ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Л. Д. ЛАНДАУ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ШАРАФУТДИНОВ Азат Уралович

Спиновые корреляции в квантовых точках и наночастицах

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черноголовка – 2015

Оглавление

Введение

В диссертационной работе изложены результаты исследования спиновых корреляций в квантовых точках и наночастицах. Основное внимание уделено области вблизи порога стоунеровской неустойчивости, а также эффектам, связанным с анизотропией обменного взаимодействия.

Актуальность темы. Квантовые точки и наночастицы являются типичным примером нульмерной сильнокоррелированной электроной системой. Одноэлектронный спектр электронов для данной квантовой точки или наночастицы может быть найден из решения уравнения Шредингера с соответствующими граничными условиями. Однако, найденный таким образом спектр не информативен, так как, например, изменение затворного напряжения меняет удерживающий потенциал квантовой точки, а значит и спектр. Поэтому интерес представляют статистические характеристики одноэлектронного спектра. Хорошо известно [45], что статистика уровней в квантовых точках описывается теорией случайных матриц. На физику электронов в квантовых точках оказывает сильное влияние взаимодействие в зарядовом (кулоновское), спиновом (обменное) и куперовском каналах, которое может привести к различным корреляционным эффектам. Одним из наиболее известных эффектов такого рода является кулоновская блокада — подавление транспорта через квантовую точку при низких температурах из-за сильного кулоновского взаимодействия (обычно много большего типичного расстояния между одночастичными уровнями энергии), препятствующего появлению лишнего электрона на квантовой точке. Наличие обменного взаимодействия проявляется в спиновых корреляциях. Это более тонкие эффекты, так как типично обменное взаимодействие не превышает среднего расстояния между одночастичными уровнями энергии. Однако, эффекты обменного взаимодействия проявляются экспериментально. В частности, они проявляются в статистике флуктуаций высот и расстояний между кулоновскими пиками [8],[28]. Наиболее красивый эффект, связанный с наличием обменного взаимодействия, это мезоскопическая стоунеровская неустойчивость — появление ненулевого конечного полного спина на квантовой точке при приближении к порогу стоунеровской неустойчивости [22]. Оказалось, что эффект зависит от типа обменного взаимодействия: для изотропного(гейзенберговского) обменного взаимодействия он присутствует, а для изинговского обменного взаимодействия — нет. В данной диссертационной работе мы сконцентрируемся на исследовании влияния обменного взаимодействия на термодинамические и транспортные свойства электронов в квантовых точках и наночастицах. Исследование динамики и транспорта необходимо для понимания того, как управлять и контролировать в лабораторных условиях квантовые точки и наночастицы.

Цель работы. Главная цель работы - исследование влияния обменного взаимодействия на термодинамические и транспортные свойства электронов в квантовых точках и наночастицах. Особое внимание уделяется области вблизи перехода Стоунера и роли анизотропии обменного взаимодействия. Для достижения главной цели в диссертационной работе были поставлены следующие цели:

1) Точное аналитическое решение гамильтониана нульмерной модели с анизотропным обменным взаимодействием для произвольного спектра одночастичных уровней, в том числе вычисление статистической суммы, продольной и поперечной спиновых восприимчивостей, и туннельной плотности состояний.

2) Изучить для случая эквидистантного спектра одночастичных уровней проявление спиновых корреляций, вызванных обменным взаимодействием, в физических величинах, характеризующих электроны в квантовых точках и наночастицах, в том числе в продольной и поперечной восприимчивостях, и в туннельной плотности состояний.

3) Изучить влияние флуктуаций спектра одночастичных уровней на спиновые корреляции, вызванные обменным взаимодействием, в физических величинах, характеризующих электроны в квантовых точках и наночастицах, в том числе в продольной и поперечной восприимчивостях, и в туннельной плотности состояний.

4) Изучить влияние резервуара, с которым соединена квантовая точка или наночастица, на проявление спиновых корреляций, вызванных обменным взаимодействием.

Научная новизна работы заключается в следующих оригинальных результатах, которые выносятся на защиту:

1) Найдено точное аналитическое решение гамильтониана нульмерной модели с анизотропным обменным взаимодействием для произвольного спектра одночастичных

уровней для статистической суммы, продольной и поперечной спиновых восприимчивостей, и туннельной плотности состояний.

2) Для случая эквидистантного спектра одночастичных уровней показано, что а) огибающая динамическая спиновой восприимчивости имеет один максимум и один минимум как функция частоты, б) огибающая туннельной плотности состояний как функция энергии имеет один дополнительный максимум, связанный с наличием ненулевого полного спина в основном состоянии гамильтониана нульмерной модели.

3) Для случаев гейзенберговского и изинговского обменного взаимодействий, доказано, что флуктуации спектра одночастичных уровней не приводят к смещению стоунеровской неустойчивости. Показано, что хвосты функции распределения статической спиновой восприимчивости являются экспоненциальными.

4) Выведено эффективное действие, описывающее динамику полного спина квантовой точки для случая соединения ее с резервуаром туннельным контактом.

Все результаты работы получены впервые, выводы, сделанные на их основе, обоснованы надежностью применявшихся аналитических методов, согласием с теоретическими результатами, полученными другими авторами. Развитые в диссертационной работе теоретические методы могут быть использованы для описания широкого круга явлений в электронном транспорте в квантовых точках и наночастицах.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2014 – 2015 годах в 3-х научных работах, список которых приводится в конце диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, двух приложений, списка публикаций и списка литературы.

Структура диссертации. В **первой главе** приводятся необходимые сведения об универсальном гамильтониане с анизотропным обменным взаимодействием, а также вывод точных выражений для статистической суммы, продольной и поперечной спиновых восприимчивостей, туннельной плотности состояний при произвольном одночастичном спектре квантовой точки. Во **второй главе** приведен анализ точных формул полученных в первой главе для эквидистантного спектра.

В **третьей главе** производится учет влияния флуктуаций одночастичного спектра относительно эквидистантного спектра. При малых флуктуациях учет выполнен по теории возмущений, при больших сделана оценка функции распределения спиновой восприимчивости и её моментов. В **четвертой главе** проделан вывод мацубаровского АЭШ действия для квантовой точки связанной туннельным образом с контактами. В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы, выносимые на защиту. В **приложения** вынесены громоздкие вычисления.

Глава 1

Универсальный гамильтониан с анизотропным обменным взаимодействием

1.1 Введение

В металлическом режиме, когда энергия Таулесса E_{Th} велика по сравнению со средним расстоянием между одночастичными уровнями энергий δ, квантовая точка хорошо описывается достаточно простым универсальным гамильтонианом: мезоскопические флуктуации около этого универсального гамильтониана подавлены по параметру δ/E_{Th}. Преимущество универсального гамильтониана состоит в том, что межэлектронное взаимодействие вместо полного набора матричных элементов характеризуется всего тремя параметрами: зарядовой энергией E_c, обменной энергией J^0 и энергией взаимодействия в куперовском канале J_c. Отметим, что универсальный гамильтониан допускает подход с помощью анзаца Бете [17].

В нашем исследовании мы будем использовать следующие стандартные допущения. Мы не рассматриваем взаимодействие в куперовском канале, которое приводит сверхпроводящим корреляциям в квантовых точках [39]. Это допустимо при отталкивающем взаимодействии в куперовском канале. Хотя наш точный аналитический результат для туннельной плотности состояний в случае одноосевой анизотропии верен для произвольного одночастичного спектра, при его анализе мы будем исследовать эффекты случайности спектра. Как было отмечено выше в этом случае нужно учитывать поправки к нуль-мерному гамильтониану, которые порождены флуктуациями матричных элементов электрон-электронного взаимодействия, несмотря на металлический режим $\delta/E_{Th} \ll 1$. В случае изотропного обменного взаимодействия эти поправки пренебрежимо малы [40].

1.1.1 Гамильтониан

Универсальный гамильтониан с прямым кулоновским и анизотропным спиновым взаимодействием записывается следующим образом

$$H = H_0 + H_C + H_S. \tag{1.1}$$

Гамильтониан невзаимодействующих электронов,

$$H_0 = \sum_{\alpha,\sigma} \epsilon_{\alpha,\sigma} a^\dagger_{\alpha\sigma} a_{\alpha\sigma}, \tag{1.2}$$

записывается, как обычно, через операторы рождения ($a^\dagger_{\alpha\sigma}$) и уничтожения ($a_{\alpha\sigma}$). Он содержит в себе зависящие от спина ($\sigma = \pm$) одночастичные уровни $\epsilon_{\alpha,\sigma}$. В дальнейшем мы будем предполагать что уровни испытывают Зеемановское расщепление магнитным полем B, т.е. $\epsilon_{\alpha,\sigma} = \epsilon_\alpha + g_L \mu_B B\sigma/2$. Здесь g_L и μ_B g-фактор Ланде и магнетон Бора. Зарядовая часть гамильтониана

$$H_C = E_c(\hat{n} - N_0)^2, \tag{1.3}$$

описывает прямое кулоновское взаимодействие в нульмерном приближении, $E_{\mathrm{Th}}/\delta \gg 1$. Здесь

$$\hat{n} = \sum_\alpha n_\alpha = \sum_{\alpha,\sigma} a^\dagger_{\alpha,\sigma} a_{\alpha,\sigma} \tag{1.4}$$

оператор числа частиц и N_0 наведенный затвором заряд. Слагаемое,

$$H_S = -J_\perp(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2) - J_z \hat{S}_z^2, \tag{1.5}$$

представляет собой обменное взаимодействие внутри КТ. Оператор полного спина

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} a^\dagger_{\alpha\sigma} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} a_{\alpha\sigma'} \tag{1.6}$$

определен через стандартные матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}$. В случае изотропного, Гейзенберговского обмена $J_\perp = J_z$, гамильтониан (1.1) сводится к универсальному гамильтониану, который описывает КТ в пределе $E_{\mathrm{Th}}/\delta \gg 1$. [22] В этом предельном случае одночастичные уровни ϵ_α случайны. Их статистика (в отсутствии магнитного поля, $B = 0$) описывается ортогональным ансамблем Вигнера-Дайсона. Гамильтониан (1.1) с Изинговским обменом,

$J_\perp = 0$, и $B = 0$ может быть использован для описания двумерных КТ со спин орбитальным взаимодействием, [21, 18] В этом случае статистика ϵ_α описывается унитарным ансамблем Вигнера-Дайсона.

Полезно сравнить изотропный (гейзенберговский) и изинговский случаи обменного взаимодействия. Последний, в частности, может быть реализован в двумерной квантовой точке при наличии спин-орбитального взаимодействия. Спин-орбитальное взаимодействие приводит к тому, что описание с помощью универсального гамильтониана становится неприменимым. Это происходит из-за того, что в этом случае нельзя пренебречь флуктуациями матричных элементов взаимодействия даже в металлическом режиме, $\delta/E_{\mathrm{Th}} \ll 1$ [18, 20]. В двумерных квантовых точках с компонентами орбитального момента смешиваются только компоненты спина, лежащие в плоскости квантовой точки, тогда как перпендикулярная проекция спина коммутирует с гамильтонианом. Если параметры квантовой точки удовлетворяют следующему условию, $(\lambda_{SO}/L)^2 \gg (E_{\mathrm{Th}}/\delta)(L/\lambda_{SO})^4 \gg 1$, где λ_{SO} характерная длина спин-орбитального взаимодействия, низкоэнергетическое описание дается универсальным гамильтонианом с изинговским обменным взаимодействием $(J_z > 0)$ [18, 21]. В этом случае для эквидистантного спектра мезоскопической стоунеровской неустойчивости нет [22]. Так как полный спин в основном состоянии равен нулю для всех $J_z < \delta$, туннельная состояний почти не зависит от J_z [23].

Простейший способ изучить переход от гейзенберговского к изинговскому обменному взаимодействию это рассмотреть универсальный гамильтониан с одноосевой анизотропией обменного взаимодействия. Хотя эта модель не имеет полноценного микроскопического обоснования она может быть применима для ферромагнитных частиц нанометрового размера. Заметим, что существенная анизотропия обменного взаимодействия была обнаружена в экспериментах по изучению туннельного спектра таких наночастиц [24]. Модель похожая на гамильтониан с анизотропным обменным взаимодействием позволяет объяснить основные особенности экспериментально измеренного спектра возбуждений [7]. Анизотропия обменного взаимодействия может быть вызвана магнитокристаллической анизотропией в объеме, анизотропией поверхности и формы. Наличие спин-орбитального взаимодействия приводит к большим мезоскопическим флуктуациям в анизотропной части обменного взаимодействия [25, 26]. В квантовых точках анизотропное обменное взаимодействие может быть вызвано ферромагнитными контактами [27].

1.2 Точное аналитическое выражение для статистической суммы

Статистическая сумма в большого канонического ансамбля для гамильтониана (1.1) определяется стандартным образом $Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta H + \beta\mu\hat{n}}$ (μ - химический потенциал). Она может быть найдена с помощью следующего трюка. Разобьем H_S на гейзенберговскую и изинговскую составляющие:

$$H_S = -J_\perp \hat{\boldsymbol{S}}^2 - (J_z - J_\perp)\hat{S}_z^2. \tag{1.7}$$

Тогда оператор эволюции в мнимом времени может быть записан следующим образом.

$$e^{-\tau H_S} = \frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\pi|J_z - J_\perp|}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{B}\, \exp\left(-\frac{\tau\mathcal{B}^2}{4|J_z - J_\perp|}\right) e^{\tau J_\perp \hat{\boldsymbol{S}}^2 - \eta\mathcal{B}\hat{S}_z}, \tag{1.8}$$

где $\eta = \sqrt{\operatorname{sgn}(J_z - J_\perp)}$. Экспонента во второй строчке (1.8) наводит на мысль что, статистическая сумма для гамильтониана (1.1) может быть найдена в два шага. Во-первых, можно использовать известные результаты для случая изотропного обмена и эффективного магнитного поля $B + \eta\mathcal{B}/(g_L\mu_B)$. [28, 29] Во-вторых нужно проинтегрировать по эффективному магнитному полю $\mathcal{B}$ с ядром указанным в первой строке (1.8). Таким образом, мы получаем следующий точный (без приближений) результат для статистической суммы большого канонического ансамбля для гамильтониана (1.1):

$$Z(b) = \sum_{n_\uparrow, n_\downarrow} Z_{n_\uparrow} Z_{n_\downarrow} e^{-\beta E_c(n-N_0)^2 + \beta J_\perp m(m+1) + \beta\mu n} \operatorname{sgn}(2m+1) \sum_{l=-|m+1/2|+1/2}^{|m+1/2|-1/2} e^{\beta(J_z - J_\perp)l^2 - \beta b l}. \tag{1.9}$$

Здесь $b = g_L\mu_B B/2$. Целые числа $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ представляют собой число частиц со спином вверх и спином вниз, соответственно. Полное число электронов $n = n_\uparrow + n_\downarrow$, и $m = (n_\uparrow - n_\downarrow)/2$. Заметим, что для конфигурации с заданными $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ полный спин равен $S = |m + 1/2| - 1/2$. Целое число l соответствует z проекции полного спина $\boldsymbol{S}$. Множители $Z_{n_\uparrow}$ и $Z_{n_\downarrow}$ являются статистическими суммами канонического ансамбля для $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ невзаимодействующих бесспиновых электронов. Каноническая статистическая сумма считает вклады от одночастичных уровней энергии и дается интегралом Дарвина-Фаулера:

$$Z_n = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-in\theta} \prod_\gamma \left(1 + e^{i\theta - \beta\epsilon_\gamma}\right). \tag{1.10}$$

Для гейзенберговского обменного взаимодействия, $J_\perp = J_z$ ответ (1.9) совпадает с результататми известными из литературы. [28, 30, 29]. В случае изинговского обменного взаимодействия, $J_\perp = 0$, результат (1.9) согласуется с результатами из [23]. Заметим, что результат (1.9) может быть получен напрямую из (1.1) с помощью преобразования Вея-Нормана-Колоколова (см. Приложение A).

Для анализа выражения (1.9) для статистической суммы большого канонического ансамбля будет удобно использовать следующее, полностью эквивалентное интегральное представление:

$$Z(b) = \frac{e^{-\beta J_\perp/4}}{2\pi\sqrt{J_\perp|J_z - J_\perp|}} \int_{-\infty}^{\infty} dh d\mathcal{B}\, e^{-\frac{h^2}{\beta J_\perp}} e^{-\frac{\beta(b+\eta\mathcal{B})^2}{4J_\perp}} \frac{\operatorname{sh}(h)\operatorname{sh}\big((b+\eta\mathcal{B})h/J_\perp\big)}{\operatorname{sh}\big(\beta(b+\eta\mathcal{B})/2\big)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(k-N_0)^2}$$
$$\times e^{-\frac{\beta\mathcal{B}^2}{4|J_z-J_\perp|}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi_0}{2\pi} e^{i\phi_0 k} \prod_\sigma e^{-\beta\Omega_0(\mu - i\phi_0 T + \sigma h T)}. \qquad (1.11)$$

Статистическая сумма большого канонического ансамбля для невзаимодействующих электронов определяется обычным образом

$$\Omega_0(\mu) = -T \ln \prod_\gamma \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_\gamma - \mu)}\right). \qquad (1.12)$$

Величины ϕ_0 и h имеют смысл нуль-частотной мацубаровской компоненты электрического потенциала и модуля эффективного магнитного поля, которые используются для того, чтобы расцепить вклады прямого кулоновского [31] и обменного взаимодействия [23, 32], соответственно.

1.3 Точное аналитическое выражение для спиновой восприимчивости

1.3.1 Продольная спиновая восприимчивость

Общие выражения (1.9) и (1.11) для статистической суммы большого канонического ансамбля Z позволяют нам получить результат для продольной спиновой восприимчивости:

$$\chi_{zz}(T, b) \equiv T \frac{\partial^2}{\partial b^2} \ln Z = \qquad (1.13)$$

$$\chi_{zz} = \frac{e^{-\beta J_\perp/4}}{2\pi\sqrt{J_\perp^5|J_z - J_\perp|}} \int_{-\infty}^{\infty} dh d\mathcal{B}\, e^{-\frac{1}{4\beta J_\perp}[4h^2 + \beta^2(b+\eta\mathcal{B})^2]} \frac{\operatorname{sh}(h)}{\operatorname{sh}^3\big(\beta(b+\eta\mathcal{B})/2\big)} e^{-\frac{\beta\mathcal{B}^2}{4|J_z - J_\perp|}]}$$
$$\times \Big[\operatorname{sh}\big((b+\eta\mathcal{B})h/J_\perp\big)\big(h^2 \operatorname{sh}^2\frac{\beta(b+\eta\mathcal{B})}{2} + \frac{\beta^2 J_\perp^2}{4}(1 + \operatorname{ch}^2\frac{\beta(b+\eta\mathcal{B})}{2})$$
$$- \frac{\beta h}{2}\operatorname{ch}\big((b+\eta\mathcal{B})h/J_\perp\big)\operatorname{sh}\beta(b+\eta\mathcal{B})\big)\Big] \prod_\sigma e^{\beta\Omega_0(\tilde{\mu}) - \beta\Omega_0(\tilde{\mu} + h\sigma/\beta)} \tag{1.14}$$

Заметим, что в нулевом магнитном поле можно пользоваться эквивалентной формулой

$$\chi_{zz}(T, b=0) = \partial \ln Z/\partial J_z \tag{1.15}$$

чтобы упростить расчеты. Как известно [31, 33], при $T \gg \delta$ (в интересующем нас режиме) мы можем проинтегрировать по ϕ_0 в (1.11) в седловом приближении. Тогда статистическая сумма в большом каноническом ансамбле разбивается на два сомножителя:

$$Z = Z_C Z_S, \tag{1.16}$$

где

$$Z_C = \sqrt{\frac{\beta\Delta}{4\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(n-N_0)^2 + \beta(\mu-\mu_n)n - 2\beta\Omega_0(\mu_n)}. \tag{1.17}$$

Здесь μ_n - решение седлового уравнения на седловую точку $n = -2\partial\Omega_0(\mu)/\partial\mu$ и

$$\Delta^{-1} = -\frac{\partial^2\Omega_0(\mu)}{\partial\mu^2}\Big|_{\mu=\mu_n} \tag{1.18}$$

термодинамическая плотность состояний на уровне Ферми. Заметим, что в режиме $T \ll E_c$ (которым мы и интересуемся) можно приближать μ_n с помощью $\tilde{\mu} = \mu_{N_0}$. Сомножитель

$$Z_S = \frac{e^{-\beta J_\perp/4}}{2\pi\sqrt{J_\perp|J_z - J_\perp|}} \int_{-\infty}^{\infty} dh d\mathcal{B}\, e^{-\frac{1}{4\beta J_\perp}[4h^2 + \beta^2(b+\eta\mathcal{B})^2]} \frac{\operatorname{sh}(h)\operatorname{sh}\big((b+\eta\mathcal{B})h/J_\perp\big)}{\operatorname{sh}\big(\beta(b+\eta\mathcal{B})/2\big)} e^{-\frac{\beta\mathcal{B}^2}{4|J_z - J_\perp|}]}$$
$$\times \prod_\sigma e^{\beta\Omega_0(\tilde{\mu}) - \beta\Omega_0(\tilde{\mu} + h\sigma/\beta)} \tag{1.19}$$

описывает вклад в статистическую сумму за счет обменного взаимодействия. Вклад от зарядовой энергии Z_C не зависит от магнитного поля, поэтому не влияет на спиновую восприимчивость. Заметим, что нормировка такова, что $Z_S = 1$ для $b = J_\perp = J_z = 0$. Далее в этом разделе мы будем обсуждать только Z_S.

1.3.2 Поперечная спиновая восприимчивость

Поперечная спиновая восприимчивость определяется следующим образом (см, например, [34])

$$\chi_\perp(\omega) = \frac{i}{Z}\int\limits_0^\infty dt e^{i(\omega+i0^+)t}\,\mathrm{Tr}\Big([\hat{S}_+(t), \hat{S}_-(0)]e^{-\beta H}\Big), \tag{1.20}$$

где $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$. Т.к. операторы проекций полного спина $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ не коммутируют с гамильтонианом H (для $J_z \neq 0$) поперечная спиновая восприимчивость нетривиально зависит от частоты.

Чтобы найти поперечную динамическую спиновую восприимчивость (1.20) мы используем уравнения движения Гейзенберга: $d\hat{\boldsymbol{S}}/dt = i[H, \boldsymbol{S}]$. Т.к. операторы S_z коммутируют с гамильтонианом, то S_z сохраняется, $\hat{S}_z(t) = \hat{S}_z$. Для других компонент полного спина можно найти

$$\hat{S}^\pm(t) = e^{\mp 2i(J_\perp - J_z)\hat{S}_z t}\hat{S}^\pm(0)e^{-i(J_\perp - J_z)t \pm ibt} \equiv \hat{S}^\pm(0)e^{\mp 2i(J_\perp - J_z)\hat{S}_z t}e^{i(J_\perp - J_z)t \pm ibt}. \tag{1.21}$$

Используя соотношения (1.21) мы интегрируем по времени в (1.20) и получаем следующее операторное выражение для поперечной спиновой восприимчивости:

$$\chi_\perp(\omega) = \frac{1}{Z}\sum_{\sigma=\pm}\mathrm{Tr}\,\frac{\Big(\sigma\big[\hat{\boldsymbol{S}}^2 - \hat{S}_z^2\big] - \hat{S}_z\Big)e^{-\beta H}}{\omega + b + (J_\perp - J_z)(2\hat{S}_z + \sigma) + i0^+}. \tag{1.22}$$

Т.к. операторы $\hat{S}_z$ и $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ коммутируют с H, можно легко сосчитать след в (1.22) с помощью (1.9). Таким образом мы получаем точное выражение для динамической спиновой восприимчивости:

$$\chi_\perp(\omega) = \frac{1}{Z}\sum_{n_\uparrow, n_\downarrow} Z_{n_\uparrow}Z_{n_\downarrow}e^{-\beta E_c(n-N_0)^2 + \beta J_\perp m(m+1) + \beta\mu n}\,\mathrm{sgn}\,(2m+1)\sum_{l=-|m+1/2|+1/2}^{|m+1/2|-1/2} e^{\beta(J_z - J_\perp)l^2 - \beta b l}$$
$$\times \sum_{\sigma=\pm}\frac{\sigma\big[m(m+1) - l^2\big] - l}{\omega + b + (J_\perp - J_z)(2l + \sigma) + i0^+}. \tag{1.23}$$

В дальнейшем нас будет интересовать мнимая часть спиновой восприимчивости $\chi_\perp(\omega)$. Вещественная часть может быть восстановлена с помощью соотношений Крамерса-Кронига. Используя (1.23) мнимая часть динамической поперечной спиновой восприимчивости может быть переписана как

$$\mathrm{Im}\,\chi_\perp(\omega) = -\frac{\pi}{Z}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\sigma=\pm}\delta\Big(\omega + b + (2n - \sigma)(J_z - J_\perp)\Big)\Big(n + \sigma T\frac{\partial}{\partial J_\perp}\Big)Z(n). \tag{1.24}$$

Сделаем преобразование Фурье от статистической суммы $Z(b+i\lambda T)$ по комплексному магнитному полю $b+i\lambda T$:

$$Z(n)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{2\pi}\,e^{-i\lambda n}Z(b+i\lambda T). \tag{1.25}$$

Как следует из (1.24) мнимая часть поперечной спиновой восприимчивости подчиняется следующему правилу сумм:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\operatorname{Im}\chi_{\perp}(\omega)=M, \tag{1.26}$$

где намагниченность $M=-\langle\hat{S}_z\rangle=T\partial\ln Z/\partial b$. Т.к. при $b=0$ функция $Z(n)$ четна , мнимая часть поперечной спиновой восприимчивости нечетна по частоте: $\operatorname{Im}\chi_{\perp}(-\omega)=-\operatorname{Im}\chi_{\perp}(\omega)$ так, что правило сумм (1.26) очевидным образом выполнено.

Отметим, что в случае изотропного обменного взаимодействия, $J_z=J_{\perp}$, (1.24) выражение приводится к тривиальному, $\operatorname{Im}\chi_{\perp}(\omega)=2\pi M\delta(\omega-b)$. В этом случае поведение поперечной спиновой восприимчивости полностью определяется намагниченностью M. Поэтому, в дальнейшем мы не будем отдельно обсуждать поперечную спиновую восприимчивость для изотропного обменного взаимодействия.

1.4 Точное аналитическое выражение для туннельной плотности состояний при $B=0$

1.4.1 Частичное разделение спиновых и зарядовых степеней свободы

Туннельная плотность состояний выражается через мацубаровскую функцию Грина следующим образом [3]

$$\nu(\varepsilon)=-\frac{1}{\pi}\operatorname{ch}\frac{\beta\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{i\varepsilon t}\sum_{\alpha,\sigma}G_{\alpha,\sigma\sigma}\left(it+\beta/2\right), \tag{1.27}$$

где $\beta=1/T$. В лагранжевом формализме, мацубаровская функция Грина, являющаяся матрицей в спиновом пространстве, записывается в следующем виде

$$G_{\alpha}(\tau_1,\tau_2)=-\frac{1}{Z}\mathcal{T}\int\mathcal{D}[\overline{\Psi},\Psi,\phi,\mathbf{\Phi}]\Psi_{\alpha}(\tau_1)\overline{\Psi}_{\alpha}(\tau_2)\,e^{-S_{\mathrm{tot}}},$$
$$Z=\int\mathcal{D}[\overline{\Psi},\Psi,\phi,\mathbf{\Phi}]\,e^{-S_{\mathrm{tot}}}. \tag{1.28}$$

Здесь $\mathcal{T}$ обозначает временное упорядочение, $S_{\rm tot}$ это действие в мнимом времени для гамильтониане (1.1) после преобразования Хаббарда-Стратоновича:

$$S_{\rm tot} = \int\limits_0^\beta d\tau \Bigg\{ \sum_\alpha \overline{\Psi}_\alpha \left[\partial_\tau - \epsilon_\alpha + \mu + i\phi + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2}\right] \Psi_\alpha + \frac{\theta_x^2+\theta_y^2}{4J_\perp} + \frac{\theta_z^2}{4J_z} + \frac{\phi^2}{4E_c} - iN_0\phi \Bigg\}. \tag{1.29}$$

Здесь $\overline{\Psi}_\alpha = (\bar\psi_{\alpha\uparrow}, \bar\psi_{\alpha\downarrow})^T, \Psi_\alpha = (\psi_{\alpha\uparrow}, \psi_{\alpha\downarrow})$ грассмановы переменные, соответствующие электронам на квантовой точке. Разобьем скалярное поле $\phi(\tau)$ следующим образом

$$\phi(\tau) = \tilde\phi(\tau) + \frac{2\pi m}{\beta} + \phi_0, \ \int\limits_0^\beta d\tau\, \tilde\phi(\tau) = 0, \ |\phi_0| \leqslant \pi T. \tag{1.30}$$

Здесь m- целое число. Слагаемое $\tilde\phi(\tau) + 2\pi m T$ может быть откалибровано (см [4, 33, 37, 23]). После этого функция Грина (1.28) принимает следующий вид

$$G_\alpha(\tau_1,\tau_2) = \int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \frac{d\phi_0}{2\pi T} \frac{\mathcal{Z}(\phi_0)}{Z} D(\tau_{12},\phi_0)\, \mathcal{G}_\alpha(\tau_{12},\phi_0), \tag{1.31}$$

$$Z = \int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \frac{d\phi_0}{2\pi T}\, D(0,\phi_0)\mathcal{Z}(\phi_0), \tag{1.32}$$

где $\tau_{12} \equiv \tau_1 - \tau_2$ где

$$D(\tau,\phi_0) = e^{-E_c|\tau|(1-|\tau|T)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\phi_0(\beta k+\tau)} e^{-\beta E_c(k-N_0+\tau T)^2}. \tag{1.33}$$

- это так называемый кулоновский пропагатор. Функция Грина $\mathcal{G}_\alpha(\tau_{12},\phi_0)$ соответствует действию $S_{\rm tot}$ с ϕ замененным на ϕ_0 в первой строке (1.29) и замененным на 0 во второй строке. Таким образом, $\mathcal{G}_\alpha(\tau_{12},\phi_0)$ могут рассматриваться как одночастичные функции Грина для гамильтониана $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + H_S$ где $\mathcal{H}_0$ равно H_0 (см Ур. (1.1)). Подчеркнем, что зарядовые и спиновые степени свободы не разделены полностью. Информация о H_C остается в ϕ_0, которое ведет к небольшому мнимому сдвигу хим. потенциала.

1.4.2 Метод Вея-Нормана-Колоколова

В гамильтоновом формализме $\mathcal{G}_\alpha(\tau_{12})$ может быть переписана следующим образом

$$\mathcal{G}_\alpha(\tau) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \begin{cases} -\mathcal{K}_\alpha(-i\tau, -i\tau+i\beta), & \tau > 0, \\ \mathcal{K}_\alpha(-i\tau - i\beta, -i\tau), & \tau \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.34}$$

где $\mathcal{Z} = \exp(-\beta\mathcal{H})$ и
$$\mathcal{K}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(t_+,t_-) = \mathrm{Tr}\; e^{-it_+\mathcal{H}} a^\dagger_{\alpha\sigma_1} e^{it_-\mathcal{H}} a_{\alpha\sigma_2}. \tag{1.35}$$
Используя коммутативность $\mathcal{H}_0$ и H_S мы можем разделить оператор эволюции для $\mathcal{H}$ на две части, $\exp(it\mathcal{H}) = \exp(it\mathcal{H}_0)\exp(itH_S)$. Далее, применим преобразование Хаббарда-Стратоновича чтобы избавиться от членов четвертого порядка по электронным операторам в показателе экспоненты H_S:
$$e^{\mp itH_S} = \lim_{N\to\infty}\int\Big[\prod_{n=1}^{N} d\boldsymbol{\theta}_n\Big]\prod_{\alpha}\mathcal{T}e^{it\boldsymbol{\theta}_n\boldsymbol{s}_\alpha/N}\exp\left[\pm\frac{i\Delta}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\theta^2_{x,n}+\theta^2_{y,n}}{J_\perp}+\frac{\theta^2_{z,n}}{J_z}\right)\right], \tag{1.36}$$
где $\Delta = t/N$. Здесь и далее мы опускаем нормировочные множители. Они будут восстановлены в конечном ответе. Далее мы сфокусируемся на вычислении $\mathcal{K}_\alpha(t_+,t_-)$. Соответствующая статистическая сумма $\mathcal{Z}$ была вычислена выше (см. Приложение). Применим преобразование Вея-Нормана к уравнению (1.36) [35],[36], что позволит нам переписать $\mathcal{T}$-экспоненту как произведение обыкновенных экспонент:
$$\mathcal{T}e^{i\Delta\boldsymbol{\theta}_n\boldsymbol{s}_\alpha} = e^{ps_\alpha^{-p}\kappa^p_{p,N}}\exp\left(is^z_\alpha\Delta\sum_{n=1}^{N}\rho_{p,n}\right)\exp\left(is^p_\alpha\Delta\sum_{n=1}^{N}\kappa^{-p}_{p,n}\prod_{j=1}^{n}e^{-ip\Delta\rho_{p,j}}\right), \tag{1.37}$$
где $s^p_\alpha = s^x_\alpha + ips^y_\alpha$. внение (1.37) верно для обоих знаков $p=\pm$. Воспользуемся следующим начальным условием $\kappa^p_{p,1}=0$. Переменные $\boldsymbol{\theta}$ могут быть выражены через новые переменные ρ_p, κ^p_p and κ^{-p}_p следующим образом:
$$\begin{aligned}
&\frac{\theta_{x,n}-ip\theta_{y,n}}{2} = \kappa^{-p}_{p,n},\;\; \theta_{z,n} = \rho_{p,n} - \kappa^{-p}_{p,n}(\kappa^p_{p,n}+\kappa^p_{p,n-1}),\\
&\frac{\theta_{x,n}+ip\theta_{y,n}}{2} = \frac{\kappa^p_{p,n}-\kappa^p_{p,n-1}}{ip\Delta} + \frac{\rho_{p,n}(\kappa^p_{p,n}+\kappa^p_{p,n-1})}{2} - \frac{(\kappa^p_{p,n}+\kappa^p_{p,n-1})^2}{4}\kappa^{-p}_{p,n}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$
Заметим, что вектор $\boldsymbol{\theta}_n$ в (1.37) должен быть вещественным, но преобразование (1.38) предполагает его комплексность. Это соответствует повороту контура интегрирования в (1.37). Чтобы сохранить число независимых переменных мы выберем $\rho_{p,n}$ чисто мнимыми, $\rho_{p,n} = -\rho^*_{p,n}$, а $\kappa^+_{p,n}$ и $\kappa^-_{p,n}$ комплексно сопряженными , $\kappa^+_{p,n} = (\kappa^-_{p,n})^*$. Преобразование (1.38) предполагает, что величина $(\kappa^p_{p,N}+\kappa^p_{p,N-1})/2$ соответствует $\kappa^p_p(t)$ в непрерывном пределе. В общем случае можно использовать дискретное представление $\kappa^p_p(t)$ вида $\nu\kappa^p_{p,N} + (1-\nu)\kappa^p_{p,N-1}$ с $0\leqslant\nu\leqslant 1$. Однако, симметричный выбор выделен, так как для $\nu=1/2$ достаточно работать с (1.36) в первом порядке по Δ. Якобиан преобразования (1.38) дается следующим выражением $\exp(ip\Delta\sum_{n=1}^{N}\rho_{p,n}/2)$ [36].

Переписывая две экспоненты в (1.35) с помощью представления (1.37), мы получаем

$$\mathcal{K}_{\alpha\sigma_1\sigma_2} = \prod_{p=\pm}\Bigg\{\prod_{n_p=1}^{N_p}\int d\kappa^p_{p,n_p} d\kappa^{-p}_{p,n_p} d\rho_{p,n_p} \exp\Bigg[\frac{ip\Delta\rho_{p,n_p}}{2}\Bigg(1-\frac{\rho_{p,n_p}}{2J_z}-\frac{\varkappa}{J_\perp}\kappa^{-p}_{p,n_p}\big(\kappa^p_{p,n_p}+\kappa^p_{p,n_p-1}\big)\Bigg)$$
$$+\frac{ip\Delta}{4J_\perp}\big(\kappa^{-p}_{p,n_p}\big)^2\big(\kappa^p_{p,n_p}+\kappa^p_{p,n_p-1}\big)^2-\frac{\kappa^{-p}_{p,n_p}}{J_\perp}\big(\kappa^p_{p,n_p}-\kappa^p_{p,n_p-1}\big)\Bigg]\Bigg\}\prod_{\gamma\neq\alpha}\mathrm{Tr}[\mathcal{A}^{(+)}_\gamma\mathcal{A}^{(-)}_\gamma]$$
$$\times\,\mathrm{Tr}[\mathcal{A}^{(+)}_\alpha a^\dagger_{\alpha\sigma_1}\mathcal{A}^{(-)}_\alpha a_{\alpha\sigma_2}]. \qquad (1.39)$$

Здесь предполагается предел $N_p\to\infty$. Величина $\varkappa = 1-J_\perp/J_z$ характеризует отклонение от изотропного случая.

Одночастичные операторы $\mathcal{A}^{(p)}_\alpha$ представляют оператор эволюции. В соответствиии с (1.37) - (1.38) они определяются следующим образом

$$\mathcal{A}^{(p)}_\alpha = e^{-ipt_p\epsilon_\alpha n_\alpha} e^{ps^{-p}_\alpha\kappa^p_{p,N_p}}\exp\Bigg(is^z_\alpha\Delta\sum_{n=1}^{N_p}\rho_{p,n}\Bigg)\exp\Bigg[is^p_\alpha\Delta\sum_{n=1}^{N_p}\kappa^{-p}_{p,n}\exp\big(-ip\Delta\sum_{j=1}^{n}\rho_{p,j}\big)\Bigg]. \quad (1.40)$$

Далее интегрируя по x, ζ, h и ϕ_0 в (1.31) и (1.34), получим следующий результат для одночастичной функции Грина:

$$G_{\alpha\uparrow\uparrow}(\tau) = -\sum_{n_{\uparrow,\downarrow}\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(n-N_0)^2+\beta\mu n+\beta J_\perp m(m+1)}\frac{\sqrt{\beta\pi}}{8Z\sqrt{J_z-J_\perp}}e^{(J_z-J_\perp)\tau(1-\tau T)}\int_{-\infty}^{\infty}d\mathcal{B}\,e^{\frac{-\beta\mathcal{B}^2}{4(J_z-J_\perp)}}$$
$$\times e^{-[\epsilon_\alpha-\mu+E_c(2n-2N_0+1)+J_\perp(m+1/4)+\mathcal{B}/2]\tau}\Bigg\{e^{\beta\mathcal{B}/2}\Upsilon(\beta\mathcal{B},2m+1)\Big[Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)Z_{n_\downarrow}-Z_{n_\uparrow+1}Z_{n_\downarrow-1}(\epsilon_\alpha)\Big]$$
$$-\Upsilon(-\beta\mathcal{B},-2m)\Big[Z_{n_\uparrow}Z_{n_\downarrow}(\epsilon_\alpha)-Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)Z_{n_\downarrow}\Big]\Bigg\}. \qquad (1.41)$$

Здесь $n_{\uparrow,\downarrow}=n/2\pm m$, и $Z_n(\epsilon_\alpha)$ это интеграл типа Дарвина-Фаулера:

$$Z_n(\epsilon_\alpha)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}e^{-i\theta n}\prod_{\gamma\neq\alpha}\big(1+e^{-\beta\epsilon_\gamma+i\theta}\big), \qquad (1.42)$$

и

$$\Upsilon(z,x)=\frac{e^{(x-1)z/2}}{\mathrm{sh}\,(z/2)}-\frac{\mathrm{sh}\,(xz/2)}{x\,\mathrm{sh}^2(z/2)}. \qquad (1.43)$$

Наконец, подставляя выражение (1.41) для функции Грина в (**??**) и интегрируя, мы получим следующий результат для туннельной плотности состояний для гамильтониана (1.1):

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1+e^{-\beta\varepsilon}}{Z} \sum_{n_\uparrow, n_\downarrow} Z_{n_\uparrow} Z_{n_\downarrow} e^{-\beta E_c (n-N_0)^2 + \beta\mu n + \beta J_\perp m(m+1)} \operatorname{sgn}(2m+1) \sum_{l=-|m+1/2|+1/2}^{|m+1/2|-1/2} e^{\beta(J_z - J_\perp) l^2}$$
$$\times \sum_\alpha \Biggl\{ \delta\Bigl(\varepsilon - \epsilon_\alpha + \mu - E_c(2n - 2N_0 + 1) - J_\perp(m + 1/4) + (J_z - J_\perp)(l + 1/4)\Bigr)$$
$$\times \frac{m-l}{m} \left[\frac{Z_{n_\downarrow}(\epsilon_\alpha)}{Z_{n_\downarrow}} - \frac{Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)}{(2m+1) Z_{n_\uparrow}} \right] + \frac{2m+2+2l}{2m+1} \frac{Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)}{Z_{n_\uparrow}}$$
$$\times \delta\Bigl(\varepsilon - \epsilon_\alpha + \mu - E_c(2n - 2N_0 + 1) + J_\perp(m + 3/4) + (J_z - J_\perp)(l + 1/4)\Bigr) \Biggr\}. \tag{1.44}$$

Каждое слагаемое в (1.44) соответствует туннелированию электрона энергией ε и заданным спином с(на) одночастичного уровня ϵ_α. Каждая дельта-функция отражает закон сохранения энергии. Множитель $Z_n(\epsilon_\alpha)/Z_n$ соответствует вероятности того, что одночастичный уровень с энергией ϵ_α не занят при условии, что полное число электронов равно n. В изотропном пределе, $J_z = J_\perp$, (1.44) совпадает с результатом полученным в [29],[30]. В случае Изинговского обменного взаимодействия, $J_\perp = 0$, (1.44) преобразуется в результат из [23]. В отсутствии обменного взаимодействия, $J_z = J_\perp = 0$, результат (1.44) совпадает с выражением из [37].

Из-за снятия вырождения многочастичного спектра обменным взаимодействием каждый дельта-пик для изотропного случая заменяется $2m+1$ пиком. Огибающая этого множества пиков имеет ширину порядка $2m(J_z - J_\perp)$. Как мы покажем ниже это приводит к размытию пика в туннельной плотности состояний по сравнению с изотропным случаем.

Используя тождества, $\sum_\alpha [Z_n - Z_n(\epsilon_\alpha)] = n Z_n$ и $Z_n = Z_n(\epsilon_\alpha) + e^{-\beta\epsilon_\alpha} Z_{n-1}(\epsilon_\alpha)$, можно проверить что (1.44) удовлетворяет следующему правилу сумм:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\nu(\varepsilon)}{1+e^{\beta\varepsilon}} = T \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}. \tag{1.45}$$

1.5 Заключение

В этой главе был проделан вывод точных выражений для статистической суммы, продольной и поперечной спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний для произвольного спектра одночастичных возбуждений. Можно сделать следующие выводы:

1) Преобразованием Вея-Нормана-Колоколова лучше пользоваться в дискретном представлении, так как в непрерывном представлении легко можно потерять якобиан этого

преобразования.

2) Анизотропия обменного взаимодействия может быть учтена при помощи интегрирования по эффективному магнитному полю.

3) Устранение нелинейных членов в действии с помощью преобразования Вея-Нормана-Колоколова представляет собой однозначную операцию.

Глава 2

Анализ для эквидистантного спектра

2.1 Введение

В этом разделе будет проведен анализ точных результатов полученных в предыдущем разделе для случая эквидистантного спектра. Конечно, строго эквидистантный спектр это идеализация, однако, цель данной работы заключается в исследовании влияния анизотропии обменного взаимодействия на мезоскопическую стоунеровскую неустойчивость. Поэтому чтобы исключить эффекты связанные с флуктуациями одноэлектронных уровней возьмем сначала простейший спектр – эквидистантный. В последствии окажется, что в случае малых флуктуаций расстояний между уровнями результаты получаются добавлением малой поправки к соответствующим результатам для эквидистантного спектра. Даже в случае больших флуктуаций определенная связь с результатами для эквидистантного спектра сохраняется.

2.2 Продольная спиновая восприимчивость

Начнем наш анализ с продольной спиновой восприимчивости. Разберем здесь два случая по соотношению параметров J_z и $J_\perp$: случай "легкой оси"при $J_z \geqslant J_\perp$ и случай "легкой плоскости"при $J_z < J_\perp$. В первом случае спин квантовой точки ориентирован вдоль оси z в основном состоянии, во втором лежит в плоскости перпендикулярной оси z.

2.2.1 Случай "легкая ось": $J_z \geqslant J_\perp$

Используя интегральное представление (1.19) и (3.2) мы произведем интегрирование по h и найдем:

$$Z_S = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} e^{\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta - J_\perp)}} e^{-\frac{\beta b^2}{4(J_z - J_\perp)}} \sum_{p=\pm} F_1\left(\frac{\delta}{\delta - J_\perp} + \frac{pb}{J_z - J_\perp}, \sqrt{\beta J_*}\right).$$

Здесь $J_* = (\delta - J_\perp)(J_z - J_\perp)/(\delta - J_z)$ - это энергетический масштаб характерный для анизотропной задачи, который принимает значения в интервале от 0 (для $J_z = J_\perp$) и $\delta J_z/(\delta - J_z)$ (для $J_\perp = 0$). Функция $F_1(x, y)$ определяется следующим образом

$$F_1(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \frac{\operatorname{sh}(xyt)}{\operatorname{sh}(yt)} e^{-t^2}. \tag{2.1}$$

Используя (1.15), спиновая восприимчивость в нулевом поле может быть записана как

$$\chi_{zz}(T) = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta - J_\perp}{\delta - J_z}\right)^2 \frac{\partial}{\partial J_*} \ln F_1\left(\frac{\delta}{\delta - J_\perp}, \sqrt{\beta J_*}\right). \tag{2.2}$$

При высоких температурах $T \gg \max\left\{\delta, \frac{\delta^2(J_z - J_\perp)}{(\delta - J_\perp)(\delta - J_z)}\right\}$, результат (2.2) для спиновой восприимчивости в нулевом магнитном поле может быть упрощен. В таком случае мы получаем

$$\chi_{zz}(T) = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{\beta}{12} \frac{(2\delta - J_\perp)J_\perp}{(\delta - J_z)^2}. \tag{2.3}$$

В анизотропном случае есть множество температурных интервалов с различным поведением продольной спиновой восприимчивости. При температурах $\max\left\{\delta, \frac{\delta(J_z - J_\perp)}{(\delta - J_z)}\right\} \ll T \ll \frac{\delta^2(J_z - J_\perp)}{(\delta - J_\perp)(\delta - J_z)}$, мы находим

$$\chi_{zz}(T) = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{\beta}{4} \frac{\delta^2}{(\delta - J_z)^2}. \tag{2.4}$$

Для интервала температур $\max\left\{\delta, \frac{(\delta - J_\perp)(J_z - J_\perp)}{(\delta - J_z)}\right\} \ll T \ll \frac{\delta(J_z - J_\perp)}{(\delta - J_z)}$, мы получаем

$$\chi_{zz}(T) = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{\beta}{4} \frac{J_\perp^2}{(\delta - J_z)^2}. \tag{2.5}$$

Если температура находится внутри интервала $\max\left\{\delta, \frac{J_\perp^2(J_z - J_\perp)}{(\delta - J_\perp)(\delta - J_z)}\right\} \ll T \ll \frac{(\delta - J_\perp)(J_z - J_\perp)}{(\delta - J_z)}$ спиновая восприимчивость в нулевом магнитном поле становится равной

$$\chi_{zz}(T) = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{J_\perp \sqrt{\beta J_*}}{(\delta - J_z)(J_z - J_\perp)}. \tag{2.6}$$

Наконец, для самых низких температур, $\delta \ll T \ll \min\left\{\frac{J_\perp^2(J_z-J_\perp)}{(\delta-J_\perp)(\delta-J_z)}, \frac{(\delta-J_\perp)(J_z-J_\perp)}{(\delta-J_z)}\right\}$, мы находим

$$\chi_{zz}(T) = \frac{1}{2(\delta-J_z)} + \frac{\beta}{4}\frac{J_\perp^2}{(\delta-J_z)^2}. \tag{2.7}$$

Напомним, что χ_{zz} состоит из двух вкладов (см (2.3)-(2.5) и (2.7)): вклад, который напоминает спиновую восприимчивость для ферми-жидкости, $\propto 1/(\delta-J_z)$, и вклад типа Кюри, $\propto \beta\delta^2/(\delta-J_z)^2$. Такое поведение проиллюстрировано на Рис. 2.2, где изображена зависимость продольной восприимчивости (2.2) от температуры и J_z при заданном $J_\perp/\delta$. Подчеркнем, что продольная спиновая восприимчивость расходится при $J_z=\delta$ независимо от величины $J_\perp$.

Чтобы понять причину такого интересного поведения спиновой восприимчивости в нулевом поле полезно переписать (1.19) обратно в представление в виде сумм:

$$Z_S = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}} e^{\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta-J_\perp)}} \sum_{S_z=-\infty}^{\infty}\sum_{S=|S_z|}^{\infty}\left(e^{-\beta(\delta-J_\perp)(S-\frac{J_\perp}{2(\delta-J_\perp)})^2} - e^{-\beta(\delta-J_\perp)(S+1+\frac{J_\perp}{2(\delta-J_\perp)})^2}\right)e^{\beta(J_z-J_\perp)S_z^2}. \tag{2.8}$$

Здесь мы воспользовались следующим соотношением

$$Z_{n_\uparrow}Z_{n_\downarrow} \approx \sqrt{\frac{\beta\delta}{4\pi}}e^{-\beta\mu_n n - 2\beta\Omega_0(\mu_n)}\sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}}e^{-\beta\delta m^2} \tag{2.9}$$

которое верно при выполнении условий $\delta \ll T$ и $n \gg |m|$.

При высоких температурах $T \gg J_\perp^2/(\delta-J_z)$ наши результаты (2.3)-(2.7) подразумевают ферми-жидкостное поведение $\chi_{zz}(T)$. В этом интервале температур все члены кроме первого с $S=|S_z|$ в сумме по S в (2.8) сокращают друг друга. Следовательно,

$$Z_S = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}}\sum_{S_z=-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\delta-J_z)S_z^2} = \left(\frac{\delta}{\delta-J_z}\right)^{1/2} \tag{2.10}$$

и $\chi_{zz}(T) = 1/[2(\delta-J_z)]$. Этот ответ подразумевает, что среднее значение S_z^2 порядка $1/[2\beta(\delta-J_z)] \gg 1$ независимо от величины $J_\perp$. В то же время среднее значение квадрата полного спина $\boldsymbol{S}^2$ порядка $1/[2\beta(\delta-J_z)] + 1/[\beta(\delta-J_\perp)]$. Следовательно, при $J_\perp \lesssim J_z$ полный спин сильно флуктуирует во всех трех направлениях так, что $\boldsymbol{S}^2 \approx 3S_z^2$ тогда как при $J_\perp \ll J_z$ полный спин флуктуирует только вблизи оси z так, что $\boldsymbol{S}^2 \approx S_z^2$.

Отметим наличие необычной (корневой зависимости) от температуры у спиновой восприимчивости в (2.6). Однако, результат (2.6) верен в интервале температур, который

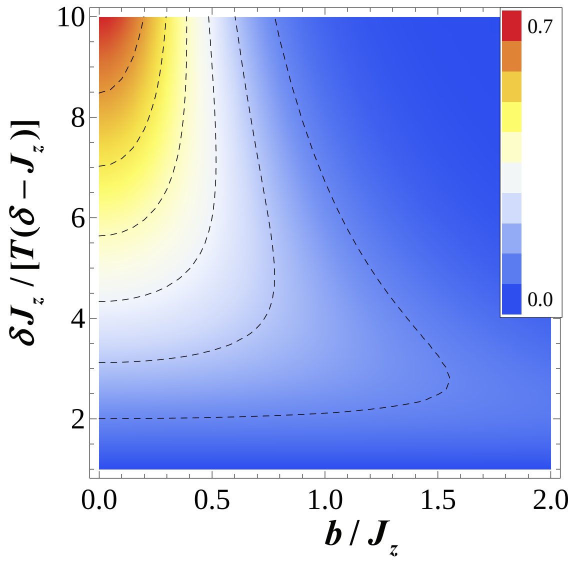

Рисунок 2.1: Зависимость относительной поправки $[2(\delta - J_z)\chi_{zz} - 1]$ к результату Ферми-жидкостного типа от магнитного поля и обратной температуры, b/J_z и $\delta J_z/(\delta - J_z)T$. Здесь $J_z = 0.94\delta$ и $J_\perp = 0.3\delta$.
[Из работы [38]]

существует только если $J_\perp \ll J_z \lesssim \delta$. Таким образом ограничения на температуру принимают следующий вид $\max\{\delta, J_\perp^2/(\delta - J_z\} \ll T \ll \delta^2/(\delta - J_z)$. Следовательно, мы можем пользоваться аргументацией из предыдущего параграфа. Для того чтобы объяснить зависимость $\sqrt{\beta}$ спиновой восприимчивости χ_{zz} нужно проделать разложение по $J_\perp|S_z| \sim J_\perp/\sqrt{\beta(\delta - J_z)}$ в уравнении (2.8).

При низких температурах $T \ll J_\perp^2/(\delta - J_z)$ ответы (2.3)-(2.5) и (2.7) приводят к температурной зависимости спиновой восприимчивости типа Кюри. В этом случае вторым слагаемым в скобках в правой части (2.8) можно пренебречь.Сумма по S может быть оценена интегралом, который набирается при $S \sim |S_z|$. Таким образом

$$Z_S = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}}\, e^{\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta - J_z)}} \sum_{S_z=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta(\delta - J_z)(|S_z| - \frac{J_\perp}{2(\delta - J_z)})^2}}{2\beta(\delta - J_\perp)|S_z| - \beta J_\perp}. \tag{2.11}$$

Это оценка приводит к типичному значению $|S_z| = J_\perp/[2(\delta - J_z)]$ или, иначе, к поведению спиновой восприимчивости типа Кюри: $\chi_{zz} = \beta|S_z|^2 = \beta J_\perp^2/[2(\delta - J_z)]^2$. Следовательно, при относительно низких температурах $\delta \ll T \ll J_\perp^2/(\delta - J_z)$ конфигурация с ненулевым полным спином $S = |S_z| = J_\perp/[2(\delta - J_z)]$ дает основной вклад в термодинамические величины.

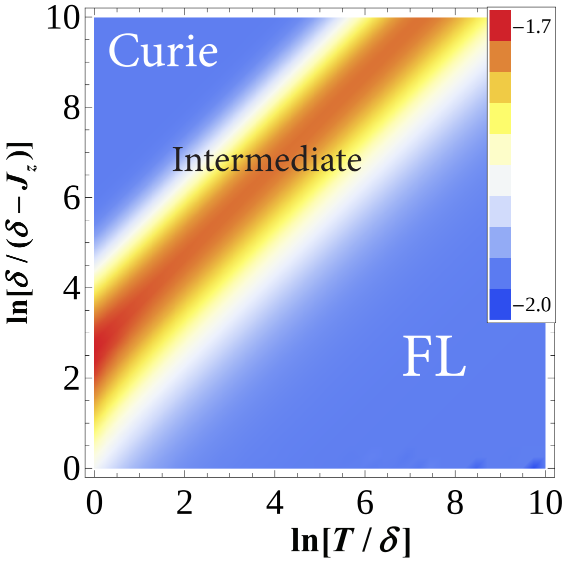

Рисунок 2.2: Зависимость $-\frac{d\ln[\chi_{zz}-\frac{\delta}{2(\delta-J_z)}]}{d(\delta-J_z)}$ от $\ln\frac{T}{\delta}$ и $\ln\frac{\delta}{\delta-J_z}$ для $J_\perp = 0.3\delta$. В левом верхнем углу поведение типа Кюри доминирует. В правой нижней области поправка типа Кюри к результату ферми-жидкостного типа, $\left[\chi_{zz}-\frac{\delta}{2(\delta-J_z)}\right] \propto \frac{1}{(\delta-J_z)^2}$ мала. Красная область соответствует промежуточному режиму в котором поправка к ферми-жидкостному результату $\left[\chi_{zz}-\frac{\delta}{2(\delta-J_z)}\right] \propto \frac{1}{T^{1/2}(\delta-J_z)^{3/2}}$ из-за поперечных степеней свободы.
[из работы [38]]

Для слабых магнитных полей $b \ll \delta(J_z - J_\perp)/(\delta - J_\perp)$, продольная спиновая восприимчивость $\chi_{zz}(T,b)$ может быть хорошо приближена ответом для нулевого магнитного поля. Для более сильных $b \gg \delta(J_z - J_\perp)/(\delta - J_\perp)$, есть две области по температуре с различным поведением. В интервале температур $b(\delta - J_\perp)/(\delta - J_z) \ll T \ll b\delta/(\delta - J_z)$, продольная спиновая восприимчивость становится линейной по температуре:

$$\chi_{zz}(T,b) = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{T}{b^2}. \tag{2.12}$$

При более высоких температурах $T \gg b\delta/(\delta - J_z)$, температурная зависимость продольной спиновой восприимчивости насыщается:

$$\chi_{zz}(T,b) = \frac{1}{2(\delta - J_z)}. \tag{2.13}$$

В пределе очень сильных магнитных полей энергия основного состояния для конфигурации с проекцией полного спина на ось z равной S_z равняется $(\delta - J_z)S_z^2 - bS_z$. Поэтому проекция полного спина в основном состоянии равна $S_z = b/[2(\delta - J_z)]$. Это позволяет нам оценивать продольную спиновую как $\chi_{zz} = dS_z/db = 1/[2(\delta - J_z)]$ в полном согласии с (2.13).

2.2.2 Случай "легкая плоскость"($J_z < J_\perp$)

Используя интегральное представление (1.19) и (3.2), мы интегрируем по h и получаем

$$Z_S = \left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} e^{\frac{\beta(J_\perp^2+b^2)}{4(\delta-J_\perp)}} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{\beta|J_*|}+\frac{ibt}{\delta-J_\perp}} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\delta(\beta b+2it)}{2(\delta-J_\perp)}\right)}{\sqrt{\beta|J_*|}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\beta b+2it}{2}\right)} \vartheta_3\Big(e^{-\frac{\pi^2}{\beta(J_\perp-J_z)}}, \frac{i\pi t}{\beta(J_\perp - J_z)}\Big). \tag{2.14}$$

Здесь $\vartheta_3(q,z) = \sum_m q^{m^2} e^{2imz}$ - θ-функция Якоби. Так как $T \gg \delta \geqslant J_\perp - J_z$, θ-функция Якоби ϑ_3 становится равной единице. Тогда для $b = 0$ мы находим

$$Z = \left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} e^{\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta-J_\perp)}} F_2\left(\frac{\delta}{\delta - J_\perp}, \sqrt{\beta|J_*|}\right), \tag{2.15}$$

где

$$F_2(x,y) = \int\limits_{-\pi/2y}^{\pi/2y} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(xyt)}{\sin(yt)}\, e^{-t^2}. \tag{2.16}$$

При температурах $T \gg \max\left\{\delta, \frac{\delta^2(J_\perp - J_z)}{(\delta-J_\perp)(\delta-J_z)}\right\}$ мы получаем, что продольная спиновая восприимчивость дается соотношением (2.3). В интервале температур $\delta \ll T \ll \frac{\delta^2(J_\perp-J_z)}{(\delta-J_\perp)(\delta-J_z)}$, поведение χ_{zz} описывается (2.4). В случае анизотропии типа "легкая ось"переход от ферми-жидкостной к температурной зависимости типа Кюри продольной спиновой восприимчивости может быть объяснен так же как это было сделано для случая анизотропии типа "легкая ось".

Статическая продольная спиновая восприимчивость почти нечувствительна к наличию слабого магнитного поля $b \ll \delta(J_\perp - J_z)/(\delta - J_z)$. В обратном случае $b \gg \delta(J_\perp - J_z)/(\delta - J_z)$, можно пренебречь t в аргументе sh в (2.14). Тогда при $b \gg \delta(J_\perp - J_z)/(\delta - J_z)$ мы находим

$$Z_S = \left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} e^{\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta-J_\perp)}+\frac{\beta b^2}{4(\delta-J_z)}} \frac{\mathrm{sh}\,\frac{\delta\beta b}{2(\delta-J_\perp)}}{\mathrm{sh}\,\frac{\beta b}{2}}. \tag{2.17}$$

Результат (2.17) означает, что для магнитного поля в интервале $(\delta - J_\perp)T/\delta \ll b \ll T$ продольная спиновая восприимчивость описывается (2.12) тогда как $b \gg T$, χ_{zz} дается (2.13).

2.3 Поперечная спиновая восприимчивость

Как обсуждалось в разделе 2.2, для $\delta \ll T$ статистическая сумма может быть факторизована на спиновый и зарядовый сомножители (см (1.16)). Т.к. множитель Z_C не зависит от магнитного поля он не влияет на результаты для $\chi_\perp(\omega)$, поэтому его можно не учитывать. Это подразумевает замену Z_S, $Z_S(n)$, и $Z_S(b+i\lambda T)$ на Z, $Z(n)$, и $Z(b+i\lambda T)$ в . (1.24) - (1.25), соответственно. Используя (2.9) для эквидистантного одночастичного спектра мы можем переписать $Z_S(n)$ следующим образом

$$Z_S(n) = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda n} \sum_m e^{-\beta(\delta - J_\perp)m^2 + \beta J_\perp m} \operatorname{sgn}(2m+1) \sum_{l=-|m+1/2|+1/2}^{|m+1/2|-1/2} e^{\beta(J_z - J_\perp)l^2 - \beta b l - i\lambda l}. \tag{2.18}$$

Далее интегрируя по λ, получаем следующие результаты

$$Z_S(n) = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}} e^{\beta(J_z - J_\perp)n^2 + \beta b n} \left[\sum_{m=|n|} e^{-\beta(\delta - J_\perp)m^2 + \beta J_\perp m} - \sum_{m=|n|+1} e^{-\beta(\delta - J_\perp)m^2 - \beta J_\perp m} \right]. \tag{2.19}$$

При условии $\beta(\delta - J_\perp)|n| \ll 1$, применив формулу Эйлера-Маклорена для оценки сумм по m, можно найти

$$\begin{aligned} Z_S(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\delta - J_\perp} \right)^{1/2} e^{\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta - J_\perp)}} e^{\beta(J_z - J_\perp)n^2 + \beta b n} \sum_{s=\pm} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta(\delta - J_\perp)} \left(s|n| + \frac{J_\perp}{2(\delta - J_\perp)} \right) \right) \\ + \sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}} e^{-\beta(\delta - J_z)n^2 + \beta b n} \operatorname{ch}(\beta J_\perp |n|). \end{aligned} \tag{2.20}$$

В обратном случае $\beta(\delta - J_\perp)|n| \gg 1$, член с $m = |n|$ в правой части (2.19) дает основной вклад. Тогда мы получаем

$$Z_S(n) = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\pi}} e^{-\beta(\delta - J_z)n^2 + \beta J_\perp |n| + \beta b n}. \tag{2.21}$$

Отметим, что при $J_\perp = 0$, оба выражения (2.20) и (2.21) совпадают и верны для произвольного n.

Согласно (1.24) $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$представляется в виде суммы дельта-пиков. Т.к. их положения не зависят от конкретной реализации одночастичного спектра, дельта-пики сохраняются и после усреднения $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$ по флуктуациям уровней. Поэтому, чтобы обсуждать частотную зависимость поперечной спиновой восприимчивости в виде гладкой кривой мы должны предполагать некое естественное уширение одночастичных уровней $\Gamma \gg |J_z - J_\perp|$.

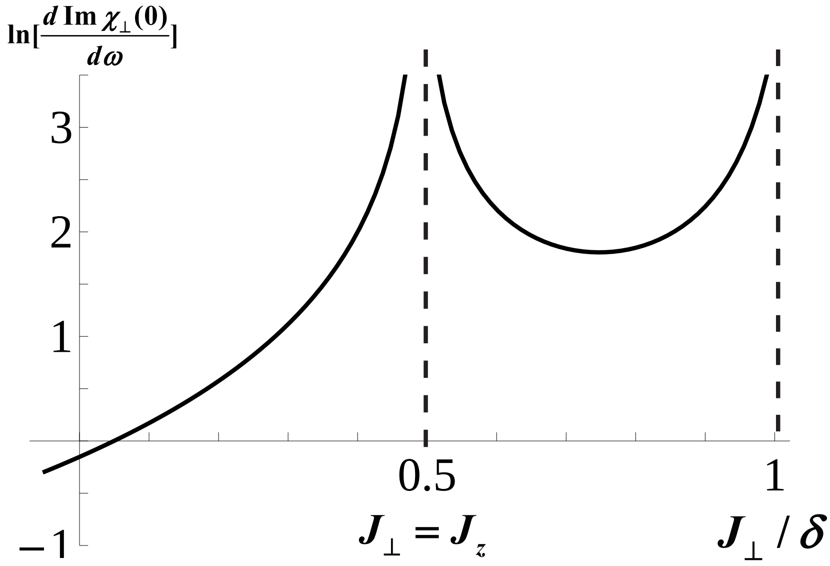

Рисунок 2.3: Зависимость наклона $\frac{d\,\mathrm{Im}\,\chi_\perp(0)}{d\omega}$ поперечной спиновой восприимчивости от $J_\perp/\delta$ для $J_z = \delta/2$.

Таким образом сумма по n в (1.24) может быть заменена интегралом и мы получим

$$\mathrm{Im}\,\chi_\perp(\omega) = -\frac{\pi}{2|J_z - J_\perp|Z_S}\sum_{\sigma=\pm}\Big(n + \sigma T\frac{\partial}{\partial J_\perp}\Big)Z_S(n)\bigg|_{n=-\varpi+\sigma/2}, \tag{2.22}$$

где $\varpi = (\omega + b)/[2(J_z - J_\perp)]$.

В пределе больших частот или сильных магнитных полей, $\beta(\delta - J_\perp)|\varpi| \gg 1$, мнимая часть поперечной спиновой восприимчивости экспоненциально мала:

$$\mathrm{Im}\,\chi_\perp(\omega) = \frac{\varpi\sqrt{\pi\beta\delta}}{|J_z - J_\perp|Z_S}\exp\Bigg[-\beta(\delta - J_z)|\varpi|(|\varpi| + 1) + \beta J_\perp|\varpi| - \beta b\varpi\Bigg]. \tag{2.23}$$

В отсутствии магнитного поля, $b = 0$, $\mathrm{Im}\,\chi_\perp$ является нечетной функцией частоты ω. Для $\omega \to 0$ мнимая часть поперечной спиновой восприимчивости имеет линейное поведение:

$$\mathrm{Im}\,\chi_\perp(\omega) = \frac{\omega\sqrt{\pi\beta\delta}}{2|J_z - J_\perp|(\delta - J_\perp)Z_S}\left[\frac{2\delta - J_\perp}{2(\delta - J_\perp)} + +\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta(\delta - J_\perp)}}\mathcal{G}\left(\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta - J_\perp)}\right)\right], \tag{2.24}$$

где функция

$$\mathcal{G}(x) = (1 + 2x)e^x\,\mathrm{erf}(\sqrt{x}). \tag{2.25}$$

Наклон $\mathrm{Im}\,\chi_\perp(\omega)$ при $\omega = 0$ имеет различное поведение при $J_\perp < J_z$ и при $J_\perp > J_z$. В интервале, $0 \leqslant J_\perp \leqslant J_z$ наклон растет монотонно с увеличением $J_\perp$ и расходится при

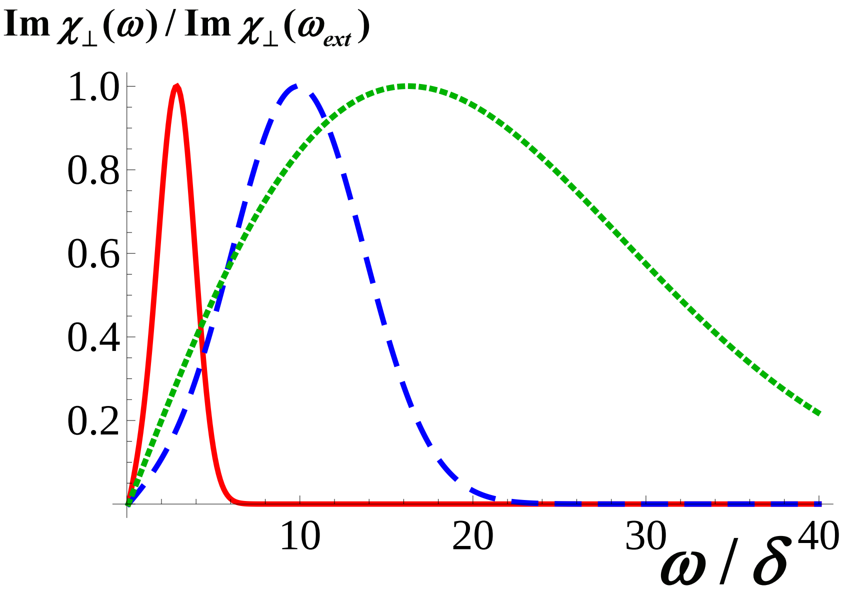

Рисунок 2.4: Зависимость $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)/\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega_{ext})$ от ω для $J_z = 0.98\delta$ и нескольких значений $J_\perp$: $J_\perp = 0.92\delta$ (красная сплошная линия), $J_\perp = 0.75\delta$ (синяя пунктирная линия) и $J_\perp = 0$ (зеленая линия из точек). Линия сжимается к $\omega = 0$ при приближению к изотропному случаю.

$J_\perp = J_z$. В интервале $J_z < J_\perp < \delta$ наклон имеет минимум (см. Рис. 2.3). Мнимая часть поперечной спиновой восприимчивости при нулевом магнитном поле имеет два экстремума (минимум на отрицательных частотах и максимум на положительных частотах). При условиях $\delta - J_z, J_\perp \ll \delta$ и $\delta \ll T \ll \delta^2/(\delta - J_z)$ положения экстремумов могут быть оценены как

$$\omega_{\text{ext}} \approx \pm \frac{2(J_z - J_\perp)}{\sqrt{2\beta(\delta - J_z)}} \left[\left(1 + \frac{\beta J_\perp^2}{8(\delta - J_z)}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta J_\perp^2}{8(\delta - J_z)}\right)^{1/2} \right]. \tag{2.26}$$

Поведение $\chi_\perp(\omega)$ как функиции частоты показана на Рис. 2.4. В присутствии магнитного поля $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$ смещается по частоте и становится асимметричной (см Рис. 2.4).

Стоит обсудить случай изинговского обменного взаимодействия ($J_\perp = 0$) более детально. В режиме малых частот и слабых магнитных полей, $|\omega|, |b| \ll TJ_z/\delta$, мнимая часть динамической спиновой восприимчивости дается выражением

$$\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega) = \frac{\omega\sqrt{\pi\beta(\delta - J_z)}}{2J_z\delta} \exp\left\{ -\frac{\beta[(\delta - J_z)\omega + \delta b]^2}{4J_z^2(\delta - J_z)} \right\}. \tag{2.27}$$

Хотя $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$ асимметрично при наличии магнитного поля она все равно обращается в нуль на нулевой частоте, $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega = 0) = 0$. В обратном пределе $|\omega|, |b| \gg TJ_z/\delta$, из (2.23) мы находим

$$\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega) = \frac{(\omega+b)\sqrt{\pi\beta(\delta-J_z)}}{2J_z^2}\exp\left\{-\frac{\beta(\delta-J_z)}{2J_z}|\omega+b|\right\}\exp\left\{-\frac{\beta[(\delta-J_z)\omega+\delta b]^2}{4J_z^2(\delta-J_z)}\right\}. \tag{2.28}$$

В случае $b=0$, наши результаты (2.27) и (2.28) совпадают с асимптотиками на больших и малых частотах, полученными в работе [23]. Присутствие магнитного поля приводит к сдвигу экстремумов динамической спиновой восприимчивости

$$\omega_{\mathrm{ext}} \approx \pm\sqrt{\frac{2J_z^2}{\beta(\delta-J_z)}}\left\{\left(1+\frac{\beta b^2}{8(\delta-J_z)}\right)^{1/2} \mp \frac{b\sqrt{\beta}}{8\sqrt{(\delta-J_z)}}\right\}. \tag{2.29}$$

2.4 Туннельная плотность состояний

2.4.1 Введение

Туннельная плотность состояний для универсального гамильтониана с осевой анизотропией исследовалась в работе [1] с помощью разложения в ряд теории возмущений вблизи случая Изинга. Было обнаружено, что обменное взаимодействие приводит к сильной немонотонной зависимости (с двумя максимумами и одним минимумом) туннельной плотности состояний от энергии. Заметим, что в случае Изинговского обменного взаимодействия [23] туннельная плотность состояний монотонна, а в случае Гейзенберговского обменного взаимодействия имеет лишь один максимум [29]. Таким образом результат работы [1] отражает интересное явление: в случае анизотропного обменного взаимодействия немонотонность туннельной плотности состояний усиливается. Однако, это предсказание находится в противоречии с недавними расчетами спиновой восприимчивости для модели с анизотропным обменным взаимодействием [38]. Спин основного состояния монотонно уменьшается с изменением анизотропии от нуля (случай гейзенберговского обменного взаимодействия) до максимального значения (случай изинговского обменного взаимодействия). В этом разделе мы детально проанализируем выражение (1.44) и покажем, что результаты работы [1] неверны.

2.4.2 Случай нулевой температуры $T=0$

Начнем анализ туннельной плотности состояний (1.44) со случая низких температур $T \ll \delta$. Для простоты, рассмотрим случай кулоновской долины (N_0 близко к целому). Тогда при $T \ll \delta$ мы можем использовать следующие соотношения:

$$Z_n \approx e^{-\beta E_n^{(0)}}, \qquad \frac{Z_n(\epsilon_\alpha)}{Z_n} \approx \Theta\big(\epsilon_\alpha - E_n^{(0)} + E_{n-1}^{(0)}\big), \tag{2.30}$$

где $E_n^{(0)}$ - это энергия основного состояния n бесспиновых электронов и $\Theta(x)$ функция Хевисайда. В случае эквидистантного спектра энергия $E_n^{(0)}$ равна $\delta n(n-1)/2$. Предположим, что основное состояние гамильтониана (1.1) с $J_z \geqslant J_\perp$ соответствует полному спину S. Тогда в (1.44) нужно учесть только вклад с $m = S$ и $l = \pm S$. Другие вклады, например с $m = S-1$ и $l = \pm(S-1)$, будут экспоненциально подавлены. Следовательно, мы находим

$$\begin{aligned}\nu(\varepsilon) = &\sum_{\epsilon_\alpha > \epsilon_{\frac{N_0}{2}-S}} \delta\Big(\tilde{\varepsilon}_\alpha - J_z S - \frac{J_\perp}{2} + \frac{J_z}{4}\Big) - \frac{1}{2S+1} \sum_{\epsilon_\alpha > \epsilon_{\frac{N_0}{2}+S}} \delta\Big(\tilde{\varepsilon}_\alpha - J_z S - \frac{J_\perp}{2} + \frac{J_z}{4}\Big) \\ &+ \frac{1}{2S+1} \sum_{\epsilon_\alpha > \epsilon_{\frac{N_0}{2}+S}} \delta\Big(\tilde{\varepsilon}_\alpha + (2J_\perp - J_z)S + \frac{J_\perp}{2} + \frac{J_z}{4}\Big) + \sum_{\epsilon_\alpha > \epsilon_{\frac{N_0}{2}+S}} \delta\Big(\tilde{\varepsilon}_\alpha + J_z S + \frac{J_\perp}{2} + \frac{J_z}{4}\Big).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon + \mu - E_c - \epsilon_\alpha$. Удобно переписать $\epsilon_{\frac{N_0}{2} \pm S+1}$ как $\epsilon_{\frac{N_0}{2} \pm S+1} = E_{S\pm 1/2} - E_S$, где E_S одночастичный вклад в энергию основного состояния со спином S. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= E_{S+1/2} - E_S - J_z S - \frac{J_\perp}{2} - \frac{J_z}{4}, \\ \mathcal{E}_2 &= E_{S-1/2} - E_S + J_z S + \frac{J_\perp}{2} - \frac{J_z}{4}, \\ \mathcal{E}_3 &= E_{S+1/2} - E_S + J_z S + \frac{J_\perp}{2} - \frac{J_z}{4}, \\ \mathcal{E}_4 &= E_{S+1/2} - E_S + (J_z - 2J_\perp)S - \frac{J_\perp}{2} - \frac{J_z}{4}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Заметим, что выполнены следующие неравенства: $\mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_{1,2,4}$ и $\mathcal{E}_1 \leqslant \mathcal{E}_4$ независимо от величины S. Поэтому,возможны только три различных случая: (a) $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_4 < \mathcal{E}_3$, (b) $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_4 < \mathcal{E}_3$, и (c) $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_4 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_3$. Какой из случаев реализуется зависит от величины полного спина S в основном состоянии с $S_z = S$. Энергия $\mathcal{E}_1$ ($\mathcal{E}_2$) это энергия необходимая электрону со спином вверх(вниз) туннелировать на наинизший из доступных уровней (см Рис. 2.5). Энергия $\mathcal{E}_4$ и $\mathcal{E}_3$ требуются электрону для туннелирования электрона со спином вниз на наинизший из доступных уровней для электрона со спином вверх. Энергия $\mathcal{E}_3$ ($\mathcal{E}_4$) соответствует возбужденному состоянию с полным спином $S - 1/2$ ($S + 1/2$).

Как следует из (2.31) туннелирование возможно только если энергия электрона ε превышает $\min\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4\}$. Из-за конечной величины полного спина в основном состоянии туннелирование электрона чувствительно к проекции его спина. При малых энергиях

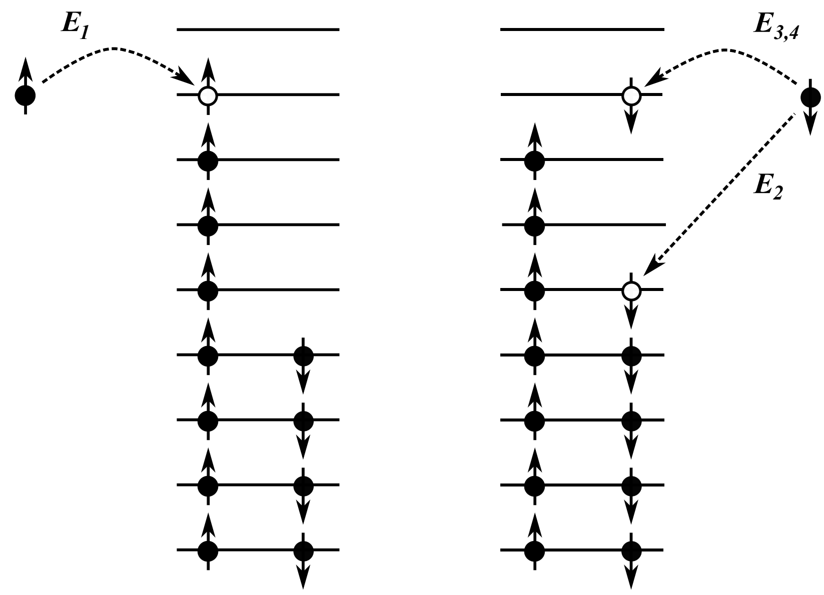

Рисунок 2.5: Туннелирование электрона со спином вверх(слева) и электрона со спином вниз (справа) в квантовую точку с конечной величиной спина в основном состоянии

только электроны с одной проекцией спина могут туннелировать в квантовую точку. Для электронов с очень большими энергиями зависимости туннелирования от проекции спина нет. Характерная энергия, которая разделяет два этих режима это $\mathcal{E}_3$. Правило сумм (1.45) ограничивает возможное поведение туннельной плотности состояний. Для случая кулоновской долины и при низких температурах правило сумм (1.45) приводит к тому, что интеграл $\int d\varepsilon\, \nu(\varepsilon)$ не зависит от обменного взаимодействия. Как мы увидим в дальнейшем, это приводит к наличию максимума в туннельной плотности состояний. В случаях (a) и (b) мы получаем из (2.31):

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\,\frac{\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_{1,2} < \underline{\mathcal{E}_{12}}, \\ 1/2, & \underline{\mathcal{E}_{12}} \leqslant \varepsilon_{1,2} < \overline{\mathcal{E}_{12}}, \\ 1, & \overline{\mathcal{E}_{12}} \leqslant \varepsilon_{1,2} < \mathcal{E}_4, \\ \frac{4S+3}{4S+2}, & \mathcal{E}_4 \leqslant \varepsilon_{1,2} < \mathcal{E}_3, \\ 1, & \mathcal{E}_3 \leqslant \varepsilon_{1,2}, \end{cases} \tag{2.33}$$

где $\underline{\mathcal{E}_{12}} = \min\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ и $\overline{\mathcal{E}_{12}} = \max\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$. Для случая (c) (2.31) дает

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \frac{\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_{1,2} < \mathcal{E}_1, \\ 1/2, & \mathcal{E}_1 \leqslant \varepsilon_{1,2} < \mathcal{E}_4, \\ \frac{S+1}{2S+1}, & \mathcal{E}_4 \leqslant \varepsilon_{1,2} < \mathcal{E}_2, \\ \frac{4S+3}{4S+2}, & \mathcal{E}_2 \leqslant \varepsilon_{1,2} < \mathcal{E}_3, \\ 1, & \mathcal{E}_3 \leqslant \varepsilon_{1,2}. \end{cases} \tag{2.34}$$

Здесь $\nu_0 = 2\sum_\alpha \delta(\varepsilon - \epsilon_\alpha)$ обозначает туннельную плотность состояний в отсутствии взаимодействий. Энергии $\varepsilon_{1,2}$ измеряются относительно $E_c - \mu$. Схематическая зависимость огибающей туннельной плотности состояний от энергии при $T \ll \delta$ приведена на Рис. 2.6.

Как следует из (2.33) и (2.34) ступенька высотой $1/2$ между $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ в огибающей плотности состояний присутствует для всех трех случаев. Однако, для основного состояния с полным спином $S \approx (J_\perp + J_z - \delta)/[2(\delta - J_z)]$ можно показать, что $|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2| < J_z$, таким образом эта ступенька будет размыта при $T \gtrsim \delta$. Максимум в туннельной плотности состояний имеет ширину порядка $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 = J_\perp(2S+1) \sim J_\perp^2/(\delta - J_z)$. Поэтому, для температур в интервале $\delta \ll T \ll J_\perp^2/(\delta - J_z)$ можно ожидать, что этот максимум (с относительной высотой $1/(2S) \sim [\delta - J_z]/J_\perp \ll 1$) выживает. Заметим, что такой режим существует только при $\sqrt{\delta(\delta - J_z)} \ll J_\perp$.

Подчеркнем, что нуль-температурный анализ указывает на то, что туннельная плотность состояний имеет только один максимум. Дополнительных экстремумов обнаруженных в [1] с помощью вычислений, основанных на теории возмущений $J_\perp/J_z$ нет.

2.4.3 Случай высоких температур $T \gg \delta$

В этом разделе проанализировано поведение туннельной плотности состояний при $T \gg \delta$. Анализ ограничен на область $J_z \geqslant J_\perp$. В режиме $T \gg \delta$, удобно оттолкнуться от интегрального представления функции Грина (A.19) . При выполнении условия $\mu \gg T \gg \delta$ можно приблизить функцию Грина следующим выражением

$$G_{0\uparrow\uparrow}(\tau) = -\sum_\alpha \frac{e^{(\epsilon_\alpha - \mu)\tau}}{1 + e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}} \approx -\frac{\pi T}{\delta} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(\pi T \tau)}. \tag{2.35}$$

Интегрируя по ϕ_0, h можно прийти к

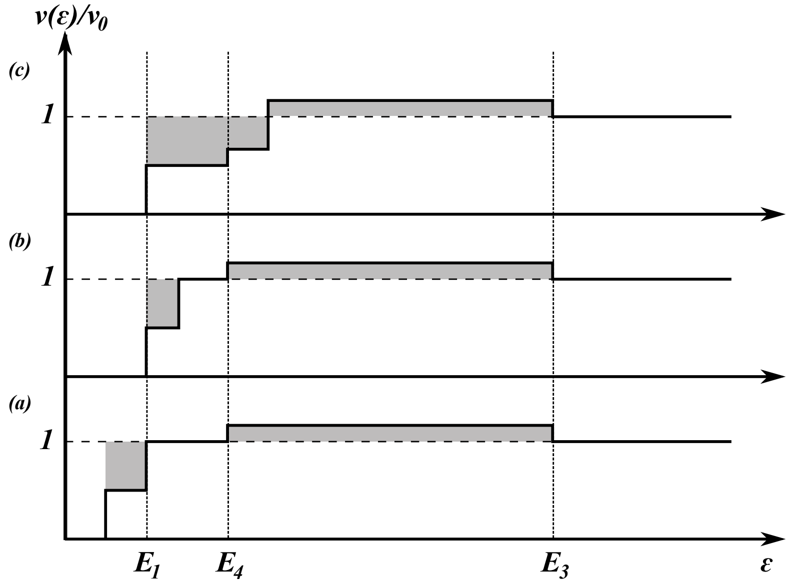

Рисунок 2.6: Схематическая зависимость туннельной плотности состояния от энергии при нулевой температуре. Затененные области равны по площади (см. текст)

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{Z_C} \sum_{n,p=\pm} e^{-\beta E_c (n-N_0)^2} \Bigg\{ f_F(p\varepsilon + p\Omega_n^{-p}) + \frac{\sqrt{\pi\beta\delta}}{8Z_S}$$
$$\times \Upsilon_+\Big(\frac{p\varepsilon + p\Omega_n^{-p}}{\bar{J}_\perp}, \beta\bar{J}_\perp, \frac{J_z - J_\perp}{\delta - J_\perp}, \sqrt{\beta(J_z - J_\perp)}\Big)\Bigg\} \Bigg/ \sum_n e^{-\beta E_c (n-N_0)^2} \tag{2.36}$$

где $\Omega_n^p = \mu - E_c(2n - 2N_0 + p)$ и

$$\Upsilon_+(x,y,z,a) = e^{-yx/2} \int\limits_0^\infty db\, \frac{e^{-b^2}}{\mathrm{sh}\,(ab)} \sum_{s=\pm} s$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{\cos(yxt)}{\mathrm{ch}\,(\pi t)} \Big\{ \mathrm{erfi}\Big(sb\sqrt{z} - \sqrt{y}/2\Big)$$
$$- \mathrm{erfi}\Big(sb\sqrt{z} - it\sqrt{y}\Big)\Big\} \frac{\cos(abt)}{\mathrm{ch}\,(ab/2)}.. \tag{2.37}$$

Вклад в статистическую сумму за счет

$$Z_S = 2\left(\frac{\pi}{\beta J_*}\right)^{1/2} \left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} e^{\frac{\beta J_\perp^2}{4(\delta - J_\perp)}}$$
$$\times \left[\mathcal{F}\Big(\frac{\pi\delta}{(\delta - J_\perp)} + \frac{\pi^2}{\beta J_*}, \frac{\pi^2}{\beta J_*}\Big) - \frac{1}{2}\right], \tag{2.38}$$

где $J_* = (\delta - J_\perp)(J_z - J_\perp)/(\delta - J_z)$.

Используя асимптотики функции $\mathcal{F}(x, y)$,

$$\mathcal{F}(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \begin{cases} \operatorname{th} \frac{x-y}{2}, & y \ll 1, \\ \operatorname{erf}(\frac{x-y}{2\sqrt{y}}), & y \gg 1, \end{cases} \tag{2.39}$$

и следующие соотношения

$$\partial_y \mathbb{F}(x, y, z, u) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{z^2 y(y-1)+u^2} \mathcal{F}(x - 2yz^2, z^2 - u^2) \tag{2.40}$$

можно убедиться, что для случая изотропного обменного взаимодействия, $J_z = J_\perp$, результат (2.36) совпадает с результатом из работы [?].

Как следует из (2.39) и (2.40) функции $\mathcal{F}(x, y)$ и $\mathbb{F}(x, y, z, u)$ лишь немного отклоняются от функции Ферми $f_F(x) = 1/(1+\exp(x))$ при $y, z, u \ll 1$. Хотя u всегда мало, параметры y и z могут быть велики для $J_\perp$ близкого к δ при температурах $(\delta + J_\perp)^2/[4(\delta - J_\perp) \gg T \gg \delta$. Зависимость туннельной плотности состояний от энергии показана на Рис. 2.7. Можно заметить, что максимум имеет заметную величину при ненулевых $J_\perp$ и температурах $T \leqslant (\delta + J_\perp)^2/[4(\delta - J_\perp)$. Наличие максимума находится в согласии с нуль-температурным анализом предыдущего раздела. Для Рис. 2.7 выбраны в точности параметры из Рис. 2 работы. [?]. Отсутствие дополнительных немонотонностей противоречит результатам работы [?] выполненной по теории возмущений по параметру $J_\perp/J_z$.

2.5 Заключение

В этой главе были исследованы статистическая сумма, продольная и поперечная спиновая восприимчивость и туннельная плотность в случае эквидистантного одночастичного спектра квантовой точки. Можно сделать следующие выводы:

1) При высоких температурах зависимость спиновой восприимчивости от температуры фермижидкостная, а при низких типа Кюри. При этом есть промежуточная область температур при которой зависимость от температуры становится корневой.

2)Мнимая часть поперечной спиновой восприимчивости при нулевом магнитном поле представляет собой нечетную функцию с одним минимумом и максимумом. С приближением к изотропному случаю ширина пиков уменьшается. Магнитное поле приводит к сдвигу пиков. Однако, при нулевой частоте мнимая часть восприимчивости остается нулевой.

3) Туннельная плотность состояний имеет немонотонность в виде одного пика. Величина этого пика увеличивается с приближением к изотропному случаю и с уменьшением

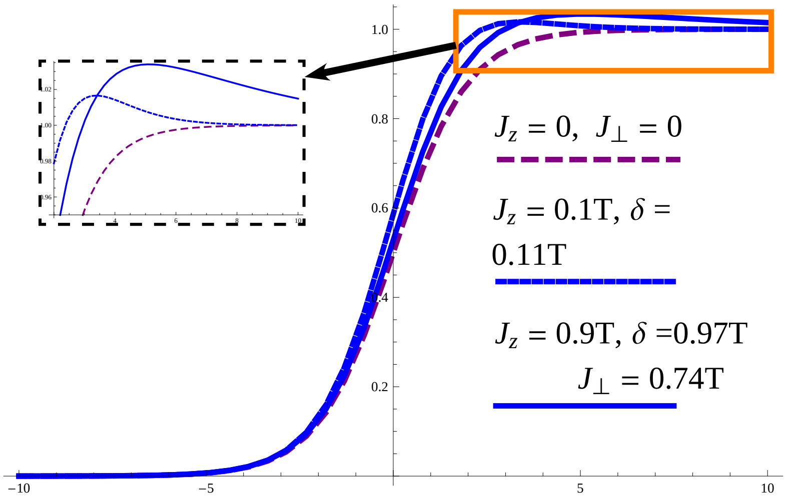

Рисунок 2.7: Туннельная плотность состояний в кулоновской долине. Штриховая лиловая кривая соответствует $J_z = J_\perp = 0$. Точечная синяя кривая соответствует $\delta/T = 0.11$, $J_z/\delta = 0.91$, и $J_\perp/\delta = 0.82$. Сплошная синяя кривая соответствует $\delta/T = 0.97$, $J_z/\delta = 0.93$, и $J_\perp/\delta = 0.76$.

температуры. Пик исчезает в случае изинговского обменного взаимодействия. Дополнительных немонотонностей предсказанных в [1] не обнаружено.

Глава 3

Учет флуктуаций одночастичного спектра

3.1 Введение

В этом разделе мы будем изучать поправки к результатам из предыдущей главы за счет флуктуаций одночастичного спектра. Как объяснялось выше гамильтониан (1.1) описывает квантовую точку в нуль-мерном приближении только для изинговского или гейзенберговского обменного взаимодействия. Поэтому разумно изучить влияние флуктуаций на полученные выше результаты при $J_\perp = 0$ и $J_\perp = J_z$. Мы начнем со случая изинговского обменного взаимодействия. Особое внимание будет уделено вопросу о влиянии флуктуаций на стоунеровскую неустойчивость. Известно [10, 16], что при определенных условиях беспорядок (выражающийся в нашем случае, в частности, через флуктуации одночастичного спектра) может привести к смещению перехода Стоунера. Изучение вопроса о смещении перехода Стоунера сводится к вопросу о сходимости спиновой восприимчивости и её моментом. В этой главе мы не исследуем туннельную плотность состояний так как известно, что случае изотропного обменного взаимодействия [29] флуктуации одночастичных уровней не влияют существенно на туннельную плотность состояний.

3.2 Учет флуктуаций для восприимчивости в случае Изинга

3.2.1 Продольная спиновая восприимчивость

Функция

$$\beta \sum_{\sigma} [\Omega_0(\tilde{\mu}) - \Omega_0(\tilde{\mu} + h\sigma/\beta)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE\, \nu_0(E)\, \ln\left[1 + \frac{\operatorname{sh}^2(h/2)}{\operatorname{ch}^2(E/2T)}\right] \tag{3.1}$$

которая возникает в (1.19) зависит от конкретной реализации одночастичного спектра через одночастичную плотность состояний $\nu_0(E) = \sum_\alpha \delta(E + \tilde{\mu} - \epsilon_\alpha)$. При условии $h^2 \ll \exp(\beta\tilde{\mu})$, мы можем написать

$$\beta \sum_{\sigma} \Big[\Omega_0(\tilde{\mu}) - \Omega_0(\tilde{\mu} + h\sigma/\beta)\Big] = \frac{h^2}{\beta\delta} - V(h), \tag{3.2}$$

где

$$V(h) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dE\, \delta\nu_0(E)\, \ln\left[1 + \frac{\operatorname{sh}^2(h/2)}{\operatorname{ch}^2(E/2T)}\right]. \tag{3.3}$$

Здесь $\delta\nu_0(E)$ - отклонение плотности состояний $\nu_0(E)$ от его среднего значения по всем реализациям одночастичного спектра: $1/\delta = \overline{1/\Delta} = \overline{\nu_0(E)}$.

Для упрощения результата (1.19) в случае изинговского обменного взаимодействия удобно сделать замену переменных $\mathcal{B} \to \mathcal{B} - 2h(J_z - J_\perp)T/J_z$, чтобы взять предел $J_\perp \to 0$ и, далее, проинтегрировать по $\mathcal{B}$. Таким образом находим

$$Z_S = \left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} e^{\frac{\beta b^2}{4(\delta - J_z)}}\, \Xi\left(\frac{b}{J_z}, \frac{\beta J_z \delta}{\delta - J_z}\right), \tag{3.4}$$

где

$$\Xi(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 - V(h\sqrt{y} + xy/2)}. \tag{3.5}$$

Информация о флуктуациях одночастичного спектра заключена в четной случайной функции $V(h)$ через плотность состояний (см (3.3)). Напомним, что одночастичная плотность состояний ν_0(E) имеет негауссову статистику [41]. Однако, при $\max\{|h|, T/\delta\} \gg 1$ функция $V(h)$ - это гауссова случайная величина с нулевым средним [41]. Двухточечная корреляционная функция величины V может быть записана следующим образом :

$$\overline{V(h_1)V(h_2)} = \sum_{\sigma=\pm} L(h_1+\sigma h_2) - 2L(h_1) - 2L(h_2),$$
$$L(h) = \frac{2}{\pi^2 \boldsymbol{\beta}} \int\limits_0^{|h|} dt\, t\, \left[\mathrm{Re}\, \psi\left(1+\frac{it}{2\pi}\right) + \gamma \right]. \tag{3.6}$$

Здесь $\psi(z)$ - это дигамма-функция Эйлера и $\gamma = -\psi(1)$ это константа Эйлера-Маскерони. Для случая изинговского обменного взаимодействия, параметр $\boldsymbol{\beta}$ в (3.6) равняется $\boldsymbol{\beta} = 2$ т.к. уровни энергии ϵ_α в гамильтониане (1.1) описываются унитарным ансамблем Вигнера-Дайсона (класс A). [21] Асимптотики $L(h)$ имеют следующий вид: [29]

$$L(h) = \frac{4}{\boldsymbol{\beta}} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{2} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 - \frac{\zeta(5)}{3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4, & \frac{|h|}{2\pi} \ll 1, \\ \ln \frac{|h|}{2\pi} + \gamma - \frac{1}{2}, & \frac{|h|}{2\pi} \gg 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

3.2.2 Поправки по теории возмущений к $\overline{\chi}_{zz}$ при слабых флуктуациях

Согласно (3.4), средняя продольная спиновая восприимчивость $\overline{\chi}_{zz}$ определяется величиной $\overline{\ln \Xi(x,y)}$. Хотя $V(h)$ это гауссова случайная величина математически строго вычислить $\overline{\ln \Xi(x,y)}$ для произвольных x и y сложно. Мы начнем с теории возмущений по корреляционной функции $\overline{V(h)V(h')}$. Разлагая выражение (3.4) для $\Xi(x,y)$ до второго порядка по V и усредняя $\ln \Xi(x,y)$ с помощью (3.6), мы находим

$$\overline{\ln \Xi(x,y)} = \int\limits_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\pi}}\, e^{-u^2} \Big[e^{-x^2y/4}\, \mathrm{ch}\,(ux\sqrt{y}) L(2u\sqrt{y}) - \big(e^{-x^2y/2}\, \mathrm{ch}\,(ux\sqrt{2y}) + 1\big) L(u\sqrt{2y}) \Big]. \tag{3.8}$$

Есть три области с различным поведением $\overline{\ln \Xi(x,y)}$. Они показаны на Рис. 3.1. Удобно ввести перенормированную константу обменного взаимодействия $\bar{J}_z = \delta J_z/(\delta - J_z)$.

В области I, $\bar{J}_z \max\{1, (b/J_z)\} \ll T$, аргументы $\Xi(x,y)$ удовлетворяют условию: $y \ll \min\{1, 1/x\}$. Последнее позволяет использовать асимптотику $L(h)$ при $|h| \ll 1$ (см (3.7)). Тогда мы находим

$$\overline{\ln \Xi(x,y)} = \frac{3\zeta(3) y^2}{8\pi^4 \boldsymbol{\beta}} \Big[1 + yx^2 - \frac{5\zeta(5) y}{2\pi^2 \zeta(3)} \Big(1 + \frac{3}{2} yx^2 + \frac{y^2 x^4}{6} \Big) \Big]. \tag{3.9}$$

Следовательно мы получаем следующий ответ для средней продольной спиновой восприимчивости при температурах $T \gg \bar{J}_z \max\{1, (b/J_z)\}$:

$$\overline{\chi}_{zz} = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{3\zeta(3)}{4\pi^4\boldsymbol{\beta}}\frac{\delta^3 J_z}{(\delta - J_z)^3 T^2} - \frac{45\zeta(5)}{16\pi^6\boldsymbol{\beta}}\frac{\delta^4 J_z^2}{(\delta - J_z)^4 T^3}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{\delta b^2}{J_z T(\delta - J_z)}\right]. \quad (3.10)$$

В области I поправки к продольной спиновой восприимчивости всегда малы и следовательно теория возмущений оправдана. Приведем более прозрачный способ вывода (3.10). Во-первых можно заменить термодинамическую плотность состояний на уровне Ферми $1/\Delta = -\frac{\partial^2 \Omega_0(\mu)}{\partial \mu^2}\Big|_{\mu=\mu_n}$ вместо $1/\delta$ в выражении (2.3) (при $J_\perp = 0$) для эквидистантного спектра. Во-вторых, разложим χ_{zz} до второго по отклонению $\Delta - \delta$. Наконец, можно провести усреднение с помощью соотношения [29]

$$\overline{(\Delta - \delta)^2} = \frac{3\zeta(3)}{2\pi^4\boldsymbol{\beta}}\frac{\delta^4}{T^2}, \qquad \delta \ll T \quad (3.11)$$

и получить результат (3.10) (при $b = 0$).

В области II, $\bar{J}_z \gg T \gg \max\{\delta, \bar{J}_z(b/J_z)^2\}$, можно провести разложение по $x^2 y$ в правой части (3.8), т.к. выполняется следующее соотношение $1 \ll y \ll 1/x^2$. Однако аргументы L велики нам следует пользоваться асимптотикой $|h| \gg 1$ (см (3.7)). Тогда мы получаем

$$\overline{\ln \Xi(x, y)} = \frac{y \ln 2}{4\pi^2\boldsymbol{\beta}}\big(2 + yx^2\big) - \frac{y^3 x^4}{48\pi^2\boldsymbol{\beta}}. \quad (3.12)$$

Следовательно средняя продольная спиновая восприимчивость в области II ($\bar{J}_z \gg T \gg \max\{\delta, \bar{J}_z(b/J_z)^2\}$) такова

$$\overline{\chi}_{zz} = \frac{1}{2(\delta - J_z)} + \frac{\ln 2}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\frac{\delta^2}{T(\delta - J_z)^2} - \frac{1}{4\pi^2\boldsymbol{\beta}}\frac{\delta^3 b^2}{J_z(\delta - J_z)^3 T^2}. \quad (3.13)$$

При нулевых магнитных полях мы убеждаемся, что вклад второго порядка по L в $\overline{\ln \Xi(0, y)}$ имеет порядок $(y/(\pi^2\boldsymbol{\beta}))^2$. Следовательно, теория возмущений по двухточечной корреляционной функции величины V оправдана только при $T \gg \bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta})$. В этой области дисперсия χ_{zz} мала $\left[\overline{(\chi_{zz})^2} - \overline{\chi}_{zz}^2\right]/\overline{\chi}_{zz}^2 \sim \bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta}T) \ll 1$. Поэтому, при $T \gg \bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta})$ можно ожидать нормальное распределение χ_{zz}.

Наконец, в области III, $\delta \ll T \ll \bar{J}_z \min\{(b/J_z), (b/J_z)^2\}$, типичное значение u дающее существенный вклад в интеграл в правой части (3.8) может быть не только порядка единицы но и порядка $x\sqrt{y} \gg 1$. В последнем случае, т.к. $yx \gg 1$ нужно использовать асимптотику для $L(h)$ при $|h| \gg 1$ (см (3.7)). Следовательно мы находим

$$\overline{\ln \Xi(x, y)} = \frac{y}{2\pi^2\boldsymbol{\beta}}\Big(\ln\frac{|x|y}{2} + c_2\Big) - \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\pi}}\, e^{-u^2} L(u\sqrt{2y}). \quad (3.14)$$

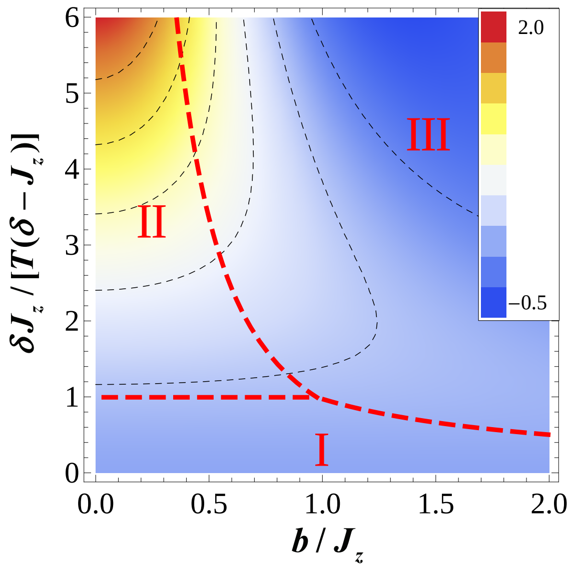

Рисунок 3.1: Различные области поведения относительной поправки к $\overline{\chi}_{zz}$ из-за флуктуаций для случая изинговского обменного взаимодействия в координатах: безразмерное магнитное поле и обратная температура, b/J_z и $\delta J_z/T(\delta - J_z)$. Заметим, что в нашем анализе мы предполагаем $T \gg \delta$.

Откуда мы получаем среднюю продольную спиновую восприимчивость в области III ($\delta \ll T \ll \bar{J}_z \min\{(b/J_z),(b/J_z)^2\}$):

$$\overline{\chi}_{zz} = \frac{1}{2(\delta - J_z)} - \frac{1}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\frac{\delta J_z}{(\delta - J_z)b^2}. \tag{3.15}$$

Для магнитных полей $b \gg J_z$ эффект флуктуаций уровней подавлен и теория возмущений оправдана. При $b \sim J_z\sqrt{T/\bar{J}_z} \ll J_z$ результат (3.15) плавно переходит в результат (3.10), тогда как при $T \sim \bar{J}_z b/J_z \gg \bar{J}_z$ поправки за счет флуктуаций уровней в выражениях (3.15) и (3.13) становятся одного порядка.

Результаты (3.13) и (3.15) демонстрируют немонотонную зависимость продольной спиновой восприимчивости с магнитным полем b в интервале температур $\bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta}) \ll T \ll \bar{J}_z$ (см Рис. 3.2). Зависимость $\overline{\chi}_{zz}(b)$ имеет минимум при $b \sim TJ_z/\bar{J}_z$. В области сильных флуктуаций $\delta \ll T \ll \bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta})$ мы ожидаем подобное поведение среднего от продольной спиновой восприимчивости.

Хотя результат (3.15) получен при $T \gg \delta$, для $\delta - J_z \ll J_z$ он может быть получен из следующих нуль-температурных рассуждений. Разница между энергиями основных

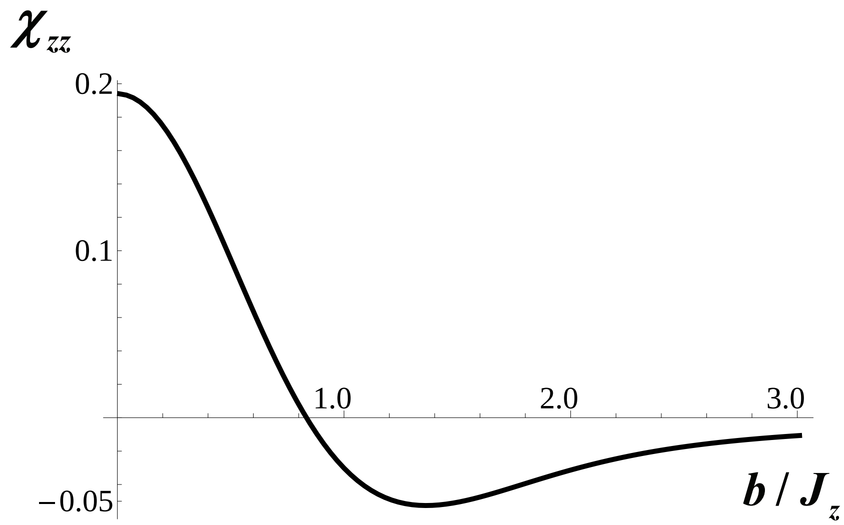

Рисунок 3.2: Зависимость относительной поправки $\delta\chi_{zz} = \overline{\chi}_{zz} - 1/[2(\delta - J_z)]$ из-за флуктуаций от b/J_z (см (3.13) и (3.15)). Температура равна $T = \delta J_z/[6(\delta - J_z)]$.

состояний с проекциями $S_z + 1$ и S_z полного спина может быть оценена как

$$E_g(S_z + 1) - E_g(S_z) = 2(\delta - J_z)S_z - bS_z + \Delta E_{2S_z}. \tag{3.16}$$

Здесь ΔE_{2S_z} это флуктуации окна энергий в котором находится в среднем $2S_z$ уровней. Они могут быть выражены как $\Delta E_{2S_z} = \delta\,\Delta n_{2S_z}$ где Δn_{2S_z} это флуктуации числа одночастичных уровней в полосе из $2S_z$ уровней в среднем. Из теории случайных матриц известно, что [41]

$$\overline{(\Delta n_{2S_z})^2} = \frac{2}{\pi^2\boldsymbol{\beta}}\Big[\ln 2S_z + \text{const}\Big]. \tag{3.17}$$

Сравнивая энергии основных состояний с проекциями полного спина $S_z + 1$ и S_z, мы находим из (3.16)

$$S_z = \frac{1}{2(\delta - J_z)}\Big[b - \delta\,\Delta n_{2S_z}\Big]. \tag{3.18}$$

Следовательно средняя продольная спиновая восприимчивость может быть оценена как

$$\overline{\chi}_{zz} \sim \frac{\partial\overline{S}_z}{\partial b} = \frac{1}{2(\delta - J_z)}\left[1 + \frac{\delta^2}{2(\delta - J_z)^2}\frac{d^2\overline{(\Delta n_z)^2}}{dz^2}\right], \tag{3.19}$$

где $z = 2\overline{S}_z \approx b/(\delta - J_z)$. Таким образом, (3.17), мы воспроизводим результат (3.15).

3.2.3 Функция распределения χ_{zz}

Средняя продольная спиновая восприимчивость наиболее подвержена влиянию флуктуаций уровней в области II ($\bar{J}_z \gg T \gg \bar{J}_z(b/J_z)^2$). Пертурбативный результат (3.10) становится неприменим при $\bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta}) \gg T \gg \delta$. Такой режим осуществляется вблизи стоунеровской неустойчивости $\delta - J_z \ll \delta/(\pi^2\boldsymbol{\beta})$. В этом случае сильных флуктуаций полезно знать функцию распределения χ_{zz}, а не только среднее значение.

В интервале температур $\delta \ll T \ll \bar{J}_z$, интеграл в правой части (3.5) набирается в основном на больших значениях $|h|$. Тогда используя асимптотическое выражение (3.7), можно убедиться, что для $|h_1|, |h_2| \gg 1$ двухточечная корреляционная функция(3.6) является однородной функцией порядка два: [22]

$$\overline{V(uh_1)V(uh_2)} = u^2\overline{V(h_1)V(h_2)}. \tag{3.20}$$

При помощи (3.20), в нулевом магнитном поле $b = 0$ и для $\delta \ll T \ll \bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta})$, выражения (3.4) и (3.5) могут быть упрощены:

$$Z_S = \left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 - zv(h)}. \tag{3.21}$$

Напомним, что нормировка такова, что $Z_S = 1$ при $J_z = 0$. Согласно (1.9) для $J_\perp = b = 0$, статистическая сумма большого канонического ансамбля увеличивается с ростом J_z. Отсюда следует, что $Z_S \geqslant 1$. Согласно (3.21), статистика продольной спиновой восприимчивости при нулевом магнитном поле определяется единственным параметром $z = [\beta\bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta})]^{1/2}$. Случайный гауссов процесс $v(h)$ имеет нулевое среднее и четен по h, $v(h) = v(-h)$. Его двухточечная корреляционная функция такова

$$\overline{v(h_1)v(h_2)} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=\pm}(h_1 + \sigma h_2)^2 \ln(h_1 + \sigma h_2)^2 - h_1^2 \ln h_1^2 - h_2^2 \ln h_2^2. \tag{3.22}$$

Следовательно

$$\overline{\big[v(h+u) - v(h)\big]^2} = -2u^2 \ln|u| + O(u^2) = O(u^{2H}) \tag{3.23}$$

для всех $H = 1 - \epsilon < 1$. Таким образом траектории $v(h)$ непрерывны и его инкременты сильно положительно коррелированы (см Рис. 3.3). На деле процесс $v(h)$ во многих аспектах близок к баллистическому $\tilde{v}(h) = \xi|h|$, где ξ это гауссова случайная величина (напомним, что $\tilde{v}(h)$ это единственный процесс, удовлетворяющий условию (3.23) при $H = 1$). Процесс $v(h)$ известен в математической литературе [5].

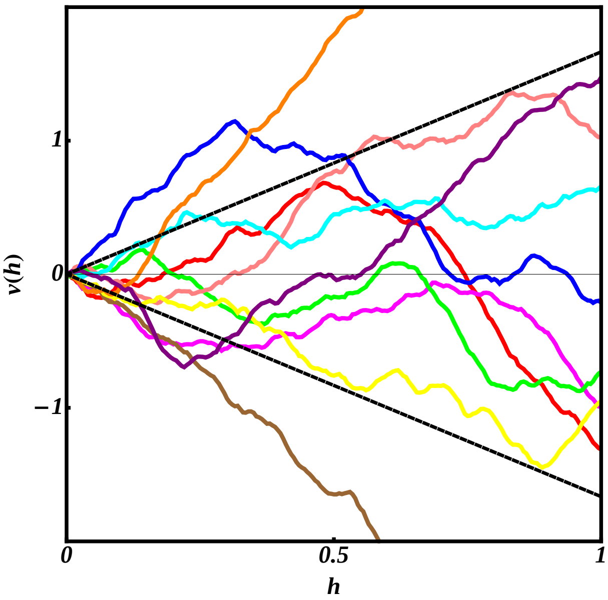

Рисунок 3.3: Несколько реализаций процесса $v(h)$; пунктирные линии $\pm 2h\sqrt{\ln 2}$ приведены для наглядности.

Будем искать функцию распределения $\mathcal{P}(W)$, т.е. вероятность для $\ln Z_S$ превысить W: $\mathcal{P}(W) \equiv \mathsf{P}\{\ln Z_S > W\}$. Она имеет следующие свойства: $\mathcal{P}(0) = 1$, $\mathcal{P}(\infty) = 0$ и $\mathcal{P}(W)$ монотонно убывающая функция. Средние моменты $\ln Z_S$ могут быть просто переписаны как $\overline{[\ln Z_S]^k} = k \int_0^\infty dW W^{k-1} \mathcal{P}(W)$. Хотя аналитическое выражение для функции распределения неизвестно мы можем ограничить $\mathcal{P}(W)$ сверху чтобы доказать, что все моменты χ_{zz}) конечны при $J_z < \delta$. Во первых, мы разбиваем гауссов вес $\exp(-h^2)$ в интеграле в правой части (3.4) и получаем ($0 < \gamma < 1$ это прозвольный параметр разбиения). Тогда,

$$Z_S \leqslant \frac{2\sqrt{\bar{J}_z}}{\sqrt{\pi\gamma J_z}} \int\limits_0^\infty dh\, e^{-(1-\gamma)h^2/\gamma} \max_{h \geqslant 0} \left\{ e^{-h^2 - zv(h)/\sqrt{\gamma}} \right\}. \tag{3.24}$$

Неравенство (3.24) позволяет нам свести задачу нахождения верхней границы для $\mathcal{P}(W)$ к статистике максимумов гауссового процесса $Y_\gamma(h) = -h^2 - (z/\sqrt{\gamma})v(h)$ который локально напоминает дробное броуновское движение с дрейфом. Действительно, из (3.24) мы находим

$$\mathcal{P}(W) \leqslant \mathsf{P}\left\{ \max_{h \geqslant 0} Y_\gamma(h) > W + \frac{1}{2} \ln \frac{(1-\gamma)J_z}{\bar{J}_z} \right\}. \tag{3.25}$$

Чтобы найти верхнюю границу к вероятности $\mathsf{P}\{\max\limits_{h \geqslant 0} Y_\gamma(h) > w\}$, мы используем неравенства Слепиана. [6] Рассмотрим произвольный гауссов процесс $X(h) = -h^2 + (2z\sqrt{\ln 2}/\sqrt{\gamma})B(h^2)$, где $B(h)$ это стандартное броуновское движение ($\overline{B(h)} = 2h$; с экспонентой Херста $H = 1/2$). Для любого интервала $\mathcal{T}$ пути $\{X(h), h \in \mathcal{T}\}$ и $\{Y_\gamma(h), h \in \mathcal{T}\}$ ограничены. Выполняются следующие соотоношения:

$$\overline{X(h)} = \overline{Y_\gamma(h)}, \qquad \overline{X^2(h)} = \overline{Y_\gamma^2(h)},$$
$$\overline{[X(h_1) - X(h_2)]^2} \geqslant \overline{[Y_\gamma(h_1) - Y_\gamma(h_2)]^2}. \tag{3.26}$$

Действительно, первые два равенства очевидным образом выполнены, тогда как последнее неравенство следует из легко проверяемого неравенства $\overline{[v(1/2+r) - v(1/2-r)]^2} \leqslant 8r\ln 2$ для $|r| \leqslant 1/2$. Тогда процессы $Y_\gamma(h)$ и $X(h)$ удовлетворяют неравенству Слепиана:

$$\mathsf{P}\{\max_{h\geqslant 0} Y_\gamma(h) > w\} \leqslant \mathsf{P}\{\max_{h\geqslant 0} X(h) > w\} \tag{3.27}$$

для всех вещественных w. Используя известный результат для броуновского движения с линейным дрейфом (см например, [19])

$$\mathsf{P}\{\max_{h\geqslant 0} X(h) > w\} = \exp\left(-\frac{\gamma w}{2z^2 \ln 2}\right), \quad w > 0, \tag{3.28}$$

мы находим следующую верхнюю границу для функции распределения

$$\mathcal{P}(W) \leqslant \exp\left\{-\frac{\gamma}{2z^2\ln 2}\left[W + \frac{1}{2}\ln\frac{(1-\gamma)J_z}{\bar{J}_z}\right]\right\}. \tag{3.29}$$

Из (3.29) следует что при $\bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta}) \gg T \gg \delta$ все моменты $\ln Z_S$ (и следовательно все моменты χ_{zz}) конечны если $J_z < \delta$. Поэтому даже в присутствии сильных флуктуаций одночастичных уровней стоунеровская неустойчивость проявляется только при $J_z = \delta$. Для $J_z < \delta$ и для температур $T \gg \delta$ квантовая точка находится в парамагнитном состоянии.

Для $z \gg 1$ седловое приближение в (3.4) становится точным и статистика $\ln Z_S$ сводится к статистике максимумов процесса $Y(h) = -h^2 - zv(h)$. Как видно из перенормировки h, вероятность того что максимум $Y(h)$ превышает w равна вероятности того, что максимум величины $\widetilde{Y}(s) = v(s)/(1+s^2)$ определенной при $s \geqslant 0$ превышает $\sqrt{w}/z$. Из результатов Хюслера и Питербарга [43] следует, что асимптотика вероятности $\mathsf{P}\{\max_{h\geqslant 0} Y(h) > w\}$ при больших w определяется малой окрестностью точки $s^* = 1$, где вариация $\widetilde{Y}(s)$ достигает своего максимума, равного $\ln 2$. Более того, имеется конечный предел

$$\lim_{s,t\to s_*} \frac{\overline{[\widetilde{Y}(s) - \widetilde{Y}(t)]^2}}{K^2(s-t)} > 0 \tag{3.30}$$

для некоторой функции $K(x)$ регулярно изменяющейся вблизи нуля 0 с индексом $\alpha \in (0,1)$. Тогда точная асимптотика имеет вид

$$\mathsf{P}\{\max_{h\geqslant 0} Y(h) > W\} \sim \mathrm{const}(\alpha)\cdot\frac{(z^2/W)^{-1}}{K^{-1}\big(\sqrt{z^2/W}\big)}\exp\left[-\frac{W}{2z^2\ln 2}\right], \quad W/z^2 \gg 1. \tag{3.31}$$

Здесь $K^{-1}(x)$ функциональное обратное от $K(x)$. В нашем случае, (3.23) означает, что $K(x) = x\sqrt{\ln(1/x)}$, которая регулярна с индексом $\alpha = 1$. Напомним, что функция $f(x)$ регулярна в $x = 0$ с индексом α если $\lim_{t\to 0} f(at)/f(t) = a^\alpha$ для любого $a > 0$. Результат работы [43],строго говоря, не применим напрямую. По аналогии с похожей ситуацией при дробном броуновском движении, мы ожидаем, что асимптотика (3.31) сохранится лишь с изменением независящего от W множителя $\mathrm{const}(\alpha)$. Заметим, что экспоненциальная часть напоминает хвост нормального распределения с дисперсией $\ln 2$ взятый при $\sqrt{W}/z$. Этот хвост был верно оценен с помощью неравенства Слепиана. Таким образом мы находим, что с логарифмической точностью хвост функции распределения дается выражением ($W \gg [\ln 2/(\pi^2\boldsymbol{\beta})]\delta J_z/[T(\delta - J_z)]$)

$$\mathcal{P}(W) \propto \mathcal{P}_{\rm tail}\left(\frac{\pi^2\boldsymbol{\beta}T(\delta - J_z)W}{\delta J_z}\right), \mathcal{P}_{\rm tail}(x) \qquad = \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x}{2\ln 2}\right). \tag{3.32}$$

Этот результат верен в интервале температур $\bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta}) \gg T \gg \delta$ и согласован с оценкой сверху (3.29).

Чтобы проиллюстрировать результат (3.32) мы приблизим гауссов процесс $v(h)$ вырожденным процессом $\tilde{v}(h) = \xi|h|$, где ξ это гауссов случайный процесс с нулевым средним $\overline{\xi} = 0$ и дисперсией $\overline{\xi^2} = 4\ln 2$. Заменяя процессом $\tilde{v}(h)$ процесс $v(h)$ в правой части уравнения (3.21), мы оцениваем статистическую функцию как $Z_S \simeq \sqrt{\bar{J}_z/J_z}\exp(z^2\xi^2/4)\Big[1 - \mathrm{erf}(z\xi/2)\Big]$. Большие значения Z_S соответствуют большим отрицательным значениям ξ таким, что $\ln Z_S \approx z^2\xi^2/4$. Поэтому, хвост распределения $\ln Z_S$ это простая экспонента. Далее мы находим что для $z \gg 1$ хвост функции распределения $\mathcal{P}(W)$ дается (3.32) без логарифма в предэкспоненте. Как показано на Рис. 3.4 в целом поведение $\mathcal{P}(W)$ при $z \gg 1$ хорошо приближается функцией распределения для вырожденного процесса $\tilde{v}(h)$. Также заметим что поведение $\mathcal{P}(W)$ для $z \gg 1$ сильно отличается от его поведения при $z \lesssim 1$. Для последнего, $\mathcal{P}(W)$ дается функцией распределения нормального распределения (см Рис. 3.4).

Уравнение (3.32) показывает, что средние моменты $\ln Z_S$ масштабируются как $\overline{(\ln Z_S)^k} \sim z^{2k}$ при $z \gg 1$. Следовательно при $\delta \ll T \ll \bar{J}_z/(\pi^2\boldsymbol{\beta})$ k-ый момент спиновой восприимчивости дается выражением

$$\overline{\chi_{zz}^k} \propto \left[\frac{\delta^2}{\pi^2\boldsymbol{\beta}(\delta - J_z)^2 T}\right]^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.33}$$

Результат (3.33) может быть получен из седлового приближения для интеграла в правой части (3.21), т.е., в сущности, с помощью аргументов типа Ларкина-Имри-Ма. [11, 12]

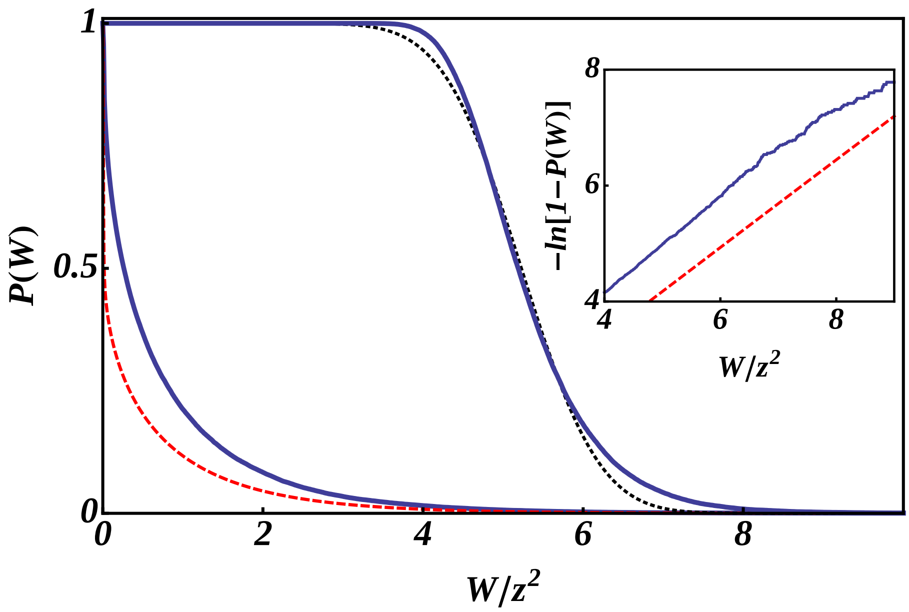

Рисунок 3.4: Зависимость $\mathcal{P}(W)$ от W/z^2 при $T = 3\delta$ полученная с помощью численных расчетов при $J_z/\delta = 0.94$ ($z \approx 0.5$) (верхняя линия) и $J_z/\delta = 0.99994$ ($z \approx 16.8$) (нижняя линия). Черная кривая из точек это функция распределения для нормального распределения со средним и дисперсией найденными из теории возмущений низшего порядка по V для $T = 3\delta$ и $J_z/\delta = 0.94$. Красная пунктирная линия это функция распределения вырожденного процесса $\tilde{v}(h)$ для $T = 3\delta$ и $J_z/\delta = 0.99994$. Вставка: Сравнение хвоста $\mathcal{P}(W)$ полученного численно $J_z/\delta = 0.99994$ ($z \approx 16.8$) и асимптотического результата (3.32).

Зависимость средней продольной спиновой восприимчивости ((3.33) с $k = 1$) была предложена в [22], с использованием аргументов типа Ларкин-Имри-Ма.

3.2.4 Поперечная спиновая восприимчивость

Ниже мы рассмотрим как флуктуации влияют на динамическую спинвую восприимчивость в случае изинговского обмена. Как мы увидим ниже влияние флуктуаций уровней на $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$ в большинстве случаев мало. Так как эффект флуктуаций уровней подавляется магнитным полем, ниже мы рассмотрим только случай $b = 0$.

Мы начнем с обобщения (2.9) для произвольного спектра:

$$Z_{n_\uparrow} Z_{n_\downarrow} \approx \sqrt{\frac{\beta\delta}{4\pi}} e^{-\beta\mu_n n - 2\beta\Omega_0(\mu_n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\pi} e^{-2mi\theta} e^{-\frac{\theta^2}{\beta\delta} - V(i\theta)}. \tag{3.34}$$

С помощью . (1.23), (2.22) и (3.34) мы перепишем мнимую часть динамической спиновой восприимчивости следующим образом

$$\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega) = -\frac{\sqrt{\pi\beta(\delta - J_z)}}{2J_z}\sum_{\sigma=\pm} e^{\beta J_z n^2}\Bigg[\sum_{m=|n|+1}^{\infty} 2\sigma m$$
$$\times e^{-\beta\delta m^2} F_\chi\left(m, \beta\delta, \frac{\beta\delta J_z}{\delta - J_z}\right) + (n + \sigma|n|)e^{-\beta\delta n^2}$$
$$\times F_\chi\left(|n|, \beta\delta, \frac{\beta\delta J_z}{\delta - J_z}\right)\Bigg]\Bigg|_{n=(\sigma J_z - \omega)/(2J_z)}. \tag{3.35}$$

Здесь случайная функция

$$F_\chi(m, x, y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\theta^2 - V\left(xm + i\theta\sqrt{x}\right)}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dh\, e^{-h^2 - V\left(h\sqrt{y}\right)}} \tag{3.36}$$

равна единице в отсутствии флуктуаций уровней (для $V = 0$).

Разлагая правую часть (3.36) до второго порядка по V мы находим

$$\overline{F_\chi(m)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dh_1 dh_2}{\pi} e^{-h_1^2 - h_2^2}\Bigg\{1 + \frac{1}{2}L\left(2xm + 2ih_1\sqrt{x}\right) - 2L\left(xm + ih_1\sqrt{x} + h_2\sqrt{y}\right)$$
$$- \frac{1}{2}L\left(2h_1\sqrt{y}\right) + 2L\left(h_1\sqrt{y} + h_2\sqrt{y}\right)\Bigg\}. \tag{3.37}$$

В режиме высоких температур, $T \gg \delta J_z/(\delta - J_z)$, и для $|m| \ll T/\delta$, все три интеграла в правой части (3.37) одного порядка малости. Используя асимптотическое выражение (3.7) для функции $L(h)$ при $|h| \ll 1$, мы получаем следующий результат для мнимой части средней динамической спиновой восприимчивости на низких частотах $\delta|\omega|/(2J_z) \ll T$ и высоких температурах $T \gg \delta J_z/(\delta - J_z)$:

$$\frac{\operatorname{Im}\overline{\chi_\perp(\omega)}}{\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)} = 1 + \frac{3\zeta(3)\delta^2}{16\pi^4\boldsymbol{\beta}T^2}\left[-\frac{\delta^2}{(\delta - J_z)^2} - \frac{\delta^2\omega^2}{TJ_z^2(\delta - J_z)} + \frac{\delta^2\omega^4}{4T^2J_z^4}\right]. \tag{3.38}$$

Здесь $\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)$ дается (2.27) при $b = 0$. Заметим, что (3.38) может быть получено из выражения (2.27), если заменить $1/\Delta$ вместо $1/\delta$ и усреднить с помощью (3.11). В режиме низких частот и высоких температур флуктуации малы. В случае высоких частот и высоких температур , $\delta|\omega|/(2J_z) \gg T \gg \delta J_z/(\delta - J_z)$, первая и вторая строчки в правой части (3.37) дают основной вклад. Далее с помощью асимптотического выражения (3.7) для $L(h)$ при $|h| \gg 1$ мы находим, что при $|\omega|/(2J_z) \gg T/\delta \gg J_z/(\delta - J_z)$ мнимая часть средней динамической спиновой восприимчивости может быть записана как

$$\frac{\operatorname{Im}\overline{\chi_\perp(\omega)}}{\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)} = 1 + \frac{\ln 2}{2\pi^2\boldsymbol{\beta}}\frac{\omega^2\delta^2}{T^2 J_z^2}. \tag{3.39}$$

Здесь $\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)$ дается (2.28) при $b = 0$. Заметим что результат (3.39) верен при условии $[\omega\delta/(TJ_z)]^2 \ll \pi^2\boldsymbol{\beta}$, который оправдывает теорию возмущений по V. Подчеркнем, что хотя (3.39) верно при высоких температурах $T \gg \delta J_z/(\delta - J_z)$ оно не может быть получено из (2.28) подстановкой $1/\Delta$ вместо $1/\delta$ и усреднением с помощью (3.11).

В случае низких температур $T \ll \delta J_z/(\delta - J_z)$, независимые от m вкладов в правой части (3.37) исчезают в главном порядке. Используя асимптотические результаты для $L(h)$ при $|h| \gg 1$, (см (3.7)) мы получаем

$$\overline{F_\chi(m)} = 1 - \frac{x}{\pi^2\boldsymbol{\beta}}\begin{cases}(xm^2 - \frac{1}{2})\ln y, & x|m| \ll 1,\\ (xm^2 - \frac{1}{2})\ln\frac{y}{x^2m^2}, & 1 \ll x|m| \ll \sqrt{y},\\ \frac{y}{2x}\ln\frac{x^2m^2}{y}, & \sqrt{y} \ll x|m|.\end{cases} \tag{3.40}$$

Таким образом, мы получаем следующий результат для мнимой части средней динамической спиновой восприимчивости при низких частотах, $|\omega|/J_z^2 \ll T/\delta \ll J_z/(\delta - J_z)$:

$$\frac{\operatorname{Im}\overline{\chi_\perp(\omega)}}{\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)} = 1 - \frac{\delta}{\boldsymbol{\beta}\pi^2 T}\left(\frac{\delta\omega^2}{4TJ_z^2} + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{\delta J_z}{(\delta - J_z)T}. \tag{3.41}$$

Здесь, $\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)$ дается (2.27) при $b = 0$. В интервале температур $|\omega|/J_z^2 \ll T/\delta \ll J_z/(\delta - J_z)$ эффект флуктуаций одночастичных уровней подавлен дополнительно маленьким фактором $\delta/T \ll 1$. Таким образом мы ожидаем, что теория возмущений верна даже при $T \ll \delta J_z/[\pi^2\boldsymbol{\beta}(\delta - J_z)]$.

При высоких частотах , $1 \ll (\omega\delta/(J_zT))^2$, и низких температурах $T \ll \delta J_z/(\delta - J_z)$ мы получаем из (3.40) следующий результат для средней динамической спиновой восприимчивости:

$$\frac{\operatorname{Im}\overline{\chi_\perp(\omega)}}{\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)} = 1 + \frac{1}{2\pi^2\boldsymbol{\beta}}\min\left\{\frac{\omega^2\delta^2}{2J_z^2T^2}, \frac{\delta J_z}{T(\delta - J_z)}\right\}\ln\max\left\{\frac{\omega^2\delta(\delta - J_z)}{4J_z^3T}, \frac{4J_z^3T}{\omega^2\delta(\delta - J_z)}\right\}. \tag{3.42}$$

Здесь $\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)$ дается выражением (2.28) при $b = 0$. Теория возмущений оправдана при $\max\{[\omega\delta/(J_zT)]^2, \delta J_z/[T(\delta - J_z)]\} \ll \pi^2\boldsymbol{\beta}$. Напомним, что максимум $\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega)$ расположен вблизи частоты $\omega_{\text{ext}} \approx \sqrt{2J_z^2T/(\delta - J_z)}$. Тогда, как следует из (3.42), флуктуации приводят к увеличению максимального значения средней динамической восприимчивости в $[(\delta J_z/(\pi^2 \boldsymbol{\beta} T(\delta - J_z))]$ раз. Из-за флуктуаций есть небольшой сдвиг максимума к нулевой частоте, $\delta\omega_{\rm ext}/\omega_{\rm ext} \sim -\delta^2/(\pi^2 \boldsymbol{\beta} T^2)$.

Так как $Z_S \leqslant 1$ мы можем оценить функцию $F_\chi(m)$ сверху следующим образом

$$F_\chi(m) \leqslant \left(\frac{\delta}{\delta - J_z}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\theta^2 - V\left(xm + i\theta\sqrt{x}\right)}. \tag{3.43}$$

Следовательно $F_\chi(m)$ остается конечным при $J_z < \delta$. Таким образом несмотря на флуктуации уровней стоунеровская неустойчивость проявляется в $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$ только при $J_z = \delta$.

Согласно (3.43) при усреднении по флуктуациям уровней величина $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$ остается конечным. Однако, форма кривой может существенно измениться в режиме сильных флуктуаций. Чтобы оценить $\operatorname{Im}\chi_\perp(\omega)$ at $\delta \ll T \ll \delta J_z/[\pi^2 \boldsymbol{\beta}(\delta - J_z)]$ мы подставим вырожденный процесс $\tilde{v}(h)$ для $V(h)$ в (3.36). Тогда, найдем, что

$$\overline{F_\chi(m)} = \frac{e^{\beta(\delta - J_z)m^2}}{\sqrt{8z^2 \ln 2}} \exp\left[-\frac{\beta(\delta - J_z)m^2}{2z^2 \ln 2}\right] \tag{3.44}$$

при $\beta(\delta - J_z)m^2 \gg 1$. Напомним, здесь $z^2 = \delta^2/[\pi^2 \boldsymbol{\beta} T(\delta - J_z)]$. Этот результат означает, что $\operatorname{Im}\overline{\chi_\perp(\omega)}$ имеет минимум и максимум на частотах

$$\omega_{\rm ext} = \pm \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi^2 \boldsymbol{\beta}}} \frac{\delta^2}{\delta - J_z}. \tag{3.45}$$

Из-за сильных флуктуаций одноэлектронных уровней частоты экстремумов смещаются к более высоким частотам (по-сравнению с соответствующими результатами без флуктуаций) и перестают зависеть от температуры. Флуктуации не влияют существенно на значения $\operatorname{Im}\overline{\chi_\perp(\omega)}$ в экстремумах. Следовательно наклон при $\omega = 0$ становится меньше, $\operatorname{Im}\overline{\chi_\perp(\omega)}/\operatorname{Im}\chi_\perp^{(0)}(\omega) \propto 1/z \ll 1$.

3.3 Учет флуктуаций для восприимчивости в случае Гейзенберга

3.3.1 Продольная спиновая восприимчивость

Для случая изотропного обменного взаимодействия, $J_\perp = J_z \equiv J$, интегрирование по $\mathcal{B}$ в (1.19) становится тривиальным. Тогда для $T \gg \delta$ мы получаем [29]

$$Z_S = \left(\frac{\delta}{\delta - J}\right)^{1/2} \frac{e^{\frac{\beta b^2}{4J}}}{\operatorname{sh}(\beta b/2)} \tilde{\Xi}\left(\frac{b}{J}, \frac{\beta J \delta}{\delta - J}\right), \tag{3.46}$$

где

$$\tilde{\Xi}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dh}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sh}\,(hx\sqrt{y})e^{-h^2+h\sqrt{y}-V(h\sqrt{y})}. \tag{3.47}$$

Так как в отсутствии магнитного поля Z возрастает с увеличением J (см (1.9)), можно удостовериться, что и для гейзенберговского обменного взаимодействия $Z_S \geqslant 1$. Детальное исследование разложения по теории возмущений по V для продольной спиновой восприимчивости можно найти в [29]. Также как для случая изинговского обменного взаимодействия влияние флуктуаций существенно при $b=0$ и $\delta \ll T \ll J\delta/[\pi^2\boldsymbol{\beta}(\delta-J)]$. В этом интервале параметров типичное значение $|h|$ в интеграле в правой части (3.47) велико , $|h|\sim\sqrt{\beta\bar{J}}\gg 1$ где $\bar{J}=\delta J/(\delta-J)$. Тогда для $b=0$ получим

$$Z_S=\frac{2}{\sqrt{\beta\bar{J}}}\frac{\delta}{\delta-J}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dh}{\sqrt{\pi}}\,h\,e^{-h^2+h\sqrt{y}-zv(h)}, \tag{3.48}$$

где $z=[\beta\bar{J}/(\pi^2\boldsymbol{\beta})]^{1/2}$. Здесь $\boldsymbol{\beta}=1$ что соответствует ортогональному ансамблю Вигнера-Дайсона. Функция распределения $\mathcal{P}(W)=\mathsf{P}\{\ln Z_S>W\}$ может быть оценена таким же образом как в предыдущем разделе

$$Z_S\leqslant\frac{2}{\sqrt{\beta\bar{J}}}\left(\frac{\delta}{\delta-J}\right)\left[2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dh\,h\,\mathrm{sh}\,(h\sqrt{y})}{\sqrt{\pi\gamma}}e^{-(1-\gamma)h^2/\gamma}\right]\max_{h\geqslant 0}\Big\{e^{-h^2-(z/\sqrt{\gamma})v(h)}\Big\}, \tag{3.49}$$

с произвольным параметром разбиения γ $(0<\gamma<1)$. Таким образом мы получаем следующую оценку сверху:

$$\mathcal{P}(W)\leqslant a_\gamma\exp\left\{-\frac{\gamma}{2z^2\ln 2}\left[W+\frac{3}{2}\ln\frac{(1-\gamma)J}{\bar{J}}\right]\right\}, \tag{3.50}$$

где $a_\gamma=\exp\{(\pi^2\boldsymbol{\beta}\gamma)/[8(1-\gamma)\ln 2]\}$. Из этой оценки следует, что моменты $\ln Z_S$ (и χ_{zz}) конечны при $J<\delta$. При $z\gg 1$ интеграл в правой части (3.47) может быть вычислен в седловом приближении, что сводит статистику $\ln Z_S$ к статистике максимумов процесса $Y(h)=-h^2+h\sqrt{y}-zv(h)$. Далее так же как и в предыдущем разделе используя результаты Хюслера и Питербарга [43], мы находим что хвост функции распределения при $W\gg\delta J/[T(\delta-J)]$ дается следующим выражением $\mathcal{P}_{\mathrm{tail}}\big(\pi^2\boldsymbol{\beta}T(\delta-J)W/(\delta J)\big)$ (см (3.32)). Заметим, что для этого хвоста дрейфовый член $h\sqrt{y}$ в процессе $Y(h)$ не важен.

Типичное значение h дающее вклад в интеграл в правой части (3.48) равно $\sqrt{y}/2$. Тогда для $z\gg 1$ мы имеем с логарифмической точностью, $\ln Z_s-y/4=(z\sqrt{y}/2)v(1)$.

Следовательно, при $\delta \ll T \ll \bar{J}/(\pi^2 \boldsymbol{\beta})$ средний k-ый момент продольной восприимчивости может быть оценен следующим образом

$$\overline{\left(\chi_{zz} - \chi_{zz}^{(0)}\right)^k} \propto \left(\frac{\delta^2}{\sqrt{\pi^2 \boldsymbol{\beta}} T (\delta - J)^2} \right)^k , \tag{3.51}$$

где $\chi_{zz}^{(0)} = \delta^2/[12T(\delta - J)^2]$ - спиновая восприимчивость в отсутствиии флуктуации уровней. Заметим, что для $\delta \ll T \ll \bar{J}/(\pi^2 \boldsymbol{\beta})$ скейлинг средней продольной спиновой восприимчивости такой же как и в (3.51) при $k = 1$ был получен в работе [22].

3.4 Заключение

В этой главе было исследовано влияние флуктуаций одночастичного спектра квантовой точки на продольную спиновую восприимчивость в случаях изинговского и изотропного обменного взаимодействия. Можно сделать следующие выводы:

1) Моменты спиновой восприимчивости остаются конечными вплоть до точки перехода Стоунера. Соответственно переход Стоунера не смещается из-за флуктуаций.

2) Хвост функции распределения спиновой восприимчивости экспоненциальный со слабо зависящей от аргумента предэкспонентой.

3) Флуктуации приводят к существенному уширению пиков мнимой части поперечной спиновой восприимчивости, не приводя, однако, к другим немонотонностям.

Глава 4

Динамика спина при туннельной связи с резервуаром

4.1 Введение

В предыдущих главах речь шла об изолированной квантовой точке. Однако, для изучения транспорта через квантовую точку необходимо присоединить к ней контакты. Само наличие контакта меняет действие для квантовой точки. В работе [13] была изучена динамика полного спина и выведено обобщение действие Амбегаокара-Эккерна-Шёна (АЭШ) [14, 15] для квантовой точки при наличии контактов в адиабатическом приближении. Это приближение позволяло разложить функцию Грина относительно функции Грина свободных электронов по остаточному члену возникшему из-за перехода во вращающуюся систему отсчета. В этой главе приводится метод устранения этого остаточного члена за счет отказа от сохранения стандартных фермионных граничных условий.

Этот метод позволяет вывести действие типа АЭШ для полного спина квантовой точки, в котором динамика спина не предполагается адиабатической. Полученное действие позволяет исследовать вопрос о том, как связь с резервуаром влияет на мезоскопическую стоунеровскую неустойчивость.

4.2 Случай свободных частиц

Рассмотрим, как граничные условия на переменные функционального интеграла влияют на статистическую сумму и функцию Грина системы.

Известно [44], что для свободных частиц статистическая сумма может быть вычислена как интеграл по грассмановым переменным

$$Z = \lim_{M\to\infty} \int \prod_{k=1}^{M} \prod_{\alpha} d\overline{\psi}_{\alpha,k} d\psi_{\alpha,k} e^{-S(\overline{\psi},\psi)}. \tag{4.1}$$

Здесь действие

$$S(\overline{\psi},\psi) = \Delta t \sum_{k=1}^{M} \sum_{\alpha} \Big[\overline{\psi}_{\alpha k} \Big\{ \frac{\psi_{\alpha,k} - \psi_{\alpha,k-1}}{\Delta t} - \mu\psi_{\alpha,k-1} \Big\} + H(\overline{\psi}_{\alpha,k}, \psi_{\alpha,k-1}) \Big] \Big|_{\psi_{\alpha,0}=\zeta\psi_{\alpha,M}}, \tag{4.2}$$

где $\zeta = \pm$ для бозонов/фермионов. Перепишем это выражение следующим образом

$$S(\overline{\psi},\psi) = \sum_{i,j} \overline{\psi}_i S^{(\alpha)}_{i,j} \psi_j, \tag{4.3}$$

где $M \times M$ матрица

$$S^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 & -\zeta a \\ -a & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & -a & 1 & \ddots & & \vdots \\ & 0 & -a & \ddots & 0 & \\ \vdots & & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & \dots & -a & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

и

$$a = 1 - \frac{\beta}{M}(\epsilon_\alpha - \mu). \tag{4.5}$$

Заметим, что граничные условия проявляют себя только в одном матричном элементе $S^{(\alpha)}_{1,M} = -\zeta a$.

Таким образом получаем для статистической суммы

$$Z = \prod_{\alpha} \det S^{(\alpha)} = \prod_{\alpha} (1 - \zeta e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}) \tag{4.6}$$

и функции Грина

$$\mathcal{G}(\alpha,\tau_1;\gamma,\tau_2;\mu)\Big|_{\tau_1>\tau_2} = \frac{e^{-(\epsilon_\alpha-\mu)(\tau_1-\tau_2)}}{1-\zeta e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}} \delta_{\alpha\gamma} \tag{4.7}$$

для любого значения ζ.

Подчеркнем, что выражения (4.6) и (4.7) справедливы при любом значении ζ, которое определяет граничное условие для грассмановых переменных в функциональном интеграле (4.1).

4.3 Случай кулоновского взаимодействия

Покажем как же можно использовать необычные граничные условия для вычисления статистической суммы и функции Грина для взаимодействующего гамильтониана на примере кулоновского взаимодействия.

Введем вспомогательное интегрирование по полю ϕ чтобы избавиться от нелинейных членов во взаимодействии, то есть сделаем преобразование Хаббарда-Стратоновича

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \Psi^*_{\alpha} \Big[\partial_\tau - \epsilon_\alpha + \mu + i\phi \Big] \Psi_\alpha + \frac{\phi^2}{4E_c} - iN_0\phi \tag{4.8}$$

Чтобы избавиться от $i\phi$ в первом члене проделаем следующее преобразование

$$\Psi_\alpha = e^{-i\int_0^\tau \phi(\tau) d\tau} \psi_\alpha(\tau) \tag{4.9}$$

Таким образом мы получаем в точности лагранжиан для свободных электронов

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \psi^*_{\alpha} \Big[\partial_\tau - \epsilon_\alpha + \mu \Big] \psi_\alpha + \frac{\phi^2}{4E_c} - iN_0\phi. \tag{4.10}$$

Отличие будет проявляться в том, что в функции Грина появятся дополнительные множители

$$G^{\Psi}_{\tau_1;\tau_2} = G^{\psi}_{\tau_1;\tau_2} e^{-i\int_{\tau_2}^{\tau_1} \phi(\tau) d\tau} \tag{4.11}$$

и в граничных условиях нужно учесть, что

$$\zeta = -e^{-i\int_0^\beta \phi(\tau) d\tau}. \tag{4.12}$$

Таким образом, для функции Грина имеем следующее выражение

$$G_{\alpha,\tau_1;\gamma,\tau_2} = \delta_{\alpha\gamma} \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta \left[\frac{\phi^2}{4E_c} - iN_0\phi \right]} \frac{e^{-(\epsilon_\alpha - \mu)(\tau_1 - \tau_2) - i\int_{\tau_2}^{\tau_1} \phi(\tau) d\tau}}{1 - \zeta e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}}. \tag{4.13}$$

Теперь интегрируя по ϕ можно получить (см. Приложение) известное выражение для функции Грина с кулоновским взаимодействием

$$G_{\alpha,\tau_1;\gamma,\tau_2} = e^{E_c \tau_{12}(\tau_{12} - \beta)} \int_{-\pi T}^{\pi T} d\phi_0 \sum_k e^{i\phi_0(\tau - \beta k)} e^{\beta E_c (k - N_0 + \tau/\beta)^2} \Big[\mathcal{G}(\alpha, \tau_1; \gamma, \tau_2; \mu - i\phi_0) e^{-i\tau_{12}\phi_0} \Big] \tag{4.14}$$

4.4 Случай гейзенберговского обменного взаимодействия

Проделаем аналогичную процедуру по деформации граничных условий для случая обменного взаимодействия. После преобразования Хаббарда-Стратоновича получим следующее выражение для лагранжиана

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \Psi^*_\alpha \Big[\partial_\tau - \epsilon_\alpha + \mu + \frac{\boldsymbol{\sigma\Phi}}{2} \Big] \Psi_\alpha + \frac{\boldsymbol{\Phi}^2}{4J} \tag{4.15}$$

Чтобы откалибровать $\boldsymbol{\sigma\Phi}$ в первом слагаемом проделаем следующее преобразование

$$\Psi_\alpha = \overrightarrow{\mathcal{T}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^\tau \boldsymbol{\sigma\Phi}(\tau) d\tau} \psi_\alpha(\tau) \tag{4.16}$$

Таким образом снова получим лагранжиан для свободных электронов

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \psi^*_\alpha \Big[\partial_\tau - \epsilon_\alpha + \mu \Big] \psi_\alpha + \frac{\Phi^2}{4J}. \tag{4.17}$$

В функции Грина появятся дополнительные сомножители

$$G^{\Psi}_{\tau_1;\tau_2} = \overrightarrow{\mathcal{T}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \boldsymbol{\sigma\Phi}(\tau) d\tau} G^{\psi}_{\tau_1;\tau_2} \overleftarrow{\mathcal{T}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_2} \boldsymbol{\sigma\Phi}(\tau) d\tau} \tag{4.18}$$

и граничные условия определяются

$$\zeta = -\overrightarrow{\mathcal{T}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\beta} \boldsymbol{\sigma\Phi}(\tau) d\tau} \tag{4.19}$$

Отметим, что ζ теперь матрица 2 на 2.

Для начала вычислим статистическую сумму

$$Z = \int \prod_{\alpha} \mathcal{D}\psi_\alpha \overline{\psi}_\alpha e^{-S(\overline{\psi},\psi)} = \prod \det S^{(\alpha)} \tag{4.20}$$

где

$$S^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 & -\zeta a \\ -a & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & -a & 1 & \ddots & & \vdots \\ & 0 & -a & \ddots & 0 & \\ \vdots & & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & \dots & -a & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Подчеркнем, что каждый элемент в этой матрице это матрица 2 на 2.

Преобразуя матрицу под детерминантом мы получим

$$\det S^{(\alpha)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 & -\zeta a \\ 0 & 1 & 0 & & & -\zeta a^2 \\ & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -\zeta a^{M-1} \\ 0 & & & \dots & 0 & 1-\zeta a^M \end{bmatrix} = \det[1-\zeta a^M] \tag{4.22}$$

После интегрирования по вспомогательным переменным преобразования Хаббарда-Стратоновича придем к выражению

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^\infty dy \int d\xi_\beta d\xi_0 \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big) \frac{e^{-\xi_0}}{4yv} \exp(-w - y - 2v \operatorname{ch}\frac{\xi_\beta - \xi_0}{2}) \\ &\times \delta(\xi_\beta + \xi_0 + 4\ln 4yv) \langle \xi_\beta | e^{-\beta H} | \xi_0 \rangle \end{aligned} \tag{4.23}$$

где

$$H = -J\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{J}{4}e^{-\xi} \tag{4.24}$$

Этот результат совпадает с соответствующим результатом из [29].

Перейдем к вычислению функции Грина. Интегрируя по ψ получим

$$G^\psi(\alpha_1, \sigma_1, \tau_1; \alpha_2, \sigma_2, \tau_2) = \delta_{\alpha_1\alpha_2}\Big[S^{(\alpha)}\Big]^{-1}_{(\sigma_1,\tau_1;\sigma_2,\tau_2)} \tag{4.25}$$

Матрица обратная к $S^{(\alpha)}$ имеет довольно простой вид

$$\Big[S^{(\alpha)}\Big]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta a^{M-1} & & \dots & \zeta a^2 & \zeta a \\ a & 1 & \zeta a^{M-1} & & & \zeta a^2 \\ a^2 & a & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & a & \ddots & \zeta a^{M-1} & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \zeta a^{M-1} \\ a^{M-1} & a^{M-2} & & \dots & a & 1 \end{bmatrix} \times (1 - a^M\zeta)^{-1} \tag{4.26}$$

Таким образом мы получаем

$$\begin{aligned} G^\Psi(\alpha, \uparrow, \tau_1; \alpha, \uparrow, \tau_2) &= e^{-(\epsilon_\alpha - \mu)(\tau_1 - \tau_2)} \int \mathcal{D}\Phi e^{-\frac{1}{4J}\int_0^\beta \Phi^2 d\tau} \Big[\overrightarrow{\mathcal{T}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \boldsymbol{\sigma\Phi}(\tau) d\tau}\Big]_{\uparrow\sigma} \\ &\times \Big[\big(1 + e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \overrightarrow{\mathcal{T}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^\beta \boldsymbol{\sigma\Phi}(\tau) d\tau}\big)\Big]^{-1}_{\sigma\sigma'} \Big[\overleftarrow{\mathcal{T}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_2} \boldsymbol{\sigma\Phi}(\tau) d\tau}\Big]_{\sigma'\uparrow} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Взяв интегралы по вспомогательным переменным преобразования Хаббарда-Стратоновича получим

$$\begin{aligned} G_b^\Psi &= \Big(\prod_{\gamma\neq\alpha}\oint\frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big)e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}\frac{e^{-w_\alpha}}{2v_\alpha}\int d\nu_2\int_0^\infty d\nu K_{2i\nu}(2v_\alpha)\langle\nu|\frac{1}{\eta}|\nu_2\rangle\langle\nu_2|\eta^2|\nu\rangle \\ &\times \Big[e^{-\tau J\nu_2^2}e^{-(\beta-\tau)J\nu^2}+e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}e^{-\tau J\nu^2}e^{-(\beta-\tau)J\nu_2^2}\Big] \end{aligned} \tag{4.28}$$

Этот результат в точности совпадает с результатом полученным в работе [29] из операторного подхода.

4.5 Мацубаровское действие АЭШ для спина

Полученные выше результаты для приводят к следующему виду АЭШ действия в мнимом времени:

$$S_{AES} = -\frac{1}{4J}\int_0^\beta d\tau\Phi^2 + \ln Z[\mathbf{\Phi}] - \mathrm{Tr}\, tG_d[\mathbf{\Phi}]t^\dagger G_r, \tag{4.29}$$

где

$$G_r(\tau) = -\frac{\pi T\nu_r}{\sin(\pi T\tau)}, \tag{4.30}$$

$$Z[\mathbf{\Phi}] = \prod_\gamma \det\left(1+U(\beta)e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\right), \tag{4.31}$$

$$G_d[\tau_1,\tau_2;\mathbf{\Phi}] = \sum_\alpha U(\tau_1)e^{-\tau_{12}(\epsilon_\alpha-\mu)}\left(1+U(\beta)e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\right)^{-1}U^{-1}(\tau_2), \tag{4.32}$$

$$U(\tau) = \overrightarrow{\mathfrak{T}}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\tau d\tau'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{\Phi}(\tau')\right]. \tag{4.33}$$

Используя представление Вея-Нормана-Колоколова для $U(\tau)$ и вводя следующие обозначения:

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} A_\tau & B_\tau \\ C_\tau & D_\tau \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} A_\tau = e^{\frac{1}{2}\int_0^\tau d\tau'\rho}, &\qquad B_\tau = A_\tau\int_0^\tau d\tau'\kappa^-(\tau')e^{-\int_0^{\tau'}dt\rho(t)} \\ C_\tau = \kappa^+(\tau)A_\tau, &\qquad D_\tau = A_\tau^{-1}+\kappa^+(\tau)B_\tau, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{2}\Phi_0\sin\theta e^{-i\phi} = -\kappa^-,\quad \frac{1}{2}\Phi_0\sin\theta e^{i\phi} = -\partial_\tau\kappa^+ + \rho\kappa^+ + \kappa^{+2}\kappa^-,\quad \Phi_0\cos\theta = \rho+2\kappa^+\kappa^-, \tag{4.36}$$

мы можем записать действие АЭШ следующим образом

$$S_{AES} = S^{(0)}+S^{(1)}+S^{(g)} \tag{4.37}$$

где

$$S^{(0)} = -\frac{1}{4J}\int_0^\beta d\tau\left[\rho^2 + 4\dot{\kappa}^+\kappa^-\right] + \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\rho, \tag{4.38}$$

$$S^{(1)} = \sum_\alpha\sum_{\sigma=\pm}\ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu+\sigma h_\beta)}\right),$$

$$2\operatorname{ch}\beta h_\beta = 2\operatorname{ch}\int_0^\beta\frac{\rho(\tau)}{2}d\tau + e^{\frac{1}{2}\int_0^\beta\rho(\tau)d\tau}\kappa^+(\beta)\int_0^\beta\kappa^-(\tau)e^{-\int_0^\tau\rho(\tau')d\tau'}d\tau, \tag{4.39}$$

и

$$\begin{aligned} S^{(g)} = -t^2\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 G_r(\tau_{21})\frac{1}{2\operatorname{sh}(\beta h_\beta)}\Bigg\{&\left[G_d^{(0)}(\tau_{12},\mu+h_\beta)e^{(\beta-\tau)h_\beta} - G^{(0)}(\tau_{12},\mu-h_\beta)e^{-(\beta-\tau)h_\beta}\right]\\ \times\Big[A_{\tau_1}D_{\tau_2} - B_{\tau_1}C_{\tau_2} - C_{\tau_1}B_{\tau_2} + D_{\tau_1}A_{\tau_2}\Big] &+ \left[G_d^{(0)}(\tau,\mu-h_\beta)e^{\tau h_\beta} - G_d^{(0)}(\tau,\mu+h_\beta)e^{-\tau h_\beta}\right]\\ \times\Big[A_{\tau_1}D_{\tau_\beta}D_{\tau_2} + A_{\tau_1}B_{\tau_\beta}C_{\tau_2} - B_{\tau_1}C_{\tau_\beta}D_{\tau_2} - B_{\tau_1}A_{\tau_\beta}C_{\tau_2}\\ - C_{\tau_1}D_{\tau_\beta}B_{\tau_2} - C_{\tau_1}B_{\tau_\beta}A_{\tau_2} + D_{\tau_1}C_{\tau_\beta}B_{\tau_2} + D_{\tau_1}A_{\tau_\beta}A_{\tau_2}\Big]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Заметим, что последнее слагаемое в $S^{(0)}$ возникло из якобиана преобразования Вея-Нормана-Колоколова. Здесь мы пользовались следующим результатом:

$$\begin{aligned} \sum_\alpha e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}\left(1 + U(\beta)e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\right)^{-1} &= \sum_\alpha\frac{e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}}{[1+e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu+h_\beta)}][1+e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu-h_\beta)}]}\left(1 + U^{-1}(\beta)e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\right)\\ &= \frac{1}{2\operatorname{sh}(\beta h_\beta)}\Bigg[G_d^{(0)}(\tau,\mu+h_\beta)e^{(\beta-\tau)h_\beta} - G_d^{(0)}(\tau,\mu-h_\beta)e^{-(\beta-\tau)h_\beta}\\ &\quad + U^{-1}(\beta)G_d^{(0)}(\tau,\mu-h_\beta)e^{\tau h_\beta} - U^{-1}(\beta)G_d^{(0)}(\tau,\mu+h_\beta)e^{-\tau h_\beta}\Bigg], \end{aligned} \tag{4.41}$$

где

$$G_d^{(0)}(\tau,\mu) = \sum_\alpha\frac{e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}}. \tag{4.42}$$

Если можно пренебречь расстоянием между одночастичными уровнями квантовой точки, то есть при $T \gg \delta$, мы можно воспользоваться следующими упрощениями:

$$G_d^{(0)}(\tau,\mu) = -\frac{\pi T/\delta}{\sin(\pi T\tau)} \tag{4.43}$$

$$S^{(1)} = \mathrm{const} + \beta h_\beta^2/\delta \tag{4.44}$$

4.6 Заключение

В этой главе был проделан вывод действия АЭШ для полного спина квантовой точки. Можно сделать следующие выводы:

1) Можно приводить гамильтониан со взаимодействием к гамильтониану для свободных электронов при помощи указанного в тексте метода. Информация о взаимодействии сохраняется при этом в граничных условиях на фермионные поля.

2) Действие АЭШ записанное через переменные Вея-Нормана-Колоколова позволяют описывать динамику спина квантовой точки туннельно связанной с резервуаром вне адиабатического приближения.

Заключение

Полученные в диссертационной работе результаты позволяют сделать следующие выводы

1) Стоунеровская неустойчивость не смещается за счет флуктуаций одночастичного спектра квантовой точки.

2) Наличие дополнительной немонотонности в туннельной плотности состояний предсказанное в работе [1] не подтвердилось при непертурбативном учете анизотропии обменного взаимодействия.

3) Температурная зависимость спиновой восприимчивости подавляется за счет анизотропии обменного взаимодействия.

4) Флуктуации одночастичного спектра приводят к существенному уширению динамической спиновой восприимчивости вблизи перехода Стоунера.

5) Действие АЭШ записанное через переменные Вея-Нормана-Колоколова позволяют описывать динамику спина квантовой точки туннельно связанной с резервуаром вне адиабатического приближения.

Приложение А

Вывод точного выражения для туннельной плотности состояний

Здесь будет приведен детальный вывод точного выражения для туннельной плотности состояний при произвольном одночастичном спектре квантовой точки. В силу ненулевой величины параметра $\varkappa$ действие для κ в Ур. (1.39) не гауссово: в нем присутствуют члены четвертого порядка. Чтобы избавиться от таких членов введем вспомогательные переменные η_{p,n_p}:

$$\exp\left[\frac{ip\Delta\varkappa}{4J_\perp}\left(\kappa^{-p}_{p,n_p}\right)^2\left(\kappa^{p}_{p,n_p}+\kappa^{p}_{p,n_p-1}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{ip\Delta\varkappa}{4\pi J_\perp}}\int d\eta_{p,n_p}\exp\left(\frac{ip\Delta\varkappa}{4J_\perp}\eta^2_{p,n_p}\right) \\ \times\exp\left[-\frac{ip\Delta\varkappa}{2J_\perp}\eta_{p,n_p}\kappa^{-p}_{p,n_p}\left(\kappa^{p}_{p,n_p}+\kappa^{p}_{p,n_p-1}\right)\right]. \tag{A.1}$$

Далее следуя [36], мы вводим новые переменные

$$\kappa^{-p}_{p,n_p} = \chi^{-p}_{p,n_p}e^{\alpha_{p,n_p}}, \qquad \kappa^{p}_{p,n_p} = \chi^{p}_{p,n_p}e^{\beta_{p,n_p}}, \tag{A.2}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{p,n_p} &= -ip\Delta\varkappa\sum_{n=1}^{n_p}(\rho_{p,n}-\eta_{p,n}), \\ \alpha_{p,n_p} &= -\beta_{p,n_p}-\frac{ip\Delta\varkappa}{2}(\rho_{p,n_p}-\eta_{p,n_p}). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Такой выбор α_{p,n_p} и β_{p,n_p} позволяет нам избавиться от слагаемых второго порядка по χ's и первого порядка по ρ в действии в Ур. (1.39). Это может быть сделано с точностью до первого порядка по Δ. Заметим, что нужно учитывать якобиан преобразования (A.3),

$$\mathcal{J}_p = \exp\Big[-ip\Delta\varkappa\big(\rho_{p,n_p}-\eta_{p,n_p}\big)/2\Big]. \tag{A.4}$$

В отсутствии магнитного поля , $\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\downarrow} = \mathcal{K}_{\alpha\downarrow\uparrow} = 0$ и $\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = \mathcal{K}_{\alpha\downarrow\downarrow}$. Поэтому в дальнейшем будем вычислять $K_{\alpha\uparrow\uparrow}$. После вычисления одночастичного следа в выражении (1.39) получим

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow}(t_+,t_-) = \prod_{p=\pm}\Bigg\{\prod_{n_p=1}^{N_p}\int d\chi^p_{p,n_p}d\chi^{-p}_{p,n_p}d\rho_{p,n_p}d\eta_{p,n_p}\ \exp\Bigg[\frac{ip\Delta}{2}\big[(1-\varkappa)\rho_{p,n_p}+\varkappa\eta_{p,n_p}\big]$$

$$-\frac{ip\Delta}{4J_z}\Big[\rho^2_{p,n_p}+\frac{\varkappa\eta^2_{p,n_p}}{1-\varkappa}\Big]-\frac{\chi^{-p}_{p,n_p}}{J_\perp}(\chi^p_{p,n_p}-\chi^p_{p,n_p-1})\Bigg]\Bigg\}e^{-2i\epsilon_\alpha t_+}\sum_{p=\pm}e^{i\epsilon_\alpha t_p}\exp\Big[\frac{ip\Delta}{2}\sum_{n_p=1}^{N_p}\rho_{p,n_p}\Big]$$

$$\times\prod_{\gamma\neq\alpha}\Bigg\{1+e^{-2i\epsilon_\gamma(t_+-t_-)}+2e^{-i\epsilon_\gamma(t_+-t_-)}\cos\left(\frac{\Delta}{2}\sum_{p=\pm}\sum_{n_p=1}^{N_p}\rho_{p,n_p}\right)+\prod_{p=\pm}e^{-ip\epsilon_\gamma t_p}\exp\Big[\frac{ip\Delta}{2}\sum_{n_p=1}^{N_p}\rho_{p,n_p}\Big]$$

$$\times\Bigg(p\chi^p_{p,N_p}\exp\Big[-ip\Delta\varkappa\sum_{n_p=1}^{N_p}(\rho_{p,n_p}-\eta_{p,n_p})\Big]+i\Delta\sum_{n_{-p}=1}^{N_{-p}}\chi^p_{-p,n_{-p}}\exp\Big[-ip\Delta\varkappa\sum_{n=1}^{n_{-p}}(\rho_{-p,n}-\eta_{-p,n})$$

$$+ip\Delta\sum_{n=1}^{n_{-p}}\rho_{-p,n}\Big]\Bigg)\Bigg\}. \tag{A.5}$$

После интегрирования по переменным χ_{p,n_p} (см. Приложение) мы получим

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow}(t_+,t_-) = \prod_{p=\pm}\Bigg\{\prod_{n_p=1}^{N_p}\int d\rho_{p,n_p}d\eta_{p,n_p}\,e^{\frac{ip\Delta}{2}[(1-\varkappa)\rho_{p,n_p}+\varkappa\eta_{p,n_p}]}e^{-\frac{ip\Delta}{4J_z}[\rho^2_{p,n_p}+\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\eta^2_{p,n_p}]}\Bigg\}$$

$$\prod_\gamma\left(\oint\limits_{|z_\gamma|=1}\frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right)e^{-w_\alpha-2i\epsilon_\alpha t_+}\sum_{p=\pm}e^{i\epsilon_\alpha t_p}e^{\frac{ip\Delta}{2}\sum_{n_p=1}^{N_p}\rho_{p,n_p}}\exp\left(-2v_\alpha\cos\left[\frac{\Delta}{2}\sum_{p=\pm}\sum_{n_p=1}^{N_p}\rho_{p,n_p}\right]\right)$$

$$\times\int_0^\infty dy\,e^{-y}\exp\Bigg\{-iJ_\perp v_\alpha y\left(\prod_{p=\pm}e^{i\frac{p\Delta}{2}\sum_{n_p=1}^{N_p}\rho_{p,n_p}}\right)$$

$$\times\left(\sum_{p=\pm}p\,e^{-ip\Delta\varkappa\sum_{n_p=1}^{N_p}(\rho_{p,n_p}-\eta_{p,n_p})}\Delta\sum_{n_p=1}^{N_p}e^{-ip\Delta\sum_{n=1}^{n_p}[(1-\varkappa)\rho_{p,n}+\varkappa\eta_{p,n}]}\right)\Bigg\}, \tag{A.6}$$

где

$$v_\alpha = \sum_{\gamma\neq\alpha}z_\gamma e^{-i\epsilon_\gamma(t_+-t_-)},$$
$$w_\alpha = \sum_{\gamma\neq\alpha}z_\gamma\left(1+e^{-2i\epsilon_\gamma(t_+-t_-)}\right). \tag{A.7}$$

На данном этапе удобнее перейти к непрерывному представлению. Для того чтобы привести выражение (A.6) к более стандартному виду введем новые переменные:

$$\xi_p(t) = ip\int_0^t dt'[(1-\varkappa)\rho_p(t')+\varkappa\eta_p(t')]+\xi_p(0), \tag{A.8}$$

удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=\pm} p\Big[\xi_p(0) - \varkappa\xi_p(t_p) + ip\varkappa\int_0^{t_p} dt\eta_p(t)\Big] = 0,\\
&\sum_{p=\pm}\xi_p(t_p) + 2\ln(4v_\alpha y) = 0.
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

После интегрирования по переменным η_p и введения вспомогательной переменной x мы можем записать функциональный интеграл для $K_{\alpha\uparrow\uparrow}$ как интеграл типа Фейнмана-Каца:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = e^{-2i\epsilon_\alpha t_+}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iJ_z\varkappa x^2(t_+-t_-)}\prod_{p=\pm}\Big\{\int\mathcal{D}[\xi_p]e^{ip\int_0^{t_p}dt\mathcal{L}_p-(1-2ipx)\xi_p(0)/2}\Big\}\prod_{\gamma\neq\alpha}\left(\oint_{|z_\gamma|=1}\frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right)\\
\times\int_0^\infty\frac{dy}{4yv_\alpha}\,e^{-y-w_\alpha-2v_\alpha\operatorname{ch}[(\xi_+(t_+)-\xi_-(t_-))/2]}\delta\Big(\xi_+(t_+)+\xi_-(t_-)+2\ln(4vy)\Big)\\
\times\sum_{p=\pm}\Big[e^{(i\epsilon_\alpha-\varkappa xJ_z+ip\varkappa J_z/4)t_p+[\xi_p(t_p)-\xi_p(0)]/2}\Big].
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

Здесь лагранжианы $\mathcal{L}_p$ имеют вид

$$
\mathcal{L}_p = \frac{1}{4J_\perp}\dot{\xi}_p^2 - \frac{J_\perp}{4}e^{-\xi_p}.
\tag{A.11}
$$

Удобно переписать Ур. (A.10) в гамильтоновом представлении:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = e^{-2i\epsilon_\alpha t_+}\prod_{\gamma\neq\alpha}\left(\oint_{|z_\gamma|=1}\frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right)\int_0^\infty\frac{dy}{4yv_\alpha}\,e^{-y-w_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}dx\prod_{p=\pm}\Big\{\int d\xi_p d\xi_p'\;e^{-iJ_z\varkappa x^2pt_p-(1-2ipx)\xi_p'/2}\Big\}\\
\times\delta\left(\sum_{p=\pm}\xi_p+2\ln(4v_\alpha y)\right)e^{-2v_\alpha\operatorname{ch}[(\xi_+-\xi_-)/2]}\langle\xi_+|e^{-i\mathcal{H}_Jt_+}|\xi_+'\rangle\langle\xi_-'|e^{i\mathcal{H}_Jt_-}|\xi_-\rangle\\
\times\sum_{p=\pm}\Big[e^{i\epsilon_\alpha t_p}e^{\frac{\xi_p-\xi_p'}{2}}e^{\frac{ip\varkappa J_zt_p}{4}}e^{-\varkappa xJ_zt_p}\Big].
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

Гамильтониан одномерной квантовой механики соответствующий лагранжиану (A.11) имеет вид [36]

$$
\mathcal{H}_J = -J_\perp\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{J_\perp}{4}e^{-\xi}.
\tag{A.13}
$$

Его собственные значения равны $J\nu^2$ и собственные функции представлены модифицированными функциями Бесселя $K_{2i\nu}$ где ν вещественное число:

$$
\langle\xi|\nu\rangle = \frac{2}{\pi}\sqrt{\nu\operatorname{sh}(2\pi\nu)}K_{2i\nu}(e^{-\xi/2}).
\tag{A.14}
$$

Используя следующий результат (см формулу 6.794.11 на стр. 743 в [42])

$$\int\limits_0^\infty d\nu\, \nu \,\mathrm{sh}\,(2\pi\nu) K_{2i\nu}(2v_\alpha) K_{2i\nu}(e^{-\xi_+/2}) K_{2i\nu}(e^{-\xi_-/2})$$
$$= \frac{\pi^2}{16} \exp\left(-\frac{1}{4v_\alpha} e^{-\frac{\xi_+ + \xi_-}{2}} - 2v_\alpha \,\mathrm{ch}\,\frac{\xi_+ - \xi_-}{2}\right), \tag{A.15}$$

мы можем проинтегрировать по y, ξ_+, и ξ_-. Тогда мы получим $[\zeta = (\xi'_- - \xi'_+)/2]$

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = e^{-2i\epsilon_\alpha t_+} \prod_{\gamma\neq\alpha} \left(\oint\limits_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2} \right) \frac{e^{-w_\alpha}}{v_\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx d\zeta\, e^{\zeta/2} e^{-iJ_z \varkappa x^2 (t_+ - t_-)} \int\limits_0^\infty d\nu K_{2i\nu}(2v_\alpha) \int d\nu_1 \langle \nu | e^{\xi/2} | \nu_1 \rangle$$
$$\times \sum_{p=\pm} \times \left\{ e^{(i\epsilon_\alpha - \varkappa x J_z + ip\varkappa J_z/4) t_p} e^{-ipJ_\perp \nu_1^2 t_p + ipJ_\perp \nu^2 t_{-p}} e^{2ixp\zeta - p\zeta/2} Q_{\nu\nu_1}(e^{p\zeta/2}) \right\}, \tag{A.16}$$

где

$$Q_{\nu_+\nu_-}(z) = z \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-3\xi/2} \prod_{p=\pm} \langle \nu_p | \xi + 2p \ln z \rangle. \tag{A.17}$$

Используя следующее тождество (см. формулу 6.576.4 на стр. 676 в [42])

$$\int\limits_0^\infty dx\, x^{-\lambda} K_\mu(ax) K_\nu(bx) = \frac{a^{-\nu+\lambda-1} b^\nu}{2^{2+\lambda}\Gamma(1-\lambda)} \prod_{p,q=\pm} \Gamma\left(r_{pq}\right) {}_2F_1(r_{++}, r_{-+}, 1-\lambda; 1 - b^2/a^2), \tag{A.18}$$

где $r_{pq} = (1 - \lambda + p\mu + q\nu)/2$, $\Gamma(x)$ гамма функция, и ${}_2F_1(a,b,c;z)$ гипергеометрическая функция. Далее $(t_+ - t_- = -i\beta)$

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow}(t_+, t_-) = \frac{e^{-2i\epsilon_\alpha t_+}}{2\sqrt{\pi^3 \beta J_\perp}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx d\zeta\, e^{2ix\zeta - \beta J_z \varkappa x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dh\, \mathrm{sh}\,(h) \prod_{\gamma\neq\alpha} \prod_{\sigma=\pm} (1 + e^{-\beta\epsilon_\gamma - \sigma h}) \sum_{p=\pm} \Big[e^{-(1+p)\zeta/2}$$
$$\times e^{i(\epsilon_\alpha - \varkappa x J_z + ipJ_z/4) t_p} \mathcal{W}(2h + ipJ_\perp t_p, \zeta, \beta J_\perp) \Big], \tag{A.19}$$

где функция $\mathcal{W}$ определена как

$$\mathcal{W}(x,y,z) = \frac{1}{4\,\mathrm{sh}\, y} \left[\sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma\sqrt{\pi z}}{\mathrm{sh}\, y} \mathrm{erf}\Big(\frac{x - 2\sigma y}{2\sqrt{z}} \Big) + 4 e^{-y} \exp\Big(-\frac{(x-2y)^2}{4z} \Big) \right]. \tag{A.20}$$

Здесь $\mathrm{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z dt\, \exp(-t^2)$ функция ошибок. Также здесь мы восстановили все нормировочные множители.

A.0.1 Вычисление интеграла по вспомогательной переменной преобразования Хаббарда-Стратоновича в случае кулоновского взаимодействия

Вычислим интеграл по ϕ в следующем выражении

$$G_{\alpha,\tau_1;\gamma,\tau_2} = e^{E_c\tau_{12}(\tau_{12}-\beta)} \int_{-\pi T}^{\pi T} d\phi_0 \sum_k e^{i\phi_0(\tau-\beta k)} e^{\beta E_c(k-N_0+\tau/\beta)^2} \Big[\mathcal{G}_(\alpha,\tau_1;\gamma,\tau_2;\phi_0)e^{-i\tau_{12}\phi_0}\Big] \quad (A.21)$$

Разлагая $\frac{1}{1-\zeta e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}}$ в ряд можно получить

$$G_{\alpha,\tau_1;\gamma,\tau_2} = e^{-(\epsilon_\alpha-\mu+E_c)(\tau_1-\tau_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\beta(n-N_0)(\epsilon_\alpha-\mu+2(\tau_1-\tau_2)E_c/\beta)} e^{-\beta E_c(n-N_0)^2} \quad (A.22)$$

Заменяя

$$e^{-\beta E_c(n-N_0)^2} = const * \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0 e^{-\frac{\beta\phi_0^2}{4E_c}-i(n-N_0)\beta\phi_0} \quad (A.23)$$

и суммируя по n получим

$$G_{\alpha,\tau_1;\gamma,\tau_2} = e^{E_c\tau_{12}(\tau_{12}-\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0 e^{-\frac{\beta\phi_0^2}{4E_c}-i\beta N_0\phi_0} \frac{e^{-(\epsilon_\alpha-\mu-i\phi_0)\tau_{12}}}{1+e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu-i\phi_0)}} \quad (A.24)$$

A.0.2 Вычисление интеграла по вспомогательной переменной преобразования Хаббарда-Стратоновича в случае гейзенберговского обменного взаимодействия для статистической суммы

Проделаем преобразование Вея-Нормана-Колоколова в (4.22)

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}[\rho,\kappa^\pm] e^{\frac{1}{2}\int\rho(\tau)d\tau} e^{-\frac{1}{4J}\int_0^\beta(\rho^2+4\dot\kappa^+\kappa^-)d\tau} \prod_\alpha \Big(1+e^{-2\beta(\epsilon_\alpha-\mu)} \\ &+ e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\Big[2\,\mathrm{ch}\int_0^\beta \frac{\rho(\tau)}{2}d\tau + e^{\frac{1}{2}\int_0^\beta\rho(\tau)d\tau}\kappa^+(\beta)\int_0^\beta \kappa^-(\tau)e^{-\int_0^\tau\rho(\tau')d\tau'}d\tau\Big]\Big) \end{aligned} \quad (A.25)$$

Следуя [29] введем z_{gamma}

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}[\rho,\kappa^\pm] e^{-\frac{1}{4J}\int_0^\beta(\rho^2+4\dot\kappa^+\kappa^- - 2J\rho)} \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big) \\ &\times \exp(-w - v[2\,\mathrm{ch}\int_0^\beta \frac{\rho(\tau)}{2}d\tau + e^{\frac{1}{2}\int\rho(\tau)d\tau}\kappa^+(\beta)\int_0^\beta \kappa^-(\tau)e^{-\int_0^{\tau'}\rho(\tau')d\tau'}d\tau]) \end{aligned} \quad (A.26)$$

где
$$w = \sum_\gamma z_\gamma (1 + e^{-2\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}) \tag{A.27}$$
$$v = \sum_\gamma z_\gamma e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}. \tag{A.28}$$

Интегрируя по $\kappa^\pm$ получим
$$\begin{aligned} Z &= \int_0^\infty dy \int \mathcal{D}[\rho] e^{-\frac{1}{4J}\int_0^\beta (\rho^2 - 2J\rho)} \Big(\prod_\gamma \oint \frac{i dz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2} \Big) \\ &\times \exp(-w - y - v[2\operatorname{ch} \int_0^\beta \frac{\rho(\tau)}{2} d\tau + Jy e^{\frac{1}{2}\int \rho(\tau) d\tau} \int_0^\beta e^{-\int_0^{\tau'} \rho(\tau') d\tau'} d\tau]) \end{aligned} \tag{A.29}$$

Вводя новые обозначения
$$\xi(\tau) = \int_0^\tau d\tau' \rho(\tau') + \xi(0) \tag{A.30}$$

придем к выражению (4.23)

Приложение B

Вычисление интеграла по вспомогательной переменной преобразования Хаббарда-Стратоновича в случае гейзенберговского обменного взаимодействия для функции Грина

В этом приложении приводится вывод выражения (4.29) из (4.27). Разобьем функцию Грина (4.27) на две части для удобства вычисления

$$G^{\Psi}(\alpha, \uparrow, \tau_1; \alpha, \uparrow, \tau_2) = G^{\Psi}_a + G^{\Psi}_b, \tag{B.1}$$

где

$$\begin{aligned} G^{\Psi}_{a,b} &= e^{-(\epsilon_\alpha - \mu)\tau} \int \mathcal{D}[\rho, \kappa_+, \kappa_-] \oint \frac{dz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2} \exp(-\frac{1}{4J}) \int_0^\beta d\tau (\rho^2 + 4\dot{\kappa_+}\kappa_- - 2J\rho) \\ &\times \exp(-w_\alpha - v_\alpha [2 \operatorname{ch} (\int_0^\beta \rho d\tau/2) + \exp(\frac{1}{2}\int_0^\beta \rho(\tau')d\tau')\kappa_+(\beta) \int_0^\beta d\tau \kappa_-(\tau) e^{-\int_0^{\tau'} \rho(\tau'')d\tau''}]) \\ &\times e^{\frac{1}{2}\int_0^\tau \rho(\tau')d\tau'} F_{a,b} \end{aligned} \tag{B.2}$$

и

$$F_a = 1, \tag{B.3}$$

$$F_b = e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} e^{\frac{1}{2}\int_0^\beta \rho(\tau''')d\tau'''} \Big[1 + \int_\tau^\beta d\tau' \kappa_-(\tau')\kappa_+(\beta) e^{-\int_0^{\tau'} \rho(\tau'')d\tau''} \Big] \tag{B.4}$$

B.0.3 G_a^Ψ

Интегрируя по κ_+, κ_- получим

$$\begin{aligned}
G_a^\Psi(\alpha,\uparrow,\tau_1;\alpha,\uparrow,\tau_2) &= e^{-(\epsilon_\alpha-\mu)\tau}\oint\frac{dz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\int_0^\infty dy\int d\xi(0)d\xi(\tau)d\xi(\beta) \\
&\times\ \exp(-w-y-2v\,\mathrm{ch}\,(\frac{\xi(\beta)-\xi(0)}{2})+\frac{\xi(\tau)-\xi(0)}{2})\langle\xi(0)|e^{-\tau H_v}|\xi(\tau)\rangle \\
&\times\ \langle\xi(\tau)|e^{-(\beta-\tau)H_v}|\xi(\beta)\rangle e^{\frac{\xi(\beta)-\xi(0)}{2}}
\end{aligned}\tag{B.5}$$

Далее, зафиксируем произвольную константу C в определении ξ наложив следующее условие

$$\xi_<(0)+\xi_>(\beta) = -2\ln 4y\sqrt{v\tilde{v}}\tag{B.6}$$

Интегрируя по y мы получим

$$\begin{aligned}
G^\Psi(\alpha,\uparrow,\tau_1;\alpha,\uparrow,\tau_2) &= \oint\frac{dz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\int\frac{d\xi_<(0)d\xi_>(\beta)d\nu_<d\nu_>}{v} \\
&\times\ \exp(-w-\frac{e^{-\frac{\xi_<(0)+\xi_>(\beta)}{2}}}{4v}-2v\,\mathrm{ch}\,(\frac{\xi_>(\beta)-\xi_<(0)}{2})) \\
&\times\ \langle\xi_<(0)|\nu_<\rangle e^{-\tau J\nu_<^2}\langle\nu_<|e^{\frac{\xi}{2}}|\nu_>\rangle \\
&\times\ e^{-(\beta-\tau)J\nu_>^2}\langle\nu_>|\xi_>(\beta)\rangle e^{\frac{-3\xi_<(0)}{2}}e^{-(\epsilon_\alpha-\mu)\tau}
\end{aligned}\tag{B.7}$$

Далее используя следующий результат (см. формулу 6.794.11 на стр. 794 в [42])

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty d\nu\,\nu\,\mathrm{sh}\,(2\pi\nu)K_{2i\nu}(2v_\alpha)K_{2i\nu}(e^{-\xi_+/2})K_{2i\nu}(e^{-\xi_-/2}) \\
&\quad=\frac{\pi^2}{16}\exp\left(-\frac{1}{4v}e^{-\frac{\xi_++\xi_-}{2}}-2v_\alpha\,\mathrm{ch}\,\frac{\xi_+-\xi_-}{2}\right).
\end{aligned}\tag{B.8}$$

получим

$$\begin{aligned}
G^\Psi(\alpha,\uparrow,\tau_1;\alpha,\uparrow,\tau_2) &= \oint\frac{dz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big|_{\gamma\neq\alpha}\int_0^\infty d\nu\int\frac{d\xi_<(0)d\xi_>(\beta)d\nu_<d\nu_>}{v} \\
&\times\ \exp(-w)\nu\,\mathrm{sh}\,2\pi\nu K_{2i\nu}(e^{-\xi_<(0)/2})K_{2i\nu}(e^{-\xi_>(\beta)/2})K_{2i\nu}(2v) \\
&\times\ e^{-\frac{3\xi_<(0)}{2}}\langle\xi_<(0)|\nu_<\rangle e^{-\tau J\nu_<^2}\langle\nu_<|e^{\frac{\xi}{2}}|\nu_>\rangle \\
&\times\ e^{-(\beta-\tau)J\nu_>^2}\langle\nu_>|\xi_>(\beta)\rangle e^{-(\epsilon_\alpha-\mu)\tau}.
\end{aligned}\tag{B.9}$$

Интегрируя по $\xi_{<,>}$ и $nu_{<,>}$ мы получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}
G^\Psi(\alpha,\uparrow,\tau_1;\alpha,\uparrow,\tau_2) &= \oint\frac{dz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big|_{\gamma\neq\alpha}\int_0^\infty d\nu\frac{\exp(-w)}{v}K_{2i\nu}(2v)\langle\nu|e^{-\frac{3\xi}{2}}|\nu_<\rangle e^{-\tau J\nu_<^2}\langle\nu_<|e^{\frac{\xi}{2}}|\nu_>\rangle \\
&\times\ e^{-(\beta-\tau)J\nu_>^2}\langle\nu_>|\nu\rangle e^{-(\epsilon_\alpha-\mu)\tau}
\end{aligned}\tag{B.10}$$

B.0.4 G_b^Ψ

Вводя интегрирование по z_α поднимем F_b в показатель экспоненты

$$\begin{aligned} G_b^\Psi &= \int_0^\infty dy\Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big)e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}\int d\xi_\beta d\xi_0 d\xi e^{-w_\alpha}e^{\frac{\xi_\beta-\xi_0}{2}}e^{-y}e^{-v_\alpha e^{\frac{\xi_\beta-\xi_0}{2}}-ve^{\frac{\xi_0-\xi_\beta}{2}}} \\ &\times \int d\xi\ \langle\xi_0|e^{-\tau H_1}|\xi\rangle\ e^{\frac{\xi-\xi_0}{2}}\langle\xi|e^{-(\beta-\tau)H_2}|\xi_\beta\rangle\ \delta(\xi_\beta+\xi_0+2\ln 4yv_\alpha) \end{aligned} \quad \text{(B.11)}$$

где

$$H_1 = \frac{\dot{\xi}^2}{4J} + Jyv_\alpha e^{\frac{\xi_\beta+\xi_0}{2}}e^{-\xi}, \qquad H_2 = \frac{\dot{\xi}^2}{4J} + Jyve^{\frac{\xi_\beta+\xi_0}{2}}e^{-\xi} \quad \text{(B.12)}$$

Интегрируя по y

$$\begin{aligned} G_b^\Psi &= \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big)e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}\frac{e^{-w_\alpha}}{8v_\alpha}\int d\xi_\beta d\xi_0 d\xi e^{\frac{\xi-3\xi_0}{2}} \\ &\times \langle\xi_0|e^{-\tau H_1}|\xi\rangle\ e^{\frac{\xi-\xi_0}{2}}\langle\xi|e^{-(\beta-\tau)H_2}|\xi_\beta\rangle \exp\Big[-\frac{1}{4v_\alpha}e^{\frac{\xi_\beta+\xi_0}{2}} - v_\alpha e^{\frac{\xi_\beta-\xi_0}{2}} - ve^{\frac{\xi_0-\xi_\beta}{2}}\Big] \end{aligned} \quad \text{(B.13)}$$

Далее, используя следующий результат(см. формулу 6.794.11 на стр. 794 в [42])

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\nu\, \nu\, \mathrm{sh}\,(2\pi\nu)K_{2i\nu}(2\sqrt{v_\alpha v})K_{2i\nu}(e^{-\xi_0/2})K_{2i\nu}(\sqrt{\frac{v}{v_\alpha}}e^{-\xi_\beta/2}) \\ &\qquad = \frac{\pi^2}{16}\exp\left(-\frac{1}{4v_\alpha}e^{-\frac{\xi_0+\xi_\beta}{2}} - ve^{\frac{\xi_0-\xi_\beta}{2}} - v_\alpha e^{\frac{\xi_\beta-\xi_0}{2}}\right). \end{aligned} \quad \text{(B.14)}$$

можно получить

$$\begin{aligned} G_b^\Psi &= \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big)e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}\frac{e^{-w_\alpha}}{2v_\alpha}\int d\xi_\beta d\xi_0 d\xi e^{\frac{\xi-3\xi_0}{2}}\int_0^\infty d\nu K_{2i\nu}(2\sqrt{v_\alpha v}) \\ &\times \Phi_\nu(\xi_0)\tilde{\Phi}_\nu(\xi_\beta)\int d\nu_1 d\nu_2 e^{-\tau J\nu_1^2}e^{-(\beta-\tau)J\nu_2^2}\Phi_{\nu_1}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi)\tilde{\Phi}_{\nu_2}(\xi)\tilde{\Phi}_{\nu_2}(\xi_\beta). \end{aligned} \quad \text{(B.15)}$$

Интегрирование по ξ_β дает δ-функцию $\delta(\nu-\nu_2)$. Далее, заменим δ-функцию следующим интегралом $\int d\xi_\beta \Phi_\nu(\xi_\beta)\Phi_{\nu_2}(\xi_\beta)$

$$\begin{aligned} G_b^\Psi &= \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big)e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)}\frac{e^{-w_\alpha}}{2v_\alpha}\int d\xi_0 d\xi_\beta d\xi e^{\frac{\xi-3\xi_0}{2}}\int_0^\infty d\nu K_{2i\nu}(2\sqrt{v_\alpha v}) \\ &\times \int d\nu_1 d\nu_2 e^{-\tau J\nu_1^2}e^{-(\beta-\tau)J\nu^2}\tilde{\Phi}_\nu(\xi)\Phi_\nu(\xi_\beta)\Phi_{\nu_2}(\xi_\beta)\Phi_{\nu_2}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi) \end{aligned} \quad \text{(B.16)}$$

Используя (B.14) еще раз получим

$$
\begin{aligned}
G_b^\Psi &= \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big) e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)} \frac{e^{-w_\alpha}}{2v_\alpha} \int d\xi_0 d\xi_\beta d\xi e^{\frac{\xi-3\xi_0}{2}} \int d\nu_1 d\nu_2 e^{-\tau J\nu_1^2} e^{-(\beta-\tau)J\nu^2} \\
&\times \quad \Phi_{\nu_2}(\xi_\beta)\Phi_{\nu_2}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi) \exp\Big[-\frac{1}{4v_\alpha} e^{-\frac{\xi+\xi_\beta}{2}} - ve^{\frac{\xi_\beta-\xi}{2}} - v_\alpha e^{\frac{\xi-\xi_\beta}{2}}\Big]
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

Интегрируя по z_α

$$
\begin{aligned}
G_b^\Psi &= \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_{\gamma\neq\alpha}}{2\pi z_\gamma^2}\Big) e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)} \frac{e^{-w_\alpha}}{2v_\alpha} \int d\xi_0 d\xi_\beta d\xi e^{\frac{\xi-3\xi_0}{2}} \int d\nu_1 d\nu_2 e^{-\tau J\nu_1^2} e^{-(\beta-\tau)J\nu^2} \\
&\times \quad \Phi_{\nu_2}(\xi_\beta)\Phi_{\nu_2}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi) \exp\Big[-\frac{1}{4v_\alpha} e^{-\frac{\xi+\xi_\beta}{2}} - v_\alpha e^{\frac{\xi_\beta-\xi}{2}} - v_\alpha e^{\frac{\xi-\xi_\beta}{2}}\Big] e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)} e^{\frac{\xi_\beta-\xi}{2}}
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

В итоге, используя (B.8) получим следующее выражение для Функции Грина

$$
\begin{aligned}
G_b^\Psi &= \Big(\prod_\gamma \oint \frac{idz_{\gamma\neq\alpha}}{2\pi z_\gamma^2}\Big) e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)} e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)} \frac{e^{-w_\alpha}}{2v_\alpha} \int d\xi_0 d\xi_\beta d\xi e^{\frac{\xi_\beta-3\xi_0}{2}} \int d\nu_1 d\nu_2 e^{-\tau J\nu_1^2} e^{-(\beta-\tau)J\nu^2} \\
&\times \quad \int_0^\infty d\nu K_{2i\nu}(2v_\alpha)\Phi_\nu(\xi)\Phi_\nu(\xi_\beta)\Phi_{\nu_2}(\xi_\beta)\Phi_{\nu_2}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi_0)\Phi_{\nu_1}(\xi)
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

Далее интеграл по ξ дает δ-функцию и мы получаем

$$
\begin{aligned}
G_b^\Psi &= \Big(\prod_{\gamma\neq\alpha} \oint \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\Big) e^{-\tau(\epsilon_\alpha-\mu)} e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)} \frac{e^{-w_\alpha}}{2v_\alpha} \int d\nu_2 e^{-\tau J\nu^2} e^{-(\beta-\tau)J\nu_2^2} \\
&\times \quad \int_0^\infty d\nu K_{2i\nu}(2v_\alpha)\langle\nu|\frac{1}{\eta}|\nu_2\rangle\langle\nu_2|\eta^2|\nu\rangle
\end{aligned}
\tag{B.20}
$$

Список публикаций

1. D.S. Lyubshin, A.U. Sharafutdinov, and I.S. Burmistrov, Phys. Rev. B **89**, 201304(R) (2014).

2. A.U. Sharafutdinov, D.S. Lyubshin, and I.S. Burmistrov, Phys. Rev. B **90**, 195308 (2014).

Литература

[1] M.N. Kiselev, Y. Gefen, Phys. Rev. Lett. **96**, 066805 (2006).

[2] I.L. Kurland, I.L. Aleiner, and B.L. Altshuler, Phys. Rev. B **62**, 14886 (2000).

[3] K.A. Matveev and A.V. Andreev, Phys. Rev. B 66, 045301 (2002).

[4] A. Kamenev, Y. Gefen, Phys. Rev. B 54, 5428 (1996).

[5] T. Bojdecki, L. G. Gorostiza, and A. Talarczyk, Potential Anal. **28**, 71 (2008).

[6] R.J. Adler, *An Introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*, (Hayward, California, 1990).

[7] C.M. Canali and A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **85**, 5623 (2000); S. Kleff, J. von Delft, M.M. Deshmukh, and D.C. Ralph, Phys. Rev. B **64**, 220401 (2001); S. Kleff and J. von Delft, Phys. Rev. B **65**, 214421 (2002).

[8] G. Usaj, H. Baranager, *Exchange and the Coulomb blockade: Peak height statistics in quantum dots*, Phys. Rev. B **67**, 121308 (2003).

[9] Y. Alhassid, T. Rupp, *Effects of Spin and Exchange Interaction on the Coulomb-Blockade Peak Statistics in Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **91**, 056801 (2003).

[10] A.M. Finkel'stein, vol. 14 of Soviet Scientific Reviews, ed. by I.M. Khalatnikov, Harwood Academic Publishers, London, (1990).

[11] A. I. Larkin, Sov. Phys. JETP **31**, 784 (1970).

[12] Y. Imry and Sh.-K. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).

[13] A. Shnirman, Y. Gefen, A. Saha, I. S. Burmistrov, M. N. Kiselev, and A. Altland, Phys. Rev. Lett. 114, 176806 – (2015)

[14] V. Ambegaokar, U. Eckern, and G. Schön, Phys. Rev. Lett. 48, 1745 (1982)

[15] U. Eckern, G. Schön, and V. Ambegaokar, Phys. Rev. B 30, 6419 (1984)

[16] A.V. Andreev, A. Kamenev, Phys. Rev. Lett. **81**, 3199 (1998).

[17] L. Amico, A. Di Lorenzo, A. Osterloh *Integrable Model for Interacting Electrons in Metallic Grains*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5759 (2001).

[18] Y. Alhassid, T. Rupp, Arxiv: cond-mat/0312691 (unpublished).

[19] S. Asmussen and H. Albrecher, Ruin Probabilities (World Scientific, Singapore, 2010).

[20] H.E. Türeci, Y. Alhassid, Phys. Rev. B **74**, 165333 (2006); G. Murthy, Phys. Rev. B **77**, 073309 (2008); O. Zelyak, G. Murthy, Phys. Rev. B **80**, 205310 (2009).

[21] I.L. Aleiner and V.I. Fal'ko, Phys. Rev. Lett. **87**, 256801 (2001).

[22] I.L. Kurland, I.L. Aleiner, and B.L. Altshuler, Phys. Rev. B **62**, 14886 (2000).

[23] B. Nissan-Cohen, Y. Gefen, M.N. Kiselev, and I.V. Lerner, Phys. Rev. B **84**, 075307 (2011).

[24] S. Guéron, M.M. Deshmukh, E.B. Myers, and D.C. Ralph, Phys. Rev. Lett. **83**, 4148 (1999); M.M. Deshmukh, S. Kleff, S. Guéron, E. Bonet, A.N. Pasupathy, J. von Delft, and D.C. Ralph, Phys. Rev. Lett. **87**, 226801 (2001).

[25] A. Cehovin, C.M. Canali, and A.H. MacDonald, Phys. Rev. B **66**, 094430 (2002); G. Usaj and H.U. Baranger, Europhys. Lett. **72**, 110 (2005).

[26] P.W. Brouwer and D.A. Gorokhov, Phys. Rev. Lett. **95**, 017202 (2005).

[27] M. Misiorny, M. Hell, and M.R. Wegewijs, Nat. Phys. **9**, 801 (2013).

[28] Y. Alhassid and T. Rupp, Phys. Rev. Lett. **91**, 056801 (2003); D. Huertas-Hernando and Y. Alhassid, Phys. Rev. B **75**, 153312 (2007).

[29] I.S. Burmistrov, Y. Gefen, and M.N. Kiselev, Phys. Rev. B **85**, 155311 (2012).

[30] I.S. Burmistrov, Y. Gefen, and M.N. Kiselev, JETP Lett. **92**, 179 (2010).

[31] A. Kamenev, Y. Gefen, Phys. Rev. B **54**, 5428 (1996).

[32] A. Saha, Y. Gefen, I.S. Burmistrov, A. Shnirman, and A. Altland Annals of Phys. (N.Y.) 327, 2543 (2012).

[33] K.B. Efetov and A. Tschersich, Phys. Rev. B **67**, 174205 (2003).

[34] G. D. Mahan, *Many-particle physics*, Plenum Press, N.Y. (1990).

[35] J. Wei and E. Norman, J. Math. Phys. **4**, 575 (1963).

[36] I. V. Kolokolov, Phys. Lett. **A** 114, 99 (1986); Ann. Phys. (N.Y.) **202**, 165 (1990); M. Chertkov and I. V. Kolokolov, Phys. Rev. B **51**, 3974 (1995); Sov. Phys. JETP **79**, 824 (1994); for a review see I. V. Kolokolov, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 2189 (1996).

[37] N. Sedlmayr, I. V. Yurkevich, and I. V. Lerner, Europhys. Lett. **76**, 109 (2006).

[38] A.U. Sharafutdinov, D.S. Lyubshin, and I.S. Burmistrov, Phys. Rev. B **90**, 195308 (2014).

[39] M. Schechter, Phys. Rev. B **70**, 024521 (2004); Zu-Jian Ying, M. Cuoco, C. Noce, Huan-Qiang Zhou, Phys. Rev. B **74**, 012503 (2006); Zu-Jian Ying, M. Cuoco, C. Noce, Huan-Qiang Zhou, Phys. Rev. B **74**, 214506 (2006); S. Schmidt, Y. Alhassid, K. van Houcke, Europhys. Lett. **80**, 47004 (2007); S. Schmidt, Y. Alhassid, Phys. Rev. Lett. **101**, 207003 (2008); K. Van Houcke, Y. Alhassid, S. Schmidt, S. M. A. Rombouts, arxiv:1011.5421; Y. Alhassid, K. N. Nesterov, S. Schmidt, Phys. Scr. T **151**, 014047 (2012); K. N. Nesterov, Y. Alhassid, Phys. Rev. B **87**, 014515 (2013).

[40] D. Ullmo, Rep. Prog. Phys. **71**, 026001 (2008).

[41] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Boston: Academic) (1991).

[42] I. S. Gradsteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego, 2000).

[43] J. Hüsler, V. Piterbarg,

[44] J.W.Negle, H.Orland, *Quantum Many-particle Systems*, Westview Press, 2008

[45] Y. Alhassid, Rev. Mod. Phys. 72, 895 – Published 1 October 2000