 1$ формулу (3.6) можно переписать в виде, напоминающем формулу для проводимости обычного NN-контакта:

$$I = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^\infty T_A(E) [f_0(E - eV) - f_0(E)] dE \quad (3.8)$$

$$G = \frac{dI}{dV} = \frac{2e^2}{h} \int_{-\infty}^\infty \frac{T_A(E)}{4T \cosh^2\left(\frac{E - eV}{2T}\right)} dE \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) совпадает с формулой Блондера-Тинкхама-Клапвайка в отсутствие прохождения квазичастиц в сверхпроводник.⁶¹ В нижеследующем тексте мы в основном изучаем проводимость при нуле температур $G(eV) = T_A(E = eV) \cdot 2e^2/h$, которая есть просто вероятность Андреевского отражения, просуммированная по всем каналам (3.7), помноженная на соответствующий квант проводимости $2e^2/h$. Проводимость при $T > 0$ получается из результата при $T = 0$ простой сверткой (3.9). Определение (3.7) можно записать в виде формулы Кубо

$$T_A = \text{tr} \left(\left(\begin{pmatrix} \hat{v} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \check{G}_E^A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{v}^* \end{pmatrix} \check{G}_E^R \right) \right) \quad (3.10)$$

Здесь \hat{v} обозначает скорость электронов (диагональная матрица в пространстве каналов, состоящая из групповых скоростей в разных каналах), а $\hat{v}^* = \hat{\mathcal{T}}\hat{v}\hat{\mathcal{T}}^{-1}$ — обращенный по времени оператор, описывающий скорости дырок. В формуле (3.10) явно выписана структура в пространстве Намбу, а $\check{G}_E^{A,R}$ — точные опережающие и запаздывающие функции Грина на энергии E . Точные функции Грина в металле выражаются через невозмущенные функции Грина $\check{G}_0 = [E + i0 - \check{H}_M]^{-1}$ и $\check{G}_S = [E + i0 - \check{H}_S]^{-1}$ (здесь и далее функции Грина без верхнего индекса считаются запаздывающими), и \check{T} -матрицу описывающую Андреевское отражение. Как обычно в формализме \check{T} -матрицы в теории рассеяния, выражение для \check{T} -матрицы содержит формальное суммирование по процессам рассеяния во всех порядках теории возмущений по H_T :

$$\check{G} = \check{G}_0 + \check{T}\check{G}_0 \quad (3.11)$$

$$\check{T} = \frac{\check{G}_0\check{H}_T\check{G}_S\check{H}_T}{1 - \check{G}_0\check{H}_T\check{G}_S\check{H}_T} \quad (3.12)$$

Здесь функции Грина действуют в пространстве Намбу

$$\check{G}_0 = \begin{pmatrix} E + i0 - H_M & 0 \\ 0 & E + i0 + H_M^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g_E & 0 \\ 0 & -g_{-E}^* \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Мы используем обозначение g для нормальных металлических функций Грина, не имеющих структуры Намбу и $g^* = \hat{\mathcal{T}}g\hat{\mathcal{T}}^{-1}$ для обращенного по времени

оператора. Сверхпроводящая функция Грина равна

$$\check{G}_S = \sum_{j>0} \left[\frac{|j\rangle\langle j|}{E + i0 - E_j} + \frac{|j^*\rangle\langle j^*|}{E + i0 + E_j} \right] \quad (3.14)$$

В сумме явно использована симметрия спектра: каждый уровень с положительной энергией $|j\rangle$ имеет партнера $|j^*\rangle$ с противоположной энергией. Функция G_S имеют полюса $E = \pm E_j$ и при энергиях, близких к этим полюсам, \check{T} -матрицу нельзя вычислять пертурбативно. Следует просуммировать всю геометрическую прогрессию, составляющую разложение (3.12) по степеням H_T . Такое суммирование удается произвести в нескольких важных частных случаях.

3.3 Одноуровневый резонанс для произвольного туннельного контакта

\check{T} -матрицу, а, следовательно, и вероятность T_A можно найти явно в компактном виде в резонансной ситуации $|E - E_{j_0}| \ll |E - E_{j \neq j_0}|$, когда энергия налетающего электрона много ближе к уровню E_{j_0} , чем к любому другому уровню E_j . Сохраняя только член $(E - E_{j_0})^{-1}$ в функции Грина \check{G}_S в этом случае, мы получаем

$$\check{G}_0 \check{H}_T \check{G}_S \check{H}_T = \frac{\check{G}_0 |\tau\rangle\langle \tau|}{E - E_{j_0} + i0} \quad \text{с} \quad |\tau\rangle = \check{H}_T |j_0\rangle. \quad (3.15)$$

$|\tau\rangle$ является функцией координат в металле, вид которой определяется гамильтонианом контакта H_T и свойствами резонансного уровня $|j_0\rangle$. Эта функция имеет как электронную, так и дырочную компоненту, которые мы обозначаем $|\tau_e\rangle$ и $|\tau_h\rangle$ для последующего использования. Оператор $\check{G}_0 |\tau\rangle\langle \tau|$ является проективным оператором (с точностью до скалярного множителя), поскольку $(\check{G}_0 |\tau\rangle\langle \tau|)^2 = \langle \tau | \check{G}_0 | \tau \rangle \cdot \check{G}_0 |\tau\rangle\langle \tau|$. Это свойство позволяет найти \check{T} -матрицу точно:

$$\check{T} = \frac{\check{G}_0 |\tau\rangle\langle \tau|}{E - E_{j_0} + i0 - \langle \tau | \check{G}_0 | \tau \rangle} \quad (3.16)$$

Матричный элемент $\langle \tau | \check{G}_0 | \tau \rangle$ при помощи уравнения (3.13) переписывается

в импульсном пространстве как

$$\langle \tau | \check{G}_0 | \tau \rangle = \int \left(\frac{|\tau_{e\mathbf{p}}|^2}{E + i0 - \xi_{\mathbf{p}}} + \frac{|\tau_{h\mathbf{p}}|^2}{E + i0 + \xi_{\mathbf{p}}} \right) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (3.17)$$

где $\tau_{e(h)\mathbf{p}}$ – Фурье-образ электронной (дырочной) компоненты τ . Вычисляя интеграл в уравнении (3.17) в квазиклассическом приближении (предполагая постоянную плотность состояний ν в острие микроскопа) мы находим, что интеграл определяется вкладом полюса и равен мнимому числу $\langle \tau | \check{G}_0 | \tau \rangle = iW$, с действительным W .

Подставляя выражение для \check{T} -матрицы (3.16) в уравнение (3.11) и используя затем формулу Кубо (3.10), мы получаем

$$G = \frac{2e^2}{h} T_A = \frac{2e^2}{h} \frac{\langle \tau_e | g_E^A \hat{v} g_E^R | \tau_e \rangle \langle \tau_h | g_{-E}^{R*} \hat{v}^* g_{-E}^{A*} | \tau_h \rangle}{(E - E_{j_0})^2 + W^2} \quad (3.18)$$

$$W = \pi(n_e + n_h), \quad \text{где} \quad \begin{cases} n_e = \langle \tau_e | \frac{g_E^R - g_E^A}{2\pi i} | \tau_e \rangle \\ n_h = \langle \tau_h^* | \frac{g_{-E}^R - g_{-E}^A}{2\pi i} | \tau_h^* \rangle \end{cases} \quad (3.19)$$

(здесь $|\tau_h^*\rangle = \hat{T}|\tau_h\rangle$ есть просто обращенная по времени волновая функция) В случае чистого металлического острия (и в предположении, что энергия Ферми E_f – самый большой энергетический масштаб) члены с gvg могут быть упрощены и выражены через $n_{e,h}$. Вычисление проще всего для одноканального провода, и обобщается на любое число каналов. В одноканальном случае квазиклассическая функция Грина равна

$$g^R(x, x') = v^{-1} \begin{cases} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, & x > x' \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}, & x < x' \end{cases} \quad (3.20)$$

(напомним, что провод полубесконечный: $x, x' < 0$). Подставляя это выражение, а также $g^A = g^{R\dagger}$ и $\hat{v} = \text{diag}\{v, -v\}$ в произведение $g^A \hat{v} g^R$, мы получаем $g^A \hat{v} g^R = -i(g^R - g^A)$. Это позволяет переписать кондактанс как

$$G(eV) = \frac{2e^2}{h} \frac{1}{1 + \frac{(eV - E_{j_0})^2}{W^2}} T_A^* \quad (3.21)$$

$$T_A^* = \frac{4n_e n_h}{(n_e + n_h)^2}. \quad (3.22)$$

Общая формула (3.21) – наш главный результат для случая одноуровневого резонанса, и далее мы обсудим её подробнее. Зависимость функции (3.21) от напряжения имеет формулу Лорентцовского пика, что естественно: вблизи резонанса S -матрица определяется своим полюсом в $E = E_{j_0} + iW$. Ширина W описывает уширение Андреевского уровня с энергией E_{j_0} за счет контакта с металлом. $T_A^* \leq 1$ – вероятность Андреевского отражения для резонансного электрона, налетающего с энергией $E = E_{j_0}$ (точнее, это вероятность для электрона, налетающего в определенном канале; в резонансном приближении матрица $S_{eh}^\dagger S_{eh}$ имеет только один ненулевой элемент, который расположен на диагонали и равен T_A^*). Эта вероятность определяется соотношением между электронной и дырочной компонентами в.ф. $|j_0\rangle$, а также геометрией контакта. Если бы $|j_0\rangle$ было чистым электронным состоянием, мы бы получили $T_A^* \sim n_h = 0$, так что уровень $|j_0\rangle$ не приводил бы к Андреевскому отражению. Для состояний глубоко под щелью ($E_0 \ll \Delta$) электронная и дырочная компоненты похожи друг на друга (например, для однородного $\Delta(\mathbf{r})$ они связаны между собой поворотом фазы) поэтому мы ожидаем $T_A^* \sim 1$. Однако, Андреевское отражение может быть подавлено в местах, где Δ локально мало, $\Delta(r) \leq E_0$, например, в центре кора вихря, или в середине SNS-контакта. В таких местах электронная и дырочная компонента могут сильно отличаться, приводя к малому T_A^* . Присутствие множителя T_A^* как такового в (3.21) представляет собой важное отличие от классической формулы (3.1): вероятность Андреевского отражения зависит от электрон-дырочной структуры волновой функции, а не просто от полной плотности вероятности. Отметим, что дробь (3.22) имеет ту же структуру, что и выражение для проводимости через квантовую точку, подключенную к двум проводам — в нашем случае роль двух проводов играют электронный и дырочный канал контакта, как было впервые объяснено в работе.³⁴ Квазистационарное состояние $|j_0\rangle$ туннелирует в электронный и дырочный каналы со скоростями, пропорциональными n_e и n_h , соответственно. Схожая с (3.21) резонансная проводимость возникает в туннельных измерениях необычных сверхпроводников из-за подщелевых поверхностных состояний.^{62–64}

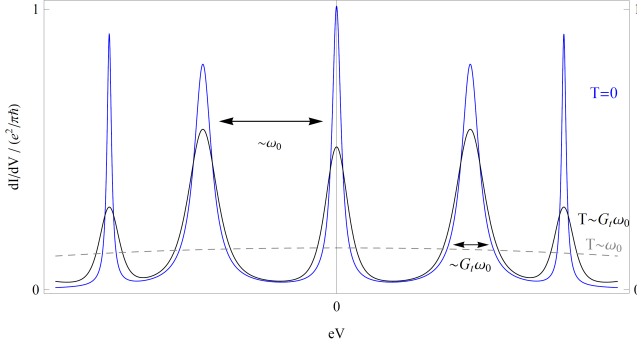


Рис. 3.1: Схематическое изображение туннельной проводимости, как функции напряжения, для произвольной системы. Каждый уровень производит резонансный пик высоты $\leq 2e^2/h$, а Майорановский пик в нуле – пик высотой ровно $2e^2/h$. При конечных температурах пики дополнительно уширяются.

3.3.1 Майорановский пик

Важный частный случай резонанса, описываемого формулой (3.21), — это резонанс на Майорановском состоянии. В этом случае $|j_0\rangle$ самосопряжен, так что $|\tau_e\rangle = |\tau_h^*\rangle$. Поэтому $n_e = n_h$ и $T_A^* = 1$,

$$G = \frac{2e^2}{h} \frac{1}{1 + \frac{(eV)^2}{W^2}} \quad (3.23)$$

Заметим, что соотношение $|\tau_e\rangle = |\tau_h^*\rangle$ также приводит к тому, что действительная часть (3.17) при $E = 0$ равняется нулю. Результат (3.23) согласуется с более ранними вычислениями пика проводимости, обусловленного присутствием Майорановского состояния.^{34, 46} Ширина пика W , как и в общем случае (3.21), по-прежнему зависит от геометрии контакта и волновой функции, зато высота пика теперь зафиксирована на $2e^2/h$ благодаря симметрии Майорановского состояния. Учет других дискретных уровней в общем случае ведет к отрицательной поправке к проводимости порядка $O(W^2/\omega_0^2)$, где ω_0 — характерное межуровневое расстояние Андреевского спектра (3.3).

3.3.2 Точечный контакт

Частный случай, прямо относящийся к эксперименту с туннельным микроскопом – случай точечного контакта $H_T = |\theta_\uparrow\rangle t_0 \langle \sigma_\uparrow| + |\theta_\downarrow\rangle t_0 \langle \sigma_\downarrow| + h.c.$ где волновые функции $|\theta_{\uparrow\downarrow}\rangle$ и $|\sigma_{\uparrow\downarrow}\rangle$ локализованы вблизи некоторых точек r_M и r_S в металле и сверхпроводнике, соответственно. Для простоты мы предполагаем здесь, что H_T коммутирует со спином, то есть $|\theta_\uparrow\rangle$ и $|\theta_\downarrow\rangle$ имеют одинаковую координатную

волновую функцию, и то же самое для волновых функций $|\sigma\rangle_{\uparrow\downarrow}$, однако наш результат легко обобщается на случай произвольной спиновой структуры.

$$T_A^* = 4 \frac{|\psi_e^2| |\psi_h^2|}{(|\psi_e^2| + |\psi_h^2|)^2}, \quad (3.24)$$

$$W = \pi |t_0|^2 \nu_M |\psi|^2. \quad (3.25)$$

Здесь ν_M — плотность состояний в острие на одну проекцию спина, $|\psi_{e(h)}^2| = |\psi_{e(h)\uparrow}^2| + |\psi_{e(h)\downarrow}^2|$ обозначает плотность вероятности электронной (дырочной) компоненты резонансного уровня в точке \mathbf{r}_S . Формула (3.21) может быть переписана для точечного контакта в виде

$$G(eV) = 4\pi^2 |t_0|^2 \frac{e^2}{h} \nu_M \tilde{\nu} T_A^*, \quad (3.26)$$

что по форме совпадает со стандартным выражением для нормальной проводимости, помноженным на резонансную вероятность T_A^* . Величина $\tilde{\nu}$ в уравнении (3.26) является уширенной плотностью состояний Андреевского уровня $|j_0\rangle$:

$$\tilde{\nu}(eV) = \frac{|\psi^2|}{2} \cdot \frac{1/(\pi W)}{1 + (eV - E_{j_0})^2/W^2} \quad (3.27)$$

3.3.3 Температурная зависимость

Имея выражение (3.21) для проводимости $G(T = 0, eV)$, мы легко получим проводимость при конечной температуре, свернув ее с температурной функцией распределения. Форма $G(T, V)$, как функции V начинает отличаться от $G(0, V)$, как только T становится порядка W . Пик уширяется с температурой, сохраняя при этом свой спектральный вес. При $\omega_0 \gg T \gg W$ (за ω_0 мы обозначаем межуровневое расстояние) пик имеет форму

$$G(eV) = \frac{2e^2}{h} T_A^* \frac{\pi W}{T \cosh^2\left(\frac{E_{j_0} - eV}{2T}\right)}, \quad W \ll T \ll \omega_0 \quad (3.28)$$

Сюда W входит в качестве спектрального веса исходного Лорентцовского пика (3.21), тогда как форма пика определяется одной только температурой. Если вместо выражения (3.21) в свертку (3.9) подставить выражение (3.26), окажется, что уширение δ -пигов величиной W значительно слабее теплового уширения

и поэтому выпадает из формулы. Для точечного контакта таким образом получается

$$G(eV) = T_A^* \frac{\pi^2 e^2}{2h} \frac{|t_0^2| \nu |\psi^2|}{T \cosh^2 \left(\frac{E_0 - eV}{2T} \right)}, \quad W \ll T \ll \omega_0. \quad (3.29)$$

3.4 Одноканальный контакт и многоуровневая система

Другой случай, который удается решить аналитически — система с одноканальным контактом. В этом случае для проводимости удается получить точную формулу, учитывающую сразу весь спектр Андреевских уровней, что позволяет изучить интерференционные эффекты, возникающие из вкладов разных уровней.

Произвольный одноканальный туннельный гамильтониан можно записать в виде $H_T = |\theta\rangle t \langle \sigma| + h.c.$ с действительным t и нормированными волновыми функциями $|\theta\rangle$ и $|\sigma\rangle$, определенными в металле и сверхпроводнике, соответственно. Отметим отличие от рассмотренного выше точечного контакта — сейчас мы рассматриваем контакт, в котором всего один электронный канал с определенным спином. Такой контакт возникает, если острие туннельного микроскопа сделано из ферромагнитного материала. Кроме того, фильтрация по спину происходит в системах с сильным спин-орбитальным взаимодействием и магнитным полем, например, в топологических сверхпроводниках на основе полупроводниковых нанопроволок.^{24–26} Кроме того, в этом параграфе мы не требуем, чтобы в.ф. $|\theta\rangle$ и $|\sigma\rangle$ были сильно локализованы, так что мы описываем не только точечные, но и любые другие одноканальные контакты. Чтобы подставить H_T в формулу (3.12), мы расширяем его в пространство Намбу:

$$\check{H}_T = |\theta\rangle t \langle \sigma| - |\theta^*\rangle t^* \langle \sigma^*| + h.c. \quad (3.30)$$

Таким образом, в формализме Боголюбова-де Жена \check{H}_T имеет вид двухканального контакта. Вычисление \check{T} -матрицы похоже на проделанное выше вычисление (3.16). Используя (3.30) и (3.14), мы пишем

$$\check{G}_0 \check{H}_T \check{G}_S \check{H}_T = \check{G}_0 \begin{pmatrix} |\theta\rangle & |\theta^*\rangle \end{pmatrix} N_0^{-1} \check{\Sigma} \begin{pmatrix} \langle \theta| \\ \langle \theta^*| \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

с матрицей $\check{\Sigma}$ размера 2×2

$$\check{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_e & \Sigma_A \\ \Sigma_A^* & \Sigma_h \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\Sigma_e = t^2 N_0 \sum_{j>0} \frac{|\langle \sigma | j \rangle|^2}{E - E_j} + \frac{|\langle \sigma | j^* \rangle|^2}{E + E_j}, \quad (3.33)$$

$$\Sigma_h = t^2 N_0 \sum_{j>0} \frac{|\langle \sigma | j^* \rangle|^2}{E - E_j} + \frac{|\langle \sigma | j \rangle|^2}{E + E_j}, \quad (3.34)$$

$$\Sigma_A = -t^2 N_0 \sum_{j>0} \frac{\langle \sigma | j \rangle \langle j | \sigma^* \rangle}{E - E_j} + \frac{\langle \sigma | j^* \rangle \langle j^* | \sigma^* \rangle}{E + E_j}. \quad (3.35)$$

Здесь $N_0 = \text{Im} \langle \theta | g_E^R | \theta \rangle$ – нормировочная константа (для точечного контакта $N_0 = \pi\nu$). Σ_A имеет простой физический смысл: $2\Sigma_A$ есть амплитуда Андреевского отражения (с точностью до фазового множителя) в низшем порядке по H_T . Схожим образом, $\Sigma_{e,h}$ описывают поправки к нормальному отражению электронов и дырок за счет включения H_T . Используя уравнение (3.31), мы дальше строим \check{T} -матрицу:

$$\check{T} = \check{G}_0 \begin{pmatrix} |\theta\rangle & |\theta^*\rangle \end{pmatrix} \frac{N_0^{-1} \check{\Sigma}}{1 - i\check{\Sigma}} \begin{pmatrix} \langle \theta | \\ \langle \theta^* | \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

где матрица 2×2 в (3.36) равна

$$\frac{\check{\Sigma}}{1 - i\check{\Sigma}} = \frac{\check{\Sigma} + \check{1}(|\Sigma_A^2| - \Sigma_e \Sigma_h)}{(1 - i\Sigma_e)(1 - i\Sigma_h) + |\Sigma_A^2|}. \quad (3.37)$$

Наконец, мы подставляем $\check{G} = \check{G}_0 + \check{T}\check{G}_0$ (и $\check{G}^A = \check{G}^{R\dagger}$) вместе с \check{T} -матрицей (3.36) в формулу Кубо (3.10). Только недиагональные в пространстве Намбу элементы $\check{G}^{R,A}$, и следовательно только недиагональные элементы (3.37) входят в искомый след, в результате получается

$$G(eV) = \frac{2e^2}{h} \frac{4|\Sigma_A^2|}{(1 - \Sigma_e \Sigma_h + |\Sigma_A^2|)^2 + (\Sigma_e + \Sigma_h)^2}. \quad (3.38)$$

Напряжение eV входит в эту формулу через $\check{\Sigma}$, в которой E положена равной eV . В резонансе, $|eV - E_{j_0}| \ll W$, формула (3.38) воспроизводит наш одноуровневый ответ (3.21) с $n_e = |\langle \sigma | j \rangle|^2 t^2 N_0 / \pi$ и $n_h = |\langle \sigma | j^* \rangle|^2 t^2 N_0 / \pi$. Вдали от резонансов $\check{\Sigma} \ll 1$ и ответ сводится к пертурбативному $G(eV) \simeq 2e^2/h \times 4|\Sigma_A|^2$

в главном порядке по H_T . Σ_A есть сумма амплитуд Андреевского отражения по разным уровням j , и при некоторых напряжениях несколько уровней дают сравнимые вклады в Σ^A , и эти вклады могут интерферировать. Интерференционные эффекты ярче всего проявляются при самых низких напряжениях и приводят квантованию проводимости $G(0)$ – она равняется либо 0, либо $2e^2/h$, как показано ниже.

3.4.1 Квантование проводимости при нулевом напряжении

Тот факт, что проводимость $G(0)$ в одноканальном NS-контакте квантуется, следует из общих симметричных соображений.^{65–67} S -матрица, описывающая NS-контакт, имеет электрон-дырочную симметрию, эквивалентную (1.3) и связывающую S_E^* с S_{-E} . Вместе с унитарностью это свойство приводит к квантованию детерминанта S -матрицы при нулевой энергии $\det S_0 = \pm 1$. Это свойство разбивает все S -матрицы на два не связанных класса: тривиальный ($\det S_0 = 1$) и нетривиальный ($\det S_0 = -1$). Нетривиальный случай реализуется в контактах топологический сверхпроводник-металл, в которых на NS-границе имеется локализованное майорановское состояние,^{25,54,66,68} (это состояние является хорошо определенным квазистационарным Андреевским состоянием, если в металле есть барьер вблизи NS-контакта, в противном случае майорановское состояние растекается по всему металлу). В одноканальном случае S -матрица имеет размер 2×2 , так что $G(0) = (1 - \det S_0)e^2/h$. Таким образом $G(0)$ равняется 0 ($2e^2/h$) в тривиальном (нетривиальном) случае.

Покажем теперь, что наше выражение (3.38) действительно квантуется при $E = 0$. Пусть сначала среди E_j нет нулевых уровней. Тогда $\Sigma_A = 0$, поскольку члены с $|j\rangle$ и $|j^*\rangle$ в (3.35) взаимно сокращаются при $E = 0$, и следовательно, $G(0) = 0$. Пусть теперь есть один Майорановский уровень j_0 . Тогда $|j_0\rangle = |j_0^*\rangle$ с $E_0 = 0$, что дает $\Sigma_e = \Sigma_h = e^{i\varphi}|\Sigma_A| \sim 1/E$ с некоторой фазой φ , так что в этом случае $G(0) = 2e^2/h$.

Два случая, разобранные выше (0 и 1 Майорановское состояние), описывают все возможные физические ситуации, поскольку большее, чем 1, число Майорановских мод расщепится. Тем не менее, для полноты математической картины,

разберем и случаи большего числа нулевых состояний. Начнем с предположения, что в системе есть состояние с $E_0 = 0$, но оно не Майорановское: $|j_0\rangle \neq |j_0^*\rangle$. Эта ситуация может быть переписана как пара неспаренных Майорановских фермионов, $|j_0\rangle = e^{i\varphi}(|\gamma_1\rangle + i|\gamma_2\rangle)$. В зависимости от выбора фазы φ , состояние $|j_0\rangle$ можно разложить в разные пары операторов γ_1, γ_2 . Если $|\langle\sigma|j_0\rangle| = |\langle\sigma|j_0^*\rangle|$, то выберем $e^{2i\varphi} = \langle\sigma|j_0\rangle/\langle\sigma|j_0^*\rangle$ и обнаружим, что γ_2 не затрагивается контактом, $\langle\sigma|\gamma_2\rangle = 0$. Значит, γ_2 вообще не входит в гамильтониан $H = H_T + H_M + H_S$, и мы возвращаемся к случаю одного фермиона γ_1 . Во втором случае, если $|\langle\sigma|j_0\rangle| \neq |\langle\sigma|j_0^*\rangle|$, то и γ_1 , и γ_2 входят H_T при любых φ . Майорановские состояния эффективно гибридизуются контактом и образуют Андреевский уровень с конечной энергией, что переводит наш NS-контакт в тривиальный режим без Майорановских мод. В самом деле, если $|\langle\sigma|j_0\rangle| \neq |\langle\sigma|j_0^*\rangle|$, то сингулярности вида $1/E^4$ в знаменателе дроби (3.38) не сокращаются, так что $G(0) = 0$, как и должно быть для тривиального контакта. Наконец, рассмотрим гипотетическую ситуацию многих нулевых уровней j_0, j'_0, \dots . Эта проблема сводится к проблеме двух Майорановских фермионов путем поворота базиса таким образом, чтобы только один фермионный уровень (одна пара Майорановских мод) входила в H_T , что всегда возможно для одноканального контакта.

Подчеркнем, что точное квантование $G(0)$ имеет место только в одноканальном контакте. Например, полное сокращение вкладов в отражение от $|j\rangle$ и $|j^*\rangle$ происходит только тогда, когда входящий канал электрона и выходящий канал дырки – один и тот же. Предположительно, следы деструктивной интерференции видны и для контакта с несколькими каналами, однако эти эффекты быстро спадают с числом каналов. Отметим, что проводимость в многоканальном случае изучалась в рамках теории случайных матриц в работе.⁶⁹

3.4.2 Проводимость при конечных V и интерференция

Описанное в предыдущем пункте квантование касается только точки $E = eV = 0$ и не содержит никакой информации о конечных энергиях. Наша формула (3.38) позволяет определить, насколько узка область квантования, то есть насколько близким к нулю должны быть напряжение и температура, чтобы

квантование можно было обнаружить. Обращение к формуле (3.38) при конечных E также разрешает парадокс, схожий с проблемой, описанной в работе.⁶⁷ Рассмотрим конечную систему, в которой есть пространственно изолированные Майорановские состояния, например,^{25,30} Система обязана быть топологически тривиальной, поскольку в ней четное количество Майорановских фермионов и между ними имеется ненулевое расщепление. Значит, $\det S_0 = 1$, а $G(0) = 0$. Начнем теперь увеличивать систему, так чтобы одно из Майорановских состояний пространственно ушло в бесконечность. Это состояние теперь не спарено с системой, и у нас в пределе осталась топологически нетривиальная система, в которой должно быть $G(0) = 2e^2/h$. В то же время из непрерывности S_0 следует, что мы остались в тривиальном классе S -матриц и $G(0)$ должно оставаться нулевым. Ниже мы объясняем, как оба утверждения выполняются одновременно – на низких энергиях имеется пик в $G(V)$, и в то же время $G(0) = 0$.

При самых низких напряжениях проводимость определяется низшей парой уровней $|j\rangle$ и $|j^*\rangle$, так что мы пренебрегаем остальными уровнями – они приводят лишь к малым относительным поправкам. Мы получаем

$$G(V) = \frac{2e^2}{h} \frac{1}{\left[\frac{e^2 V^2 - \tilde{E}_0^2}{2eVW}\right]^2 + 1} T_A^*, \quad (3.39)$$

где

$$\tilde{E}_0^2 = E_0^2 + (|t_1|^2 - |t_2|^2)^2, \quad (3.40)$$

$$W = |t_1|^2 + |t_2|^2, \quad (3.41)$$

$$T_A^* = \frac{4|t_1 t_2|^2}{(|t_1|^2 + |t_2|^2)^2}, \quad (3.42)$$

$$t_1 = t\sqrt{N_0}\langle\sigma|j\rangle, \quad t_2 = t\sqrt{N_0}\langle\sigma|j^*\rangle. \quad (3.43)$$

Сдвиг в резонансной энергии (3.40) пренебрежимо мал, поскольку он меньше E_0 в $\sim W/\omega_0$ раз (за исключением экзотического случая, упомянутого ранее, когда в образце есть два неспаренных Майорановских состояния, которые затем спариваются контактом; в этом случае \tilde{E}_0 является эффективным расщеплением Майорановских мод и не должно выбрасываться). Двухуровневая формула (3.39) согласуется с результатом, выведенным ранее другим способом

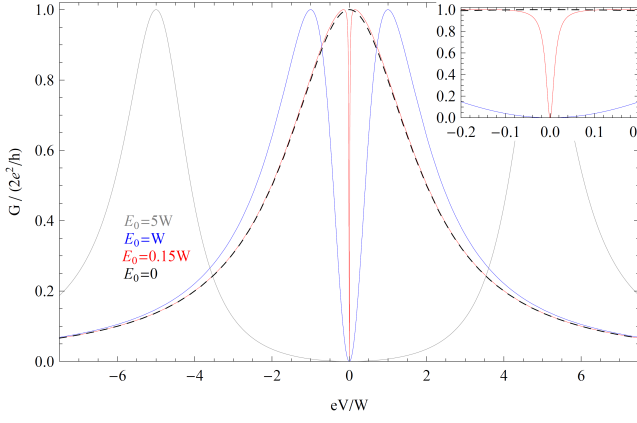


Рис. 3.2: Одноканальная проводимость при $T = 0$ для фиксированного W и различных значений E_0 . На врезке показаны кривые при самых низких E . T_A^* положено равным единицы на этом и последующих графиках.

для специального случая, когда H_T спаривает металлическое острие с единственным майорановским оператором.⁴⁶ Если $E_0 \gg W$ (серые кривые на Рис. 3.2,3.3), то кривая (3.39) имеет два отдельных Лорентцовских пика при $\pm E_0$ ширины W каждый. Если уменьшать E_0 , пики будут двигаться друг к другу, однако $G(0)$ будет оставаться нулем. При E_0 сравнимом с W (синие кривые на Рис. 3.2,3.3) форма кривой уже не похожа на два Лорентцовских пика. В области $|eV| < E_0$ проводимость подавлена деструктивной интерференцией, тогда как при $eV > |E_0|$ проводимость усилена: при $eV \gg E_0$ легко получить $G(eV) = 2e^2/h \cdot 4W^2/(eV)^2$, что вдвое превосходит простую сумму двух Лорентцовских пиков. Наконец, в пределе $E_0 \ll W$ (красные кривые на Рис. 3.2,3.3), виден один Лорентцовский пик двойной ширины $2W$ с параметрически узким провалом в области $E \lesssim E_0^2/W$, подавляющим $G(V)$ вплоть до нуля, достигаемого при $E = 0$. Хотя условие квантования $G(0) = 0$ и выполнено, оно касается лишь очень узкого диапазона энергией. Заметим напоследок, что при изменении E_0 ток $I(V \gg E_0, W) = \int_0^\infty G(V)dV$ (пропорциональный площади под кривыми на Рис. 3.2) остается неизменным, и равен $2e/h \cdot \pi W$. Поэтому при высоких температурах $T \gg E_0, W$ влияние интерференции на проводимость экспоненциально мало.

Проведенный выше анализ разрешает парадокс: область напряжений и температур, при которых тривиальность системы обнаружимы, очень узка, $eV, T \lesssim E_0$. Любопытно, что увеличение силы контакта W только усложняет обнаружение провала в $G(V)$ – при $W \gg E_0$ требуется разрешение по энергии порядка E_0^2/W (а не просто E_0), как видно из уравнения (3.39) и Рис. 3.2,3.3,3.4. Это явление можно объяснить с помощью понятия топологического фазового пере-

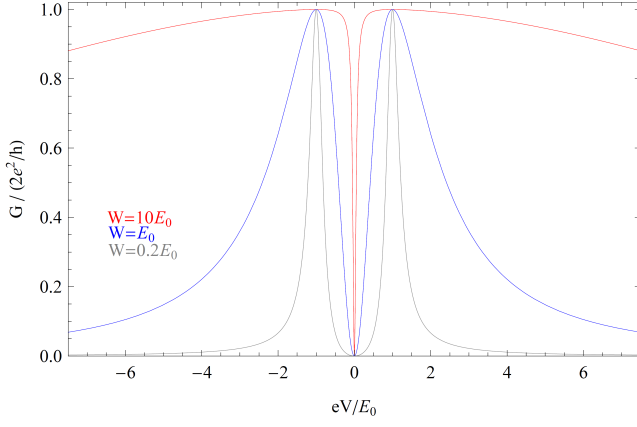


Рис. 3.3: Одноканальная проводимость при $T = 0$ для фиксированного E_0 и различных значений W .

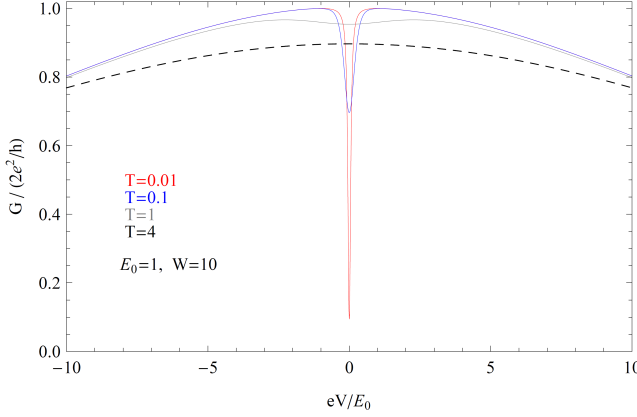


Рис. 3.4: Одноканальная проводимость при $E_0 = 1$ и $W = 10$ при различных температурах.

хода S -матриц, описанного Пикулиным и Назаровым.⁶⁷ Наша S -матрица имеет два полюса (которые также являются полюсами функции (3.39)), расположенных в $E_{\pm} = \pm\sqrt{E_0^2 - W^2} + iW$. Для слабого контакта (серая кривая на Рис. 3.3) эти полюса связаны электрон-дырочной симметрией, $E_+ = -E_-^*$ и представляют собой квазистационарный уровень с энергией E_+ и его образ с E_- . При увеличении W полюса движутся в направлении мнимой оси. При $W = E_0$ (синяя кривая на Рис. 3.3) полюса встречаются на мнимой оси и случается топологический фазовый переход в смысле.⁶⁷ При больших W один из полюсов движется вверх по мнимой оси, в другой – вниз, и каждый из них самосопряжен: $E_{\pm} = -E_{\pm}^*$. При очень больших W (красная кривая на Рис. 3.3) нижний полюс "закопан"⁶⁷ – он находится параметрически близко к вещественной оси, $E_- = iE_0^2/2W$, и очень слабо связан с микроскопом. То есть чем лучше, сильнее контакт, тем в большей мере наш NS-контакт обнаруживает топологические свойства (по крайней мере с транспортной точки зрения). Это важное наблюдение – в то время как квантование $G(0)$ происходит при любом W , контакт более сильный, чем расщепление Майорановских мод, сужает диапазон температур и напряжений, при котором можно обнаружить провал в напряжении (и

таким образом присутствие отдаленного, второго Майорановского фермиона), как видно из Рис. 3.4.

3.5 Обсуждение

Обсудим теперь реальные системы, к которым должны быть применимы полученные нами результаты. Естественным объектом приложения является кор Абрикосовского вихря в квази-двумерном сверхпроводнике. Необходимо, чтобы уровни Кароли-де Жена-Матрикона, доступные электронному микроскопу, не образовывали зону с дисперсией вдоль линии вихря. В чистом случае спектр описывается

$$E_{\mu,p_z} = \mu\omega_0 + \mu\frac{p_z^2}{2m^*} \quad (3.44)$$

с $\omega_0 \sim \frac{\Delta}{p_F\xi}$ и $m^* = m_z(p_{F\perp}\xi)^2$, где μ – угловой момент, ξ – длина когерентности, а m_z – эффективная масса вдоль направления z , которая в анизотропном сверхпроводнике гораздо больше, чем поперечная масса в плоскости x, y . Даже при небольшой плотности примесей состояния Кароли-де Жена-Матрикона в соседних атомарных плоскостях будут различаться на величину порядка ω_0 , в то время как ширина зоны каждого уровня порядка $\mu\omega_0 t/m_z$. Поэтому в сильно анизотропных материалах с $m_z \gg t$ отдельные низко-лежащие состояния Кароли-де Жена-Матрикона хорошо локализованы^{70,71} и туннелирование в эти материалы может проявить свойства, исследованные в этой главе. Однако, для разрешения дискретности спектр требуется работать при очень низкой температуре $T \leq \omega_0$. На настоящий момент достижение таких температур должно быть возможно для материалов типа NbSe₂, в то время как прежние измерения^{72,73} производились при слишком высоких температурах.

Другой вариант – использовать настоящие двумерные электронные системы, например графен или поверхность топологического изолятора. В этих материалах отсутствует поперечное движение и Андреевский спектр дискретен с межуровневым расстоянием ω_0 (в графене он четырехкратно вырожден за счет долиной и спиновой степеней свободы). Дополнительным преимуществом этих двумерных систем является легко контролируемая величина E_f . Точка элек-

тронеutralности в графене совпадает с K -точкой Дираковского спектра, что позволяет достичь значений ω_0 , сравнимых с E_f . Серьезным вопросом является обеспечение сверхпроводимости в этих материалах. Возможное решение – покрытие обычным сверхпроводником для наведения сверхпроводимости посредством эффекта близости.^{30,74–76} Однако, при этом придется обеспечить отсутствие паразитных Андреевских состояний в покрывающем сверхпроводнике. Этого можно достичь вырезанием в сверхпроводящем покрытии дыры радиуса порядка длины когерентности,^{51,57,77} тем самым удалив нормальный кор в сверхпроводнике вместе с низко-лежащими Андреевскими уровнями — такой подход рассматривается в следующей главе.

Наконец, заметим, что транспортное поведение, очень похожее на описываемое формулой (3.38), возникает в туннелировании сильно взаимодействующих одномерных электронов через вибрирующую квантовую точку, описанном в недавней работе.⁷⁸ Оказывается, что Латтинжеровская жидкость с $g = 1/2$ обеспечивает симметрию эффективного спектра квантовой точки, аналогичную сверхпроводящей симметрии, рассмотренной нами, что в свою очередь приводит к формуле для проводимости, совпадающей с нашей формулой (3.38) в частном случае эквидистантного спектра и одинакового отношения $\langle \sigma | j \rangle / \langle \sigma | j^* \rangle$ для всех уровней j . Последнее отношение для квантовой точки равняется асимметрии туннелирования из изначальной квантовой точки γ_L / γ_R , где $\gamma_{L,R}$ – амплитуды туннелирования электронов в точку из левой и правой половины провода, соответственно.

3.6 Заключение

Мы рассмотрели резонансное Андреевское отражение в произвольном туннельном NS-контакте между металлом и сверхпроводником, содержащем дискретный спектр Андреевских уровней E_j . Если межуровневое расстояние больше обратного времени туннелирования W , то проводимость при напряжениях ниже щели состоит из Лорентцовских пиков, расположенных на $eV = eE_j$. Мы получили формулы, описывающие эти пики в общем случае. Высоты пиков не зависят от силы контакта (при нулевой температуре) и, как правило, весьма

близки к $2e^2/h$, но не превышают этого значения, в то время как ширины пиков пропорциональны нормальной проводимости контакта. Мы также получили точную формулу, описывающую Андреевскую проводимость для произвольного одноканального контакта и учитывающую сразу все уровни дискретного спектра одновременно. Это формула раскрывает роль интерференции между Андреевскими процессами, проходящими через разные дискретные уровни E_j . При $eV = 0$ интерференция уровня E_j и его электрон-дырочного образа при $-E_j$ деструктивна, так что $G(0)$ равняется в точности $2e^2/h$ или 0 в зависимости от того, есть ли в спектре Майорановское состояние, в согласии с теорией S -матриц для топологических NS-контактов. Мы также изучили $G(V)$ для конечных энергий для разных значений W и энергии наинизшего уровня E_0 и объяснили, что происходит, когда система постепенно переводится из топологически тривиальной в топологически нетривиальную фазу. Такой переход осуществляется посредством удаления на бесконечность Майорановского состояния, при этом E_0 стремится к нулю. Мы нашли, что при $E_0 \ll W$ проводимость имеет вид Лорентцовского пика ширины $2W$, на фоне которого имеется очень узкий провал, обеспечивающий выполнение $G(0) = 0$. Параметрически малая ширина провала E_0^2/W означает "закапывание" удаляемого Майорановского состояния: сильное спаривание контакта с одним Майорановским фермионом эффективно уменьшает связь системы со вторым. Чтобы экспериментально обнаружить указанный провал (что эквивалентно обнаружению "закопанного" второго Майорановского состояния), температура и разрешение по энергии должны быть меньше E_0^2/W . Описанные в данной главе явления должны быть обнаружимы в двумерных электронных системах, например в графене или на поверхности трехмерного топологического изолятора в наведенной сверхпроводимостью. Другую возможность представляет изучение уровней в коре Абрикосовского вихря в слоистом сильно анизотропном сверхпроводнике типа NbSe_2 при сверхнизких температурах.

Глава 4

Майорановский фермион на поверхности неупорядоченного топологического изолятора

4.1 Введение

Общая классификация топологических изоляторов, развитая в работах,^{16,17} была приведена во введении в таблице на Рис. 2. В данной главе мы сосредоточимся на системе класса VD (часто, в том числе и в таблице на Рис. 2, обозначается просто за D). К этому классу относятся системы со сверхпроводящей симметрией (1.3), в которых нарушена и симметрия по отношению к вращению спина, и \mathcal{T} -симметрией. Топологически защищенная мода в данном случае есть локализованное Майорановское состояние. Именно к этому классу симметрии относится гамильтониан (1.1), если в нем нарушить все симметрии (кроме неотъемлемой симметрии (1.3)). В данной главе мы возвращаемся к идее вихря на поверхности трехмерного топологического изолятора с наведенной s -волновой сверхпроводимостью. Сама по себе поверхность топологического изолятора относится к симплектическому классу (AII), поскольку в ней соблюдается \mathcal{T} -симметрия, причем $\mathcal{T}^2 = -1$ (случай $\mathcal{T}^2 = 1$ соответствует унитарному классу (A)). При включении однородной сверхпроводимости система переходит в класс DIII, обладающий как \mathcal{T} -симметрией, так и сверхпроводящей симметрией с $\Xi^2 = 1$. Наконец, включение вихря нарушает \mathcal{T} -инвариантность, и система попадает в класс VD. Как было показано в главе 1, в чистом случае в коре

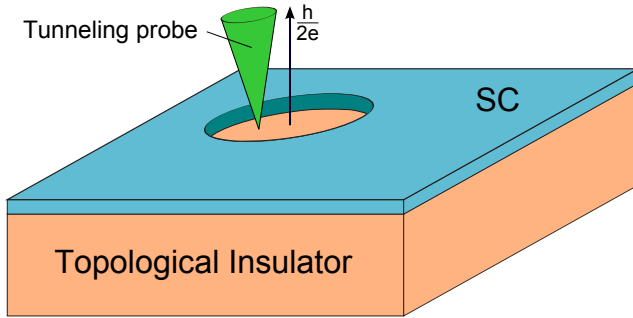


Рис. 4.1: Изучаемая система. Трехмерный топологический изолятор покрыт пленкой s -волнового сверхпроводника, в которой имеется отверстие радиуса R . Аналогично системе без дырки с Рис. 3, спектр низколежащих состояний содержит Майорановское состояние. Оно может быть измерено туннельным микроскопом, подведенным к поверхности топологического изолятора через отверстие.

вихря имеется одно единственное Майорановское состояние.

В данной главе изучается туннельная проводимость в системе, изображенной на Рис. 4.1, то есть эксперимент, рассмотренный в общем виде в главе 2, для конкретной сверхпроводящей гибридной системы. В отличие от модели, разобранный в главе 1, в настоящей главе в топологическом изоляторе нет цилиндрической полости, отверстие радиуса R проделано только в сверхпроводящей поверхности. Мы предполагаем, что отверстие в сверхпроводящей пленке относительно велико, $R \geq (l, \xi_0)$, где l — длина свободного пробега на поверхности топологического изолятора, а ξ_0 — длина когерентности в сверхпроводящей пленке. Условие $R \geq \xi_0$ позволяет гарантированно вырезать нижнюю часть спектра Кароли-де Жена-Матрикона из пленки.⁷⁷ От этих состояний полезно избавиться, поскольку на их фоне может быть трудно различить спектр поверхностных состояний топологического изолятора. Дополнительная польза отверстия в том, что, во-первых, она создает естественное место для появления вихря при включении магнитного поля, и, во-вторых, позволяет подвести туннельный микроскоп непосредственно к поверхности топологического изолятора. В чистом пределе система, изображенная на Рис. 4.1, обсуждалась в работе,⁵⁷ мы же сосредоточимся на грязном пределе.

Как мы знаем из главы 1, топологическая защита Майорановского состояния означает, что включение примесного беспорядка не сдвинет уровень с нулевой энергии. В то же время беспорядок влияет на волновую функцию майоранов-

ского состояния, а следовательно, и на локальную туннельную плотность состояний. Кроме того, уровень энергии при $E = 0$ влияет на статистику соседних по энергии, не защищенных топологически, Андреевских уровней. Задача данной главы – предсказать туннельную проводимость как функцию положения острия и энергии (напряжения) в так называемом грязном пределе $l \ll \xi_0$, а также изучить эффекты майорановского состояния в присутствии сильного беспорядка.

4.2 Суперсимметричная σ -модель

Гамильтониан вида (1.1) для решаемой задачи в полярных координатах r, φ имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} H_0 & \Delta(r)e^{i\varphi} \\ \Delta(r)e^{-i\varphi} & -H_0 \end{pmatrix}, \quad H_0 = v_0 \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} + V(\mathbf{r}) - \mu. \quad (4.1)$$

Здесь H_0 описывает поверхностные электроны в отсутствие сверхпроводящей пленки. Скорость Ферми обозначена за v_0 , а за \mathbf{s} в данной главе обозначен спин. $V(\mathbf{r})$ – случайный потенциал, описывающий беспорядок. Уровень Ферми сдвинут относительно Дираковской точки на μ . Как и в главе 1, мы пренебрегаем векторным потенциалом в H_0 ввиду слабости магнитного поля. Мы рассматриваем грязный предел $l \ll \xi = \sqrt{\hbar D / \Delta}$, где $D = v_0^2 \tau / 2$. Мы считаем $R \gg \xi$, что позволяет нам использовать ступенчатую зависимость параметра порядка:

$$\Delta(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \Delta, & r > R. \end{cases} \quad (4.2)$$

Внутри дырки (то есть при $r < R$) параметр порядка равен нулю и динамика электронов определяется H_0 . Этот гамильтониан обладает \mathcal{T} -симметрией симплектического типа $H_0 = s_y H_0^* s_y$, и потому принадлежит симплектическому классу симметрии АII. Близость к сверхпроводнику создает щель в электронном спектре снаружи дырки. Эта щель эффективно ограничивает движение низкоэнергетических возбуждений областью дырки и добавляет граничные условия к гамильтониану H_0 при $r = R$. Эти граничные условия нарушают

\mathcal{T} -инвариантность благодаря пространственно вращающейся фазе параметра порядка. В то же время полный гамильтониан приобретает вид (1.1) и сопутствующую симметрию (1.3). Именно симметрия (1.3), вкупе с нарушенной \mathcal{T} -инвариантностью определяет класс симметрии BD. На уровне случайных матриц, представляющих данный класс симметрии, существуют два различных подкласса с четным и нечетным числом собственных векторов, называемые D и B, соответственно (также их называют D-even и D-odd). Класс B представляет системы, в которых всегда есть одна Майорановская мода (строго говоря, любое нечетное число Майорановских мод, однако множество матриц с числом мод, большим единицы, имеет меру ноль).

Мы будем вычислять плотность состояний в дырке при помощи нелинейной суперсимметрической σ -модели.⁸⁰ Двумерные Дираковские фермионы с потенциальным беспорядком описываются весьма необычной моделью класса AII с \mathbb{Z}_2 -топологическим членом.⁴⁴ Этот топологический член является следствием киральной аномалии Дираковский фермионов.⁸¹ Мы будем пользоваться минимальной моделью, оперирующей с суперматрицей Q размера 8×8 . Помимо суперпространства Ферми-Бозе (FB), эта матрица действует в опережающе-запаздывающем пространстве (RA), а также специальном пространстве, имеющем отношение к обращению времени (TR), вводимом для одинакового учета куперонов и диффузонов. RA-пространство, как будет объяснено ниже, полностью аналогично пространству Намбу-Горькова; матрицы Паули в этом пространстве мы будем обозначать τ_i . Обозначение σ_i используется для матриц в TR-пространстве. Подробный вывод σ -модели изложен в приложении В.

В классе AII Q -матрица подчиняется нелинейному нормировочному уравнению $Q^2 = 1$ и линейному уравнению

$$Q = \bar{Q} \equiv C Q^T C^T, \quad C = \tau_x \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & i\sigma_y \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (4.3)$$

В результате Q содержит 8 коммутирующих и 8 антикоммутирующих (Грассмановых) переменных. Коммутирующие поля параметризуют диагональные фермион-фермионные (F) и бозон-бозонные (B) блоки матрицы Q . Матрица Q

общего вида может быть разложена в виде

$$Q = U^{-1} \begin{pmatrix} Q_F & 0 \\ 0 & Q_B \end{pmatrix} U, \quad (4.4)$$

где центральная часть содержит только коммутирующие поля, а Грассмановы поля определяют унитарную суперматрицу U . Мы будем пользоваться следующей параметризацией центральной части Q :

$$Q_F = [\tau_z \cos \theta_f + \sigma_z \sin \theta_f (\tau_x \cos \phi_f + \tau_y \sin \phi_f)] \\ \times [\sigma_z \cos k_f + \tau_z \sin k_f (\sigma_x \cos \chi_f + \sigma_y \sin \chi_f)], \quad (4.5)$$

$$Q_B = \tau_z \cos \theta_b [\sigma_z \cos k_b + \sin k_b (\sigma_x \cos \chi_b + \sigma_y \sin \chi_b)] \\ + \sin \theta_b (\tau_x \cos \phi_b + \tau_y \sin \phi_b). \quad (4.6)$$

Такое представление удовлетворяет всем условиям, накладываемым на Q симметрией класса АII исходного гамильтониана H_0 . Фермионный и бозонный сектора сигма-модели являются компактным и некомпактным, соответственно. Это достигается требованием, чтобы углы θ_b, k_b были чисто мнимыми, а все остальные углы параметризации (4.5), (4.6) – вещественными. Впоследствии окажется, что седловой точке действия соответствует вещественная θ_b . Это означает, что контур интегрирования по этому углу должен быть правильным образом сдвинут.

Сигма-модель класса АII предназначена для изучения транспортных свойств неупорядоченной системы. Поэтому Q -матрица имеет структуру в RA-пространстве, позволяющую усреднять произведения запаздывающей и опережающей функций Грина. Поскольку нас интересует просто плотность состояний, нам достаточно усреднить одну лишь запаздывающую функцию Грина. В то же время, сверхпроводящие граничные условия требуют удвоения полей, образующего пространство Намбу-Горькова. Это достигается в рамках стандартной модели класса АII с матрицей 8×8 , в которой роль пространства Намбу-Горькова играет пространство RA. Подробное обсуждение превращения RA-пространства в пространство Намбу-Горькова обсуждается в приложении В, а также в работе.⁸² Таким образом, мы можем непосредственно включить

сверхпроводящий параметр порядка в действие сигма-модели

$$S[Q] = \frac{\pi\nu}{8} \int d^2r \text{Str} \left[D(\nabla Q)^2 + 4(i\epsilon\Lambda - \hat{\Delta})Q \right] + S_\theta[Q],$$

$$\Lambda = \tau_z \sigma_z, \quad \hat{\Delta} = \Delta(r)(\tau_x \cos \varphi - \tau_y \sin \varphi). \quad (4.7)$$

Здесь $\epsilon = E + iG_t\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/4\pi\nu$ – сумма энергии и локального члена, описывающего слабый туннельный контакт с металлом, имеющий нормальную проводимость $G_t \ll 1$ (вывод см. в приложении В).

В действие (4.7) входит \mathbb{Z}_2 -топологический член $S_\theta[Q]$, возникающий из-за безмассовой Дираковской природы электронов, из которых строится система. Топологический член затрагивает только компактную часть многообразия сигма-модели, то есть его фермион-фермионный сектор \mathcal{M}_F . В общей версии сигма-модели, пригодной к усреднению произведения нескольких запаздывающих и опережающих функций Грина, гомотопическая группа есть $\pi_2(\mathcal{M}_F) = \mathbb{Z}_2$. Однако, в минимальной модели, которой мы пользуемся, \mathcal{M}_F имеет структуру произведения двух сфер $S^2 \times S^2$, как видно из уравнения (4.5). В этом случае гомотопическая группа богаче, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Можно ввести два топологических инварианта, подсчитывающих число покрытий двух сфер при отображении Q из реального пространства в \mathcal{M}_F . Это позволяет нам записать топологический член в явном, хотя и неинвариантном виде. В параметризации (4.5), он имеет вид:⁴⁴

$$S_\theta[Q] = \frac{i}{4} \int d^2r \left[\sin \theta_f (\nabla \theta_f \times \nabla \phi_f) + \sin k_f (\nabla k_f \times \nabla \chi_f) \right]. \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь минимум действия (4.7) для системы, изображенной на Рис. 4.1. Из цилиндрической симметрии мы сразу заключаем, что $\phi_{f,b} = \varphi$. Остальные параметры зависят только от радиальной координаты r . Углы θ в обоих секторах (F и B) подчиняются уравнению Узаделя

$$D \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{2r^2} \right] + 2iE \sin \theta \cos k + 2\Delta(r) \cos \theta = 0. \quad (4.9)$$

Внутри дырки $\Delta = 0$. При низких энергиях можно кроме того пренебречь членом с E , так что k выпадает из уравнения. Зависимость (4.2) накладывает граничное условие $\theta(R) = \pi/2$. Уравнение Узаделя с таким граничным условием

имеет два решения:

$$\theta_1 = 2 \arctan(r/R), \quad (4.10)$$

$$\theta_2 = \pi - 2 \arctan(r/R). \quad (4.11)$$

Уравнения на седловую точку также требуют $k_f = 0$, так что угол χ_f выпадает из параметризации Q и из действия. Оставшиеся два угла k_b и χ_b остаются свободными и могут принимать любое (постоянное в пространстве) значение.

Таким образом, пространственная зависимость Q фиксируется уравнением Узаделя. Решения $\theta_{1,2}$ представляют собой две несвязанных седловых точки в F-секторе, в то время как в B-секторе достижима только точка $\theta_b = \theta_1$. Если попытаться протянуть контур интегрирования по θ_b , изначально совпадающий с мнимой осью, так, чтобы он проходил через θ_2 , в интеграле по k_b возникнет расходимость. Поэтому B-сектор содержит только θ_1 и сжат до одного гиперболоида, параметризованного $ik_b > 0$ и $0 < \chi_b < 2\pi$, как описано в приложении В. Полученную структура сигма-модели класса BD можно было предсказать из симметричный соображений. Различие между четной (D) и нечетной (B) версией класса напрямую связано с несвязным характером седлового многообразия. Именно, в классе D (B) две части многообразия дают вклад в статистическую сумму с одинаковым (разным) знаком. В нашей задаче мы имеем дело с классом B. Чтобы это увидеть, сравним значения действия (4.7) в двух минимумах F-сектора. Эти два решения действительно дают вклады разного знака, поскольку соответствующие значения топологического члена (4.8) отличаются в точности на $i\pi$.

4.3 Плотность состояний

Плотность состояний дается интегралом

$$\rho(E, r) = \frac{\nu}{8} \operatorname{Re} \int DQ \operatorname{Str}[k\Lambda Q(r)] e^{-S[Q]}. \quad (4.12)$$

При низких энергиях этот интеграл следует брать по седловому многообразию. Помимо переменных k_b, χ_b и двух точек в F-секторе, многообразие параметризуется двумя Грассмановыми переменными, задающими U в уравнении (4.4).

Чтобы остаться в седловом многообразии (то есть не увеличить действия), эти переменные должны быть постоянными в пространстве, а также удовлетворять условию $[U, \hat{\Delta}] = 0$. Мы вводим эти две переменные следующим образом:

$$U = \exp \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \eta\sigma_x + \zeta\sigma_y \\ i\zeta\sigma_x - i\eta\sigma_y & 0 \end{pmatrix}_{\text{FB}} \right]. \quad (4.13)$$

В этой параметризации, мы можем переписать интеграл (4.12) в терминах k_b , χ_b , η , ζ . Таким образом, задача свелась к нульмерной сигма-модели класса В. Прямое вычисление интеграла описано в приложении В и дает следующий ответ:

$$\rho(r, E) = \nu n(r) f(E/\omega_0), \quad (4.14)$$

$$n(r) = \cos \theta_1(r) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}, \quad (4.15)$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)} + 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}. \quad (4.16)$$

Здесь $\gamma = G_t n(r_0)/2\pi \ll 1$, а низкоэнергетическое межуровневое расстояние есть

$$\omega_0^{-1} = 2\nu \int d^2r \cos \theta_1(r) = 2\pi(\log 4 - 1)\nu R^2. \quad (4.17)$$

Пространственная зависимость плотности состояний $n(r)$ задается уравнением Узаделя, в то время как зависимость от энергии является универсальной характеристикой В-класса. В нашем случае δ -пик в нуле уширен за счет конечного времени утекания в туннельный микроскоп, которое мы включили в модель. Отметим, что уширение γ зависит от координаты острия.

Интегрируя $\rho(r, E)$ по пространству, мы получаем полную плотность состояний

$$N(E) = \frac{f(E/\omega_0)}{2\omega_0}. \quad (4.18)$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$, Лорентцовский пик переходит в $\delta(E)/2$ и наш ответ совпадает с результатом⁸³ с точностью до множителя-двойки, учитывающего двойной учет в формализме Боголюбова-де Жена. Как и ожидалось, Майорановская мода имеет вес в два раза меньший, чем полноценный фермионный уровень.

Существенно, что хотя само Майорановское состояние нечувствительно к беспорядку, и имеет нулевую энергию для любой реализации беспорядка, дру-

гие уровни сильно зависят от беспорядка и распределены случайно. Характерным свойством их взаимного распределения является расталкивание уровней, приводящие к осцилляциям плотности состояний на масштабе ω_0 . При этом ненулевые уровни отталкиваются как друг от друга, так и от Майорановского состояния, расположенном на нуле, именно поэтому δ -пикв нуле расположен в провале — слева и справа от него плотность состояний подавлена. Такого провала не возникает в классе D, описывающем системы без Майорановской моды. В классе D средняя плотность состояний имеет пик при нуле ширины порядка ω_0 , не имеющий отношения к Майорановским фермионам.

Вычисления, проведенные нами для модели с вихрем, приложимы и к системам другой геометрии. Низкоэнергетические формулы (4.16,4.18) применимы к любой сильно неупорядоченной системе класса BD. От конкретной системы зависят только параметры ω_0^{-1}, γ . В частности, формулы применимы к уровням, возникающим на конце одномерного топологического сверхпроводника^{25,84} с нарушенной \mathcal{T} -симметрией, и связанного туннельным контактом с нормальным металлом.

Зависимость $\rho(r, E)$ факторизуется на отдельную зависимость от энергии и от координаты только при энергиях много меньших энергии Таулесса $E_{\text{Th}} = D/R^2$. При больших энергиях квантовые флуктуации Q не важны, и плотность состояний можно вычислять с помощью уравнений Узаделя (4.9) квазиклассически. В пределе $E \gg E_{\text{Th}}$ получается (см. приложение B)

$$N(E \gg E_{\text{Th}}) = \pi\nu R^2 \left[1 - (2 - \sqrt{2}) \sqrt{E_{\text{Th}}/E} \right]. \quad (4.19)$$

Локальная плотность состояний близка к своему нормальному значению ν повсюду, кроме тонкого приграничного слоя на краю дырки, где плотность состояний быстро спадает до нуля, как показано на Рис. 4.4.

4.4 Туннельный ток

Локальную плотность дискретных состояний можно определить с помощью измерения туннельной проводимости, как было подробно изложено в предыдущей главе. Воспользуемся формулой (3.26), утверждающей, что справедлива клас-

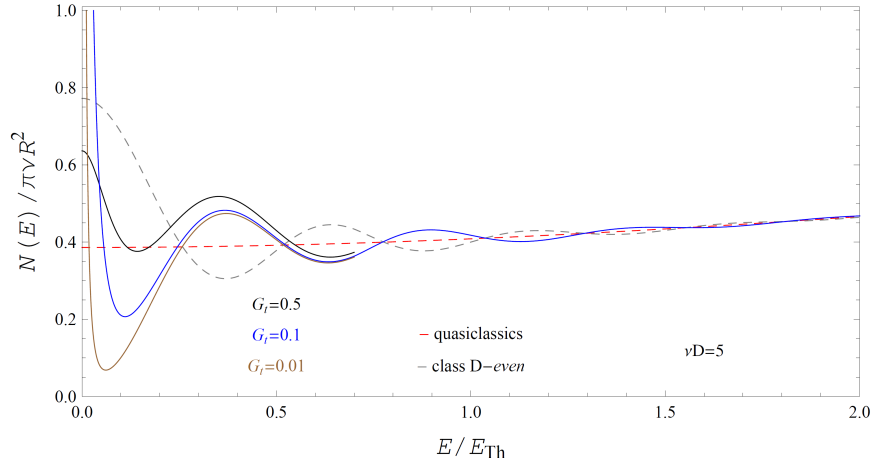


Рис. 4.2: Полная плотность состояний при низких энергиях как функция энергии E . Сплошные линии изображают плотность состояний для различных значений проводимости G_t туннельного контакта в единицах e^2/h . Майорановский уровень при $E = 0$ отталкивает низколежащие уровни с конечной энергией, как видно из минимума плотности состояния вблизи Майорановского пика. Серая пунктирная кривая демонстрирует плотность состояний в классе D, то есть в системе, не имеющие Майорановского уровня. Пунктирная красная кривая представляет квазиклассический результат, не учитывающий корреляции уровней. На этой кривой нет осцилляций и она не различает классы V и D.

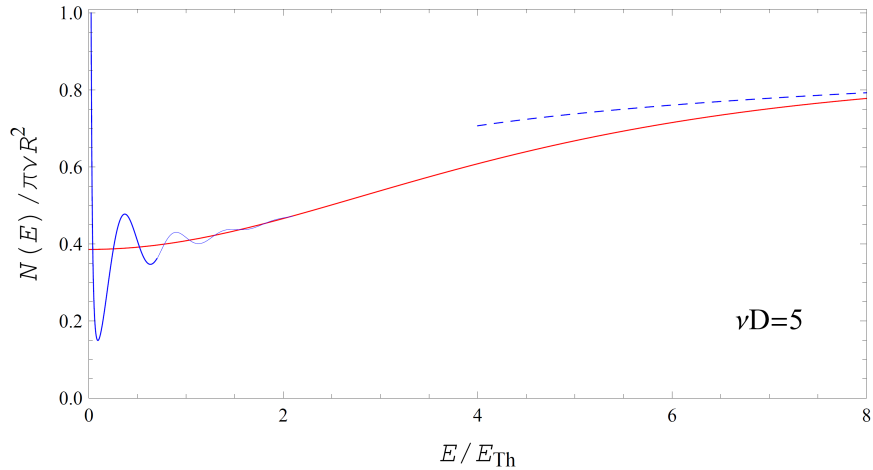


Рис. 4.3: Полная плотность состояний как функция энергии E . Сплошная синяя кривая демонстрирует низкоэнергетический результат (4.18) при $G_t = 0.1e^2/h$, пунктирная кривая — высокоэнергетическая асимптотика (4.19), красная кривая — численное решение, интерполирующее между двумя пределами.

сическая формула

$$I = \frac{eG_t}{2\pi\hbar\nu} \int \rho(E, r_0) [f(E - eV) - f(E)] dE \quad (4.20)$$

если в качестве $\rho(E, r_0)$ взята должным образом уширенную плотность состояний. При самых низких напряжениях и температурах $(T, eV) \ll \omega_0$ мы оставляем только первый, Лорентцевский член в (4.16). Дифференциальная проводимость обнаруживает ожидаемый нами пик

$$\frac{dI}{dV} = \begin{cases} \frac{e^2\gamma^2}{\pi\hbar[\gamma^2 + (eV/\omega_0)^2]}, & T \ll \gamma\omega_0, \\ \frac{e^2\gamma\omega_0}{4\hbar T \cosh^2(eV/2T)}, & \gamma\omega_0 \ll T \ll \omega_0. \end{cases} \quad (4.21)$$

При самых низких температурах, как мы знаем из главы 2, высота пика универсальна и равняется $2e^2/h$.

Используя формализм Ландауэра, описанный в предыдущей главе, мы также вычисляем шум при $(T, eV) \ll \omega_0$, равный

$$S(V, T, r_0) = \frac{e^2\gamma\omega_0}{2\hbar}, \quad \gamma\omega_0 \ll T \ll \omega_0. \quad (4.22)$$

Отметим, что шум, производимый Майорановской модой, не зависит от T и V , при $\gamma\omega_0 \ll T$.

Результаты (4.21) и (4.22) описывают низкие температуры и напряжения. Когда один из этих параметров превышает ω_0 , ненулевые состояния также начинают давать вклад в туннельный ток. Положения и размеры соответствующих пиков (3.21) зависят от реализации системы.

4.5 Заключение

Мы изучили локальную плотность состояний в коре вихря на сверхпроводящей поверхности топологического изолятора, изображенной на Рис. 4.1. Энергетическая и пространственная зависимость плотности состояний разделяются при низких энергиях, и энергетическая зависимость описывается нульмерной сигма-моделью класса В. В этих терминах было описано Майорановское состояние. В пределе сильного беспорядка Майорановское состояние расталкивает соседние

по энергии уровни, что позволяет обнаружить его, измерив туннельную проводимость при низких напряжениях и температурах — в проводимость должен быть пик высотой $2e^2/h$ при $V = 0$.

Заключение

Основные результаты диссертации:

1. Предложена и проанализирована SNS-система (Рис. 2.1) на основе покрытого сверхпроводником трехмерного топологического изолятора, содержащая пару Майорановских фермионов. Показано, что их присутствие приводит к появлению 4π -периодической компоненты $I_a(\varphi)$ в Джозефсоновском токе $I(\varphi)$. Вычислена температурная зависимость I_a , и получены условия, в которых аномальный ток можно обнаружить экспериментально.
2. Рассмотрено резонансное Андреевское отражение в произвольном туннельном NS-контакте между металлом и сверхпроводником, содержащем дискретный спектр Андреевских уровней E_j , в пределе, когда квазиклассическая формула не работает и существенна дискретность спектра. Получены формулы для резонансных пиков кондактанса при напряжениях, близких к уровням спектра. Высоты пиков не зависят от силы контакта и как правило близки к $2e^2/h$, а ширины пиков пропорциональны нормальной проводимости контакта. Также получена точная формула, описывающая Андреевскую проводимость для произвольного одноканального контакта, и учитывающая сразу весь дискретный спектр одновременно. Формула объясняет интерференцию между Андреевскими процессами, проходящими через разные дискретные уровни E_j . В частности, интерференция между уровнями с противоположными энергиями $\pm E_j$ полностью деструктивна, так что $G(0)$ определяется наличием или отсутствием Майорановского состояния в системе. В его присутствии $G(0) = 2e^2/h$ и NS-контакт топологический, а в его отсутствие — топологически тривиальный. Полученное квантование согласуется с теорией S -матриц для топологических контактов. Подробно

исследована проводимость системы с двумя слабо спаренными Майорановскими фермионами. В такой системе $G(V)$ обнаруживает Лорентцовский пик в нуле, а на его фоне параметрически узкий провал до нуля. Чтобы обнаружить провал и таким образом отличить топологически тривиальную систему от нетривиальной, требуются очень низкие температуры.

3. Изучена локальная плотность состояний в коре вихря на поверхности топологического, покрытого сверхпроводящей пленкой с отверстием (Рис. 4.1). Найдено, что энергетическая и пространственная зависимость плотности состояний факторизуются при низких энергиях, при этом энергетическая зависимость описывается нульмерной сигма-моделью класса В, а пространственная определяется решением уравнения Узаделя. δ -пик в плотности состояний, присущий классу В, и соответствующий Майорановскому состоянию, уширяется туннельным контактом с металлом и в туннельном эксперименте транслируется в пик высоты $2e^2/h$ в проводимости. Пик экспериментально обнаружим при низких температурах и напряжениях.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю М. В. Фейгельману за постоянное внимание к работе, научное руководство и терпение. Автор благодарен П. М. Островскому за совместную работу и многочисленные беседы, А. С. Иоселевичу, Д. И. Пикулину, Я. В. Фоминову за неоднократные плодотворные обсуждения, а также К. Бейнаккеру, И. С. Бурмистрову, Г. Е. Воловику, Э. Кёнигу, А. Ю. Китаеву, В. А. Козьему, Н. Б. Копнину, Ю. Г. Махлину, А. С. Мельникову, А. Д. Мирлину, Д. Муру, Ю. В. Назарову, М. А. Скворцову, Ю. Танаке, К. С. Тихонову, А. В. Штыку и всем сотрудникам Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау, чьи вопросы и комментарии оказали большую помощь в работе.

Работа над диссертацией происходила при финансовой поддержке стипендиальных программ фонда "Династия" и Российского Квантового Центра, а также грантов РФФИ 10-02-00554-а, РФФИ 13-02-91058-НЦНИа, совместной немецко-российской программы федерального министерства образования и исследований Германии "Топологические материалы для наноэлектроники" и программы РАН "Квантовые мезоскопические и неупорядоченные структуры".

Приложение

А Приложение к главе 1

А.1 Уравнения сшивки

Рассмотрим две поверхности, 1 и 2, смыкающиеся вдоль прямой под углом θ_0 . Пусть $\Psi_{1,2}$ — волновые функции на соответствующих поверхностях вблизи границы. Заменяем резкую границу-излом на гладкий цилиндрический изгиб радиуса r . Будем использовать естественную для такой границы цилиндрическую систему координат с $\theta = 0$ на стыке с поверхностью 1. Разложим волновые функции $\Psi_{1,2}$ по решениям (2.13), найденным нами для трубки. Получим

$$\Psi_1 = \sum_{p,\mu} a_{p,\mu} \Psi_{p,\mu}, \quad (4.23)$$

$$\Psi_2 = \sum_{p,\mu} a_{p,\mu} e^{i\theta\mu - i\sigma_z\theta_0/2} \Psi_{p,\mu}, \quad (4.24)$$

где $\Psi_{p,\mu} = e^{ipz} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ i \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$. Энергия такой волны $\epsilon_{p,\mu} = \sqrt{p^2 + \frac{\mu^2}{r^2}}$ должна равняться энергии нашей частицы E . Поэтому в пределе $r \rightarrow 0$ остаются только волны с $\mu = 0$, так что $\Psi_2 = e^{-i\sigma_z\theta_0/2} \Psi_1$. В инвариантном виде это уравнение имеет написанный в главе 1 вид (2.14).

А.2 Уравнение спектра

Система уравнений, определяющая спектр нашего SNS-контакта, состоит из восьми уравнений — по четыре уравнения на каждый конец трубки. Разумеется, следует сшивать решения, соответствующие одному и тому же угловому моменту. Если угловой момент на поверхности — целое число ν , то соответствующие

волны в трубке имеют полуцелые моменты $\mu = \nu \mp 1/2$ для электронов и дырок соответственно. Правильно выбрав угловые моменты, мы должны теперь применить уравнения сшивки (2.14) для какого-нибудь определенного угла, скажем, $\theta = 0$. Внутри трубки волновая функция есть суперпозиция четырех волн:

$$\Psi_{cyl} = \left(a_{\uparrow} u_{\uparrow} + a_{\downarrow} u_{\downarrow} \quad b_{\uparrow} v_{\uparrow} + b_{\downarrow} v_{\downarrow} \right)^T, \quad (4.25)$$

где

$$u_{\uparrow} = e^{i(p_f+q)z \cos \alpha_-} \begin{pmatrix} \cos \alpha_-/2 \\ i \sin \alpha_-/2 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$u_{\downarrow} = e^{-i(p_f+q)z \cos \alpha_-} \begin{pmatrix} -i \sin \alpha_-/2 \\ \cos \alpha_-/2 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$v_{\downarrow} = e^{i(p_f-q)z \cos \alpha_+} \begin{pmatrix} \cos \alpha_+/2 \\ i \sin \alpha_+/2 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$v_{\uparrow} = e^{-i(p_f-q)z \cos \alpha_+} \begin{pmatrix} -i \sin \alpha_+/2 \\ \cos \alpha_+/2 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\alpha_{\pm} = \arcsin \frac{\nu \pm 1/2}{p_f R} \quad q \equiv \frac{\epsilon}{v_f}. \quad (4.30)$$

Далее выпишем волновую функцию на плоских поверхностях. На малых расстояниях $r \ll \xi$ решение (2.8) упрощается:

$$u = c_1 e^{-i\phi_0} w_{\nu-1/2}^{(1)}(r_+) - i c_2 e^{i\phi_0} w_{\nu-1/2}^{(2)}(r_+), \quad (4.31)$$

$$v = -i c_1 e^{i\phi_0} w_{\nu+1/2}^{(1)}(r_-) + c_2 e^{-i\phi_0} w_{\nu+1/2}^{(2)}(r_-), \quad (4.32)$$

с $r_{\pm} = r(1 \pm q/p_f)$ и $\phi_0 = \phi(0) \simeq q\xi_0/2 + \frac{\nu}{p_f \xi_0} \log \frac{\xi_0}{\xi_{sc}}$ в грязном пределе $\xi_{sc} \ll \xi_0$. Используя асимптотики функций Ганкеля большого аргумента, мы находим значение волновой функции у верхнего края трубки $r = R, z = L, \theta = 0$, с точностью до членов порядка $\sim 1/p_f R$ (мы пренебрегаем членами порядка $\sim (p_f R)^{-2}$):

$$\Psi_{up}(R) = C_1 \begin{pmatrix} \exp[i\beta - 2i\phi_0 + \varphi] \\ i \exp[-2i\phi_0 + \varphi] \\ 1 \\ i \exp[-i\beta] \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \exp[-i\beta + 2i\phi_0 + \varphi] \\ i \exp[2i\phi_0 + \varphi] \\ 1 \\ i \exp[i\beta] \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

с некоторыми коэффициентами C_1, C_2 и $\cos \beta = \nu/p_f R$. Полученное выражение справедливо везде, кроме области параметров $|\nu - p_f R| \lesssim (p_f R)^{1/3}$. Волновая функция $\Psi_{down}(R)$ на нижней поверхности получается введением других коэффициентов Q_1, Q_2 вместо C_1, C_2 и подстановкой $\varphi = 0$.

Имея явные выражения для волновой функции по обе стороны каждого конца трубки, мы подставляем их в уравнение (2.14). В соответствии с ним спиноры $\Psi_{cyl}(z = L)$ и $\Psi_{cyl}(z = 0)$ нужно повернуть операторами $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sigma_y)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sigma_y)$ соответственно (вращение происходит в противоположные стороны) и затем приравнять к Ψ_{up} и Ψ_{down} . В результате получается

$$\begin{aligned}
A_{\uparrow} e^{i(p_f+q)L \cos \alpha_-} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha_-} \end{pmatrix} + A_{\downarrow} e^{-i(p_f+q)L \cos \alpha_-} \begin{pmatrix} -e^{i\alpha_-} \\ 1 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} \exp[i\beta - 2i\phi_0 + \varphi] \\ i \exp[-2i\phi_0 + \varphi] \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \exp[-i\beta + 2i\phi_0 + \varphi] \\ i \exp[2i\phi_0 + \varphi] \end{pmatrix} \\
B_{\downarrow} e^{i(p_f-q)L \cos \alpha_+} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha_+} \end{pmatrix} + B_{\uparrow} e^{-i(p_f-q)L \cos \alpha_+} \begin{pmatrix} -e^{i\alpha_+} \\ 1 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \exp[-i\beta] \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \exp[i\beta] \end{pmatrix} \\
A_{\uparrow} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_-} \\ -1 \end{pmatrix} + A_{\downarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha_-} \end{pmatrix} &= Q_1 \begin{pmatrix} \exp[i\beta - 2i\phi_0] \\ i \exp[-2i\phi_0] \end{pmatrix} + Q_2 \begin{pmatrix} \exp[-i\beta + 2i\phi_0] \\ i \exp[2i\phi_0] \end{pmatrix} \\
B_{\downarrow} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_+} \\ -1 \end{pmatrix} + B_{\uparrow} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha_+} \end{pmatrix} &= Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \exp[-i\beta] \end{pmatrix} + Q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \exp[i\beta] \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

В нашем приближении $\alpha_{\pm} = \pi/2 - \beta$, так что спиноры с коэффициентами A_{\uparrow} и C_1 в первом уравнении системы (4.34) коллинеарны. Аналогичное утверждение справедливо и для спиноров с коэффициентами A_{\downarrow} и C_2 в этом уравнения. То же можно сказать и про остальные уравнения системы (4.34). В результате система распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned}
A_{\uparrow} &= C_1 \exp[i\beta - 2i\phi_0 + i\varphi - i(p_f + q)L \cos \alpha_-] \\
B_{\downarrow} &= C_1 \exp[-i(p_f - q)L \cos \alpha_+] \\
A_{\uparrow} &= Q_2 \exp[-i\pi/2 + 2i\phi_0] \\
B_{\downarrow} &= Q_2 \exp[-i\pi/2 + i\beta]
\end{aligned} \tag{4.35}$$

и

$$\begin{aligned}
A_{\downarrow} &= C_2 \exp[i\pi/2 + 2i\phi_0 + i\varphi + i(p_f + q)L \cos \alpha_-] \\
B_{\uparrow} &= C_2 \exp[i\pi/2 + i\beta + i(p_f - q)L \cos \alpha_+] \\
A_{\downarrow} &= Q_1 \exp[-2i\phi_0 + i\beta] \\
B_{\uparrow} &= Q_1
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Эти уравнения дают два набора собственных значений E , которые определяются уравнениями

$$4\phi_0 = -2\alpha \pm (\varphi - \pi - 2\pi k) + (p_f - q)L \cos \alpha_+ - (p_f + q)L \cos \alpha_- \tag{4.37}$$

Плюс и минус перед φ -членом получаются из систем (4.35) и (4.36), соответственно. Поскольку мы предполагаем $L \ll \xi_0$ и $R \ll \xi$, мы можем пренебречь членом $\sim qL$ в правой части уравнения (4.37), равно как и зависящим от ν членов в ϕ_0 . В результате получается формула (2.15).

А.3 Вычисление аномального тока

Термодинамический потенциал системы с зафиксированной фермионной четностью можно записать как

$$\Omega_{odd/even} = -T \ln \frac{\prod_i (1 + e^{-\beta\epsilon_i}) \mp \prod_i (1 - e^{-\beta\epsilon_i})}{2} \quad (4.38)$$

с обратной температурой $\beta = T^{-1}$. Разность $\delta\Omega = \Omega_{odd} - \Omega_{even}$ переписывается как

$$\delta\Omega = -T \ln \frac{1-f}{1+f} \quad \text{with} \quad f \equiv \prod_i \tanh \frac{\beta\epsilon_i}{2} \quad (4.39)$$

Следовательно,

$$I_a = e\delta\Omega'_\varphi = \frac{2Tef'_\varphi}{1-f^2} = \frac{2Tfe}{1-f^2} \sum_i \frac{\beta\epsilon'_{i,\varphi}}{2 \cosh^2 \frac{\beta\epsilon_i}{2} \tanh \frac{\beta\epsilon_i}{2}} = \frac{2fe}{1-f^2} \sum_i \frac{\epsilon'_{i,\varphi}}{\sinh \beta\epsilon_i}. \quad (4.40)$$

Полезно разбить f на множители, соответствующие двум частям спектра – гибридованным уровням, существенно зависящим от φ , и остальным, негибридованным уровням системы.

$$f = \prod_{|\nu| < p_f R} \tanh \frac{\epsilon_\nu}{2T} \prod_{|\nu| > p_f R} \tanh \frac{\epsilon_\nu}{2T} = f_{hyb} f_{non} \quad (4.41)$$

Пренебрегая экспоненциально слабой зависимостью негибридованных уровней от φ , мы пишем

$$I_a = \frac{2ef_{hyb}f_{non}}{1-f_{hyb}^2 f_{non}^2} J \quad J = \sum_{|\nu| < p_f R} \frac{\partial \epsilon_\nu / \partial \varphi}{\sinh(\epsilon_\nu / T)} \quad (4.42)$$

Рассмотрим сначала f_{hyb} . Типичное межуровневое расстояние равно $\omega_0 \sim \frac{\Delta}{p_f R}$. Если $T \gg \omega_0$, то $f_{hyb} = \exp \left[\int_0^\infty \ln \tanh \left(\frac{\omega_0 \nu}{2T} \right) d\nu \right] = \exp \left[-\frac{\pi^2 T}{4\omega_0} \right]$. Для малых L/R

при $\varphi = \pi$ ответ преобразуется в $\exp\left[-\frac{\pi^2 p_f R T}{2\Delta}\right]$. В обратном пределе $T \ll \omega_0$ мы можем написать $f_{hyb} = \tanh \frac{E_h}{2T}$, где E_h – наинизший гибридный уровень.

Далее рассмотрим множитель J . При $T \gg \omega_0$ воспользуемся приближением $\sinh(\epsilon/T) \simeq \epsilon/T$ при малых энергиях и получим $J \lesssim \sum_{n=1}^{T/\omega_0} \frac{T\Delta}{n\omega_0} = \frac{T\Delta}{\omega_0} \log \frac{T}{\omega_0}$. При $T \ll \omega_0$ амплитуда J определяется наинизшим гибридным уровнем ϵ_1 и мы получаем $|J| = \frac{\Delta}{2 \sinh \epsilon_1/T}$.

Наконец, рассмотрим f_{non} . Спектр негибридных уровней типа КДЖМ³¹ описывается формулой $E_{non} = \frac{\Delta}{p_f \xi} \ln \left(\frac{\xi_0}{\xi_{sc}} \right) [p_f R + n] = E_0 + n\delta$ с целыми неотрицательными n . Есть две копии этого спектра – по одной на каждую поверхность пластины топологического изолятора.

Если $(T - E_0) \gg \delta$, можно переписать

$$f_{non} = \exp \left[2 \int_{p_f R}^{\infty} \ln \tanh \frac{n\delta}{2T} dn \right] = \exp \left[-\frac{\pi^2 T}{2\delta} - \frac{4T}{\delta} \int_0^{\frac{E_0}{2T}} \ln \tanh x dx \right] \quad (4.43)$$

Вторым членом можно пренебречь, когда $T \gg E_0$. При низких температурах $T \ll E_0$ получается

$$f_{non} = \exp \left[2 \sum_n \ln [1 - 2e^{-\frac{E_n}{T}}] \right] = \exp \left[-4e^{-\frac{E_0}{T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\delta}{T}} \right] = \exp \left[-4 \frac{e^{-\frac{E_0}{T}}}{1 - e^{-\frac{\delta}{T}}} \right] \quad (4.44)$$

Комбинируя выражения для f_{hyb} , f_{non} , J для низких температур, мы получаем результаты (2.20, 2.21) первой главы.

В Приложение к главе 3

В.1 Вывод сигма-модели

Сигма-модель гибридной системы

В этом параграфе мы выводим сигма-модель, описывающую динамику поверхностных возбуждений топологического изолятора в присутствии случайного потенциала. Мы подразумеваем геометрию, изображенную на Рис. 4.1. Вывод начинается с микроскопического уравнения БдЖ (1.1). Выводимая сигма-модель предназначена для усреднения одной запаздывающей функции Грина. Мы продемонстрируем эквивалентность нашей модели сигма-модели симплектического класса АII, построенной для несверхпроводящей системы, но пригодной для вычисления среднего от произведения опережающей и запаздывающей функций Грина. Известно, что сигма-модель для Дираковских фермионов обладает специальным \mathbb{Z}_2 -топологическим членом. Эквивалентность двух моделей служит доказательством того, что и в нашей сверхпроводящей модели должен быть топологический член.

Начнем с запаздывающей функции Грина системы, описываемой гамильтонианом (4.1). Запишем ее в виде функционального интеграла

$$G_E^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -i \int D\Phi^* D\Phi \operatorname{str} [k\Phi(\mathbf{r})\Phi^\dagger(\mathbf{r}')] e^{-S}, \quad (4.45)$$

$$S = -i \int d^2r \Phi^\dagger (E + i0 - H)\Phi. \quad (4.46)$$

Входящие сюда векторные поля Φ и Φ^\dagger содержат каждое по 4 коммутирующих и 4 Грассмановых переменных. Кроме спиновой и БдЖ-структуры, имеющих в гамильтониане, мы вводим суперструктуру, позволяющую избавиться от нормировочного знаменателя и упрощающую дальнейшие вычисления. Предэкспонента содержит суперматрицу $k = \{1, -1\}_{\text{FB}}$, а суперслед определен также, как в книге:⁸⁰ $\operatorname{str} A = A_{\text{FF}} - A_{\text{BB}}$.

Симметрия (1.3) гамильтониана H приводит к возникновению мягких мод — Куперонов — в сигма-модели, соответствующих корреляторам вида $\langle G_E^R G_{-E}^R \rangle$. Чтобы включить их в нашу эффективную теорию, мы преобразуем действие, переписав одну его половину в виде (4.46), а другую половину в обращенном

по времени (транспонированном) виде:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{i}{2} \int d^2r \left[\Phi^\dagger (E + i0 - H) \Phi - \Phi^T k (E + i0 + s_y \tau_y H s_y \tau_y) \Phi^* \right] \\ &= -\frac{i}{2} \int d^2r \left(\Phi^+ \tau_z, \quad i \Phi^T k s_y \tau_x \right) \left[(E + i0) \sigma_z \tau_z - H_0 - \tau_z \hat{\Delta} \right] \begin{pmatrix} \Phi \\ s_y \tau_y \Phi^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь мы ввели матрицу σ_z , действующую во вновь введенном пространстве обращенных по времени блоков. Матрица k возникла из-за антикоммутиации Грассмановых переменных. Удвоенные вектора мы будем обозначать

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi \\ s_y \tau_y \Phi^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Phi^+ \tau_z, \quad i \Phi^T k s_y \tau_x \right). \quad (4.48)$$

Эти два вектора уже не независимы, в отличие от Φ и Φ^* , и связаны линейно:

$$\bar{\Psi} = (C\Psi)^T, \quad C = -i s_y \tau_x \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & i \sigma_y \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (4.49)$$

Теперь удобно произвести усреднение по беспорядку. Мы используем обычную Гауссовскую модель белого шума с коррелятором

$$\langle V(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\pi \nu \tau}. \quad (4.50)$$

Входящая сюда металлическая плотность состояний определена как $\nu = |\mu|/2\pi v_0^2$. Отметим, что правая часть определения (4.50) в два раза больше, чем в определении для обычных металлов. Причина появления дополнительной двойки кроется в Дираковской природе электронного спектра, и следующим из нее удвоении фазового пространства за счет существования двух типов возбуждений (электронов и дырок).

Усреднение по беспорядку приводит к четверичному члену в действии:

$$S = \int d^2r \left\{ \frac{(\bar{\Psi}\Psi)^2}{2\pi\nu\tau} - i\bar{\Psi} \left[(E + i0)\Lambda + \mu - v_0 \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} - \tau_z \hat{\Delta} \right] \Psi \right\}. \quad (4.51)$$

Здесь мы используем обозначение $\Lambda = \sigma_z \tau_z$. Следующим шагом мы распариваем член с взаимодействием с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича, введя вспомогательное поле Q . Конструкция сигма-модели предполагает, что поле Q содержит в себе все необходимые медленные моды неупорядоченной

системы – диффузоны и Купероны. Четырех-фермионный член можно распарить одним из трех способов.⁸⁰ Один способ относится включает скалярное поле $\sim \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$, аналогичное случайному потенциалу V . Такое распаривание приводит к несущественной перенормировке химического потенциала. Два других способа вводят матричные поля вида $\langle \Psi \bar{\Psi} \rangle$ и $\langle \Psi \Psi^T \rangle$, соответствующие диффузорам и Куперонам. Чтобы включить все необходимые мягкие моды, мы должны произвести распаривание обеими способами, что возможно сделать в рамках одной матрицы Q . Подробности этой процедуры изложены в книге.⁸⁰ В итоге действие принимает вид:

$$S = \frac{\pi\nu}{16\tau} \text{str} Q^2 - i \int d^2r \bar{\Psi} \left[E\Lambda + \mu - v_0 \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} - \tau_z \hat{\Delta} + \frac{iQ}{2\tau} \right] \Psi. \quad (4.52)$$

Векторы Ψ и $\bar{\Psi}$ связаны соотношением (4.49). Это позволяет наложить ограничение на Q -матрицу вида $Q = \bar{Q} \equiv CQ^T C^T$. Такое соотношение оставляет в Q только те параметры, которые спариваются с $\Psi \bar{\Psi}$. Проинтегрировав по полям Ψ мы получаем эффективное действие для матрицы Q :

$$S = \frac{\pi\nu}{16\tau} \text{str} Q^2 - \frac{1}{2} \text{str} \ln \left[E\Lambda + \mu - v_0 \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} - \tau_z \hat{\Delta} + \frac{iQ}{2\tau} \right]. \quad (4.53)$$

Переход от этого действия к сигма-модели заключается в седловом приближении. В грязном пределе, члены с энергией и $\hat{\Delta}$ в аргументе логарифма относительно малы по сравнению с Q/τ . В пренебрежении этими членами действие имеет однородную седловую точку $Q = \Lambda$. Эта седловая точка соответствует собственной энергии усредненной электронной функции Грина в самосогласованном Борновском приближении. Другие седловые точки достигаются вращениями $Q = T^{-1} \Lambda T$, с матрицами T , коммутирующими с \mathbf{s} (мы все еще пренебрегаем E и Δ). Вращения T определяют пространство нелинейной сигма-модели. Эффективное действие сигма-модели выводится посредством градиентного разложения выражения (4.53), заключающемся в пертурбативном разложении действия в квадратичном приближении по медленным пространственным вариациям Q и в линейном порядке по E и $\hat{\Delta}$. Поскольку Q -матрица тривиальна в спиновом пространстве, мы можем уменьшить ее размер до 8×8 , сохранив пространства Намбу-Горькова, TR, и FB. Условие самосопряженности при этом приобретает вид уравнения (4.3).

Градиентное разложение действия (4.53) — нетривиальная процедура ввиду киральной аномалии Дираковских фермионов. Интеграл по импульсу, возникающие после разложения логарифма, расходятся в ультрафиолетовом пределе и требуют аккуратной регуляризации. Результат разложения не зависит от способа регуляризации, коль скоро соблюдена калибровочная инвариантность. Аномалия касается только мнимой части действия и ведет к появлению топологического члена.⁴⁴ В то же время вещественная часть действия может быть вычислена непосредственно, так как все возникающие при этом интегралы сходятся. Результат разложения такой:

$$\text{Re } S = \frac{\pi\nu}{8} \int d^2r \text{str} \left[D(\nabla Q)^2 + 4i(E\Lambda - \tau_z \hat{\Delta})Q \right]. \quad (4.54)$$

Здесь коэффициент диффузии $D = v_0^2\tau/2$, суперматрица Q имеет размер 8×8 . Действие (4.7) отличается от ответа (4.54) вращением сверхпроводящей фазы на $\pi/2$ и присутствием мнимой добавки к энергии. Добавка соответствует туннельной связи с микроскопом, как показано ниже.

Чтобы объяснить появление топологического члена в мнимой части действия, мы докажем эквивалентность выводимой здесь сигма-модели и симплектической модели, выведенной в работе.⁴⁴

Сигма-модель для дираковских электронов

Сигма-модель, вытекающая из градиентного разложения (4.53), относится к симплектическому классу симметрии АII. Это естественно, поскольку гамильтониан обладает только \mathcal{T} -симметрией в отсутствие сверхпроводящих членов. Покажем, что наша сигма-модель для плотности сверхпроводящих состояний и стандартная симплектическая сигма-модель, описывающая транспортные корреляторы на поверхности топологического изолятора, эквивалентны. Во второй модели вычисляются средние произведения опережающей и запаздывающей функций Грина с энергиями, отличающимися на величину ω . Для такого вычисления вводится RA-пространство в действии,

$$S_0 = -i \int d^2r \Phi^\dagger \tau_z [(\omega/2 + i0)\tau_z - H_0] \Phi, \quad (4.55)$$

где τ_z действует во введенном RA-пространстве. Мы пишем индекс 0, чтобы отличать транспортную модель от той, которая выводилась выше и используется в главе 3. Симметрия по отношению к обращению времени $H_0 = s_y H_0^T s_y$ учитывается дальнейшим удвоением переменных в TR-пространство

$$\begin{aligned} S_0 &= -\frac{i}{2} \int d^2r \left[\Phi^\dagger (\omega/2 + i0 - \tau_z H_0) \Phi - \Phi^T k (\omega/2 + i0 - \tau_z s_y H_0 s_y) \Phi^* \right] \\ &= -\frac{i}{2} \int d^2r \left(\Phi^\dagger \tau_z, i\Phi^T k s_y \tau_z \right) [(\omega/2 + i0)\Lambda_0 - H_0] \begin{pmatrix} \Phi \\ i s_y \Phi^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Отметим, что матрица $\Lambda_0 = \tau_z$, стоящая при частоте ω , отличается от своего аналога Λ в предыдущем параграфе. Векторы Ψ и $\bar{\Psi}$, равно как и оператор зарядого сопряжения C_0 также определены по-другому:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi \\ i s_y \Phi^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (C_0 \Psi)^T, \quad (4.57)$$

$$C_0 = -i s_y \tau_z \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & i \sigma_y \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (4.58)$$

Уже на данном этапе мы можем доказать эквивалентность двух моделей, предъявив подходящее унитарное преобразование векторного поля Ψ . Это преобразование должно обладать следующими свойствами

$$U^T C_0 U = C, \quad U^{-1} \Lambda_0 U = \Lambda. \quad (4.59)$$

Эти соотношения обеспечивают преобразование C_0 и Λ_0 к выражениям C и Λ предыдущего параграфа, то есть к той сигма-модели, которую мы строим для нашей сверхпроводящей гибридной структуры. Существует много матриц U , удовлетворяющих условиям (4.59). Один из вариантов:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \tau_y \end{pmatrix}_{\text{TR}}. \quad (4.60)$$

Для случая обычных, а не Дираковских, фермионов аналогичная эквивалентность между сигма-моделью для плотности состояний в сверхпроводящей гибридной системе и сигма-моделью ортогонального класса обсуждается в работе.⁸²

Топологический член в действии

До сих пор мы обсудили вывод действительной части действия σ -модели (4.7), а также доказали эквивалентность нашей модели симплектической сигма-модели для Дираковских электронов (с точностью до граничных условий, содержащих $\hat{\Delta}$). Известно, что действие этой модели содержит \mathbb{Z}_2 -топологический член в качестве мнимой части.⁴⁴ Это позволяет нам включить указанный топологический член в действие (4.7) и на этом завершить вывод сигма-модели.

Явный вид топологического члена дан в уравнении (4.8) в неинвариантной форме, использующей параметризацию (4.4) – (4.6). В этом абзаце мы обсудим неявную, зато инвариантную форму топологического члена. Многообразии, которому принадлежит матрица Q симплектической сигма-модели исчерпывается представлением $Q = T^{-1}\Lambda T$ с ограничением $Q = \bar{Q}$. Если мы отбросим на время Грассмановы параметры и рассмотрим центральную часть Q , см. уравнение (4.4), эти условия дадут $Q_F \in O(4)/O(2) \times O(2)$ и $Q_V \in Sp(2, 2)/Sp(2) \times Sp(2)$. Топологический член возникает в компактном фермионном секторе модели. Явное выражение для топологического члена можно написать в виде конструкции типа члена Весса-Зумино-Виттена.⁸⁵

Для начала мы расширим наше многообразие, сняв ограничение $Q^2 = 1$. Введем матрицу $\mathcal{Q} = \bar{T}\Lambda T$. Единственным ограничением на эту матрицу будет $\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{Q}}$. Фермионный сектор такого расширенного многообразия $\mathcal{Q}_F \in O(4)$. Его вторая гомотопическая группа тривиальна, $\pi_2[O(4)] = 0$. Это позволяет нам ввести третью, вспомогательную координату $0 \leq t \leq 1$, так чтобы наше физическое 2D пространство соответствовало $t = 1$, и непрерывно продолжить функцию \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} Q(\mathbf{r}), & t = 1, \\ \Lambda, & t = 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Такого рода продолжение предполагает, что физическое пространство не имеет границы и его можно считать поверхностью трехмерного шара, в котором t играет роль радиальной координаты. С таким определением \mathcal{Q} член Весса-

Зумино-Виттена имеет вид

$$S_\theta[Q] = \frac{i\epsilon_{abc}}{24\pi} \int_0^1 dt \int d^2r \operatorname{str} \left[Q^{-1}(\nabla_a Q) \times Q^{-1}(\nabla_b Q) Q^{-1}(\nabla_c Q) \right]. \quad (4.62)$$

Индексы a , b , и c принимают три значения, соответствующие координатам t , x , и y , а ϵ_{abc} – единичный антисимметричный тензор.

Интегранд в выражении (4.62) является полной производной, так что интеграл зависит только от значения Q на границе области интегрирования, то есть только от поля $Q = Q|_{t=1}$. Этот факт легко проверяется варьированием S_θ :

$$\begin{aligned} \delta S_\theta[Q] &= \frac{i\epsilon_{abc}}{8\pi} \int_0^1 dt \int d^2r \nabla_a \operatorname{str} \left[Q^{-1} \delta Q Q^{-1} (\nabla_b Q) Q^{-1} (\nabla_c Q) \right] \\ &= \frac{i}{8\pi} \int d^2r \operatorname{str} \left\{ Q^{-1} \delta Q [Q^{-1} (\nabla_x Q), Q^{-1} (\nabla_y Q)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Топологический член не меняется при непрерывных изменениях поля Q , но принимает разные значения в разных (не связанных между собой) топологических секторах модели. Общего вида член Весса-Зумино-Виттена имеет ненулевую вариацию, и поэтому не обладает этим свойством. Однако, если член (4.62) рассматривать для Q , удовлетворяющих $Q^2 = 1$, вариация (4.63) обращается в ноль. Таким образом, член (4.62) действительно выполняет роль топологического члена.

Альтернативный вывод действия сигма-модели, включая топологический член в виде (4.62), возможен в рамках формализма неабелевой бозонизации. Допустим на минуту, что гамильтониан обладает дополнительной киральной симметрией $H = -s_z H s_z$. Такая ситуация соответствует классу симметрии DIII и реализуется, например, в Дираковской точке при случайном поле скоростей. В сигма-модели класса DIII Q принадлежит расщирвленному многообразию, соответствующему многообразию для Q , введенному нами выше. Эта сигма-модель обладает членом (4.62), см. работу,⁸¹ и является результатом неабелевой бозонизации исходной фермионной задачи. Ненулевой химический потенциал сдвигает систему с Дираковской точки и нарушает киральную симметрию. Это сводит модель к симплектической и накладывает на поле ограничение $Q^2 = 1$. Действие при этом имеет топологический член вида (4.62), как обсуждалось выше.

Туннельный член в действии

В этом параграфе мы рассматривается мнимая добавка к энергии, возникающая из-за присутствия острья туннельного микроскопа. Чтобы включить в нашу модель внешний металлической провод, мы записываем гамильтониан в виде

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & t \\ t^\dagger & H_M \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Диагональные блоки этой матрицы являются гамильтонианами H и H_M , описывающими нашу гибридную систему и микроскоп, соответственно. Недиагональные блоки t описывают туннелирование между этими двумя частями. Мы предполагаем для простоты, что эти амплитуд локальны в пространстве и спаривают состояния в точке r_0 на поверхности топологического изолятора с состояниями в острие микроскопа.

Выводя сигма-модель также, как мы это делали до сих пор, мы приходим к выражению типа (4.53), но имеющему на сей раз дополнительную структуру:

$$S = \frac{\pi\nu}{16\tau} \text{str} Q^2 + \frac{\pi\nu_M}{16\tau_M} \text{str} Q_M^2 - \frac{1}{2} \text{str} \ln \left[E\Lambda - \tau_z \mathcal{H} + \begin{pmatrix} iQ/2\tau & 0 \\ 0 & iQ_M/2\tau_M \end{pmatrix} \right]. \quad (4.65)$$

Величины ν_M , τ_M , и Q_M относятся к острию. В отсутствие туннелирования $t = 0$, две подсистемы никак не связаны, так что мы получаем независимые сигма-модели для топологического изолятора и для острья. Включим теперь слабое туннелирование t . Мы полагаем ν_M большим, так что $Q_M = \Lambda$. Разложим логарифм по степеням t и t^\dagger . Первый исчезающий член появляется во втором порядке и равен

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{1}{2} \text{str} \left[(E\Lambda - \tau_z H + iQ/2\tau)^{-1} \tau_z t \right. \\ &\quad \left. \times (E\Lambda - \tau_z H_M + iQ_M/2\tau_M)^{-1} \tau_z t^\dagger \right] \\ &= -\frac{\pi^2}{8} \nu \nu_M \text{str} (Q \tau_z t Q_M \tau_z t^\dagger). \end{aligned} \quad (4.66)$$

В последнем выражении мы воспользовались седловым соотношением между Q и Гриновской функцией $(E\Lambda - \tau_z H + iQ/2\tau)^{-1}$ взятой в совпадающих точках. Мы вводим безразмерный туннельный кондактанс (в единицах e^2/h) контакта

$G_t = \pi^2 \nu \nu_M \text{tr}(tt^\dagger)$ (заметим, что под ν и ν_M подразумеваются полные плотности состояний, а не плотности в расчете на одну проекцию спина). Используя $Q_M = \Lambda$, мы переписываем действие

$$S_t = -\frac{G_t}{8} \text{str} \Lambda Q. \quad (4.67)$$

Таким образом, туннельный член действия имеет такую же структуру, как энергетический член, и дает мнимую добавку к E , см уравнение (4.7).

В.2 Вычисление плотности состояний

Низкие энергии $E \ll E_{\text{Th}}$

Локальная плотность состояний на поверхности топологического изолятора дана уравнением (4.12). Интеграл по матрице Q должен браться по седловому многообразию, определяемому уравнением Узаделя (4.9). Уравнение имеет два различных решения $\theta_{1,2}$, (см. уравнения (4.10), (4.11)) для угла θ_F . В фермионном секторе модели все остальные параметры зафиксированы, так что $\theta_{1,2}$ определяют две несвязанных области многообразия интегрирования. В то же время, в бозонном секторе допускается только одно решение $\theta_b = \theta_1$, в то время как k_B и χ_B свободны и образуют гиперboloид (переменная k_B должна быть мнимый для сходимости интеграла).

Чтобы вычислить плотность состояний, исходя из формулы (4.12), нужно выразить $\text{Str}(k\Lambda Q(r))$, $S[Q]$ и DQ через k_b , χ_b , η , и ζ в каждом из несвязанных частей многообразия. Однако, непосредственное использование нашей параметризации приводит к неопределенности в интеграле по подмножеству с $\theta_f = \theta_2$. Интеграл по грассмановым переменным $d\eta d\zeta$ равен нулю, в то время как интеграл по k_b логарифмически расходится. Чтобы раскрыть эту неопределенность, воспользуемся трюком, предложенном в работе.⁸³ Несвязанные подмножества нашего многообразия переходят друг в друга при преобразовании подобия

$$Q \mapsto T^{-1}QT, \quad T = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (4.68)$$

Воспользуемся нашей параметризацией (4.5), (4.6) в области $\theta_f = \theta_1$, а затем применим преобразование (4.68) и получим интеграл по второй области с $\theta_f =$

θ_2 . Из (4.68) видно, что мера интегрирования в двух областях одна и та же. Эту меру удобнее всего извлечь из супердетерминанта метрического тензора Q -матрицы.⁸⁰ Мера интегрирования есть

$$DQ = \frac{1}{2\pi} \tanh \frac{\kappa}{2} d\kappa d\chi_b d\eta d\zeta, \quad (4.69)$$

где $\kappa = ik_b$ (напомним, что k_b мнимое). Интегрирование происходит по гипер-болоиду $\kappa > 0$, $0 < \chi_b < 2\pi$.

Действие в двух несвязанных областях $\theta_f = \theta_{1,2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} S_1 &= -4i\pi\nu \int d^2r \epsilon \cos \theta_1 \left(\sinh^2 \frac{\kappa}{2} - i\eta\zeta \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \right) - \frac{i\pi}{2} \\ &= -2i\pi\tilde{x} \left(\sinh^2 \frac{\kappa}{2} - i\eta\zeta \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \right) - \frac{i\pi}{2}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= -4i\pi\nu \int d^2r \epsilon \cos \theta_1 \cosh^2 \frac{\kappa}{2} - \frac{i\pi}{2} \\ &= -2i\pi\tilde{x} \cosh^2 \frac{\kappa}{2} + \frac{i\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Здесь мы ввели безразмерную комплексную энергию $\tilde{x} = \int d^2r \epsilon \cos \theta_1 = x + i\gamma$, с действительной частью $x = E/\omega_0$ [см. уравнение (4.17)] и мнимой частью $\gamma = G_{tn}(r_0)/2\pi$. Мнимая часть возникает за счет туннельного контакта. Члены $\pm i\pi/2$ в выражениях (4.70), (4.71) получаются из топологического члена $S_\theta[Q]$, см. уравнение (4.8). Получив выражение для DQ и для действий $S_{1,2}$, мы можем вычислить полную статистическую сумму теории,

$$\int DQ e^{-S[Q]} = \int_0^\infty \tanh \frac{\kappa}{2} d\kappa d\eta d\zeta \exp \left[2i\pi\tilde{x} \left(\sinh^2 \frac{\kappa}{2} - i\eta\zeta \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \right) + \frac{i\pi}{2} \right] = 1. \quad (4.72)$$

Именно такой ответ и должен получаться для статистической суммы суперсимметрической теории. Отметим, что топологически нетривиальный сектор не дает вклада в этот ответ, поскольку S_2 не содержит Грассмановых переменных.

Чтобы получить плотность состояний, нам нужно написать предэкспоненту выражения (4.12). В нашей параметризации он имеет следующий вид в двух секторах:

$$\frac{\nu}{8} \text{Str}(k\Lambda Q) = \nu \cos \theta_1 \times \begin{cases} \cosh^2 \frac{\kappa}{2}, & \theta_f = \theta_1, \\ \sinh^2 \frac{\kappa}{2} - i\eta\zeta \cosh^2 \frac{\kappa}{2}, & \theta_f = \theta_2. \end{cases} \quad (4.73)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\rho &= \nu \cos \theta_1 \operatorname{Re} \int_0^\infty \tanh \frac{\kappa}{2} d\kappa d\eta d\zeta \left\{ \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \exp \left[2i\pi \tilde{x} \left(\sinh^2 \frac{\kappa}{2} - i\eta\zeta \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \right) + \frac{i\pi}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\sinh^2 \frac{\kappa}{2} - i\eta\zeta \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \right) \exp \left[2i\pi \tilde{x} \cosh^2 \frac{\kappa}{2} - \frac{i\pi}{2} \right] \right\} \\
&= \nu \cos \theta_1 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\kappa \cosh \frac{\kappa}{2} \sinh \frac{\kappa}{2} \left[-2i\pi \tilde{x} \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \exp \left(2i\pi \tilde{x} \sinh^2 \frac{\kappa}{2} \right) + \exp \left(2i\pi \tilde{x} \cosh^2 \frac{\kappa}{2} \right) \right] \\
&= \nu \cos \theta_1 \left(1 - \operatorname{Re} \frac{1 + e^{2i\pi \tilde{x}}}{2i\pi \tilde{x}} \right) = \nu \cos \theta_1 \left[1 + \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)} - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} \right]. \quad (4.74)
\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались условием $\gamma \ll 1$. Результат (4.74) совпадает с написанным в уравнениях (4.14) – (4.16). В туннельном пределе $\gamma \rightarrow 0$ Лорентцовский член превращается в δ -функцию. Это означает, что Майорановское состояние защищено в замкнутой системе и не размывается беспорядком.

Заметим, что для аналогичной модели класса D, не имеющего топологического члена в действии, плотность состояний не содержит Майорановского пика. Два топологических сектора дают вклады одного знака.⁸³

$$\rho_D = \nu \cos \theta_1 \left[1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} \right]. \quad (4.75)$$

Подчеркнем, однако, что само присутствие топологического члена в действии еще не гарантирует существования Майорановской моды в системе. Так, для двойного вихря (то есть при сверхпроводящей фазе, оборачивающейся на 4π) топологическое действие для двух секторов отличается на $2i\pi$, и статистика уровней описывается функцией (4.75).

Высокие энергии $E_{\text{Th}} \ll E \ll \Delta$

В предыдущем параграфе мы вычислили плотность состояний при низких энергиях. Функция (4.74) имеет δ -пик в нуле энергии, а также осцилляции, затухающие на характерном масштабе ω_0 . Эти осцилляции возникают за счет отталкивания уровней. Масштаб ω_0 есть глобальное среднее межуровневое расстояние внутри дырки. При высоких энергиях $E \gg \omega_0$, расталкиванием уровней при рассмотрении плотности состояний можно пренебречь, и пользоваться плотностью состояний в приближении среднего поля

$$\rho(r, E) = \nu \operatorname{Re} \cos \theta(r, E), \quad (4.76)$$

где θ подчиняется уравнению Узаделя (4.9) с $k = 0$. Формула (4.76) может быть получена из сигма-модельного равенство (4.12) интегрированием по Q около глобального минимума действия, определяемого уравнением Узаделя. Суперсимметрия гарантирует, что интегрирование по малым флуктуациям около минимума даст единицу, откуда следует справедливость (4.76).

Уравнение Узаделя – сложно нелинейное уравнение, которое не решается аналитически при произвольных E . При достаточно низких энергиях $\omega_0 \ll E \ll E_{\text{Th}}$, решение можно искать пертурбативно по E . Линейная поправка к θ по E чисто мнимая, так что измеримую поправку дает квадратичное приближение по E . Энергетическая и пространственная зависимости в этой поправке уже не разделяются, в отличие от основного члена (4.14). Технически теория возмущений второго порядка сводится к решению линейных дифференциальных уравнений, получаемых линеаризацией уравнения (4.9), и приводит в очень громоздким ответам. Мы не будем обсуждать эти вычисления здесь.

При более высоких энергиях, когда энергия превосходит энергию Таулесса $E_{\text{Th}} \ll E \ll \Delta$, уравнение Узаделя удастся решать приближенно. Угол θ мал повсюду, кроме узкой полоски у края дырки. В этой области можно пренебречь кривизной края сверхпроводника и решать одномерное уравнение Узаделя

$$D \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + 2iE \sin \theta = 0. \quad (4.77)$$

С граничными условиями $\theta(R) = \pi/2$ и $\theta(r \ll R) \rightarrow 0$. Решение этого уравнения:

$$\theta = 4 \arctan \left[(\sqrt{2} - 1) \exp \left[\sqrt{-2i \frac{E}{E_{\text{Th}}}} \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \right] \right]. \quad (4.78)$$

Плотность состояния в таком случае определяется выражением (4.76) с θ , данным в уравнении (4.78). Видно, что θ уменьшается с $\pi/2$ до экспоненциально малых величин в узкой полоске ширины $\sim R \sqrt{E_{\text{Th}}/E}$ у границы дырки. Интегрирование по пространству дает полную плотность состояний

$$N(E \gg E_{\text{Th}}) = \pi \nu R^2 \left[1 - (2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{E_{\text{Th}}}{E}} \right]. \quad (4.79)$$

Это и есть результат (4.19).

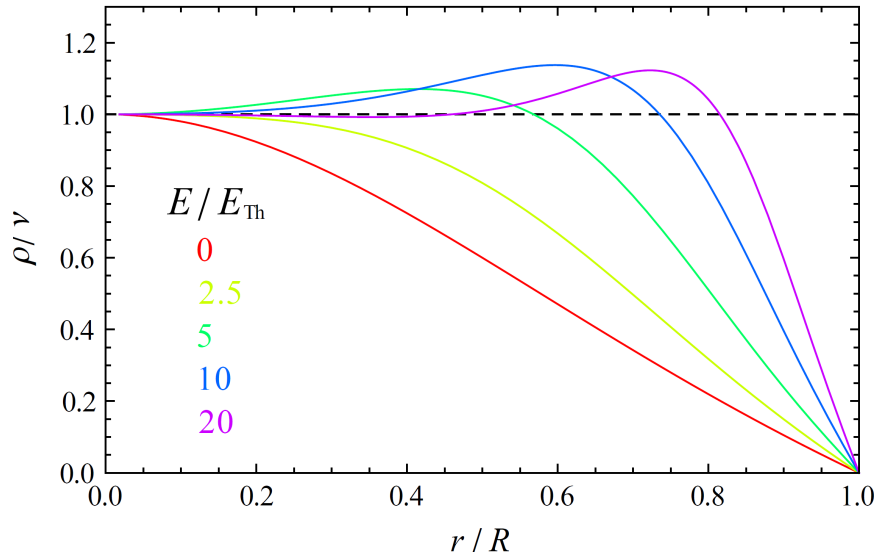


Рис. 4.4: Пространственная зависимость плотности состояний для разных значений E . При самых низких значениях энергии воспроизводится ответ (4.15), в то время как при энергиях много больших E_{Th} плотность состояний меньше нормальной только у границы дырки, в полосе шириной $\sim R\sqrt{E_{Th}/E}$, в согласии с уравнением (4.78). Примечательно, что плотность состояний сначала возрастает и превышает ν , и только затем резко падает до нуля при $r = R$.

Мы также численно решили уравнение Узаделя во всем диапазоне энергий ниже Δ . Пространственная зависимость соответствующих этим решениям $\rho(E, r)$ приведена на Рис. 4.4, а энергетическая зависимость полной плотности состояний – на Рис. 4.3. Численно решение прекрасно сшивается с аналитическими ответами как при низких энергиях (разумеется, с точностью до δ -пика и осцилляций), так и высокоэнергетической асимптотикой (4.79).

Публикации по теме диссертации

1. P. A. Ioselevich and M. V. Feigel'man, *Anomalous Josephson Current via Majorana Bound States in Topological Insulators*, Phys. Rev. Lett. **106**, 077003 (2011).
2. P. A. Ioselevich, P. M. Ostrovsky, and M. V. Feigel'man, *Majorana state on the surface of a disordered three-dimensional topological insulator*, Phys. Rev. B **86**, 035441 (2012).
3. P. A. Ioselevich and M. V. Feigel'man, *Tunneling conductance due to discrete spectrum of Andreev states*, New J. Phys. **15** 055011 (2013).

Литература

- ¹ C. L. Kane, and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 226801 (2005).
- ² C. L. Kane, and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005).
- ³ L. Fu, C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **98**, 106803 (2007).
- ⁴ J. E. Moore, L. Balents, Phys. Rev. B **75**, 121306(R) (2007).
- ⁵ R. Roy, Phys. Rev. B **79**, 195322 (2009).
- ⁶ B. A. Bernevig, T. A. Hughes, and S. C. Zhang, Science **314**, 1757 (2006).
- ⁷ L. Fu, C. L. Kane, Phys. Rev. B **76**, 045302 (2007).
- ⁸ M. König, S. Wiedmann, C. Brne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X. L. Qi and S. C. Zhang, Science **318**, 766 (2007).
- ⁹ D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava, and M. Z. Hasan, Nature **452**, 970 (2008).
- ¹⁰ Y. Xia, D. Qian, D. Hsieh, L. Wray, A. Pal, H. Lin, A. Bansil, D. Grauer, Y. S. Hor, R. J. Cava, and M. Z. Hasan, Nat. Phys. **5**, 398 (2009).
- ¹¹ H. Zhang, C. X. Liu, X. L. Qi, X. Dai, Z. Fang and S. C. Zhang, Nat. Phys. **5**, 438 (2009).
- ¹² D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
- ¹³ X. G. Wen, Advances in Physics **44**, 405 (1995).
- ¹⁴ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Статистическая физика*, (Москва, 1963).
- ¹⁵ W. P. Su, J. R. Schrieffer, A. J. Heeger, Phys. Rev. Lett. **42**, 1698 (1979).
- ¹⁶ A. Kitaev, AIP Conf. Proc. **1134**, 22 (2009).
- ¹⁷ A. P. Schnyder, *et al.*, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).

- ¹⁸ Z. Wang, X.L. Qi, S.C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **105**, 256803 (2010).
- ¹⁹ G. E. Volovik, Sov. Phys. JETP, **67**, 1804 (1988).
- ²⁰ G. E. Volovik, JETP Lett. **75**, 63 (2002).
- ²¹ X.-L. Qi, S.-C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
- ²² M. Z. Hasan, C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
- ²³ A. Yu. Kitaev, Physics-Uspekhi **44**, 131-136 (2001).
- ²⁴ R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **105**, 077001 (2010)
- ²⁵ Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **105**, 177002 (2010).
- ²⁶ V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, Science **336**, 1003 (2012).
- ²⁷ A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, and H. Shtrikman, Nature Physics **8**, 887-895 (2012).
- ²⁸ M. T. Deng, C. L. Yu et al, Nano Lett. **12**, 6414-6419 (2012).
- ²⁹ L. P. Rokhinson, X. Liu, and J. K. Furdyna, Nature Physics **8**, 795 (2012).
- ³⁰ L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **100**, 096407 (2008).
- ³¹ C. Caroli, P. G. de Gennes, and J. Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).
- ³² D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001).
- ³³ N. Read, D. Green, Phys. Rev. B, **61**, 10267 (2000).
- ³⁴ K. T. Law, P. A. Lee, and T. K. Ng, Phys. Rev. Lett. **103**, 237001 (2009).
- ³⁵ H.-J. Kwon, K. Sengupta, V. M. Yakovenko, Low Temperature Physics **30**, 613-619 (2004).
- ³⁶ L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. B **79**, 161408 (2009).
- ³⁷ Y. Ran, P. Hosur, and A. Vishwanath, Phys. Rev. B **84**, 184501 (2011).

- ³⁸ C. W. J. Beenakker and H. van Houten, Phys. Rev. Lett. **66**, 3056 (1991).
- ³⁹ N. B. Kopnin and M. M. Salomaa, Phys. Rev. B **44**, 9667 (1991).
- ⁴⁰ G. E. Volovik, JETP Lett. **70**, 609 (1999).
- ⁴¹ M. I. Katsnelson, Materials Today, **10**, NN. 1-2, PP. 20-27 (2007).
- ⁴² I. M. Khaymovich, N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, I. A. Shereshevskii, Phys. Rev. B **79**, 224506 (2009).
- ⁴³ Y. Zhang, Y. Ran, and A. Vishwanath Phys. Rev. B **79**, 245331 (2009).
- ⁴⁴ P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **105**, 036803 (2010).
- ⁴⁵ M. T. Tuominen, J. M. Hergenrother, T. S. Tighe, M. Tinkham, Phys. Rev. Lett. **69**, 1997 (1992).
- ⁴⁶ K. Flensberg, Phys. Rev. B **82**, 180516 (2010).
- ⁴⁷ P. A. Ioselevich and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. Lett. **106**, 077003 (2011).
- ⁴⁸ P. San-Jose, E. Prada, R. Aguado, Phys. Rev. Lett. **108**, 257001 (2012).
- ⁴⁹ D. I. Pikulin, Yuli V. Nazarov, Phys. Rev. B **86**, 140504 (2012).
- ⁵⁰ E. Prada, P. San-Jose, R. Aguado, Phys. Rev. B **86**, 180503(R) (2012)..
- ⁵¹ P. A. Ioselevich, P. M. Ostrovsky, and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. B **86**, 035441 (2012).
- ⁵² L. Jiang, D. Pekker et al, Phys. Rev. Lett. **107**, 236401 (2011).
- ⁵³ C.-H. Lin, J. D. Sau, S. Das Sarma, Phys. Rev. B **86**, 224511 (2012)..
- ⁵⁴ D. I. Pikulin, J. P. Dahlhaus, M. Wimmer, H. Schomerus, C. W. J. Beenakker, New J. Phys. **14**, 125011 (2012).
- ⁵⁵ L. Jiang, D. Pekker, J. Alicea, G. Refael, Yu. Oreg, A. Brataas, F. von Oppen, Phys. Rev. B **87**, 075438 (2013).

- ⁵⁶ J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **104**, 040502 (2010).
- ⁵⁷ A. L. Rakhmanov, A. V. Rozhkov, and Franco Nori, Phys. Rev. B **84**, 075141 (2011).
- ⁵⁸ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Квантовая механика, нерелятивистская теория*, (Москва, 1963).
- ⁵⁹ A. F. Andreev, Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964).
- ⁶⁰ L. S. Levitov and G. B. Lesovik, JETP Lett. **58**, 230 (1993).
- ⁶¹ G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **25**, 4515-4532 (1982).
- ⁶² Y. Tanaka and S. Satiwaya, Phys. Rev. Lett. **74**, 17 (1995).
- ⁶³ S. Kashiwaya and Y. Tanaka, Rep. Prog. Phys. **63**, 1641-1724 (2000).
- ⁶⁴ Y. Tanaka, Yu. V. Nazarov, and S. Kashiwaya, Phys. Rev. Lett. **90**, 16 (2003).
- ⁶⁵ M. Wimmer, A. R. Akhmerov, J. P. Dahlhaus and C. W. J. Beenakker, New J. Phys. **13**, 053016 (2011)
- ⁶⁶ A. R. Akhmerov, J. P. Dahlhaus, F. Hassler, M. Wimmer, and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **106**, 057001 (2011).
- ⁶⁷ D. I. Pikulin and Yuli V. Nazarov, JETP Letters, Vol. 94, No. 9, pp. 693-697 (2011).
- ⁶⁸ Y. Asano and Y. Tanaka, Phys. Rev. B **87**, 104513 (2013).
- ⁶⁹ C. W. J. Beenakker, J. P. Dahlhaus, M. Wimmer, and A. R. Akhmerov, Phys. Rev. B **83**, 085413 (2011)
- ⁷⁰ M. V. Feigel'man and M. A. Skvortsov, Phys. Rev. Lett. **78**, 2640 (1997).
- ⁷¹ M. A. Skvortsov and M. V. Feigel'man, Physica C: Superconductivity, **332**, 432 (2000).

- ⁷² H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles, Jr., and J. V. Waszczak, Phys. Rev. Lett. **62**, 214 (1989).
- ⁷³ Ch. Renner, A. D. Kent, Ph. Niedermann, O. Fischer, and F. Levy, Phys. Rev. Lett. **67**, 1650 (1991).
- ⁷⁴ A. Shailos, W. Nativel, A. Kasumov et al, Euro. Phys. Lett. **79**, 57008 (2007).
- ⁷⁵ M. V. Feigel'man, M. A. Skvortsov, and K. S. Tikhonov, JETP Lett. **88**, 747 (2008).
- ⁷⁶ B. Sacepe, J. B. Oostinga, J. Li et al, Nature Communications 2:575 (2011).
- ⁷⁷ A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, and M. N. Zubarev, Phys. Rev. B **79**, 134529 (2009).
- ⁷⁸ Gleb A. Skorobogatko, Phys. Rev. B **85**, 075310 (2012).
- ⁷⁹ A. Altland and M. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).
- ⁸⁰ K. B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, New York, 1997).
- ⁸¹ E. Witten, Commun. Math. Phys. **92**, 455 (1984).
- ⁸² V. Koziy and M. A. Skvortsov, JETP Lett. **94**, 222 (2011).
- ⁸³ D. A. Ivanov, J. Math. Phys. **43**, 126 (2002).
- ⁸⁴ D. Bagrets, A. Altland, Phys. Rev. Lett. **109**, 227005 (2012).
- ⁸⁵ E. J. König, P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, A. D. Mirlin, Phys. Rev. B, **85**, 195130 (2012).
- ⁸⁶ G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- ⁸⁷ G. E. Volovik, JETP Lett. **90**, 587 (2009).
- ⁸⁸ C. W. J. Beenakker, D. I. Pikulin, T. Hyart, J. P. Dahlhaus, Phys. Rev. Lett. **110**, 017003 (2013).