

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Белан Сергей Александрович

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ  
ИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНЫХ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ**

Специальность 01.04.02 —  
«теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН  
Владимир Валентинович Лебедев

Долгопрудный — 2016

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Глава 1. Инерционные частицы в вязком пограничном подслое турбулентного течения</b> . . . . .	<b>12</b>
1.1 Структура поля скорости жидкости в вязком подслое . . . . .	12
1.2 Уравнение движения частицы . . . . .	14
1.3 Предел пассивного скаляра, $St \rightarrow 0$ . . . . .	16
1.4 Частицы со средней инерцией, $\sqrt{St} \lesssim 1$ . . . . .	17
1.4.1 Совместная функция распределения частицы и жидкости . . . . .	18
1.4.2 Вывод уравнения на концентрацию частиц . . . . .	21
1.4.3 Равновесный профиль концентрации . . . . .	24
1.4.4 Переход локализация-делокализация по числу Стокса . . . . .	26
1.5 Сильно инерционные частицы, $\sqrt{St} \gg 1$ . . . . .	27
1.5.1 Уравнение Фоккера-Планка с неупругим граничным условием на стенке . . . . .	28
1.5.2 Область диффузионных частиц . . . . .	29
1.5.3 Область стохастически ускоряемых частиц . . . . .	31
1.5.4 Равновесный профиль концентрации . . . . .	34
1.5.5 Неупругий коллапс . . . . .	34
1.6 Заключение . . . . .	36
<b>Глава 2. Дельта-коррелированное поле скорости со степенным профилем интенсивности</b> . . . . .	<b>38</b>
2.1 Параметр инерции . . . . .	39
2.2 $0 \leq m < 2$ . . . . .	40
2.3 $m > 2$ . . . . .	41
2.4 $m = 2$ . . . . .	42
2.5 Заключение . . . . .	43
<b>Глава 3. Квадратичная модель</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1 Статистика переменной $\sigma = v_z/z$ . . . . .	46

3.2	Вычисление ляпуновской экспоненты . . . . .	49
3.3	Фазовая диаграмма перехода локализация-делокализация . . . . .	50
3.4	Приложения квадратичной модели . . . . .	51
3.4.1	Частицы в окрестности минимума интенсивности случайной силы . . . . .	52
3.4.2	Кластеризация частиц в случайном течении . . . . .	54
3.5	Заключение . . . . .	56
<b>Глава 4. Дисперсия частиц в приземном атмосферном слое . . . . .</b>		<b>57</b>
4.1	Уравнение движения частицы . . . . .	57
4.2	Уравнение турбулентной диффузии . . . . .	58
4.2.1	Особенности турбулентности в приземного слое . . . . .	59
4.2.2	Радиационное граничное условие . . . . .	60
4.3	Зависимость числа частиц в воздухе от времени . . . . .	62
4.4	Поверхностная плотность осажденного материала . . . . .	65
4.5	Нестационарное распределение концентрации по высоте . . . . .	69
4.6	Заключение . . . . .	70
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>72</b>
<b>Список публикаций автора по теме диссертации . . . . .</b>		<b>75</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>76</b>

## Введение

Теоретическое исследование, представленное в этой диссертационной работе, относится к области статистической гидродинамики. А именно, в рамках статистического подхода рассматривается динамика инерционных частиц, помещенных в турбулентную жидкость или газ. Эта проблема представляет как фундаментальный, так и прикладной интерес, поскольку практически все окружающие нас гидродинамические течения турбулентны и содержат примесную фазу. Пыль и аэрозоли в атмосфере, капли воды в облаках, микроорганизмы в океане, частицы пыли в протопланетных газопылевых облаках, порошки в химических реакторах - все это примеры турбулентных потоков с примесными частицами. Понимание процессов турбулентного транспорта частиц, таким образом, важно для многих областей от экологии до астрофизики.

Анализ движения частиц в турбулентных течениях сопряжен с существенными техническими трудностями. Строгое рассмотрение требует согласованного решения уравнений динамики частиц и жидкости с учетом воздействия турбулентных флуктуаций на движение частиц, их обратного влияния на поток, а также взаимодействия частиц друг с другом. Здесь полезно вспомнить, что на данный момент не известно ни одного точного аналитического решения уравнений гидродинамики, соответствующего турбулентному состоянию сплошной среды, не говоря уже об учете примесей. В виду этих сложностей, настоящее исследование опирается на идеализированные статистические модели, в которых сила, приложенная к частице со стороны жидкости, принимается равной силе стокового трения, а турбулентность заменяется некоторым флуктуирующим во времени полем скорости с известной статистикой. Такой подход подразумевает, во-первых, что размеры частиц очень малы, а их плотность очень велика в сравнении с плотностью окружающей жидкости. Во-вторых, концентрация примесной фазы должны быть достаточно низкой, чтобы можно было не принимать во внимание обратное влияние частиц на движение жидкости и межчастичное взаимодействие. Последние годы показали, что подобные статистические модели правильно отображают многие важные аспекты динамики частиц в реальных турбулентных потоках, наблюдаемые в экспериментах и численных симмуляциях [1–3].

Чтобы оценить, насколько важен учет инерционных свойств частицы для описания ее динамики в случайном течении, как правило вводится безразмерный параметр  $St$ , называемый числом Стокса, и равный отношению времени релаксации скорости частицы к времени корреляции пульсационной скорости жидкости. Частица с малым числом Стокса вовлекается в движение за время, в течении которого поле скорости жидкости не успевает существенно измениться, поэтому при описании взаимодействия такой частицы с флуктуациями на достаточно больших временах можно считать, что ее скорость попросту совпадает со скоростью жидкости в той точке, где она в рассматриваемый момент находится. В противоположном пределе очень большого числа Стокса частица полностью "оторвана" от флуктуационной компоненты течения, поскольку ее скорость не имеет ничего общего с мгновенной скоростью пульсационного движения окружающей жидкости. Обсуждаемые здесь теоретические модели динамики инерционных частиц рассматривают как предельный случай  $St \rightarrow \infty$ , так и промежуточные значения числа Стокса.

В фокусе внимания этой диссертационной работы поведение частиц в пространственно-неоднородных турбулентных течениях. Говоря о неоднородности мы будем иметь в виду ситуацию, когда интенсивность турбулентных флуктуаций скорости в однородной по своим физическим свойствам жидкости по той или иной причине зависит от точки наблюдения. На практике такая ситуация является скорее правилом чем исключением, неизбежно реализуясь в присутствии границ и/или вследствие неоднородности накачивающих сил [4; 5]. Как показывают лабораторные и компьютерные эксперименты, инерционные частицы, помещенные в пространственно-неоднородный турбулентный поток имеют тенденцию к неоднородному пространственному распределению [6–13]. Давно замечено, что в статистически равновесной ситуации профиль концентрации инерционных частиц имеет максимум в минимуме интенсивности турбулентности. В противоположность этому, равновесное распределение безинерционных частиц, то есть таких, которые просто пассивно следуют за потоком, всегда однородно при том условии, что течение несжимаемо. Таким образом, аккумуляция частиц в минимумах — это существенно инерционное явление.

Для неоднородной турбулентности возникает естественная необходимость ввести в дополнение к числу Стокса еще один безразмерный параметр  $I$ , равный отношению длины свободного пробега частицы, определенной как произведе-

ние ее характерной скорости в направлении неоднородности на стоковое время релаксации, к характерному пространственному масштабу, на котором происходит существенное изменение интенсивности турбулентности. Параметр инерции  $I$  играет очень важную роль в этой диссертационной работе, позволяя судить, насколько статистика скорости частицы близка к локальному равновесию с турбулентными флуктуациями. При  $I \ll 1$  ширина тела функции распределения частиц по скорости в главном порядке определяется локальной интенсивностью турбулентности в рассматриваемой области пространства. Если же  $I \gtrsim 1$ , то локальное равновесие сильно нарушено, поскольку частицы "помнят" о том, что ранее они побывали в областях течения с другой интенсивностью флуктуаций. Словом, подобно тому как число Стокса  $St$  показывает, насколько существенно отставание мгновенной скорости частицы от локальной скорости течения, параметр инерции  $I$  помогает понять, как сильно среднеквадратичное отклонение скорости частицы от среднего значения отличается от того, что диктуется локальной интенсивностью турбулентности. Отметим, что в общем случае параметр  $I$  зависит от пространственных координат, поэтому области с разными режимами турбулентного транспорта могут соседствовать друг с другом.

Хотя динамика инерционных частиц в неоднородной турбулентности привлекает внимание исследователей уже достаточно долгое время, область применимости существующих аналитических результатов ограничена пределом относительно малой инерции или слабой неоднородности, то есть  $I \ll 1$ . В этом случае оправданно локально-равновесное приближение и на достаточно больших временах оказывается возможным исключить скорость из кинетического уравнения для функции распределения частиц по скоростям и координатам, перейдя к градиентному транспортному уравнению, описывающему пространственный перенос концентрации частиц [14–16]. В выражении для потока частиц при этом возникает специфический член, пропорциональный градиенту коэффициента турбулентной диффузии и направленный в сторону понижения интенсивности турбулентности. Это – так называемый турбофорический дрейф или просто турбофорез, который и ответственен за эффект аккумуляции частиц в областях с пониженной интенсивностью турбулентных пульсаций. Своим названием турбофорез обязан аналогичному во многом термофорическому эффекту, наблюдаемому при броуновском движении в среде с неоднородной температурой [17].

В общем случае, когда длина свободного пробега частицы одного порядка или много больше масштаба неоднородности, приближение локального равновесия теряет свою применимость. Это влечет за собой невозможность замкнутого описания турбулентного транспорта примесной фазы в терминах концентрации частиц. Какие-либо явные аналитические результаты, относящиеся к ситуации далекой от локального равновесия, в известной нам литературе отсутствуют. Анализ, проведенный в данной диссертационной работе, по крайней мере отчасти заполняет этот пробел.

Если излагать результаты проделанной работы в хронологическом порядке, то сначала нами была рассмотрена динамика инерционных частиц в окрестности глубокого минимума турбулентности в неограниченном пространстве [18]. Течение предполагалось коротко-коррелированным во времени, что соответствует пределу  $St \rightarrow \infty$ . Существенной особенностью модели является независимость параметра инерции  $I$  от координаты, вытекающая из квадратичной формы профиля интенсивности турбулентных пульсаций. Общепринятая точка зрения, черпающая интуицию из градиентных транспортных моделей, говорит нам, что турбофорез вызывает дрейф частиц в направлении минимума турбулентности. Однако, вычислив ляпуновскую экспоненту стохастических траекторий частиц с произвольным  $I$ , к своему удивлению мы обнаружили, что возможна и прямо противоположная этим ожиданиям ситуация, когда частицы в среднем мигрируют прочь от минимума. Это явление можно интерпретировать как обратный или отрицательный турбофорез, ранее никем не обсуждавшийся. Переход от стандартного к обратному турбофорезу происходит когда параметр инерции становится больше некоторого критического значения порядка единицы. Качественное объяснение этого эффекта очень простое: область минимума турбулентности не может играть роль ловушки для частиц с параметром инерции заметно большим единицы, поскольку такие частицы попросту баллистически пролетают сквозь нее.

Далее мы обратились к более сложному вопросу о поведении инерционных частиц в случайных потоках со стенками. Главной нашей целью было построение статистической теории турбулентного транспорта в вязком пристенном подслое развитой гидродинамической турбулентности, который характеризуется биквадратной координатной зависимостью интенсивности пульсаций нормальной по отношению к стенке компоненты скорости жидкости. Наибольший ин-

терес при этом представлял плохо изученный в литературе предел  $St \rightarrow \infty$ , в котором приближение локального равновесия оказывается нарушенным, поскольку параметр  $I$  заведомо больше единицы в большей части вязкого подслоя. Дополнительная сложность задачи обусловлена тем, что помимо учета взаимодействия частиц с неоднородной турбулентностью, необходимо принимать во внимание их взаимодействие со стенкой. Последнее включает в себя, в частности, упругие силы, возникающие в моменты соударений, и гидродинамическое взаимодействие. Оба эти механизма взаимодействия диссипативны и при некоторых предположениях могут быть совместно параметризованы через эффективный коэффициент восстановления скорости  $\beta$ , определенный как отношение значений перпендикулярной к стенке компоненты скорости частицы до и после соударения [19]. В простейшей модели с постоянным коэффициентом восстановления скорости нами было показано, что диссипативные соударения со стенкой могут оказывать огромное влияние на динамику частиц с большим числом Стокса [20]. А именно, изучив свойства равновесной функции распределения частиц по координате и скорости, мы сделали вывод о существовании явления неупругого коллапса: если коэффициент восстановления скорости меньше некоторого критического значения, то сильно инерционные частицы, помещенные в вязкий подслой турбулентного течения, дрейфуют по направлению к стенке, в противном же случае частицы убегают в основной объем течения. Что еще более интересно, неупругий коллапс траекторий сильно инерционных частиц может наблюдаться и в других типах пристенных хаотических течений, а не только в вязком пограничном слое развитой турбулентности [21; 22]. При этом критическое значение коэффициента восстановления скорости оказывается универсальным для широкого класса моделей.

Смена направления дрейфа частиц в окрестности минимума турбулентности в неограниченном пространстве и неупругий коллапс частиц в пристенной области представляют собой новый тип динамического фазового перехода локализация-делокализации. Первый переход контролируется параметром инерции частицы  $I$ , а второй - степенью диссипативности столкновений со стенкой  $\beta$ . Эти эффекты до сих пор ускользали от внимания исследователей, поскольку относятся к режиму турбулентного транспорта, в котором локальное равновесие сильно нарушено и градиентные модели становятся неверны. Подчеркнем,



что в локально-равновесном приближении турбофорез всегда положителен, а эффект неупругих граничных условий в главном порядке вообще отсутствует.

Помимо анализа случаев нарушения локально-равновесного приближения, данная диссертационная работа содержит также вклад в развитие традиционных градиентных транспортных моделей. Рассмотрение динамики частиц в вязком подслое включает подробное обсуждение промежуточных значений числа Стокса, оправдывающих локально-равновесное приближение. Выполнив редукцию кинетического уравнения на совместную функцию распределения частицы и жидкости в духе гидродинамического предела в теории инерционного броуновского движения [23], мы получили транспортное уравнение на пространственный перенос концентрации частиц [24]. Анализ равновесного решения этого уравнения выявил еще один переход локализация-делокализация, на этот раз по параметру  $St$ . Частицы с малой инерцией относительно быстро выносятся из вязкого подслоя, тогда как превышение числом Стокса некоторого критического значения ведет к аккумуляции частиц около стенки. Этот переход объясняется стандартным турбофорезом, который с ростом  $St$  становится все более ярко выраженным и в конце концов побеждает турбулентную диффузию, заставляя частицы дрейфовать к стенке.

Наконец, мы рассмотрели рассеяние частиц в приземном слое атмосферы - особенно важный с практической точки зрения пример турбулентного транспорта в пространственно-неоднородном течении. Характерной особенностью здесь является то, что инерционность частиц в процессе их взаимодействия с турбулентными флуктуациями можно не учитывать и вся роль инерции сводится к гравитационному осаждению. Нам удалось найти ранее неизвестное нестационарное решение давно сформулированного уравнения турбулентной диффузии для поля концентрации частиц в приземном слое [25]. Это решение описывает вертикальное рассеяние облака частиц, брошенных в начальный момент на некоторой высоте над Землей. Прделанный анализ также содержит ответ на вопрос о скорости осаждения частиц на земную поверхность и дальности переноса в горизонтальном направлении.

Подводя итог сказанному, сформулируем **основные положения, выносимые на защиту:**

1. Диффузионные частицы ( $\sqrt{St} \lesssim 1$ ) в вязком пограничном подслое турбулентного течения претерпевают переход локализация-делокализация

при изменении числа Стокса: легкие частицы выносятся из пристенной области, в то время как достаточно тяжелые частицы скапливаются вблизи стенки.

2. Сильно инерционные частицы ( $\sqrt{\text{St}} \gg 1$ ) в вязком подслое претерпевают переход локализация-делокализация в зависимости от коэффициента восстановления скорости  $\beta$ , характеризующего степень неупругости столкновений со стенкой: частицы покидают пристенную область, если  $\beta > \beta_c$ , и скапливаются вблизи стенки, если  $\beta < \beta_c$ , где  $\beta_c = \exp(-\pi/\sqrt{3}) \approx 0,163$ .
3. Критическое значение коэффициента восстановления скорости  $\beta_c$ , контролирующее переход локализация-делокализация для инерционных частиц в пристенной области коротко-коррелированного во времени случайного течения, универсально для моделей, где коэффициент турбулентной диффузии растет быстрее чем квадрат расстояния до стенки.
4. Инерционные частицы в окрестности глубокого одномерного минимума коротко-коррелированной во времени турбулентности претерпевают переход локализация-делокализация при изменении безразмерного параметра инерции  $I$ . Получена также точная фазовая диаграмма в плоскости  $\beta - I$  для модели с неупругими отражениями от стенки в минимуме.
5. В рамках модели турбулентной диффузии для частиц в приземном слое атмосферы найдено, по какому закону количество примеси в воздухе убывает во времени благодаря осаждению на земную поверхность и как ведет себя результирующая поверхностная плотность осажденного материала в подветренном направлении.

**Теоретическая и практическая значимость.** Развитые в диссертации теоретические методы могут быть использованы для описания широкого круга транспортных явлений в средах с пространственно-неоднородной статистикой случайных сил. Предсказанные переходы локализация-делокализация могут найти применение в технологиях сегрегации частиц.

**Апробация работы.** Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на международной конференции Turbulence and Amorphous Materials, Эйлат, Израиль, на международной конференции

Landau Days 2015, Черногоровка, а также на семинарах в ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, в Научном Институте им. Вейцмана, Израиль, в Институте Гётеборга, Швеция и в Лос-Аламосской Национальной Лаборатории, США.

**Личный вклад.** Все теоретические результаты, изложенные в данной диссертации, получены лично автором либо при его непосредственном участии.

**Публикации.** Основные результаты работы изложены в 6 публикациях в печатных изданиях, список которых приведен в конце диссертации.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка публикаций автора и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 82 страницы с 11 рисунками. Список литературы содержит 72 наименования. В **главе 1** построена статистическая теория турбулентного транспорта инерционных частиц с произвольным числом Стокса в вязком пограничном подслое турбулентного течения. В **главе 2** анализируются свойства локализации частиц с большим числом Стокса в пристенном случайном течении с произвольной степенной зависимостью интенсивности флуктуаций от расстояния до стенки. В **главе 3** изучается случай квадратичной координатной зависимости интенсивности турбулентности. В **главе 4** решается нестационарное уравнение турбулентной диффузии для тяжелых частиц в приземном слое атмосферы.

## Глава 1. Инерционные частицы в вязком пограничном подслое турбулентного течения

Пристенная область развитой гидродинамической турбулентности это естественный и важный с практической точки зрения пример случайного течения с пространственно-неоднородной статистикой. В этой главе мы рассмотрим движение инерционных частиц на самом малом масштабе такого течения - в пределах вязкого пограничного подслоя, непосредственно примыкающего к стенке. Предложенные статистические модели позволят описать особенности динамики частиц в вязком подслое во всем диапазоне их инерционности. В частности, мы продемонстрируем существование двух динамических фазовых переходов локализация-делокализация. Первый переход контролируется числом Стокса и имеет место для частиц со средней инерцией, которые принято называть диффузионными. Контрольным параметром второго фазового перехода, который наблюдается для сильно инерционных частиц, является степень неупругости столкновений со стенкой, а потому сам переход может быть назван неупругим коллапсом. В следующих двух подразделах мы обсуждаем особенности поля скорости в вязком подслое и уравнение движения частиц, взвешенных в жидкости, а затем переходим к статистическому описанию турбулентного транспорта в терминах функции распределения частиц с различной инерцией, двигаясь в сторону увеличения последней.

### 1.1 Структура поля скорости жидкости в вязком подслое

Вязкий пограничный подслоя это та область около ограничивающей турбулентный поток гладкой стенки, в пределах которой вязкий член в уравнении Навье-Стокса доминирует над инерционным слагаемым, см., например, [4; 26]. Вязкость ведет к сглаживанию поля скорости жидкости в пристенной области, которое, тем не менее, является случайным во времени благодаря флуктуациям, наведенным турбулентностью, существующей в основном объеме течения.

Направим ось  $x$  декартовой системы координат вдоль среднего течения, а ось  $z$  перпендикулярно плоской стенке вглубь занимаемого жидкостью объема. Удобно считать, что поверхность стенки совпадает с плоскостью  $z = 0$ . Введем рейнольдсовское разложение поля скорости жидкости

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}', \quad (1.1)$$

в котором  $\vec{U}$  и  $\vec{u}'$  это, соответственно, средняя и флуктуирующая компонента. В силу однородности потока в плоскостях параллельных стенке,  $\vec{U}$  зависит только от  $z$ -координаты. Обозначив толщину вязкого подслоя через  $L$ , при  $z \ll L$  в главном приближении будем иметь линейный профиль

$$U_x = \frac{z}{L}U_L, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad (1.2)$$

где  $U_L$  это характерное значение регулярной компоненты скорости течения на границе вязкого подслоя.

В свою очередь для флуктуирующей компоненты течения в области  $z \ll L$  справедливо

$$u'_x \sim \frac{z}{L}U_L, \quad u'_y \sim \frac{z}{L}U_L, \quad u'_z \sim \frac{z^2}{L^2}U_L. \quad (1.3)$$

Характер приведенных зависимостей от  $z$  следует из гладкости поля скорости в вязком подслое, условия прилипания на поверхности стенки и несжимаемости жидкости. Вдоль стенки флуктуирующая компонента  $\vec{u}'$  имеет корреляционную длину порядка  $L$ , а время ее корреляции может быть оценено по порядку величины как  $\tau_c \sim L/U_L$ .

Для дальнейшего нам понадобится так называемый тензор турбулентной диффузии равный по определению

$$D_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_0^\infty \langle u'_i(\vec{r}_1, t) u'_j(\vec{r}_2, 0) \rangle dt. \quad (1.4)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по статистике флуктуаций поля скорости. Одноточечная корреляционная функция  $D_{ij}(\vec{r}, \vec{r})$  служит мерой интенсивности турбулентности в точке наблюдения  $\vec{r}$ . В связи с предполагаемой однородностью статистических свойств течения в плоскостях параллельных стенке этот объект зависит только от расстояния до стенки, то есть

$D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}) = D_{ij}(z)$ . Особое значение для нас будет играть  $zz$ -компонента одноточечного тензора турбулентной диффузии, которая, как следует из определения (1.4) и соотношений (1.3), вблизи стенки ведет себя как

$$D_{zz}(z) = \mu z^4, \quad (1.5)$$

где  $\mu \sim U_L/L^3$ .

## 1.2 Уравнение движения частицы

Мы рассматриваем предел точечных сферических частиц, физически означающий, что диаметр частицы  $d$  много меньше чем ширина вязкого подслоя  $L$ . Число Рейнольдса  $Re = Vd/\nu$ , рассчитанное через характерную скорость движения частицы  $V$  относительно жидкости, вязкость которой обозначена через  $\nu$ , предполагается малым, так что течение вокруг частицы остается вязким. Кроме того, мы будем считать, что плотность материала частицы  $\rho_0$  намного превосходит плотность несущей жидкости  $\rho$ . С учетом этих предположений уравнение движения частицы принимает очень простой вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}(t), t)}{\tau}, \quad (1.6)$$

где  $\vec{r}$  это координата частицы,  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  - ее скорость, а  $\tau = d^2\rho_0/18\nu\rho$  - стоксово время релаксации. Иными словами, главный вклад во взаимодействие частицы с жидкостью дает сила вязкого трения пропорциональная разности скоростей частицы и жидкости в рассматриваемой точке. Более точное уравнение динамики включает поправки, связанные с силой Бассе, инерцией жидкости (эффект присоединенной массы), нелинейностью силы трения и т.д. [27]. Заметьте также, что во всех главах этой диссертационной работы кроме последней мы не принимаем в расчет гравитационное осаждение, обособленно концентрируя внимание на анализе турбулентного переноса.

Помимо обсуждения динамики одной частицы, мы будем иногда говорить об ансамбле частиц, помещенных в общий турбулентный поток. При этом следует помнить, что наш анализ конечно же не учитывает обратное влияние частиц

на поток, столкновения между частицами и их гидродинамическое взаимодействие друг с другом. Такое упрощение оправдано при условии достаточно низкой концентрации примесной фазы.

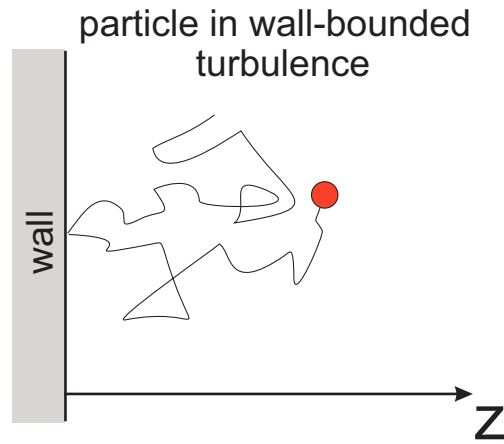


Рисунок 1.1 — Основной объект исследования данной диссертационной работы - движение инерционной частицы в случайном гидродинамическом течении вблизи плоской стенки.

Далее необходимо учесть взаимодействие частицы со стенкой, которое включает в себя упругие силы, возникающие в процессе соударения, а также гидродинамическое взаимодействие. Мы будем использовать модель мгновенных неупругих соударений, предполагая, что в момент соприкосновения со стенкой нормальная компонента скорости частицы моментально меняет свой знак на противоположный, а модуль скорости домножается на некоторое положительное число, не превосходящее единицу, то есть

$$v_z \rightarrow -\beta v_z, \quad \text{где } 0 < \beta \leq 1. \quad (1.7)$$

Связывая между собой значения скорости частицы за мгновение до и сразу после столкновения, коэффициент  $\beta$ , называемый обычно коэффициентом восстановления скорости, характеризует степень диссипативности взаимодействия частицы со стенкой. Концепция коэффициента восстановления скорости восходит еще к Ньютону [28] и широко используется в наши дни для моделирования эффектов пластических деформаций сталкивающихся тел в теории гранулированных материалов, см., например, книгу [29]. При условии достаточно большой скорости частицы в момент столкновения гидродинамическое взаимодействие также может быть учтено при помощи некоторого эффективного коэффициента восстановления скорости в рамках модели мгновенных соударений [19].

Строго говоря, коэффициент восстановления  $\beta$  есть функция скорости частицы в момент столкновения. Более того, неизбежная шероховатость поверхностей частицы и стенки приводит к стохастичности этого параметра [30; 31]. Мы, однако, как в этой главе, так и в последующих, в качестве нулевого приближения ограничиваемся моделью с постоянным  $\beta$ .

### 1.3 Предел пассивного скаляра, $St \rightarrow 0$

То, насколько существенна инерционность частицы для процесса ее переноса случайным полем скорости, определяется соотношением между временем релаксации скорости частицы  $\tau$  и временем корреляции потока  $\tau_c$ . Безразмерный параметр

$$St = \frac{\tau}{\tau_c}, \quad (1.8)$$

известный как число Стокса, дает качественное представление о том, насколько скорость частицы отстает от мгновенной скорости окружающей жидкости. Предположим, что стоксово время частицы много меньше характерного времени собственной динамики поля скорости жидкости в вязком подслое, т.е.  $St \ll 1$ . В этом случае мы можем пренебречь инерционными эффектами и перейти от уравнения движения (1.6) к значительно более простому уравнению

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{r}(t), t), \quad (1.9)$$

которое справедливо на временах  $t \gg \tau$ .

Центральный предмет вычислений в используемом нами здесь статистическом подходе это функция плотности вероятности координаты частицы, определенная как

$$n(\vec{r}, t) = \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) \rangle, \quad (1.10)$$

где  $\vec{r}(t)$  это решение уравнения (1.9) на заданной реализации случайного поля скорости а угловые скобки обозначают процедуру усреднения по всем возможным реализациям. Мы хотим описать эволюцию этой функции распределения на временах много больших времени корреляции поля скорости жидкости  $\tau_c$ . Если характерное время, необходимое для изменения координаты частицы, зна-



чительно превосходит  $\tau_c$ , то флуктуирующая компонента течения в уравнении (1.9) может быть представлена как гауссов белый шум. Следуя стандартной процедуре (см. [32]), легко тогда вывести уравнение Фоккера-Планка

$$\partial_t n = \partial_{r_i} [D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}) \partial_{r_j} n] + \partial_i [U_i(\vec{r}) n], \quad (1.11)$$

в котором  $D_{ij}$  это тензор турбулентной диффузии (1.4). Очевидно, что функцию  $n(\vec{r}, t)$  в уравнении (1.11) можно также интерпретировать как концентрацию, если мы имеем дело в большом ансамблем невзаимодействующих безинерционных частиц.

Основной интерес для нас представляет движение частицы в направлении нормали к стенке. Проинтегрируем функцию плотности вероятности по  $dx$  и  $dy$ , переходя таким образом к функции плотности вероятности  $z$ -компоненты координаты частицы,  $n(z, t) = \int n(\vec{r}, t) dx dy$ . Как обсуждалось выше, одноточечный тензор турбулентной диффузии зависит только от  $z$ -координаты. Поэтому после интегрирования (1.11) мы получаем следующее уравнение

$$\partial_t n = \partial_z [D_{zz}(z) \partial_z n]. \quad (1.12)$$

Эволюция усредненного поля концентрации частиц с нулевой инерцией (пассивного скаляра) в вязком пограничном подслое, описываемая уравнением (1.12) с коэффициентом диффузии (1.5), была подробно рассмотрена в серии работ [33–35]. Из всех особенностей турбулентного транспорта безинерционных частиц для нашего исследования важен лишь тот факт, что в пределе нулевой инерции область минимума турбулентности ничем не выделена. Действительно, равновесное решение уравнения (1.12) однородно, а значит безинерционные частицы выносятся из пристенной области, стремясь заполнить весь имеющийся объем. Как мы увидим в дальнейшем, инерция существенно меняет ситуацию.

#### 1.4 Частицы со средней инерцией, $\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$

Уравнение (1.11) было получено из стохастического уравнения движения (1.6) в предположениях, что (а) время релаксации скорости частицы много мень-

ше времени корреляции потока, (б) время корреляции потока много меньше характерного времени изменения координаты частицы. Первое условие дало нам право пренебречь ускорением частицы и перейти к уравнению движения (1.9), а второе позволило считать флуктуационную компоненту поля скорости жидкости дельта-коррелированной во времени и использовать формализм Фоккера-Планка. Таким образом, мы последовательно выполнили два предельных перехода: сначала  $\tau \rightarrow 0$ , а затем  $\tau_c \rightarrow 0$ .

Обратимся теперь к анализу более нетривиального случая, когда время корреляции  $\tau_c$  и время релаксации  $\tau$  могут быть одного порядка. Нашей конечной целью является замкнутое уравнение на функцию плотности вероятности  $n(\vec{r}, t)$  для частицы с произвольным числом Стокса. Как и при выводе уравнения (1.11), мы рассмотрим двойной предел  $\tau, \tau_c \rightarrow 0$ , однако в этот раз предельные переходы должны быть выполнены не последовательно один за другим, а одновременно, чтобы отношение  $\tau/\tau_c$  оставалось фиксированным. В конце вычислений будет показано, что такая процедура физически оправдана во всем вязком подслое только при условии  $\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$ . Материал этого раздела соответствует содержанию публикации [24].

#### 1.4.1 Совместная функция распределения частицы и жидкости

Поскольку при ненулевом числе Стокса инерционные эффекты становятся существенными, то пренебрегать ускорением частицы в уравнении движения (1.6) уже нельзя. Кроме того, мы не можем считать, что поле скорости жидкости дельта-коррелировано во времени. Рассмотрим вместо этого модель с конечным временем корреляции

$$\langle u'_i(\vec{r}_1, t_1) u'_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle = \frac{1}{\tau_c} D_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{-|t_1 - t_2|/\tau_c}, \quad (1.13)$$

Излишне объяснять, что предлагаемое синтетическое поле скорости является довольно грубым упрощением реальности. Известно, что статистика флуктуаций скорости в вязком подслое турбулентного течения далека от гауссовой [36], а экспоненциальный коррелятор (1.13) может рассматриваться лишь как удоб-

ное приближение. Мы, однако, стремимся проследить хотя бы на качественном уровне, как инерционный отклик частиц влияет на турбулентный транспорт в пристенной области, и для этой цели указанная модель вполне годится. Явно вводя в формализм время корреляции флуктуаций, она позволит нам далеко продвинуться в наших вычислениях.

Экспоненциальная форма корреляционной функции (1.13) означает, что динамика флуктуаций поля скорости может быть формально описана следующим стохастическим уравнением

$$\frac{d\vec{u}'(\vec{r},t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_c}\vec{u}'(\vec{r},t) + \frac{1}{\tau_c}\vec{\zeta}(\vec{r},t), \quad (1.14)$$

где гауссово случайное поле  $\vec{\zeta}(\vec{r},t)$  предполагается несжимаемым (т.е.  $\text{div } \vec{\zeta}(\vec{r},t) = 0$ ) и обладающим нулевым средним значением  $\langle \zeta_i(\vec{r},t) \rangle = 0$  и дельта-коррелированным вторым моментом

$$\langle \zeta_i(\vec{r}_1, t_1) \zeta_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle = 2D_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (1.15)$$

Действительно, из уравнений (1.14) и (1.15) следует, что в стационарном режиме парный коррелятор поля скорости  $\vec{u}'(\vec{r},t)$  имеет вид (1.13). Словом, мы моделируем флуктуирующую во времени компоненту течения с помощью процесса Орнштейна-Уленбека [37] с корреляционным временем  $\tau_c$ . Заметим, что дельта-коррелированное поле  $\vec{\zeta}(\vec{r},t)$  не имеет явного физического смысла. Это вспомогательный объект, введенный нами, чтобы впоследствии обеспечить замкнутое описание системы "частица+жидкость" в рамках уравнения Фоккера-Планка.

Обращаем внимание читателя, что в нижеследующих выкладках ради краткости обозначений мы опускаем символ ' в обозначении  $\vec{u}'$  для флуктуирующей компоненты поля скорости, используя запись  $\vec{u}$ . Кроме того, мы не учитываем в промежуточных формулах среднюю компоненту течения  $\vec{U}$ , просто добавляя соответствующий ей член в получившееся в конце вычислений транспортное уравнение.

Удобно представить векторные поля  $\vec{u}$  и  $\vec{\xi}$  в виде суперпозиции пространственных гармоник

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \vec{u}^{k_n}(t) e^{i\vec{k}_n \vec{r}}, \quad \vec{\xi}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \vec{\xi}^{k_n}(t) e^{i\vec{k}_n \vec{r}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, состояние частицы и жидкости в целом описывается набором из  $3N + 6$  переменных, представляющих собой компоненты векторов  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{u}^{k_1}, \vec{u}^{k_2}, \dots, \vec{u}^{k_N}$ . Уравнения движения системы записываются в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}^{k_n}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_c} \vec{u}^{k_n}(t) + \frac{1}{\tau_c} \vec{\xi}^{k_n}(t), \quad n = 1, \dots, N \\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t), \\ \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \vec{v}(t) + \frac{1}{\tau} \vec{u}(\vec{r}(t), t). \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Введем совместную функцию плотности вероятности

$$\mathcal{P}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{u}, t) = \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}(t)) \delta(\vec{u}^{k_1} - \vec{u}^{k_1}(t)) \dots \delta(\vec{u}^{k_N} - \vec{u}^{k_N}(t)) \rangle, \quad (1.18)$$

где  $\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{u}^{k_1}(t), \dots, \vec{u}^{k_N}(t)$  это частные решения стохастических уравнений (1.17), а усреднение производится по статистике случайного поля  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ . Эта функция удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} = & -v_i \frac{\partial}{\partial r_i} \mathcal{P} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial v_i} (v_i \mathcal{P}) - \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^N e^{i\vec{k}_n \vec{r}} u_i^{k_n} \frac{\partial}{\partial v_i} \mathcal{P} + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial u_i^{k_n}} (u_i^{k_n} \mathcal{P}) + \\ & + \frac{1}{2\tau_c^2} \frac{\partial^2}{\partial u_i^{k_n} \partial u_j^{k_m}} [(D_{ij}^{k_n k_m} + D_{ji}^{k_m k_n}) \mathcal{P}], \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$D_{ij}^{k_n k_m} = \int e^{-i\vec{k}_n \vec{r}_1 - i\vec{k}_m \vec{r}_2} D_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (1.20)$$

### 1.4.2 Вывод уравнения на концентрацию частиц

Функция (1.18) описывает полную статистику координаты частицы, ее скорости, а также скорости жидкости. Мы, однако, не интересуемся столь детальной информацией о системе. Нам важно понять, как ведет себя функция распределения координаты частицы  $n(\vec{r}, t)$ . Очевидно, что она связана с полной функцией распределения (1.18) через равенство

$$n(\vec{r}, t) = \int \mathcal{P}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{u}, t) d^3v d^{3N}u, \quad (1.21)$$

поэтому на следующем шаге вычислений нам следует исключить из кинетического уравнения (1.19) переменные  $\vec{u}^{k_1}, \dots, \vec{u}^{k_N}$  и  $\vec{v}$ .

Проинтегрировав уравнение (1.19) по  $d^3v d^{3N}u$ , мы находим, что редуцированная функция распределения удовлетворяет уравнению

$$\partial_t n = -\partial_{r_i} [\langle v_i \rangle n], \quad (1.22)$$

в котором угловые скобки обозначают взвешенное усреднение по скоростям:  $\langle A \rangle = (1/n) \int A \mathcal{P} d^3v d^{3N}u$ . Произведение  $\langle v_i \rangle n$  в правой части уравнения (1.22) представляет собой  $i$ -ю компоненту потока вероятности в координатном пространстве. Умножая уравнение (1.19) на  $v_i$  и интегрируя по  $d^3v d^{3N}u$ , мы получаем уравнение эволюции для этой величины

$$\partial_t [\langle v_i \rangle n] = -\partial_{r_j} [\langle v_i v_j \rangle n] - \frac{1}{\tau} \langle v_i \rangle n + \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^N e^{i\vec{k}_n \vec{r}} \langle u_i^{k_n} \rangle n. \quad (1.23)$$

Далее, момент первого порядка для фурье-компоненты скорости жидкости изменяется во времени согласно следующему уравнению

$$\partial_t [\langle u_i^{k_n} \rangle n] = -\partial_{r_k} [\langle u_i^{k_n} v_k \rangle n] - \frac{1}{\tau_c} \langle u_i^{k_n} \rangle n. \quad (1.24)$$

Теперь нам нужно знать квадратичные моменты скоростей жидкости и частицы

$$\begin{aligned} \partial_t[\langle v_i v_j \rangle n] &= -\partial_{r_k}[\langle v_i v_j v_k \rangle n] - \frac{2}{\tau} \langle v_i v_j \rangle n + \\ &+ \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^N e^{i\vec{k}_n \vec{r}} \left( \langle u_i^{k_n} v_j \rangle + \langle u_j^{k_n} v_i \rangle \right) n, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \partial_t[\langle u_i^{k_n} v_j \rangle n] &= -\partial_{r_k}[\langle u_i^{k_n} v_j v_k \rangle n] - \frac{1}{\tau} \langle u_i^{k_n} v_j \rangle n + \\ &+ \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^N e^{i\vec{k}_m \vec{r}} \langle u_i^{k_n} u_j^{k_m} \rangle n - \frac{1}{\tau_c} \langle u_i^{k_n} v_j \rangle n, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_t[\langle u_i^{k_n} u_j^{k_m} \rangle n] &= -\partial_{r_k}[\langle u_i^{k_n} u_j^{k_m} v_k \rangle n] - \\ &- \frac{2}{\tau_c} \langle u_i^{k_n} u_j^{k_m} \rangle n + \frac{1}{\tau_c^2} (D_{ij}^{k_n k_m} + D_{ji}^{k_m k_n}) n. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Легко видеть, что мы столкнулись с проблемой замыкания: любая конечная подсистема бесконечной системы уравнений на статистические моменты флуктуирующих переменных является неполной. По этой причине вывести точное замкнутое уравнение на редуцированную функцию распределения  $n(\vec{r}, t)$ , к которому мы стремимся, не представляется возможным. Однако, проблема замыкания может быть решена приближенным образом, если имеет место разделение временных масштабов, а именно, если характерный масштаб времени, на котором существенно изменяется координата частицы, много больше времён, связанных с динамикой скоростей частицы и жидкости. Тогда ценой отказа от возможности описать поведение частицы на малых временах, мы можем вывести замкнутой уравнение на пространственное распределение. Приведенная ниже процедура во многом аналогична гидродинамическому пределу для инерционного броуновского движения в режиме сильного трения.

Формально, мы должны взять предел  $\tau, \tau_c \rightarrow 0$ , удерживая отношение  $St = \tau/\tau_c$  постоянным. В этом случае координата частицы является медленной переменной, в то время как скорости частицы и жидкости это быстрые перемен-

ные. Из уравнений (1.23-1.27) при  $t \gg \tau_c, \tau$  мы находим в главном приближении

$$\langle v_i \rangle n \approx -\tau \partial_{r_j} [\langle v_i v_j \rangle n] + \sum_{n=1}^N e^{i\vec{k}_n \vec{r}} \langle u_i^{k_n} \rangle n, \quad (1.28)$$

$$\langle u_i^{k_n} \rangle n \approx -\tau_c \partial_{r_k} [\langle u_i^{k_n} v_k \rangle n], \quad (1.29)$$

$$\langle v_i v_j \rangle \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N e^{i\vec{k}_n \vec{r}} \left( \langle u_i^{k_n} v_j \rangle + \langle u_j^{k_n} v_i \rangle \right), \quad (1.30)$$

$$\langle u_i^{k_n} v_j \rangle \approx \frac{\tau_c}{\tau + \tau_c} \sum_{m=1}^N e^{i\vec{k}_m \vec{r}} \langle u_i^{k_n} u_j^{k_m} \rangle, \quad (1.31)$$

$$\langle u_i^{k_n} u_j^{k_m} \rangle \approx \frac{1}{2\tau_c} (D_{ij}^{k_n k_m} + D_{ji}^{k_m k_n}). \quad (1.32)$$

Подставляя выражения (1.31) и (1.32) с учетом тождества  $D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') = D_{ji}(\vec{r}', \vec{r})$  в уравнение (1.30), мы находим следующий простой результат для квадратичного момента скорости частицы

$$\langle v_i v_j \rangle \approx \frac{1}{\tau + \tau_c} D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (1.33)$$

что находится в полном согласии с существующими локально-равновесными моделями турбулентного транспорта [9; 16; 38–40].

Далее, подстановка формул (1.29), (1.31), (1.32) и (1.33) в уравнение (1.28) дает замкнутое выражение для потока вероятности

$$\langle v_i \rangle n \approx -D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') \partial_{r_j} n - \frac{\text{St}}{1 + \text{St}} n \partial_{r_j} D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (1.34)$$

при выводе которого необходимо воспользоваться условием  $\partial_{r_k} D_{ik}(\vec{r}', \vec{r}') = \partial_{r_k} D_{ki}(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ , прямо следующим из несжимаемости жидкости. Первое слагаемое в правой части (1.34) пропорционально градиенту функции распределения и соответствует, очевидно, турбулентной диффузии. Второй вклад пропорционален градиенту коэффициента турбулентной диффузии и представляет собой турбофорический поток вероятности в направлении минимума интенсивности турбулентности.

Наконец, подставляя (1.34) в (1.22) и добавляя перенос, обусловленный средней компонентой течения, мы получаем

$$\partial_t n = \frac{\text{St}}{1 + \text{St}} \partial_{r_i} \partial_{r_j} [D_{ij} n] + \frac{1}{1 + \text{St}} \partial_{r_i} [D_{ij} \partial_{r_j} n] + \partial_{r_i} [U_i n]. \quad (1.35)$$

Это и есть искомое транспортное уравнение для частиц с произвольным числом Стокса. Как тому и следует быть, оно переходит в уравнение турбулентной диффузии пассивного скаляра (1.11) в пределе  $\text{St} \rightarrow 0$ .

### 1.4.3 Равновесный профиль концентрации

Мы будем интересоваться только движением частицы в перпендикулярном по отношению к стенке направлении и поэтому перейдем к еще более редуцированной функции распределения  $n(z, t) = \int n(\vec{r}, t) dx dy$ . Поскольку элементы тензора турбулентной диффузии и среднее течение зависят только от расстояния до стенки, то после интегрирования уравнения (1.35) по  $dx dy$  находим

$$\partial_t n = \frac{\text{St}}{1 + \text{St}} \partial_z^2 [D_{zz}(z) n] + \frac{1}{1 + \text{St}} \partial_z [D_{zz}(z) \partial_z n]. \quad (1.36)$$

где коэффициент диффузии дается формулой (1.5). Стационарное беспотоковое решение уравнения (1.36) имеет степенной вид

$$n \propto z^{-\frac{4\text{St}}{1+\text{St}}}. \quad (1.37)$$

Сингулярность в начале координат возникает из-за того, что коэффициент диффузии обнуляется на поверхности стенки. Естественная регуляризация сингулярного поведения может быть выполнена путем учета молекулярной диффузии и конечного размера частицы. Отметим, что степенной профиль (1.37) был ранее получен другим методом в работе [41], где, к тому же, показано, что он находится в хорошем согласии с результатами прямого численного моделирования, которые можно найти в литературе [42; 43].

Сразу же необходимо обсудить условия применимости полученных нами результатов. Формально, исключение из кинетического уравнения (1.19) скоро-



стей стало возможным благодаря переходу к пределу  $\tau, \tau_c \rightarrow 0$ . Этот переход оправдан, если характерный масштаб времени, на котором меняется координата частицы, и времена  $\tau$  и  $\tau_c$ , определяющие динамику скорости частицы и флуктуирующей компоненты скорости потока, хорошо разделены, а именно: при любых (не слишком экстремальных) начальных условиях функция распределения скорости частицы в каждой точке пространства быстро (за время порядка  $\max(\tau, \tau_c)$ ) приходит в статистическое равновесие с локальной интенсивностью турбулентности, после чего происходит более медленный диффузионный процесс эволюции координаты частицы, который и описывается уравнением (1.35) при  $t \gg \tau, \tau_c$ . Локальность статистики скорости в рассматриваемом пределе отчетлива видна из уравнения (1.33), которое говорит нам, что среднеквадратичное значение скорости частицы в некоторой точке определяется интенсивности турбулентности в этой точке. Физически это подразумевает, что время релаксации скорости частицы  $\tau$  и время корреляции потока  $\tau_c$  много меньше чем время  $\tilde{\tau}$ , необходимое частице, чтобы "почувствовать" неоднородность. Последний масштаб времени можно оценить как отношение характерной длины неоднородности к типичной скорости частицы в направлении неоднородности. Поскольку интенсивность турбулентности описывается степенным законом, то масштаб неоднородности это просто расстояние до стенки  $z$ . Оценивая из (1.33) типичную скорость частицы в  $z$ -направлении как  $\tilde{v}_z \sim z^2 \sqrt{\mu/(\tau + \tau_c)}$ , получаем  $\tilde{\tau} \sim z/\tilde{v}_z \sim z^{-1} \sqrt{(\tau + \tau_c)/\mu}$ . Таким образом, приближение локального равновесия самосогласовано при условии

$$z \ll z^* \sim \sqrt{\frac{(1 + \text{St})\tau}{\text{St} \mu}} \min(\tau^{-1}, \tau_c^{-1}). \quad (1.38)$$

Используя оценки  $\tau_c \sim L/U_L$  и  $\mu \sim U_L/L^3$ , можно выразить  $z^*$  через толщину вязкого подслоя и число Стокса

$$z^* \sim L\sqrt{1 + \text{St}} \min(\text{St}^{-1}, 1), \quad (1.39)$$

что дает  $z^* \sim L$  для  $\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$ , и  $z^* \sim L/\sqrt{\text{St}}$  при  $\sqrt{\text{St}} \gg 1$ . Суммируя сказанное, что мы можем заключить, что формула (1.37) адекватно описывает равновесный профиль концентрации инерционных частиц в вязком подслое при условии  $\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$ . Если же  $\sqrt{\text{St}} \gg 1$ , то этот результат справедлив только в узкой обла-

сти  $z \ll L/\sqrt{St}$ , непосредственно примыкающей к стенке. Аналогичное условие применимости локально-равновесного приближения для инерционных частиц в пристенной области турбулентного течения было сформулировано в работе [15].

#### 1.4.4 Переход локализация-делокализация по числу Стокса

Как следует из решения (1.37), сколь угодно малая инерция ведет к появлению максимума концентрации частиц на стенке в статистически равновесном состоянии. Что мы можем сказать о нестационарных процессах турбулентного транспорта в пристенной области? Попробуем понять, в каком направлении в среднем дрейфует частица, помещенная около стенки, при условии, что ее начальная скорость не слишком велика и она не может сразу же покинуть вязкий подслой в баллистическом режиме. Ответ на этот вопрос содержится в нормализационных свойствах построенного нами равновесного решения. Степенной профиль (1.37) не нормируем на бесконечности при  $St < 1/3$  и нормируем, если  $St > 1/3$ . Поведение функции распределения на поверхности стенки всегда сингулярно, но эта сингулярность интегрируема при  $St < 1/3$  и не интегрируема, если  $St > 1/3$ . Все это означает, что при критическом значении числа Стокса равном  $1/3$  происходит переход локализация-делокализация. Частицы с достаточно большой инерцией, помещенные в область  $z \ll z^*$ , имеют тенденцию скапливаться вблизи стенки, а слабоинерционные частицы покидают вязкий подслой.

Физическая картина, которая стоит за этим динамическим фазовым переходом, выглядит следующим образом. В рассматриваемом нами диапазоне чисел Стокса ( $\sqrt{St} \lesssim 1$ ), для которого оправдано приближение локального равновесия, приведшее нас к градиентному транспортному уравнению (1.35), динамика частицы управляется совместным действием двух эффектов - турбулентной диффузии и турбофореза. При малой инерции ( $St < 1/3$ ) турбофорез, "притягивающий" частицы к стенке, не может скомпенсировать диффузию, которая стремится размещать частицы равномерно по всему объему. Однако, турбофорез становится все более и более ярко выраженным с ростом числа Стокса и в конечном счете побеждает турбулентную диффузию, запирая достаточно

инерционные частицы ( $St > 1/3$ ) в вязком подслое. Это, в частности, означает, что при прочих равных условиях инерционные частицы, брошенные в вязкий пограничный подслой, вымываются в основной объем турбулентности намного медленнее чем пассивный скаляр.

### 1.5 Сильно инерционные частицы, $\sqrt{St} \gg 1$

Как было показано в предыдущем подразделе, приближение локального равновесия для частиц в вязком пограничном подслое работает только при условии не слишком больших чисел Стокса,  $\sqrt{St} \lesssim 1$ . Если же  $\sqrt{St} \gg 1$ , то область применимости полученных выше результатов ограничивается тонким слоем  $z \ll L/\sqrt{St}$ , где тело равновесной функции распределения по скоростям образовано частицами, которые находятся в локальном равновесии в турбулентности. Эти частицы могут быть названы диффузионными, поскольку характерная длина их свободного пробега много меньше расстояния до стенки. Равновесный профиль концентрации диффузионных частиц (1.37) в главном порядке не зависит от степени неупругости столкновений со стенкой.

Частицы, находящиеся в области  $z \gg L/\sqrt{St}$ , далеки от равновесия с локальной интенсивностью флуктуаций течения, так как обладают достаточной энергией, чтобы достичь поверхности стенки баллистически. Для ответа на вопрос о локализационных свойствах в пределе большого числа Стокса, необходимо построить равновесную функцию распределения таких частиц, что и представляет основную задачу настоящего подраздела. Забегая вперед, сформулируем основные результаты нашего анализа, который также изложен в работе [20]. Ниже будет показано, что при решении уравнения Фоккера-Планка на функцию распределения координаты и скорости частицы можно пренебречь диссипацией за счет вязкого трения и перейти к приближению стохастического ускорения, поэтому частицы в области  $z \gg L/\sqrt{St}$  мы будем называть стохастически ускоряемыми. Оказывается, равновесная функция распределения стохастически ускоряемых частиц существует не всегда, а только при достаточно малом  $\beta$ . При  $\beta > \beta_c$ , где  $\beta \approx 0,163$ , у уравнения Фоккера-Планка попросту нет решения с ненулевым потоком. Если же  $\beta < \beta_c$ , то равновесный профиль

концентрации случайно ускоряемых частиц существует и имеет степенной вид с показателем, который зависит от коэффициента восстановления скорости  $\beta$ . Этот профиль нормируем при  $z \rightarrow \infty$ , а значит критическое значение  $\beta = \beta_c$  соответствует переходу локализация-делокализация.

### 1.5.1 Уравнение Фоккера-Планка с неупругим граничным условием на стенке

Перейдем к формулированию основных уравнений рассматриваемой нами статистической модели. При  $\tau_c \ll \tau$  мы можем считать флуктуации скорости жидкости в стохастическом уравнении динамики (1.6) дельта-коррелированными во времени. Тогда совместная функция распределения координаты и скорости частицы

$$\rho(\vec{r}, \vec{v}, t) = \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}(t)) \rangle \quad (1.40)$$

удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\partial_t \rho = -v_i \partial_{r_i} \rho + \frac{1}{\tau} \partial_{v_i} (v_i \rho) + \frac{1}{\tau^2} D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}) \partial_{v_i} \partial_{v_j} \rho. \quad (1.41)$$

которое можно также вывести из кинетического уравнения (1.19) на совместную функцию распределения частицы и жидкости (1.18), если в пределе  $\tau_c \rightarrow 0$  исключить из него переменные, несущие информацию о движении жидкости. Здесь мы опускаем член, связанный с переносом средним течением вдоль стенки, поскольку для последующего он не играет никакой роли.

Интегрируя уравнение (1.41), для редуцированной функции распределения  $\rho(z, v_z, t) = \int \rho(\vec{r}, \vec{v}, t) dx dy dv_x dv_y$ , соответствующей движению частицы в перпендикулярном к стенке направлении, мы получаем

$$\partial_t \rho = -v_z \partial_z \rho + \frac{1}{\tau} \partial_{v_z} (v_z \rho) + \frac{1}{\tau^2} D_{zz}(z) \partial_{v_z}^2 \rho. \quad (1.42)$$

Последнее уравнение должно быть дополнено граничным условием на поверхности стенки. Как обсуждалось в пункте 1.2, мы полагаем, что при каждом столкновении со стенкой частица теряет определенную часть нормальной ком-

поненты скорости, см. (1.7). Тогда

$$\rho(0, v_z) = \beta^{-2} \rho(0, -\beta^{-1} v_z), \quad \text{при } v_z > 0. \quad (1.43)$$

Множитель  $\beta^{-2}$  в уравнении (1.43) связан с сохранением вероятности: отраженный поток вероятности  $\rho v_z dv_z$  для положительных  $v_z$  должен совпадать с падающим потоком для  $-v_z/\beta$ .

### 1.5.2 Область диффузионных частиц

Хотя транспортное уравнение для пространственного переноса концентрации диффузионных частиц в области  $z \ll L/\sqrt{\text{St}}$  есть ничто иное как уравнение (1.35), взятое в пределе  $\text{St} \rightarrow \infty$ , в целях проверки полезно вывести этот результат напрямую из уравнения Фоккера-Планка (1.41). Рассмотрим функцию распределения координаты частицы

$$n(\vec{r}, t) = \int \rho(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v. \quad (1.44)$$

Интегрируя обе части уравнения Фоккера-Планка по  $d^3v$ , мы получаем

$$\partial_t n = -\partial_{r_i} [\langle v_i \rangle n], \quad (1.45)$$

где использовано обозначение  $\langle A \rangle = (1/n) \int_{-\infty}^{+\infty} A \rho d^3v$ . Произведение  $\langle \vec{v} \rangle n$  представляет собой поток вероятности в координатном пространстве. Чтобы найти уравнение на поток, мы умножаем уравнение Фоккера-Планка на компоненту скорости  $v_i$  и снова интегрируем по  $d^3v$

$$\partial_t [\langle v_i \rangle n] = -\partial_{r_j} [\langle v_i v_j \rangle n] - \frac{1}{\tau} \langle v_i \rangle n. \quad (1.46)$$

Далее нам нужно знать квадратичный момент  $\langle v_i v_j \rangle$ , который, как легко показать, удовлетворяет уравнению

$$\partial_t [\langle v_i v_j \rangle n] = -\partial_{r_k} [\langle v_i v_j v_k \rangle n] - \frac{2}{\tau} \langle v_i v_j \rangle n + \frac{2}{\tau^2} D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}) n. \quad (1.47)$$

Как и предыдущем пункте, попытка исключить скорость из кинетического уравнения приводит нас к проблеме замыкания: мы получаем бесконечную цепочку сцепленных уравнений эволюции статистических моментов скорости. Приближенно эту проблему можно решить, предположив, что скорость частицы быстро релаксирует к локально-равновесному распределению, которое диктуется интенсивностью турбулентности в рассматриваемой области пространства, а затем ее координата претерпевает более медленный процесс диффузии. Отметим, что уравнение (1.41) аналогично уравнению Фоккера-Планка для инерционной броуновской частицы в среде с неоднородной температурой. Описанная ниже процедура вывода замкнутого уравнения на функцию распределения координаты соответствует адиабатическому исключению скорости броуновской частицы в пределе сильного трения и слабой неоднородности [23; 44; 45].

В пределе  $\tau \rightarrow 0$  из уравнений (1.46) и (1.49) находим

$$\langle v_i \rangle n \approx -\tau \partial_{r_j} [\langle v_i v_j \rangle n], \quad (1.48)$$

$$\langle v_i v_j \rangle \approx \frac{1}{\tau} D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}). \quad (1.49)$$

Следовательно поток вероятности может быть выражен как

$$\langle v_i \rangle n \approx -\partial_{r_j} [D_{ij}(\vec{r}, \vec{r}) n], \quad (1.50)$$

что после подстановки в (1.45) и добавления тривиального вклада от среднего течения дает нам уравнение

$$\partial_t n = \partial_{r_i} \partial_{r_j} [D_{ij} n] + \partial_{r_i} [U_i n], \quad (1.51)$$

справедливое при  $t \gg \tau$ . Как мы и ожидали, ровно такое же уравнение получается из (1.35) в пределе  $St \rightarrow \infty$ . Проинтегрировав (1.51) по  $dx$  и  $dy$ , можно получить также соответствующий предел уравнения (1.36) для функции распределения  $z$ -координаты частицы

$$\partial_t n = \partial_z^2 [D_{zz}(z) n]. \quad (1.52)$$

Отсюда сразу находим равновесный профиль

$$n \propto \frac{1}{z^4}. \quad (1.53)$$

Вывод уравнения (1.51) опирался на предположение, что статистика скорости частицы пребывает в локальном равновесии с флуктуациями скорости жидкости. Время, необходимое частице, чтобы ощутить неоднородность турбулентности, оценивается как  $\tilde{\tau} \sim z/\tilde{v}_z$ , где характерная скорость частицы в  $z$ -направлении, извлеченная из формулы (1.49), есть  $\tilde{v}_z \sim z^2 \sqrt{\mu/\tau}$ . Неравенство  $\tau \ll \tilde{\tau}$ , оправдывающее наши вычисления, можно переписать как условие на координату

$$z \ll z^* \sim \frac{L}{\sqrt{\text{St}}}. \quad (1.54)$$

То есть уравнение (1.51) и следующее из него равновесное распределение (1.53) можно использовать только в области  $z \ll L/\sqrt{\text{St}}$ .

### 1.5.3 Область стохастически ускоряемых частиц

Теперь рассмотрим область  $z \gg L/\sqrt{\text{St}}$ , в которой статистика скорости частицы далека от локального равновесия с турбулентностью. При  $|v_z| \gg z/\tau$  можно пренебречь вторым членом в уравнении Фоккера-Планка (1.42) и в стационарном случае перейти к уравнению

$$-v_z \partial_z \rho + \frac{\mu}{\tau^2} z^4 \partial_{v_z}^2 \rho = 0. \quad (1.55)$$

После автомодельной подстановки

$$\rho = z^{-5a} h(\zeta), \quad \zeta = \frac{5\tau^2 v_z^3}{9\mu z^5}, \quad (1.56)$$

где  $a$  это параметр автомодельности, получаем

$$\zeta \partial_\zeta^2 h + (2/3 + \zeta) \partial_\zeta h + ah = 0. \quad (1.57)$$

Из уравнения (1.55) характерная скорость частицы  $\tilde{v}_z$  на заданном расстоянии  $z$  от стенки оценивается как  $\tilde{v}_z \sim \mu^{1/3} \tau^{-2/3} z^{5/3}$ . Значит область фазового пространства  $|v_z| \lesssim z/\tau$ , в которой второй член в уравнении Фоккера-Планка (1.42) существенен, намного уже (в направлении оси  $v_z$ ) чем тело функции распределения по скорости при  $z \gg L/\sqrt{\text{St}}$ . Это позволяет нам рассматривать решение уравнения (1.57) при всех  $\zeta$  (всех  $v_z$ ) считая, что само оно и его производные непрерывны в точке  $\zeta = 0$ . Отметим, что кинетическое уравнение (1.55) соответствует уравнению динамики

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\tau} \vec{u}(\vec{r}(t), t), \quad (1.58)$$

то есть приближению случайного ускорения в отсутствии вязкой релаксации скорости. Иными словами, мы утверждаем, что вязкая диссипация не играет роли в формировании тела функции распределения по скорости на расстояниях  $z \gg L/\sqrt{\text{St}}$  от стенки.

Решение уравнения (1.57) дается вырожденными гипергеометрическими функциями: функцией Кrumмера  $M(a, 2/3, -\zeta)$  и функцией Трикоми  $U(a, 2/3, -\zeta)$ . Так как функция  $M(a, 2/3, -\zeta)$  экспоненциально возрастает при больших отрицательных  $\zeta$ , то мы должны выбрать  $h = U(a, 2/3, -\zeta)$  для  $\zeta < 0$ . При положительных  $\zeta$  функция  $h$  дается линейной комбинацией функций  $M(a, 2/3, -\zeta)$  и  $U(a, 2/3, -\zeta)$ . Приравнявая значения функции  $h$  и ее производные по  $v_z$  при  $\zeta = +0$  и  $\zeta = -0$ , получаем

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Im} U(a, 2/3, -\zeta) + \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(a + 1/3)} M(a, 2/3, -\zeta),$$

если  $\zeta > 0$ . С учетом асимптотического поведения функций  $M$  и  $U$  при больших значениях их аргумента мы находим

$$h \approx |\zeta|^{-a}, \quad \zeta < 0, \quad (1.59)$$

$$h \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \sin(\pi a) + \sin \left[ \left( \frac{2}{3} - a \right) \pi \right] \right\} \zeta^{-a}, \quad \zeta > 0. \quad (1.60)$$

Если рассмотреть область  $|v_z| \gg \mu^{-1/2} \tau^{-3/2} \sim U_L / \text{St}^{3/2}$ ,  $z \lesssim 1/\sqrt{\mu\tau} \sim L/\sqrt{\text{St}}$ , то ведущим членом в уравнении (1.42) будет перенос  $v_z \partial_z \rho$ , соответствующий баллистическому движению быстрых частиц. Следовательно функция  $\rho$



является  $z$ -независимой в этой части фазового пространства и хвосты (1.59, 1.60) можно протянуть вплоть до поверхности стенки, что дает

$$\rho(v_z) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \sin(\pi a) + \sin \left[ \left( \frac{2}{3} - a \right) \pi \right] \right\} \rho(-v_z), \quad (1.61)$$

при  $z = 0$  и  $v_z \gg \mu^{-1/2} \tau^{-3/2}$ . Сравнение выражения (1.61) с неупругим граничным условием (1.43) ведет к замечательному соотношению

$$\frac{\sin(\pi a) - \sin[\pi(a - 2/3)]}{\sin(2\pi/3)} = \beta^{3(a-2/3)}. \quad (1.62)$$

которое позволяет вычислить параметр автомодельности  $a$  в зависимости от коэффициента восстановления скорости  $\beta$ .

Легко убедиться, что для любого  $\beta$  уравнение (1.62) имеет решение  $a = 2/3$ . Однако, это значение параметра автомодельности соответствует ненулевому потоку частиц от стенки,  $\int \rho(z, v_z) v_z dv_z \neq 0$ . Нас же интересует равновесное распределение частиц, которое реализуется на той ветви решений  $a(\beta)$  уравнения (1.62), что начинается с  $a = 5/6$  для  $\beta \rightarrow 0$  и монотонно убывает с ростом  $\beta$ . При  $\beta \rightarrow \beta_c$ , где

$$\beta_c = \exp \left( -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \approx 0.163, \quad (1.63)$$

мы снова приходим к потоковому случаю  $a = 2/3$ . Если коэффициент восстановления скорости  $\beta$  становится больше критического значения  $\beta_c$ , то рассматриваемое решение вовсе теряет физический смысл, так как  $a < 2/3$  и интеграл  $\int \rho(z, v_z) v_z dv_z$  расходится, как это видно из асимптотик (1.59, 1.60). Таким образом, равновесное распределение частиц существует только при условии  $\beta < \beta_c$ . Соответствующая функция распределения по координате ведет себя степенным образом

$$n \propto \frac{1}{z^{5(a(\beta)-1/3)}} \quad (1.64)$$

и нормируема, обеспечивая локализацию частицы около стенки. При  $\beta > \beta_c$  равновесное решение перестает существовать и происходит делокализация.

### 1.5.4 Равновесный профиль концентрации

Итак, формулы (1.53) и (1.64) описывают асимптотическое поведение равновесного профиля концентрации частиц с большим числом Стокса в вязком подслое на малых и больших расстояниях от стенки, соответственно. Для наглядности эти результаты схематически представлены на рисунке 1.2. Примечательным является тот факт, что неупругость граничных условий влияет только на профиль концентрации вдали от стенки, в то время как ближняя асимптотика не чувствительна к  $\beta$ . Чем более далекую от стенки область мы рассматриваем, тем сильнее частицы в ней чувствуют присутствие неупругой стенки!

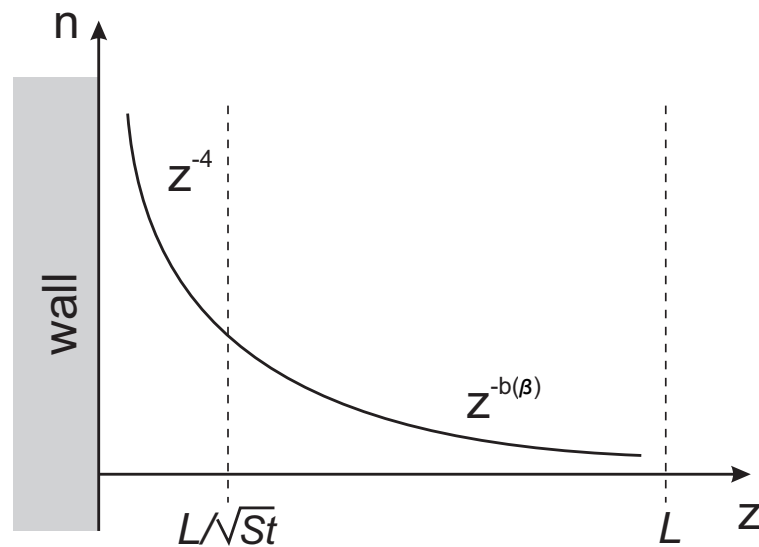


Рисунок 1.2 — Равновесное распределение концентрации сильно инерционных частиц ( $\sqrt{St} \gg 1$ ) в вязком подслое. Показатель степени  $b(\beta)$  монотонно меняется в пределах от  $5/2$  до  $5/3$  при изменении  $\beta$  от  $+0$  до  $\beta_c$ .

### 1.5.5 Неупругий коллапс

Обнаруженный нами переход локализация-делокализация по параметру  $\beta$  (неупругий коллапс) означает, что скорость выноса инерционных частиц с большим числом Стокса из вязкого подслоя турбулентного течения сильно зависит от степени диссипативности их столкновений со стенкой. Этот вывод находит подтверждение в результатах численного моделирования движения ча-

стиц в несжимаемом двумерном поле скорости, мимикрирующем вязкий под-  
 слой. Флуктуационная компонента скорости в расчетной области  $x \in [0, L]$ ,  
 $z \in [0, z_{\max}]$  была выбрана в виде

$$u'_x = \frac{L}{\pi} \left( \xi_1 \cos \frac{2\pi x}{L} + \xi_2 \sin \frac{2\pi x}{L} \right) z, \quad (1.65)$$

$$u'_z = \left( \xi_1 \sin \frac{2\pi x}{L} - \xi_2 \cos \frac{2\pi x}{L} \right) z^2 \quad (1.66)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  это случайные телеграфные процессы с парным коррелятором  $\langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij} \mu / \tau_c$  и одинаковым шагом по времени  $\tau_c$ , который много меньше времени релаксации скорости частицы  $\tau$ . В симуляциях решалось уравнение движения (1.6) с учетом неупругого граничного условия (1.7) и периодических условий вдоль  $x$ . В начальный момент большое число частиц (порядка  $10^4$ ) с нулевыми начальными скоростями помещалось на расстоянии  $z \ll 1/\sqrt{\mu\tau}$  от стенки. Частицы, координата которых после очередного шага численной схемы превысила значение  $z_{\max}$ , считались убежавшими из вязкого подслоя. Об интенсивности выноса частиц из пристенной области можно судить по величине  $\Gamma = 1/\langle T \rangle$ , где  $T$  это время необходимое частице, чтобы добраться до уровня  $z = z_{\max}$ . Темп выноса из области  $z < z_{\max}$  как функция коэффициента восстановления  $\beta$  изображен на рисунке 1.3 для  $z_{\max} = 100$  и  $200$ . Мы видим, что  $\Gamma$  возрастает на порядок при изменении  $\beta$  от 0,163 (граница перехода локализация-делокализация в теории) до 1 (идеально упругие столкновения). Отметим, что при  $\tau_c \gtrsim \tau$  никакой зависимости темпа выноса от параметра  $\beta$  не наблюдается, поскольку частицы, характеризуемые не слишком большим числом Стокса, движутся диффузионным образом и редко сталкиваются со стенкой.

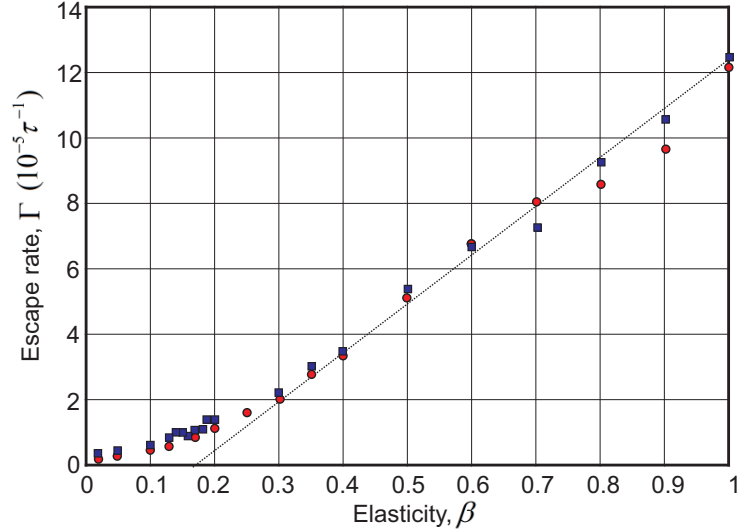


Рисунок 1.3 — Темп выноса сильно инерционных частиц ( $\sqrt{St} \gg 1$ ) из области  $z < z_{\max}$  случайного течения (1.65, 1.66) при  $z_{\max} = 100$  (квадраты) и  $z_{\max} = 200$  (круги) в зависимости от  $\beta$ .

## 1.6 Заключение

Предметом обсуждения в этой главе была динамика инерционных частиц, помещенных в вязкой пограничный подслое турбулентного течения. Проведенный анализ выявил особенности турбулентного транспорта частиц в вязком подслое во всем диапазоне числа Стокса, от пассивного скаляра до частиц с очень большой инерцией. Было показано, что при  $\sqrt{St} \lesssim 1$  на протяжении всего вязкого подслоя справедливо локально-равновесное приближение, означающее что статистика скорости частицы определяется интенсивностью флуктуаций в той точке, где частица находится. Если же  $\sqrt{St} \gg 1$ , то область действия локально-равновесного приближения ограничивается тонким слоем порядка  $L/\sqrt{St}$  вблизи стенки, где  $L$  это ширина вязкого подслоя, в то время как остальные частицы движутся в режиме стохастического ускорения и далеки от локального равновесия с турбулентностью.

Мы проследили за тем, как, по мере увеличения числа Стокса, турбофорический дрейф, обязанный своим существованием инерционности частиц, становится все более и более существенным и в конечном счете "запирает" частицы в вязком подслое, когда  $St$  переваливает через критическое значение  $1/3$ . Од-

нако, при дальнейшем росте числа Стокса инерция частиц начинает играть уже против локализации. Область минимума интенсивности флуктуаций скорости жидкости не может служить эффективной ловушкой для стохастически ускоряемых частиц, поскольку характерная длина их свободного пробега много больше расстояния до стенки.

Тем не менее, локализация в вязком подслое оказывается возможной и для сильно инерционных частиц, если учесть потерю ими кинетической энергии при столкновениях со стенкой. В случае частиц с малой и средней инерцией ( $\sqrt{\text{St}} \lesssim 1$ ) степень неупругости столкновений в главном приближении вообще не играет роли в силу диффузионного характера их движения. Напротив, для частиц с очень большой инерцией ( $\sqrt{\text{St}} \gg 1$ ) диссипативность взаимодействия со стенкой может иметь весьма большие последствия. В рамках простейшей модели с постоянным коэффициентом восстановления скорости частицы  $\beta$  и дельта-коррелированной во времени скоростью жидкости, мы продемонстрировали эффект неупругого коллапса. Суть эффекта состоит в пристенной локализации частиц, коэффициент восстановления скорости которых при столкновении со стенкой меньше критического значения  $\beta_c = \exp(-\pi/\sqrt{3}) \approx 0,163$ . Как мы увидим в следующих двух главах, неупругий коллапс не является уникальной чертой динамики частиц в вязком подслое, а может происходить также и в других типах случайных течений.

## Глава 2. Дельта-коррелированное поле скорости со степенным профилем интенсивности

В предыдущей главе мы рассмотрели динамику частиц в вязком пограничном подслое, то есть на самом малом масштабе турбулентного течения в пристенной области. Это предполагало специфическую зависимость коэффициента турбулентной диффузии от расстояния до стенки, заложенную в нашу статистическую модель:  $D_{zz} \propto z^4$ . Несомненный интерес представляет также рассмотрение процессов переноса в турбулентном пограничном слое развитой турбулентности, где, как известно,  $D_{zz} \propto z$ . Более общо, можно поставить вопрос о локализационных свойствах частиц в случайном пристенном течении с произвольной возрастающей степенной зависимостью интенсивности флуктуаций от расстояния до стенки, то есть

$$D_{zz} \propto z^m, \quad (2.1)$$

где  $m > 0$ . Именно такая задача рассматривается в этом разделе, материалом для которого послужила наша недавняя публикация [22].

Мы сосредоточимся на пределе большой инерции ( $St \rightarrow \infty$ ), тогда поле скорости жидкости можно считать дельта-коррелированным во времени. Совместная функция распределения координаты и нормальной к стенке компоненты скорости частицы удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\partial_t \rho = -v_z \partial_z \rho + \frac{1}{\tau} \partial_{v_z} (v_z \rho) + \frac{1}{\tau^2} D_{zz}(z) \partial_{v_z}^2 \rho, \quad (2.2)$$

совместно с граничным условием

$$\rho(0, v_z) = \beta^{-2} \rho(0, -\beta^{-1} v_z), \quad \text{при } v_z > 0, \quad (2.3)$$

структура которого учитывает неупругость столкновений со стенкой, как это уже обсуждалась в предыдущей главе. Нам нужно рассмотреть равновесное решение  $\rho(z, v_z)$  сформулированной краевой задачи. Если таковое решение существует и "хвост" соответствующей редуцированной функции распределения  $n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(z, v_z) dv_z$  на больших  $z$  нормируем, то частица локализована вбли-

зи стенки. Отсутствию равновесной функции распределения или ее ненормированность будет означать делокализацию.

## 2.1 Параметр инерции

Статистически равновесное распределение характеризуется балансом между флуктуациями скорости частицы, сообщаемыми ей турбулентным потоком, и диссипацией этих флуктуаций за счет вязкого трения и неупругих столкновений со стенкой. Чтобы оценить роль неоднородности турбулентности в формировании равновесного распределения по скорости на заданном расстоянии от стенки, полезно ввести следующий безразмерный параметр

$$I(z) = \left( \frac{\tau}{\tilde{\tau}(z)} \right)^{2/3}, \quad (2.4)$$

где, как и в предыдущем разделе,  $\tilde{\tau}(z)$  это характерное время, необходимое частице, чтобы почувствовать неоднородность при условии, что ее текущая координата равна  $z$ . Обозначив характерную скорость частицы через  $\tilde{v}(z)$ , получаем  $\tilde{\tau} \sim z/\tilde{v}$ . Эквивалентно, параметр  $I$  можно определить через отношение длины свободного пробега  $l(z) = \tilde{v}(z)\tau$  к расстоянию до стенки  $z$ :  $I = (l/z)^{2/3}$ . Заметим, что степень  $2/3$  в определении (2.4) не имеет никакого глубокого смысла и введена из соображений компактности последующих формул.

В той области течения, где справедливо условие  $I \ll 1$ , работает локальный механизм диссипации типичных флуктуаций: релаксация возмущенного распределения по скоростям к равновесному распределению происходит за счет вязкого трения настолько быстро, что частица не успевает попасть в область с заметно отличающейся интенсивностью турбулентности. Иными словами, статистика скорости частицы находится в локальном равновесии с турбулентностью. В противоположность этому, при  $I \gg 1$  ситуация далека от локального равновесия, поскольку характерная скорость частицы позволяет ей достичь стенки за время много меньшее времени релаксации скорости. В этом случае диссипация флуктуаций происходит главным образом благодаря неупругим столкновениям со стенкой.

Предположим, что справедливо неравенство  $I \ll 1$ . Тогда типичная скорость частицы определяется вторым и третьим членами в правой части уравнения (2.2):  $\tilde{v}(z) \sim \sqrt{D_{zz}(z)/\tau}$ . Используя эту оценку, в случае степенной  $z$ -зависимости коэффициента турбулентной диффузии (2.1) находим

$$I(z) \propto z^{m/2-1}. \quad (2.5)$$

Отсюда видно, что необходимо отдельно проанализировать три случая:  $0 \leq m < 2$ ,  $m > 2$  и  $m = 2$ .

## 2.2 $0 \leq m < 2$

Если  $0 \leq m < 2$ , то  $I \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Иными словами, характерная длина пробега частицы много меньше чем расстояние до стенки. Следовательно, оправдано приближение локального равновесия: статистика скорости частицы на больших расстояниях от стенки определяется локальной интенсивностью турбулентности. Исключив скорость частицы из уравнения Фоккера-Планка с помощью процедуры, описанной в разделе 1.5.2, получаем градиентное уравнение

$$\partial_t n = \partial_z^2 [D_{zz}(z)n], \quad (2.6)$$

которое описывает эволюцию функции распределения по координате при  $t \gg \tau$  и на больших  $z$ . Равновесное решение этого уравнения дается степенным профилем:

$$n(z) \propto \frac{1}{z^m}. \quad (2.7)$$

Легко увидеть, что при  $1 \leq m < 2$  это решение нормируемо на бесконечности, а значит частица локализована. Если  $0 \leq m < 1$ , то решение убывает слишком медленно и частица делокализована. Заметим, что локализационные свойства не зависят от  $\beta$ , так как при  $z \rightarrow \infty$  частица становится нечувствительной к граничным условиям на стенке.



### 2.3 $m > 2$

Для  $m > 2$  мы получаем  $I \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ . Это означает, что частица, помещенная на произвольно большом расстоянии от стенки, может достичь стенку баллистически. Понятно, что ни о каком локальном равновесии в этом случае говорить не приходится. Такая ситуация уже встречалась нам в прошлой главе на примере сильно инерционных частиц в вязком подслое, где  $m = 4$ . Как и прежде для построения функции распределения на больших расстояниях от стенки можно перейти к приближению случайного ускорения

$$\partial_t \rho = -v_z \partial_z \rho + \frac{1}{\tau^2} D_{zz}(z) \partial_{v_z}^2 \rho. \quad (2.8)$$

Действительно, вторым членом в правой части уравнения (2.2) можно пренебречь, так как область фазового пространства, где этот член не мал, становится очень узкой в сравнении с телом функции распределения по скорости при  $z \rightarrow \infty$ .

Метод построения равновесного решения уравнения (2.8) был подробно описан в подразделе 1.5.3. После подстановки автомодельного анзаца

$$\rho = z^{-a(m+1)} h(\zeta), \quad \zeta = \frac{m+1}{9} \frac{\tau^2}{\mu} \frac{v^3}{z^{m+1}}, \quad (2.9)$$

получаем на функцию  $h(\zeta)$  уравнение (1.57), решение которого при больших значениях аргумента дается формулами (1.59) и (1.60). Постановка граничного условия (2.3) дает уравнение (1.62) на параметр автомодельности  $a$  как функцию от  $\beta$ . Решение с нулевым потоком существует только при  $\beta < \beta_c$ , причем соответствующая функция распределения в координатном пространстве нормируема. Мы заключаем, что критическое значение коэффициента восстановления скорости  $\beta_c$  является универсальной границей перехода локализация-делокализация для моделей с  $m > 2$ .

## 2.4 $m = 2$

Случай  $m = 2$  особенно интересен, поскольку здесь мы имеем дело с  $z$ -независимым параметром  $I$ , который может рассматриваться как степень инерционности частицы. Если  $I \rightarrow 0$ , то в рамках приближения локального равновесия находим стационарный профиль  $n \propto z^{-2}$ , нормируемость которого при  $z \rightarrow \infty$  означает, что в рассматриваемом пределе частица локализована при любом  $\beta$ . Если же  $I \rightarrow \infty$ , то оправдано приближение стохастического ускорения и мы получаем переход локализация-делокализация при  $\beta = \beta_c$ , как это следует из предыдущего рассмотрения. Оказывается возможным также описать локализационные свойства частицы для произвольного значения параметра  $I$ . Для этой цели необходимо найти знак ляпуновской экспоненты, которая определена как  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln z(t)/z(0)$ . Отрицательная ляпуновская экспонента соответствует локализации: характерная координата частицы экспоненциально уменьшается с течением времени. Напротив, положительная ляпуновская экспонента означает делокализацию, поскольку координата частицы экспоненциально растет. Точное вычисление ляпуновской экспоненты позволяет построить фазовую кривую перехода локализация-делокализация в плоскости  $\beta - I$ , демонстрирующую, в частности, что частица локализована при любом значении параметра инерции  $I$ , когда  $\beta < \beta_c$ . Вывод ляпуновской экспоненты и более подробное обсуждение результатов приведено в следующей главе. Выделение материала, касающегося квадратичной модели, в отдельную главу обусловлено особой красотой этого случая и его важностью для приложений, которые не ограничиваются движением частиц в пристенных потоках.

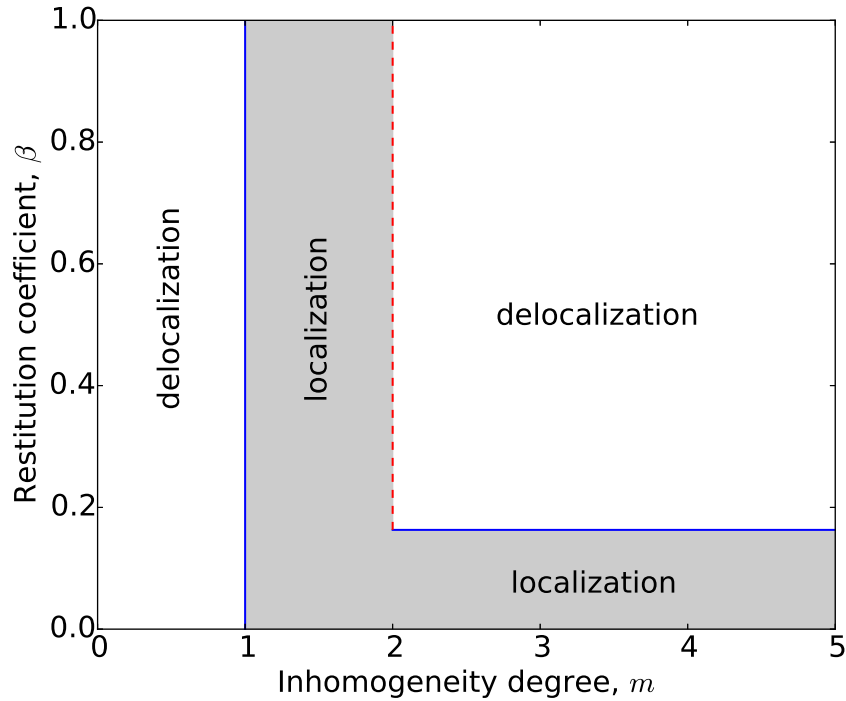


Рисунок 2.1 — Фазовая диаграмма перехода локализация-делокализация в плоскости  $m - \beta$  (неоднородность-упругость). Для набора параметров, лежащих на красной пунктирной линии, локализационные свойства зависят также от безразмерного параметра инерции  $I$ , см. следующую главу.

## 2.5 Заключение

Мы рассмотрели локализационные свойства инерционных частиц в пристенной области турбулентного течения в рамках статистической модели с дельта-коррелированным во времени случайным полем скорости. Модель включает в себя произвольный степенной профиль коэффициента турбулентной диффузии и учитывает неупругость столкновений частиц со стенкой. Фазовая диаграмма, приведенная на рисунке 2.1, резюмирует результаты этого раздела. В частности она показывает, что переход локализация-делокализация по параметру  $\beta$  (неупругий коллапс), описанный в предыдущей главе для частного случая инерционных частиц в вязком подслое развитой турбулентности, универсален для всех моделей, в которых коэффициент диффузии растет быстрее чем квадрат расстояния от стенки.

Стоит обсудить место представленного здесь исследования среди множества похожих с точки зрения решаемых уравнений работ. Уравнение Фоккера-Планка (2.2) с неоднородным коэффициентом диффузии можно встретить в литературе, посвященной неизотермическому броуновскому движению, см., в частности, [23; 44]. Внимание исследователей было приковано к движению частиц в очень вязкой неограниченной среде в условиях слабой неоднородности теплового шума. В свое время значительные усилия были потрачены на то, чтобы определить правильную структуру градиентного транспортного уравнения, описывающего концентрацию частиц в гидродинамическом пределе [46] (см. также обсуждение и ссылки в [47]). Случай сильной неоднородности температуры и роль неупругих столкновений на границе, насколько нам известно, не обсуждались.

Кроме того, довольно большой интерес привлекла модель случайно ускоряемых частиц, соответствующая упрощенному кинетическому уравнению (2.8). Эта задача обсуждалась в основном в контексте динамики гранулированных материалов, раскачиваемых случайной силой. Здесь были получены некоторые точные аналитические результаты (см. обзор [48]), учитывающие диссипативные столкновения со стенкой, но лишь для случая однородного коэффициента диффузии. В частности, было обнаружено явление неупругого коллапса стохастических траекторий частиц, ускоряемых однородным шумом [49; 50]. Попытки обобщить анализ на случай неоднородной интенсивности случайной силы если и предпринимались, то не привели к успеху.

Таким образом, нетривиальность данного исследования состоит в одновременном учете сильной неоднородности коэффициента диффузии и неупругих столкновений на границе.

### Глава 3. Квадратичная модель

Эта глава диссертационной работы посвящена динамике инерционных частиц в случайном пристенном течении с квадратичным профилем коэффициента турбулентной диффузии,  $D_{zz} = \mu z^2$ . Мы будем рассматривать предел сильной инерции, полагая, что время релаксации скорости частицы много больше времени корреляции потока, то есть  $St \rightarrow \infty$ . Тогда функция распределения координаты и скорости частицы в направлении нормали к стенке удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\partial_t \rho = -v_z \partial_z \rho + \frac{1}{\tau} \partial_{v_z} (v_z \rho) + \frac{\mu}{\tau^2} z^2 \partial_{v_z}^2 \rho, \quad (3.1)$$

которое должно быть дополнено граничным условием

$$\rho(0, v_z) = \beta^{-2} \rho(0, -\beta^{-1} v_z), \quad (3.2)$$

где, как и прежде,  $\beta$  это коэффициент восстановления скорости частицы при столкновении со стенкой.

Особенностью квадратичной модели является тот факт, что параметр  $I$ , определение которого дано формулой 2.4, не зависит от  $z$ :  $I = (\mu\tau)^{1/3}$ . То есть степень нарушения локального равновесия одинакова в любой точке. Чтобы ответить на вопрос, остается ли частица в окрестности стенки, или же постепенно убегает на бесконечность, можно было бы пойти по тому же пути, что был выбран в первых двух главах. А именно, выяснить при каких условиях существует равновесное решение уравнения Фоккера-Планка, и как ведет себя на больших расстояниях от стенки распределение частицы по координате, соответствующее этому решению. Однако такая программа осуществима только в предельных случаях  $I \rightarrow 0$  и  $I \rightarrow \infty$ . В общем же случае, решить уравнение Фоккера-Планка не представляется возможным. К счастью, это и не нужно. Описать локализационные свойства частицы с произвольным значением параметра инерции  $I$  можно, вычислив ляпуновскую экспоненту, которая определена как

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{z(t)}{z(0)}, \quad (3.3)$$

где  $z(t)$  это стохастическая траектория частицы, а  $z(0)$  - ее начальная координата. Эта величина содержит информацию о поведении частицы на больших временах. Положительный знак ляпуновской экспоненты позволяет нам сделать вывод, что частица стремится убежать на бесконечность. Напротив, отрицательная ляпуновская экспонента свидетельствует о локализации частицы около начала координат. Оставшаяся часть этой главы содержит вывод точного выражения для  $\lambda$  как функции  $I$  и  $\beta$  и обсуждение возможных приложений квадратичной модели. При изложении мы будем следовать работам [18; 21].

### 3.1 Статистика переменной $\sigma = v_z/z$ .

Для дальнейшего нам понадобится новая переменная

$$\sigma = \frac{v_z}{z}. \quad (3.4)$$

Мы будем использовать три ее простых свойства.

Во-первых,  $\sigma$  обращается в бесконечность в момент столкновения со стенкой, причем  $-\infty$  и  $+\infty$  для нее склеены. Действительно, легко видеть, что за мгновение до столкновения скорость частицы отрицательна, поэтому  $\sigma \rightarrow -\infty$ . Однако, сразу после столкновения скорость частицы направлена уже от стенки так что  $\sigma \rightarrow +\infty$ . Словом, множество значений переменной  $\sigma$  имеет замкнутую топологию.

Вторая важная особенность заключается в том, что эта переменная не чувствительна к неупругим граничным условиям на стенке. Условие (1.7) позволяет нам записать  $v(t_i + \delta t) = -\beta v(t_i - \delta t)$ , где  $z(t_i) = 0$  и  $\delta t \rightarrow +0$ . Как следствие мы получаем  $z(t_i + \delta t) = \beta z(t_i - \delta t)$ , а значит  $\sigma(t_i + \delta t) = -\sigma(t_i - \delta t)$ . Последнее равенство и означает, что  $\sigma$  не чувствует неупругости столкновений.

Наконец, третье свойство состоит в возможности написать замкнутое уравнение для функции плотности вероятности этой переменной

$$\partial_t P = \partial_\sigma [U' P] + \mu \gamma^2 \partial_\sigma^2 P, \quad (3.5)$$

в котором  $U(\sigma) = \gamma\sigma^2/2 + \sigma^3/3$ . Если первые два из указанных свойств универсальны, то есть не зависят от выбора модели для случайного поля скорости, то последнее возможно только благодаря квадратичной зависимости интенсивности флуктуаций от координаты.

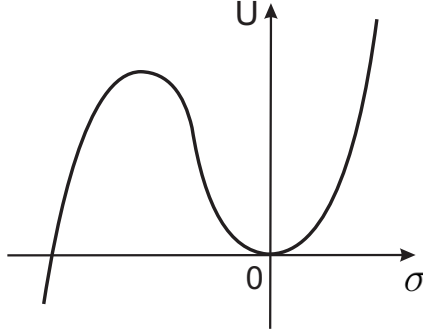


Рисунок 3.1 — Потенциал в уравнении (3.5).

С формальной точки зрения уравнение (3.5) описывает эволюцию функции распределения координаты броуновской частицы в метастабильном потенциале, изображенном на рисунке 3.1. В такой ситуации равновесного состояния нет, поскольку частица, помещенная в яму, обязательно преодолеет потенциальный барьер за счет тепловых флуктуаций и убежит на минус бесконечность. Здесь, однако, самое время вспомнить, что для переменной  $\sigma$  плюс и минус бесконечности склеены. В контексте используемой нами для наглядности аналогии с броуновским движением это означает, что всякий раз когда частица убегает на минус бесконечность, она неизбежно возвращается в яму из плюс бесконечности. В результате функция распределения  $P$  релаксирует с стационарному решению уравнения (3.5) с циркулирующим потоком вероятности

$$P(\sigma) = \frac{F}{\mu\gamma^2} e^{-U(\sigma)/\mu\gamma^2} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{U(\sigma')/\mu\gamma^2} d\sigma'. \quad (3.6)$$

Это неравновесное распределение нормируемо и реализуется для любого значения коэффициента восстановления  $\beta$ , поскольку, как уже было отмечено,  $\sigma$  не чувствует граничных условий на стенке.

Отметим, что существует обширная литература, посвященная уравнению (3.5). Оно, в частности, описывает квантовую частицу в случайном потенциале [51] и относительное движение двух частиц в хаотическом потоке [52–54] (о последнем приложении мы еще поговорим позднее). Известно, что стационарное

решение (3.6) соответствует минимуму производства энтропии [55] и является асимптотическим пределом любого начального распределения [54].

Поток вероятности  $F$  определяется из условия нормировки функции распределения (3.6)

$$F = \frac{I}{\sqrt{\pi\tau}} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4I^2}\right) \right]^{-1}, \quad (3.7)$$

и равен средней частоте столкновений частицы со стенкой в статистически стационарном состоянии. Это следует из того факта, что каждый раз, когда частица оказывается в начале координат,  $\sigma$  обращается в бесконечность. Теоретическое предсказание для частоты столкновений в зависимости от параметра инерции  $I$  вместе с соответствующими результатами численного моделирования для разных  $\beta$  представлены на рисунке 3.2. Этот график убедительно показывает, что частота столкновений не зависит от коэффициента восстановления скорости.

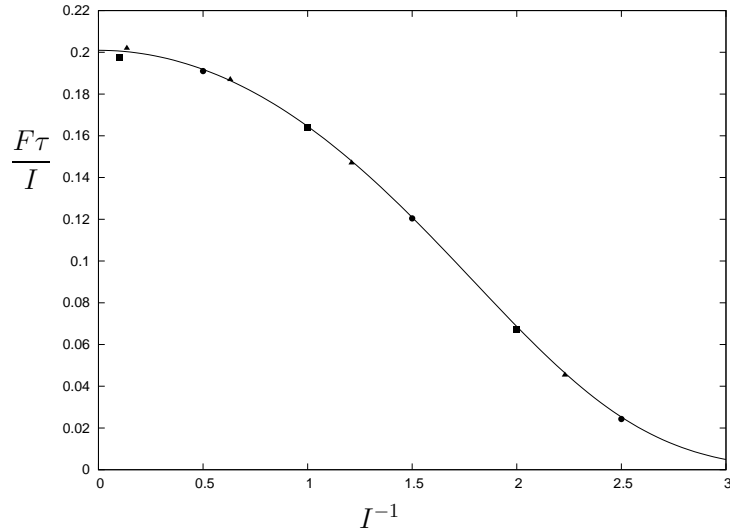


Рисунок 3.2 — Зависимость частоты столкновений частицы со стенкой от параметра инерции: теоретическое предсказание (сплошная линия) и результаты численного счета для  $\beta = 1$ , (○), 0.5 (■) и 0.1 (▲).



### 3.2 Вычисление ляпуновской экспоненты

Знание статистики вспомогательной переменной  $\sigma$  позволяет извлечь информацию касательно поведения координаты частицы. Из определения (3.4) и условия  $z(t_i + \delta t) = \beta z(t_i - \delta t)$  (здесь  $\delta t \rightarrow +0$ ) следует, что для любой заданной реализации случайного поля скорости координата частицы может быть представлена в виде

$$z(t) = z(0)\beta^{N(t)} \exp\left(\text{v. p.} \int_0^t \sigma(t') dt'\right), \quad (3.8)$$

где  $N(t)$  это число столкновений со стенкой, произошедших за время  $t$ . Интегрирование в смысле главного значения необходимо для моментов времени  $t_i$ , в которые  $z(t_i) = 0$  и поэтому  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ .

Подставляя формулу (3.8) в определение ляпуновской экспоненты (3.3), получаем

$$\lambda(\beta, I) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \text{v. p.} \int_0^t \sigma(t') dt' + \ln \beta \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N(t)}{t}. \quad (3.9)$$

Первый член в правой части последнего равенства это среднее по времени значение  $\sigma$ . При условии эргодичности среднее по времени сходится к среднему по реализациям  $\int \sigma P(\sigma) d\sigma$ , поэтому можно записать

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \text{v. p.} \int_0^t \sigma(t') dt' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} F \int_0^{+\infty} dx \frac{x - I^{-1}}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4I^2}\right). \quad (3.10)$$

Второй предел в правой части уравнения (3.9) есть ничто иное как средняя частота столкновений частицы со стенкой в статистически стационарной ситуации

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N(t)}{t} = F. \quad (3.11)$$

Таким образом, мы находим

$$\lambda(I, \beta) = \langle \sigma \rangle + \ln \beta F. \quad (3.12)$$

Поскольку  $\lambda(\beta = 1, I) = \langle \sigma \rangle$ , то можно переписать последнее выражение как

$$\lambda(\beta, I) = \lambda(1, I) + \ln \beta \cdot F(I). \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что эффект неупругости сводится к появлению аддитивной поправки к ляпуновской экспоненте, соответствующей случаю абсолютно упругих столкновений.

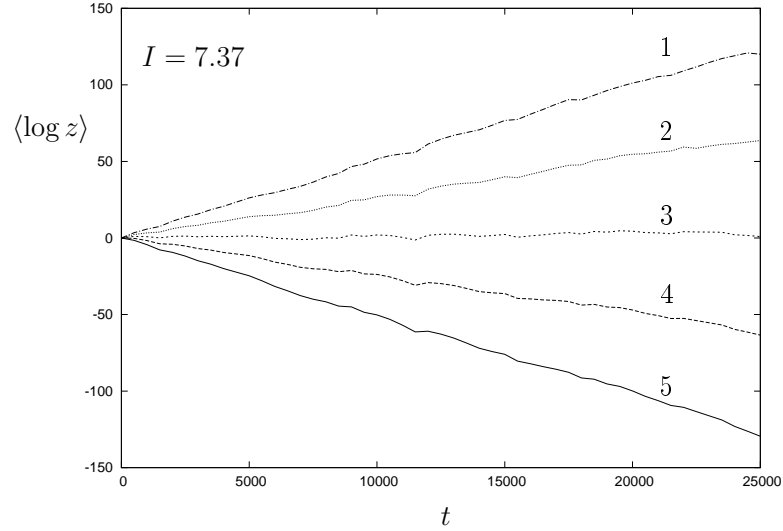


Рисунок 3.3 — Средний логарифм координаты частицы в численном счете как функция времени при фиксированном параметре инерции  $I = 7.37$  и разных значениях коэффициента восстановления скорости частицы: (1)  $\beta = 0.21$ , (2) 0.205, (3) 0.20, (4) 0.195 and (5) 0.19. Для каждого набора параметров усреднение производилось по 1000 реализаций случайного поля скорости.

### 3.3 Фазовая диаграмма перехода локализация-делокализация

На рисунке 3.3 представлены результаты численного моделирования движения частицы под действием случайной силы с квадратичным профилем интенсивности. При фиксированном параметре инерции  $I$  прямая линия, изображающая средний логарифм координаты частицы как функцию от времени, может иметь как положительный наклон, так и отрицательный, в зависимости от коэффициента восстановления скорости  $\beta$ . Смена знака наклона соответствует переходу локализация-делокализация.

Из формулы (3.13) следует, что кривая перехода в плоскости  $\beta - I$  определяется уравнением

$$\ln \beta(I) = -\frac{\lambda(I)}{F(I)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} dx \frac{x - I^{-1}}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4I^2}\right). \quad (3.14)$$

В пределе  $I \rightarrow \infty$  возникает уже знакомый нам порог неупругого коллапса

$$\beta_c = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right). \quad (3.15)$$

При  $\beta < \beta_c$  частица в среднем движется по направлению к стенке независимо от значения параметра инерции  $I$ . Отметим, что теоретическая кривая фазового перехода совпадает с кривой, полученной в результате численного моделирования, см. рисунок 3.4.

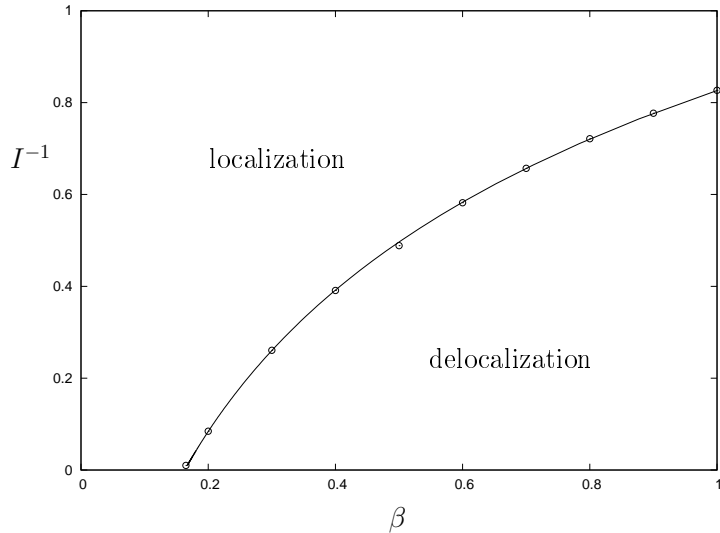


Рисунок 3.4 — Фазовая диаграмма перехода локализация-делокализация: теория (сплошная линия) и численный счет (о).

### 3.4 Приложения квадратичной модели

Изначально мы сформулировали квадратичную модель в контексте движения инерционных частиц в пристенной области случайного течения. Однако, остается не вполне ясным, какой конкретно физической реализации течения соответствует квадратичный профиль коэффициента турбулентной диффузии.

Если говорить о развитой гидродинамической турбулентности, то, как уже не раз отмечалось выше, в вязком пристенной подслое интересующий нас коэффициент диффузии ведет себя как  $D_{zz} \propto z^4$ , а пределах турбулентного пограничного слоя  $D_{zz} \propto z$ . Пример пристенного течения с квадратичной зависимостью  $D_{zz}$  от расстояния до стенки на данный момент нам неизвестен.

В тоже время, квадратичная модель имеет и другие приложения, не связанные с переносом частиц в потоке, ограниченном стенкой. О них мы и поговорим коротко в следующих двух подразделах.

### 3.4.1 Частицы в окрестности минимума интенсивности случайной силы

До сих пор, обсуждая неоднородную турбулентность, мы полагали, что неоднородность напрямую связана с наличием стенки. Возможна также ситуация, когда неоднородность возникает в отсутствии границ благодаря пространственной неоднородности накачки, возбуждающей турбулентность, как, например, в случае колмогоровского течения [56]. В зависимости от профиля интенсивности возбуждающей силы, возможны различные результирующие профили коэффициента турбулентной диффузии. В том числе, может реализоваться глубокий минимум, что и соответствует квадратичной модели. Более общо, можно говорить о движении частицы вблизи минимума интенсивности некоторой действующей на нее случайной силы, происхождение которой зависит от конкретной физической ситуации.

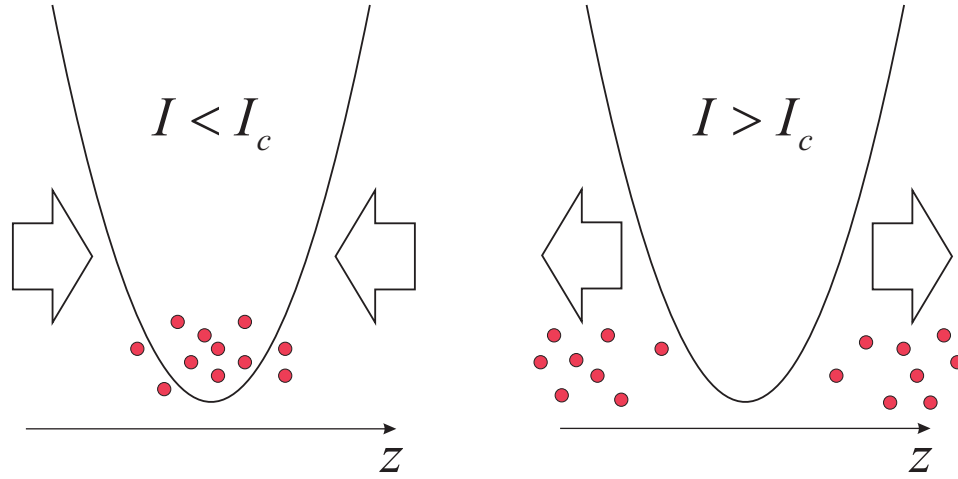


Рисунок 3.5 — Динамический фазовый переход локализация-делокализация для инерционных частиц в окрестности глубокого минимума интенсивности турбулентности.

Чтобы описать движение инерционной частицы в окрестности минимума турбулентности в неограниченном пространстве, мы снова должны обратиться к уравнению Фоккера-Планка (3.1), но теперь уже рассматривать его на всей оси  $z$ . Поскольку координата частицы может принимать отрицательные значения, то ляпуновская экспонента определена как

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{z(t)}{z(0)} \right|. \quad (3.16)$$

В силу симметрии ответ к нашей задаче совпадает с ответом для случая движения на полуоси  $z > 0$  с идеально упругой стенкой в начале координат, поэтому мы сразу можем записать

$$\lambda(I) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} F \int_0^{+\infty} dx \frac{x - I^{-1}}{\sqrt{x}} \exp \left( -\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4I^2} \right). \quad (3.17)$$

Полученная ляпуновская экспонента меняет знак с отрицательного на положительный, когда  $I$  переваливает через критическое значение  $I_c \approx 1.2$ . Таким образом, частицы с достаточно малым параметром инерции скапливаются в минимуме турбулентности, а сильно инерционные частицы убегают на бесконечность. Аккумуляция в минимуме это проявление хорошо известного турбофорического эффекта, в то время как делокализацию сильно инерционных частиц можно интерпретировать как обратный турбофорез, ранее никем не обсуждавшийся. Парадоксально, но несмотря на то, что турбофорез обязан сво-

им существованием именно инерционности частиц, слишком большая инерция играет против локализации! Качественно этот неожиданный результат можно объяснить, если вспомнить, что безразмерный параметр  $I$ , контролирующий обнаруженный нами переход локализация-делокализация, есть ничто иное как отношение характерной длины свободного пробега частицы к расстоянию до минимума. Мы видим, что делокализация имеет место для тех частиц, длина пробега которых больше расстояния до минимума. Область пониженной интенсивности турбулентности не может играть роль ловушки для таких частиц, поскольку они попросту баллистически пролетают сквозь нее.

Здесь необходимо сделать важное предостережение во избежание возможных недоразумений, связанных с ложными интерпретациями. Обычный (положительный) турбофорез проявляет себя в том, что в статистически стационарной ситуации максимумы концентрации частиц в системе конечного объема соответствуют минимумам турбулентности. Говоря об отрицательном турбофорезе, мы ни в коем случае не имеем в виду, что теперь максимумы равновесной концентрации будут приходиться на максимумы турбулентности. В конечной системе частицы с любым параметром инерции  $I$  в конечном счете концентрируются преимущественно в минимумах, просто с ростом  $I$  этот эффект становится все менее и менее ярко выражен. Отрицательный турбофорез это принципиально неравновесное явление убегания частиц из окрестности минимума, выведенное нами для формально неограниченного пространства. Для конечных систем этот эффект может наблюдаться на начальных этапах эволюции, предшествующих установлению стационарного распределения.

### 3.4.2 Кластеризация частиц в случайном течении

Другим приложением квадратичной модели является задача об относительном движении двух инерционных частиц на малом масштабе одномерного хаотического течения с однородной статистикой. Уравнения движения частиц

имеют вид

$$\frac{dz_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{v_1 - u(z_1, t)}{\tau}, \quad (3.18)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2 - u(z_2, t)}{\tau}. \quad (3.19)$$

Тогда расстояние между частицами  $z = z_2 - z_1$  и относительная скорость  $v = v_2 - v_1$  их движения эволюционируют согласно уравнениям

$$\frac{dz}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{v - \Delta u}{\tau} \quad (3.20)$$

где  $\Delta u = u(z_2, t) - u(z_1, t)$ . На масштабах много меньших характерного масштаба изменения скорости течения можно воспользоваться градиентным приближением  $\Delta u \approx s(t)z$ , где  $s = du/dz$ . Тогда

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - zs}{\tau} \quad (3.21)$$

Полагая, что градиент скорости коротко коррелирован во времени,  $\langle s(t_1)s(t_2) \rangle = 2\mu\delta(t_2 - t_1)$ , мы приходим к уравнению Фоккера-Планка (3.1) на совместную функцию распределения расстояния между частицами и их относительной скорости. Граничное условие (3.2) учитывает неупругие столкновения между частицами.

На больших временах эволюция расстояния между частицами определяется ляпуновской экспонентой  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln z(t)/z(0)$ . Положительная экспонента означает разбегание траекторий частиц, в то время как отрицательный знак свидетельствует о кластеризации. Случай абсолютно упругих столкновений ( $\beta = 1$ ) был рассмотрен в работах [52;57], авторы которых обнаружили переход кластеризация-разбегание, аналогичный переходу локализация-делокализация для динамики одной частицы вблизи минимума турбулентности, описанному в предыдущем пункте. Анализ представленный нами в этой главе позволяет заключить, что неупругие столкновения ведут к появлению отрицательной поправки к ляпуновской экспоненте, увеличивая критический параметр инерции, соответствующий фазовому переходу. Если  $\beta \leq \beta_c$ , то имеет место явление неупругого коллапса: кластеризация происходит при любом значении параметра инерции частиц.

### 3.5 Заключение

Мы рассмотрели движение инерционной частицы в дельта-коррелированном во времени случайном течении с квадратичным профилем коэффициента турбулентной диффузии. В этой модели локализационные свойства частицы зависят от двух безразмерных параметров: степени инерционности  $I$  и коэффициента восстановления скорости частицы  $\beta$  при столкновении со стенкой. Нами была построена фазовая диаграмма перехода локализация-делокализация в плоскости  $\beta - I$ . Примечательно, что если коэффициент восстановления скорости меньше критического значения  $\beta_c = \exp(-\pi/\sqrt{3}) \approx 0,163$ , то частица локализована при любом значении параметра  $I$ . Эти результаты находятся в отличном согласии с прямым численным моделированием движения частицы в случайном поле скорости.

Рассмотренная модель позволила нам описать переход локализация-делокализация для инерционных частиц в окрестности одномерного минимума турбулентности в неограниченном пространстве и кластеризационный переход для относительного движения пары неупруго сталкивающихся частиц в одномерном случайном поле скорости.



## Глава 4. Дисперсия частиц в приземном атмосферном слое

Перенос частиц воздушными потоками в приземном атмосферном слое, непосредственно связанном с жизнью человека и процессами в биосфере, представляет огромный интерес для многих дисциплин, от метеорологии и экологии до ботаники. В зависимости от контекста термин частицы может относиться к пыли, песчинкам, дождевым каплям, снежинкам, аэрозольным частицам, спорам, пыльце, семенам и т.д. Описание движения частиц в воздухе требует учета турбулентной диффузии, гравитационного осаждения и переноса средним ветром. Понятно, что ситуация крайне неоднородна и анизотропна, поскольку вблизи земной поверхности и средняя скорость ветра и коэффициенты турбулентной диффузии существенно зависят от высоты. Большинство имеющихся на данный момент теоретических работ по этой теме посвящены стационарным профилям концентрации, возникающим в присутствии постоянных источников частиц. Мы же рассмотрим временную эволюцию поля концентрации примеси, вброшенной в начальный момент времени на некоторой высоте в пределах приземного слоя. Целью анализа будет выяснить, как распределение примеси в вертикальном направлении зависит от времени, а также как быстро и на каком расстоянии от места вброса происходит осаждение на земную поверхность.

### 4.1 Уравнение движения частицы

Мы рассматриваем частицы, плотность  $\rho_0$  которых много больше плотности воздуха  $\rho$ . Кроме того, мы будем считать, что частицы настолько малы, так что поток вокруг них вязкий. Это означает, во-первых, что диаметр  $d$  частиц много меньше колмогоровского масштаба  $\eta$  для атмосферной турбулентности. Во-вторых, эффективное число Рэйнольдса, посчитанное через характерную скорость частицы относительно воздуха и ее диаметр, много меньше единицы. Взаимодействием между частицами и их обратным влиянием на турбулентность можно пренебречь при условии, что объемная и массовая доли примесной фазы всюду малы. При этих предположениях уравнение движения

частицы принимает вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}, t)}{\tau} + \vec{g}, \quad (4.1)$$

где  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  это координата и скорость частицы,  $\tau$  - стоксово время релаксации,  $\vec{u}$  - турбулентное поле скорости воздуха, а  $\vec{g}$  - ускорение свободного падения. Данное уравнение отличается от уравнения (1.6), положенного в основу теоретического анализа во всех предыдущих главах, только наличием гравитационного члена. Предположим далее, что время релаксации скорости частицы много меньше времени корреляции турбулентности. Тогда можно пренебречь ускорением частицы в уравнении (4.1) и перейти к более простому уравнению

$$\vec{v} = \vec{u}(\vec{r}, t) + \vec{g}\tau, \quad (4.2)$$

которое описывает динамику на временах  $t \gg \tau$ . В этом приближении частица следует за потоком воздуха с поправкой на гравитационное осаждение.

Для аэрозолей, пыли и частиц биологического происхождения, как правило,  $d < 0.1$  мм и  $500 < \rho_0 < 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Колмогоровский масштаб атмосферной турбулентности в приземном слое порядка  $\eta \approx 1$  мм, а плотность воздуха  $\rho \simeq 1.23$  кг/м<sup>3</sup>. Таким образом, предположения  $\rho_0/\rho \gg 1$  и  $d/\eta \ll 1$ , заложенные в уравнение динамики (4.1), вполне оправданы. Далее, вязкость воздуха равна  $\nu = 0.15$  см<sup>2</sup>/с, поэтому стоксово время релаксации скорости частиц может быть оценено как  $\tau < 0.05$  с. То есть, даже для самых тяжелых из рассматриваемых нами частиц, время релаксации скорости не превосходит колмогоровское время  $\tau_\eta \approx 0.07$  с, характеризующее флуктуации на самом малом масштабе турбулентного движения. Поэтому инерционность частиц действительно не играет роли для процесса их взаимодействия с типичными флуктуациями скорости воздуха и можно использовать уравнение (4.2).

## 4.2 Уравнение турбулентной диффузии

Мы будем интересоваться процессами атмосферной дисперсии на относительно малых пространственных масштабах, в пределах которых сферичность Земли не важна. Введем декартову систему координат с осью  $z$ , направленной

вертикально вверх, т.е. параллельно линиям напряженности гравитационного поля. Ось  $x$  указывает на направление среднего ветра, которое считается неизменным на интересующих нас масштабах времени. Исследование дисперсии частиц в горизонтальном направлении поперек среднего ветра находится за рамками этой работы, так что наша модель эффективно двумерная. Считая флуктуирующую компоненту скорости воздуха коротко-коррелированной во времени, из стохастического уравнения динамики (4.2) можно легко получить уравнение Фоккера-Планка для функции плотности вероятности координаты частицы

$$\partial_t n = \partial_z [D_{zz}(z) \partial_z n] + g\tau \partial_z n - U_x(z) \partial_x n. \quad (4.3)$$

Это же уравнение описывает поле концентрации частиц, если мы интересуемся распределением большого числа одинаковых частиц в пространстве. Здесь  $D_{zz}$  это коэффициент турбулентной диффузии для вертикального направления, а  $U_x$  это средняя (горизонтальная) компонента поля скорости. Молекулярная диффузия пренебрежимо мала в сравнении с эффектом турбулентной диффузии, поэтому уравнение (4.3) не содержит соответствующего ей вклада. Кроме того, мы пренебрегаем турбулентной диффузией в горизонтальном направлении на фоне переноса средним ветром.

### 4.2.1 Особенности турбулентности в приземном слое

Теперь обсудим характер зависимости скорости ветра и коэффициента турбулентной диффузии в приземном атмосферном слое от высоты над Землей. На физическом уровне, приземный слой это турбулентный пограничный слой, в пределах которого пульсационная компонента турбулентного движения не зависит от расстояния до стенки, в то время как характерный размер вихрей определяется как раз этим расстоянием [4; 5]. Это ведет к линейному росту коэффициента турбулентной диффузии с высотой

$$D_{zz}(z) = \mu z, \quad (4.4)$$

с угловым коэффициентом  $\mu = \kappa u_*$ , где  $u_*$  это характерная пульсационная скорость, а  $\kappa \approx 0.4$  - постоянная Кармана.

Скорость среднего ветра в турбулентном пограничном слое тоже зависит от высоты и описывается хорошо известным логарифмическим профилем

$$U_x(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z + z_*}{z_*}, \quad (4.5)$$

где  $z_*$  это характерная высота шероховатостей подстилающей поверхности. К сожалению, теоретический анализ уравнения турбулентной диффузии с таким профилем средней скорости наталкивается на значительные технические трудности. Поэтому, следуя обычной практике, мы будем использовать степенную аппроксимацию

$$U_x(z) = bz^m, \quad (4.6)$$

где  $b = u_* C_p / z_*^m$  и для нейтральных атмосферных условий обычно принимают значения  $m = 1/7$  и  $C_p = 6$  [58].

Формулы (4.4) и (4.5) соответствуют идеализированной постановке задачи с бесконечной плоской стенкой, влияние которой на течение распространяется на бесконечно далекие расстояния. На практике толщина приземного слоя конечна и меняется в зависимости от скорости ветра, степени шероховатости земной поверхности и устойчивости стратификации. Обычно область логарифмического профиля простирается от земной поверхности до высоты 50 – 100 м, реже до 200 – 250 м.

## 4.2.2 Радиационное граничное условие

Чтобы свести задачу о рассеянии частиц в атмосфере к четко поставленной задаче математической физики, необходимо задать граничное условие при  $z = 0$ . Благодаря осадению земная поверхность играет роль стока для поля концентрации переносимых воздухом частиц. Кажется физически правдоподобным, что независимо от конкретных деталей взаимодействия между частицами и поверхностью, темп осадения должен быть пропорционален концентрации частиц вблизи поверхности (смотрите более подробное обсуждение этого вопро-

са в [59;60]). Приравнивая поток осаждения и поток, полученный из уравнения (4.3), мы приходим к так называемому радиационному граничному условию

$$[D_{zz}(z)\partial_z n + g\tau n]_{z=r} = [v_d n]_{z=r}, \quad (4.7)$$

где  $v_d$  это феноменологическая скорость осаждения, а  $r$  это некоторая контрольная высота, на которой измеряется поток. Случаи  $v_d = 0$  и  $v_d \rightarrow \infty$  соответствуют абсолютно отражающим и абсолютно поглощающим граничным условиям. В промежуточном случае  $0 < v_d < \infty$  мы имеем дело с частично поглощающей поверхностью. Здесь предполагается, что, однажды поглотившись на границе, частица в область  $z > 0$  уже не возвращается. Таким образом, наша модель не учитывает возможное повторное вовлечение в движение уже осевших частиц [61].

Несколько слов касательно контрольной высоты  $r$ . С формальной точки зрения, поскольку в уравнении (4.3) коэффициент возле старшей производной обнуляется при  $z = 0$ , то мы должны ставить граничное условие на некоторой промежуточной высоте, где коэффициент диффузии (4.4) еще не ноль. Альтернативный подход состоит во введении вспомогательной положительной поправки  $D_0$  к коэффициенту диффузии  $D_{zz}$ , что физически оправдано, поскольку, как известно, в случае достаточно шероховатой подстилающей поверхности особенности турбулентного транспорта воспроизводятся лучше, если использовать в расчетах ненулевое значение коэффициента диффузии на уровне земли [62]. С технической точки зрения, эти два подхода эквивалентны, поскольку, производя сдвиг  $z \rightarrow z + r$  в уравнении (4.3), мы можем перейти к коэффициенту диффузии  $D_{zz}(z) \rightarrow \mu z + D_0$ , где  $D_0 = \mu r$ , и граничному условию (4.7), которое теперь уже будет ставиться при  $z = 0$ . Бóльшая часть наших результатов выражается в квадратурах для произвольного значения  $r$ . В конце вычислений мы возьмем предел  $r \rightarrow 0$  и окажется, что при этом скорость осаждения  $v_d$  выпадает из всех ответов! Причина этой особенности рассматриваемой нами модели обсуждается ниже.

Заметим, что уравнение (4.3) и различные его обобщения составляют основу так называемой  $K$ -модели, уже долгое время используемой для теоретического описания атмосферной дисперсии [5]. Стационарные решения этого уравнения с неоднородными по высоте коэффициентами  $D_{zz}$  и  $U_x$ , определяемыми формулами (4.4) и (4.6), много раз обсуждались в литературе на примере

рассеяния частиц от линейных [63–65] и поверхностных [66; 67] источников. О нестационарных процессах переноса, описываемых  $K$ -моделью, известно намного меньше, несмотря на то, что соответствующие уравнения сформулированы давно. Анализ, проделанный в работе [25], давшей материал для настоящей главы, заполняет этот пробел.

### 4.3 Зависимость числа частиц в воздухе от времени

Предполагаемая однородность статистики турбулентности в горизонтальном направлении (подразумевающую однородность свойств подстилающей поверхности) позволяет исключить эффекты горизонтального переноса и перейти к редуцированному описанию в терминах суммарной концентрации частиц на заданной высоте  $\tilde{n}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,z,t) dx$

$$\partial_t \tilde{n} = \partial_z [D_{zz}(z) \partial_z \tilde{n}] + g\tau \partial_z \tilde{n}. \quad (4.8)$$

Таким образом, распределение частиц в вертикальном направлении может быть описано независимо от их горизонтального движения.

Рассмотрим процесс рассеяния небольшого облака частиц, выпущенных в начальный момент времени на высоте  $z_0$ . За счет осаждения на земную поверхность количество примеси в воздухе будет убывать со временем. Для произвольного момента времени число частиц, оставшихся в атмосфере, можно записать как  $N(t) = \int_0^\infty \tilde{n}(z,t) dz$ . Вычислению этой величины и посвящен данный подраздел.

Мы должны решить уравнение турбулентной диффузии (4.8) совместно с граничным условием (4.7) и начальным условием  $\tilde{n}(z,0) = N_0 \delta(z - z_0)$ , где  $N_0$  это исходное число частиц в облаке. Как было отмечено выше, вместо использования ненулевой контрольной высоты  $r$  в граничном условии, удобно ввести постоянную добавку  $D_0 = \mu r$  к коэффициенту диффузии. Тогда транспортное уравнение запишется как

$$\partial_t \tilde{n} = \mu \partial_z [(z + r) \partial_z \tilde{n}] + g\tau \partial_z \tilde{n}, \quad (4.9)$$

а граничное условие примет вид  $[\mu(z+r)\partial_z\tilde{n} + g\tau\tilde{n}]_{z=0} = [v_d n]_{z=0}$ .

Произведя преобразование Лапласа

$$\tilde{\theta}_s(z) = \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \tilde{n}(z,t), \quad (4.10)$$

мы получаем обычное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\mu\partial_z[(z+r)\partial_z\tilde{n}_s] + g\tau\partial_z\tilde{n}_s - s\tilde{n}_s = -N_0\delta(z-z_0), \quad (4.11)$$

сопровожаемое граничным условием  $[\mu(z+r)\partial_z\tilde{n}_s + g\tau\tilde{n}_s]_{z=0} = [v_d\tilde{n}_s]_{z=0}$ .

Перейдем к новой переменной  $\xi = \sqrt{z+r}$  и подставим  $\tilde{n}_s = \xi^{-\gamma}f$ , где  $\gamma = g\tau/\mu$  это так называемое число Фруда [68], показывающее насколько важен эффект гравитационного осаждения на фоне турбулентного транспорта. При  $\xi \neq \sqrt{z_0+r}$  функция  $f$  удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя

$$\mu\xi^2\frac{d^2f}{d\xi^2} + \mu\xi\frac{df}{d\xi} - (\gamma^2 + \frac{4s}{\mu}\xi^2)f = 0. \quad (4.12)$$

Следовательно, два линейно-независимых решения уравнения (4.11) при  $z \neq z_0$  могут быть выбраны следующим образом

$$\tilde{n}_{s1}(z) = (z+r)^{-\gamma/2}\mathcal{I}_\gamma(2\sqrt{s(z+r)}/\mu), \quad (4.13)$$

$$\tilde{n}_{s2}(z) = (z+r)^{-\gamma/2}\mathcal{K}_\gamma(2\sqrt{s(z+r)}/\mu), \quad (4.14)$$

где  $\mathcal{I}_\gamma$  и  $\mathcal{K}_\gamma$  это модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, соответственно [69].

Далее легко увидеть, что функции

$$\tilde{n}_s(z) = \begin{cases} A_1\tilde{n}_{s1}(z) + A_2\tilde{n}_{s2}(z), & 0 \leq z \leq z_0, \\ A_3\tilde{n}_{s2}(z), & z \geq z_0, \end{cases} \quad (4.15)$$

с коэффициентами

$$A_1 = \frac{2N_0}{\mu}(z_0+r)^{\gamma/2}\mathcal{K}_\gamma\left(2\sqrt{\frac{s(z_0+r)}{\mu}}\right), \quad (4.16)$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{\frac{sr}{\mu}} \mathcal{I}'_\gamma \left( 2\sqrt{\frac{sr}{\mu}} \right) - \left( \frac{v_d}{\mu} - \frac{\gamma}{2} \right) \mathcal{I}_\gamma \left( 2\sqrt{\frac{sr}{\mu}} \right)}{\left( \frac{v_d}{\mu} - \frac{\gamma}{2} \right) \mathcal{K}_\gamma \left( 2\sqrt{\frac{sr}{\mu}} \right) - \sqrt{\frac{sr}{\mu}} \mathcal{K}'_\gamma \left( 2\sqrt{\frac{sr}{\mu}} \right)} A_1, \quad (4.17)$$

$$A_3 = \frac{\mathcal{I}_\gamma \left( 2\sqrt{\frac{s(z_0+r)}{\mu}} \right)}{\mathcal{K}_\gamma \left( 2\sqrt{\frac{s(z_0+r)}{\mu}} \right)} A_1 + A_2, \quad (4.18)$$

удовлетворяют уравнению (4.11) совместно с граничным условием  $[\mu(z+r)\partial_z \tilde{n}_s + g\tau \tilde{n}_s]_{z=0} = [v_d \tilde{n}_s]_{z=0}$ .

Обратное преобразование Лапласа дает суммарный поток частиц на поверхности  $\tilde{j}_z(t) = -[v_d \tilde{n}]_{z=0}$  в виде контурного интеграла

$$\begin{aligned} \tilde{j}_z(t) &= -\frac{v_d}{2\pi i} \int_C ds e^{st} \left( A_1 \tilde{\theta}_{s1}(0) + A_2 \tilde{\theta}_{s2}(0) \right) = \\ &= -\frac{N_0 v_d}{2\pi i \mu} \int_C ds e^{st} \left( 1 + \frac{z_0}{r} \right)^{\gamma/2} \frac{\mathcal{K}_\gamma(2\sqrt{s(z_0+r)/\mu})}{\left( \frac{v_d}{\mu} - \frac{\gamma}{2} \right) \mathcal{K}_\gamma(2\sqrt{sr/\mu}) - \sqrt{\frac{sr}{\mu}} \mathcal{K}'_\gamma(2\sqrt{sr/\mu})}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Полученное выражение значительно упрощается при  $r \rightarrow 0$

$$\tilde{j}_z(t) = -\frac{N_0}{i\pi\Gamma(\gamma)} \int_C ds e^{st} \left( \frac{sz_0}{\mu} \right)^{\gamma/2} \mathcal{K}_\gamma \left( 2\sqrt{\frac{sz_0}{\mu}} \right). \quad (4.20)$$

Обратите внимание, что скорость осаждения  $v_d$  выпадает из ответа в этом пределе.

Для аналитического продолжения подынтегральной функции в формуле (4.20) на комплексную плоскость введем разрез на отрицательной части действительной оси и "посадим" контурный интеграл на берега этого разреза. В итоге получим

$$\begin{aligned} \tilde{j}_z(t) &= -\frac{N_0}{i\pi\Gamma(\gamma)} \left( \frac{z_0}{\mu} \right)^{\gamma/2} \int_0^\infty s^{\gamma/2} e^{-st} [e^{i\pi\gamma/2} \mathcal{K}_\gamma(2i\sqrt{sz_0/\mu}) - \\ &\quad - e^{-i\pi\gamma/2} \mathcal{K}_\gamma(-2i\sqrt{sz_0/\mu})] ds = -\frac{N_0}{\Gamma(\gamma)} \frac{z_0^\gamma}{\mu^{\gamma} t^{\gamma+1}} \exp\left(-\frac{z_0}{\mu t}\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Этот результат проиллюстрирован на рисунке 4.1b для разных значений числа Фруда  $\gamma$ . Легко показать, что интенсивность осаждения максимальна в момент



времени

$$t_m = \frac{z_0}{(\gamma + 1)\mu}. \quad (4.22)$$

Поток осаждения  $\tilde{j}_z$  и число частиц  $N$  в воздухе очевидно связаны соотношением  $\tilde{j}_z = dN/dt$ , а значит

$$N(t) = \frac{N_0}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{z_0/\mu t} \xi^{\gamma-1} e^{-\xi} d\xi. \quad (4.23)$$

Отношение  $p(t) = N(t)/N_0$  можно интерпретировать как вероятность того, что частица, выпущенная на высоте  $z_0$ , не осела на земную поверхность вплоть до момента времени  $t$ . Поведение функции  $p(t)$  для разных значений параметра  $\gamma$  показано на рисунке 4.1a.

Из (4.23), мы видим, что на больших временах число частиц спадает по степенному закону:  $N(t) \propto t^{-\gamma}$ . Среднее время осаждения  $T$  равно

$$T = - \int_0^\infty t \frac{dp}{dt} dt = \frac{\Gamma(\gamma - 1) z_0}{\Gamma(\gamma) \mu}, \quad (4.24)$$

при условии  $\gamma > 1$ , и бесконечно, если  $\gamma \leq 1$ .

#### 4.4 Поверхностная плотность осажденного материала

В предыдущем подразделе мы нашли, как быстро осаждаются частицы. Теперь поставим вопрос о том, как далеко от точки выброса происходит осаждение. Оказывается возможным определить результирующую поверхностную плотность  $\sigma(x)$  осажденного материала. Эта величина определена как полное число осевших частиц на единицу длины в горизонтальном направлении, то есть

$$\sigma(x) = - \int_0^{+\infty} j_z(x, z=0, t) dt, \quad (4.25)$$

где  $j_z = -D_{zz}(z)\partial_z n - g\tau n$  это вертикальная компонента потока частиц.

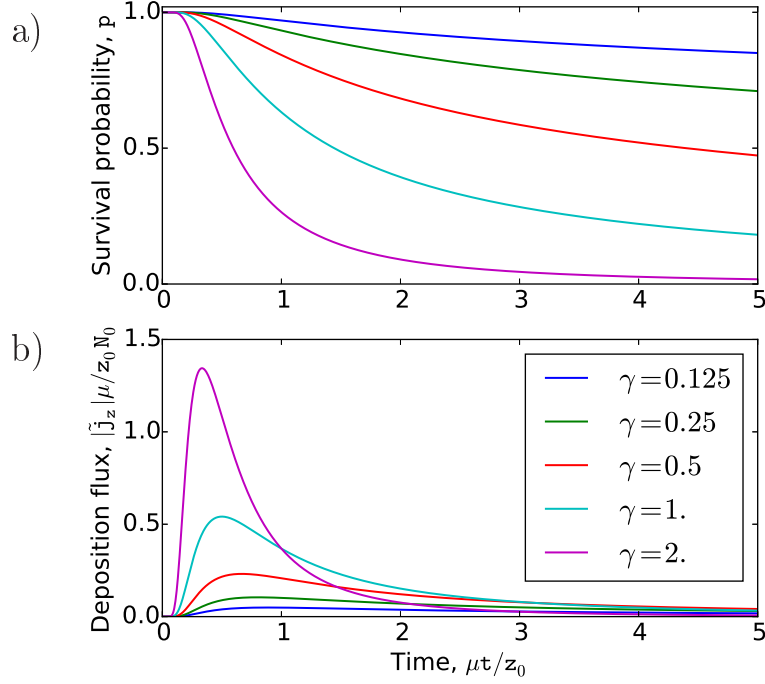


Рисунок 4.1 — а) вероятность неосаждения  $p(t)$  для тяжелой частицы, находившейся изначально на высоте  $z_0$  над поверхностью Земли; б) суммарный поток осаждения  $\tilde{j}_z(t)$  на поверхности Земли.

Запишем транспортное уравнение (4.3) со степенным профилем среднего ветра (4.6) и постоянной поправкой к коэффициенту турбулентной диффузии

$$\partial_t n = \mu \partial_z [(z+r) \partial_z n] + g\tau \partial_z n - bz^m \partial_x n. \quad (4.26)$$

Начальное и граничное условия гласят  $n(x, z, 0) = N_0 \delta(x) \delta(z - z_0)$  и  $[\mu(z+r) \partial_z n + g\tau n]_{z=0} = [v_d n]_{z=0}$ . Мы можем переписать выражение (4.25) в виде

$$\sigma(x) = -J_z(x, z=0), \quad (4.27)$$

где  $J_z = -\mu(z+r) \partial_z \mathcal{N} - g\tau \mathcal{N}$  это поток для проинтегрированной по времени концентрации  $\mathcal{N}(x, z) = \int_0^\infty n(x, z, t) dt$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\mu \partial_z [(z+r) \partial_z \mathcal{N}] n + g\tau \partial_z \mathcal{N} - bz^m \partial_x \mathcal{N} = -N_0 \delta(x) \delta(z - z_0), \quad (4.28)$$

с граничным условием  $[\mu(z+r) \partial_z \mathcal{N} + g\tau \mathcal{N}]_{z=0} = [v_d \mathcal{N}]_{z=0}$ .

Далее, выполним преобразование Лапласа по переменной  $x$  для функции  $\mathcal{N}(x, z)$

$$\mathcal{N}_s(z) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \mathcal{N}(x, z) dx. \quad (4.29)$$

Это преобразование ведет к следующему неоднородному дифференциальному уравнению на  $\mathcal{N}_s(z)$

$$\mu \partial_z [(z+r) \partial_z \mathcal{N}_s] + g\tau \partial_z \mathcal{N}_s - sbz^m \mathcal{N}_s = -N_0 \delta(z - z_0). \quad (4.30)$$

В области  $0 \leq z \leq z_0$  решение этого уравнения при условии  $[\mu(z+r) \partial_z \mathcal{N}_s + g\tau \mathcal{N}_s]_{z=0} = [v_d \mathcal{N}_s]_{z=0}$  дает

$$\tilde{\mathcal{N}}_s(z) = B_1 \mathcal{N}_{s1}(z) + B_2 \mathcal{N}_{s2}(z), \quad (4.31)$$

где

$$\mathcal{N}_{s1}(z) = (z+r)^{-\gamma/2} \mathcal{I}_{\gamma_m} \left( 2 \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{(z+r)^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} \right), \quad (4.32)$$

$$\mathcal{N}_{s2}(z) = (z+r)^{-\gamma/2} \mathcal{K}_{\gamma_m} \left( 2 \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{(z+r)^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} \right), \quad (4.33)$$

$$B_1 = \frac{2N_0}{(m+1)\mu} (z_0+r)^{\gamma/2} \mathcal{K}_{\gamma_m} \left( 2 \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{(z_0+r)^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} \right), \quad (4.34)$$

$$B_2 = \frac{r^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \mathcal{I}'_{\gamma_m} \left( 2 \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{r^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} \right) - \left( \frac{v_d}{\mu} - \frac{\gamma}{2} \right) \mathcal{I}_{\gamma_m} \left( 2 \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{r^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} \right)}{\left( \frac{v_d}{\mu} - \frac{\gamma}{2} \right) \mathcal{K}_{\gamma_m} \left( 2 \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{r^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} \right) - r^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \mathcal{K}'_{\gamma_m} \left( 2 \sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{r^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} \right)} B_1, \quad (4.35)$$

и  $\gamma_m = \gamma/(m+1)$ .

Применим теперь обратное преобразование Лапласа к решению (4.31) и подставим результат в формулу (4.27). Это дает поверхностную плотность ча-

стиц в виде контурного интеграла в комплексной плоскости

$$\sigma(x) = \frac{v_d N_0}{2\pi i} \int_C \frac{e^{sx} \left(1 + \frac{z_0}{r}\right)^{\gamma/2} \mathcal{K}_{\gamma_m} \left(2\sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{(z_0+r)^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}\right)}{\left(v_d - \frac{\mu\gamma}{2}\right) \mathcal{K}_{\gamma_m} \left(2\sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{r^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}\right) - r^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\mu bs} \mathcal{K}'_{\gamma_m} \left(2\sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{r^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}\right)} ds, \quad (4.36)$$

который в пределе  $r \rightarrow 0$  принимает вид

$$\sigma(x) = \frac{N_0 z_0^{\gamma/2} b^{\gamma_m/2}}{\mu^{\gamma_m/2} (m+1)^{\gamma_m} \Gamma(\gamma_m) \pi i} \int_C e^{sx} s^{\gamma_m/2} \mathcal{K}_{\gamma_m} \left(2\sqrt{\frac{bs}{\mu}} \frac{z_0^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}\right) ds. \quad (4.37)$$

Снова происходит замечательное сокращение скорости осаждения  $v_d$ . Как и в предыдущем подразделе мы вводим разрез вдоль отрицательной полуоси действительных чисел и деформируем контур интегрирования  $C$  таким образом, чтобы он попал на берега этого разреза. После этого получаем окончательный ответ

$$\sigma(x) = N_0 \left[ \frac{(m+1)^2 \mu}{bz_0^{m+1}} \right]^{-\frac{\gamma}{m+1}} \frac{x^{-\frac{\gamma}{m+1}-1}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{m+1}\right)} \exp\left(-\frac{bz_0^{m+1}}{(m+1)^2 \mu x}\right). \quad (4.38)$$

Легко проверить, что выполняется условие сохранения массы  $\int_0^\infty \sigma(x) dx = N_0$ . Поверхностная плотность осажденных частиц тождественно равна нулю при  $x \leq 0$ , поскольку наша модель не учитывает турбулентную диффузию в горизонтальном направлении. Из уравнения (4.38) мы находим, что пик поверхностной плотности  $\sigma(x)$  находится на расстоянии

$$x_m = \frac{bz_0^{m+1}}{(m+1)(\gamma+m+1)\mu} \quad (4.39)$$

от того места, где частицы были вброшены в атмосферу, а среднее расстояние, на которое уносится частица равно

$$X = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty x \sigma(x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{m+1} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{m+1}\right)} \frac{bz_0^{m+1}}{(m+1)^2 \mu}, \quad (4.40)$$

при условии  $\gamma > m+1$ , и бесконечно в случае противоположного неравенства.

Формула (4.38) имеет такую же структуру, что и классический результат Раундса и Годсона для профиля интенсивности потока осаждения в стационарной задаче, где частицы вбрасываются постоянным линейным источником [63; 64]. Примечательно, в этих работах скорость осаждения  $v_d$  была выбрана равной скорости гравитационной седиментации  $g\tau$ , что соответствует занулению турбулентной компоненты потока при  $z = 0$ . Наш анализ показывает, что результат (4.38) универсален (т.е. не зависит от  $v_d$ ), в пределе когда контрольная высота  $r$  в граничном условии (4.7) стремится к нулю.

## 4.5 Нестационарное распределение концентрации по высоте

Анализ, проведенный в двух предыдущих подразделах, убедительно показал, что характеристики процесса осаждения частиц в рамках используемой нами модели не зависят от скорости осаждения  $v_d$  в пределе  $r \rightarrow 0$ . Формальное объяснение этого результата состоит в том, что для уравнения (4.8) точка  $z = 0$ , в которой коэффициент диффузии (1.5) обнуляется, неизбежно является поглощающей, см. например [70]. По этой причине, когда мы переходим к пределу  $r \rightarrow 0$ , эффект любого граничного условия становится неотличим от эффекта абсолютно поглощающей стенки: попадая с единичной вероятностью за конечное время в точку  $z = 0$ , частицы уже не могут вернуться в область  $z > 0$ . Это позволяет заключить, что существует универсальное решение уравнения (4.8) с несохраняющейся нормировкой, в которое переходят все его решения с регуляризованным коэффициентом диффузии  $D_{zz}(z) = \mu(z+r)$  в пределе  $r \rightarrow 0$  независимо от значения  $v_d$ . Действительно, как легко проверить, следующее нестационарное распределение

$$\tilde{n}(z,t) = \frac{N_0}{\mu t} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\gamma/2} \exp\left(-\frac{z+z_0}{\mu t}\right) \mathcal{I}_\gamma\left(\frac{2\sqrt{zz_0}}{\mu t}\right), \quad (4.41)$$

это точное решение уравнения (4.8), удовлетворяющее дельта-функциональному начальному условию  $\tilde{n}(z,0) = N_0\delta(z-z_0)$ . Распределение (4.41) не сохраняет полное число частиц и его интегрирование по  $z$  от 0 до  $+\infty$  дает в точности формулу (4.23). В книге [70] это решение получено для частного случая  $\gamma = 1$ , а в [5]

приведен хорошо известный ответ для пассивного скаляра,  $\gamma = 0$ . Отношение  $\tilde{n}(z,t)/N_0$  есть плотность вероятности того, что частица, начавшая движение с высоты  $z_0$ , находится на высоте  $z$  в момент времени  $t$ , см. рисунок (4.2).

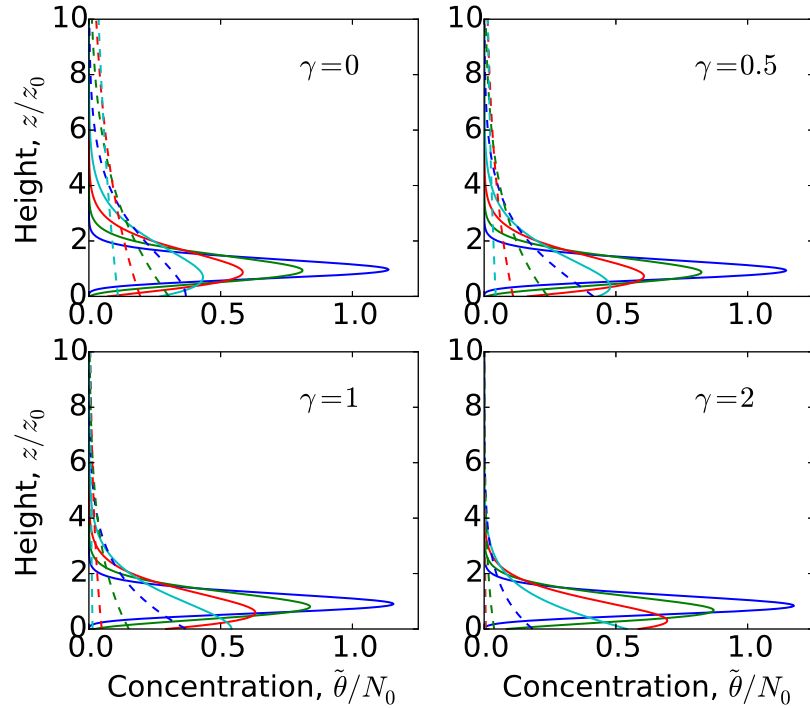


Рисунок 4.2 — Вертикальный профиль концентрации частиц, находившихся изначально на высоте  $z_0$  над землей, для различных моментов времени:

$$\mu t/z_0 = 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2 \text{ и } 2^3.$$

## 4.6 Заключение

В этой главе мы обсудили рассеяние примесных частиц в приземном атмосферном слое. Эта проблема давно привлекает интерес исследователей в области экологии, метеорологии, биологии и многих других. Используемая нами статистическая модель базируется на двумерном транспортном уравнении и учитывает турбулентную диффузию в вертикальном направлении, перенос средним горизонтальным ветром и гравитационную седиментацию. В отличие от большинства более ранних теоретических работ в литературе, посвященной атмосферной дисперсии, мы сфокусировали внимание на нестационарном случае. А именно, были рассмотрены процессы рассеяния и осаждения на землю

частиц, изначально выпущенных на определенной высоте в пределах приземного слоя. Нами было получено точное нестационарное решение уравнения на распределение концентрации частиц в вертикальном направлении. Кроме того, мы установили, по какому закону число частиц в воздухе убывает во времени благодаря осаждению на земную поверхность и как ведет себя результирующая поверхностная плотность осажденного материала в подветренном направлении.

Отдельно хотелось бы подчеркнуть, что обнаруженная здесь нечувствительность ответов, полученных в пределе нулевого коэффициента турбулентной диффузии на уровне земли, к скорости осаждения  $v_d$ , по-видимому, никем не отмечалась ранее.

## Заключение

Итак, нами была рассмотрена динамика инерционных частиц в пространственно-неоднородных случайных течениях различных типов. Поскольку каждая глава диссертации сопровождалась своим заключением, здесь мы сформулируем только ряд самых общих выводов и замечаний.

Мы ввели безразмерный параметр  $I$  в качестве меры инерционности частицы в условиях неоднородности статистики несущего поля скорости. Если в рассматриваемой точке течения характерная флуктуационная компонента скорости жидкости в направлении неоднородности равна  $u_0$ , а ее время корреляции это  $\tau_c$ , то параметр инерции частицы со временем релаксации скорости  $\tau \gtrsim \tau_c$  можно записать как  $I = u_0 \sqrt{\tau \tau_c} / l$ , где  $l$  – характерный масштаб неоднородности. Этот параметр играет для статистики скорости частицы такую же роль, какую широко используемое число Стокса  $St = \tau / \tau_c$  играет для ее мгновенной скорости. Число Стокса равно отношению времени инерционного отклика частицы ко времени жизни типичных флуктуаций потока, и позволяет судить, насколько мгновенная скорость частицы отличается от скорости окружающей жидкости. Малость числа Стокса означает, что частица пассивно следует за потоком, успевая откликаться на характерные флуктуации поля скорости. В свою очередь, параметр инерции  $I$  определен как отношение времени инерционного отклика частицы ко времени, необходимому ей, чтобы почувствовать неоднородность. Это параметр показывает, как сильно характерные флуктуации скорости частицы отличаются от тех, что диктуются локальной интенсивностью турбулентности. Малый параметр инерции означает, что статистика скорости частицы успевает подстраиваться под локальную турбулентность.

Предыдущие теоретические работы, посвященные вопросам турбулентного транспорта инерционных частиц в неоднородных турбулентных течениях, явно или неявно имели дело с пределом  $I \ll 1$ . В этом случае работает локально-равновесное приближение, позволяющее описать эволюцию концентрации частиц градиентным транспортным уравнением. Мы не стали ограничивать себя пределом малого параметра инерции, проанализировав также режим, когда локальное равновесие сильно нарушено, т.е.  $I \gtrsim 1$ . Если при  $I \ll 1$  релаксация к статистически равновесной функции распределения скорости частицы



происходит локальным образом за счет вязкого трения, то в случае  $I \gg 1$ , как оказалось, вязкой релаксацией можно вовсе пренебречь и перейти к приближению стохастического ускорения. Релаксация к равновесию в этом пределе возможна только за счет неупругих столкновений частицы с ограничивающей турбулентный поток стенкой при условии, что эти столкновения достаточно диссипативны.

Большое внимание в представленном исследовании было уделено свойствам локализации частиц. Мы описали ряд динамических фазовых переходов локализация-делокализация, при которых изменение некоторого контрольного параметра (числа Стокса  $St$ , параметра инерции  $I$ , коэффициента восстановления скорости  $\beta$ ) имеет радикальные последствия для стохастической динамики частиц: аккумуляция частиц вблизи стенки или в области пониженной интенсивности турбулентности в неограниченном пространстве сменяется их стремлением убежать на бесконечность и наоборот. Отдельно отметим ту отличительную черту режима с большим параметром  $I$ , что инерция частиц играет против их локализации. Как известно, градиент турбулентности ведет к возникновению турбофорического потока частиц с малым параметром инерции в сторону минимума пульсаций турбулентного движения жидкости. А вот в пределе большой инерции частицы в среднем стремятся уже прочь от минимума, поскольку длина их свободного пробега позволяет пролетать сквозь него.

Здесь необходимо признать, что используемые нами идеализированные модели являются довольно грубым упрощением реальности. Мы, к примеру, не учитывали когерентные структуры, которые, как известно, могут существенно влиять на процессы транспорта в пристенной области [71]. Ответ на вопрос о возможности наблюдения предсказанных нами эффектов в реальных гидродинамических потоках должно дать прямое численное моделирование с рекомендуемым теорией набором параметров.

Особое место в этой работе занимает последняя глава, где обсуждалась дисперсия тяжелых частиц в турбулентном пограничном слое атмосферы. Феноменологическое уравнение турбулентной диффузии для этой задачи сформулировано более полувека назад и решалось многими авторами, но в основном для стационарного случая. Мы же обратились к нестационарной ситуации, решив задачу о рассейнии облака частиц с учетом частично поглощающего (радиационного) граничного условия на земной поверхности. Это, в частности, позволило

нам описать простейшие "first-passage" [72] свойства процесса атмосферной диффузии. А именно, мы показали, что вероятность неосаждения частицы убывает степенным образом с течением времени с экспонентой, определяемой отношением скорости гравитационной седиментации к характерной амплитуде пульсаций турбулентного движения воздуха (число Фруда). Интересно было бы проверить это предсказание путем численного моделирования транспорта частиц в турбулентном пограничном слое.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю В.В. Лебедеву и соавторам своих публикаций, Г.Е. Фальковичу, А.И. Черных, С.С. Вергелесу и И. Фуксону, благодаря многочисленным обсуждениям с которыми стало возможным сформулировать и разрешить вопросы, освещенные в этой диссертации. Особая благодарность выражается А.И. Черных, обнаружившему переход локализация-делокализация при изменении степени неупругости столкновений частиц со стенкой в численном счете, что стимулировало последующее построение теории.

**Список публикаций автора по теме диссертации**

1. *Belan, S., Chernykh, A., Lebedev, V., Falkovich, G.* Inelastic collapse and near-wall localization of randomly accelerated particles // *Physical Review E* - 2016. - Vol. 93, no. 5. - P. 052206
2. *Belan, S., Lebedev, V., Falkovich, G.* Particle dispersion in the neutral atmospheric surface layer // *Boundary-Layer Meteorology* - 2016. - Vol. 159, no. 1. - P. 23
3. *Belan, S.* Concentration of diffusional particles in viscous boundary sublayer of turbulent flow // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* - 2016. - Vol. 443, - P. 128
4. *Belan, S., Chernykh, A., Falkovich, G.* Phase transitions in the distribution of inelastically colliding inertial particles // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* - 2015. - Vol. 49, P. 035102
5. *Belan, S., Chernykh, A., Lebedev, V., Vergeles, S.* Confinement of inertial particles in viscous boundary layer of turbulent flow // *JETP Letters* - 2015. - Vol. 101, no. 1, P. 12
6. *Belan, S., Fouxon, I., Falkovich, G.* Localization-Delocalization Transitions in Turbophoresis of Inertial Particles // *Physical Review Letters* - 2014. - Vol. 112, P. 234502

## Список литературы

1. Stochastic suspensions of heavy particles / J. Bec, M. Cencini, R. Hillerbrand, K. Turitsyn // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2008. — Vol. 237, no. 14. — Pp. 2037–2050.
2. Reeks M. W. Transport, mixing and agglomeration of particles in turbulent flows // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2014. — Vol. 530, no. 1. — P. 012003.
3. Gustavsson K., Mehlig B. Statistical models for spatial patterns of heavy particles in turbulence // *Advances in Physics*. — 2016. — no. 65(1). — Pp. 1–57.
4. Landau L. D., Lifshitz E. M. Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics. — 1986.
5. Monin A.S., Yaglom A.M. Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence. — Dover, New York, 2007.
6. Fessler J. R., Kulick J. D., Eaton J. K. Preferential concentration of heavy particles in a turbulent channel flow // *Physics of Fluids (1994-present)*. — 2002. — Vol. 6, no. 11. — Pp. 3742–3749.
7. Rouson D. W., Eaton J. K. On the preferential concentration of solid particles in turbulent channel flow // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2001. — Vol. 428. — Pp. 149–169.
8. Cerbelli S., Giusti A., Soldati A. ADE approach to predicting dispersion of heavy particles in wall-bounded turbulence // *International Journal of Multiphase Flow*. — 2001. — Vol. 27, no. 11. — Pp. 1861–1879.
9. Portela L. M. Cota P., Oliemans R. V. Numerical study of the near-wall behaviour of particles in turbulent pipe flows // *Powder technology*. — 2002. — Vol. 125, no. 2. — Pp. 149–157.
10. Soldati A., Marchioli C. Physics and modelling of turbulent particle deposition and entrainment: Review of a systematic study // *International Journal of Multiphase Flow*. — 2009. — Vol. 35, no. 9. — Pp. 827–839.

11. *Balachandar S., Eaton J. K.* Turbulent dispersed multiphase flow // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2010. — Vol. 42. — Pp. 111–133.
12. Wall accumulation and spatial localization in particle-laden wall flows / G. Sardina, P. Schlatter, L. Brandt et al. // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2012. — Vol. 699. — Pp. 50–78.
13. *Zaichik L.I., Alipchenkov V.M., Sinaiski E.G.* Particles in turbulent flows. — Wiley-VCH Verlag, 2008.
14. Transfer of particles in nonisotropic air turbulence / M. Caporaloni, F. Tampieri, F. Trombetti, O. Vittori // *Journal of the atmospheric sciences*. — 1975. — Vol. 32, no. 3. — Pp. 565–568.
15. *Reeks M.W.* The transport of discrete particles in inhomogeneous turbulence // *Journal of aerosol science*. — 1983. — Vol. 14, no. 6. — P. 729–739.
16. *Young J., Leeming A.* A theory of particle deposition in turbulent pipe flow // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1997. — Vol. 340. — Pp. 129–159.
17. *Maxwell J.C.* On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // *Philosophical Transactions of the royal society of London*. — 1879. — Vol. 170. — Pp. 231–256.
18. *Belan S., Fouxon I., Falkovich G.* Localization-delocalization transitions in turbophoresis of inertial particles // *Physical review letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 23. — P. 234502.
19. A note on the modelling of the bouncing of spherical drops or solid spheres on a wall in viscous fluid / D. Legendre, R. Zenit, C. Daniel, P. Guiraud // *Chemical engineering science*. — 2006. — Vol. 61, no. 11. — Pp. 3543–3549.
20. *Belan S., Chernykh A., Lebedev V., Vergeles S.* Confinement of inertial particles in the viscous boundary layer of a turbulent flow // *JETP Letters*. — 2015. — Vol. 101, no. 1. — Pp. 12–16.
21. *Belan S., Chernykh A., Falkovich G.* Phase transitions in the distribution of inelastically colliding inertial particles // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2015. — Vol. 49, no. 3. — P. 035102.

22. Inelastic collapse and near-wall localization of randomly accelerated particles / S. Belan, A. Chernykh, V. Lebedev, G. Falkovich // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 5. — P. 052206.
23. *Stolovitzky G.* Non-isothermal inertial Brownian motion // *Physics Letters A*. — 1998. — Vol. 241, no. 4. — Pp. 240–256.
24. *Belan S.* Concentration of diffusional particles in viscous boundary sublayer of turbulent flow // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2016. — Vol. 443. — Pp. 128–136.
25. *Belan S., Lebedev V., Falkovich G.* Particle Dispersion in the Neutral Atmospheric Surface Layer // *Boundary-Layer Meteorology*. — 2016. — Vol. 159, no. 1. — P. 23.
26. *Piquet J.* Turbulent flows: models and physics. — Springer Science and Business Media, 2013.
27. *Maxey M.R., Riley J.J.* Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Boundary-Layer Meteorology*. — 1983. — Vol. 26. — P. 883–889.
28. *Cajori F.* Newton's Principia - A Revision of Mott's Translation. — University of California Press, Berkeley, 1934.
29. *Brilliantov N., Poschel T.* Kinetic Theory of Granular Gases. — Oxford University Press, Oxford, 2003.
30. Coefficient of restitution as a fluctuating quantity / M. Montaine, M. Heckel, C. Kruehle et al. // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84, no. 4. — P. 041306.
31. *Gunkelmann N., Montaine M., Poschel T.* Stochastic behavior of the coefficient of normal restitution // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89, no. 2. — P. 022205.
32. *H. Risken.* Fokker-Planck Equation. — Springer, Berlin, 1984.
33. *Lebedev V.V., Turitsyn K.S.* Passive scalar evolution in peripheral regions // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69, no. 3. — P. 036301.

34. *Chernykh A., Lebedev V.* Passive scalar structures in peripheral regions of random flows // *JETP Letters*. — 2008. — Vol. 87, no. 12. — Pp. 682–686.
35. *Chernykh A., Lebedev V.* Passive scalar transport in peripheral regions of random flows // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2011. — Vol. 113, no. 2. — Pp. 352–362.
36. Rare backflow and extreme wall-normal velocity fluctuations in near-wall turbulence / P. Lenaers, Q. Li, G. Brethouwer et al. // *Physics of fluids*. — 2012. — Vol. 24. — P. 035110.
37. *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.* On the theory of the Brownian motion // *Physical Review*. — 1930. — Vol. 36. — P. 823–841.
38. *Pourahmadi F.* Turbulence modeling of single and two phase curved channel flows: Ph.D. thesis / Univ. of California, Berkeley. — 1982.
39. *Johansen S.T.* The deposition of particles on vertical walls // *International journal of multiphase flow*. — 1991. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 355–376.
40. *Reeks M.W.* On model equations for particle dispersion in inhomogeneous turbulence // *International Journal of Multiphase Flow*. — 2005. — Vol. 31. — P. 93–114.
41. *Sikovsky D.Ph.* Singularity of Inertial Particle Concentration in the Viscous Sub-layer of Wall-bounded Turbulent Flows // *Flow, Turbulence and Combustion*. — 2014. — Vol. 92. — Pp. 41–64.
42. *Chen M., McLaughlin J.B.* A new correlation for the aerosol deposition rate in vertical ducts // *Journal of Colloid and Interface Science*. — 1995. — Vol. 169, no. 2. — Pp. 437–455.
43. Statistics of particle dispersion in direct numerical simulations of wall-bounded turbulence: Results of an international collaborative benchmark test / C. Marchioli, A. Soldati, J.G.M. Kuerten et al. // *International Journal of Multiphase Flow*. — 2008. — Vol. 34, no. 9. — Pp. 879–893.
44. *Widder M. E., Titulaer U. M.* Brownian motion in a medium with inhomogeneous temperature // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 1989. — Vol. 154, no. 3. — Pp. 452–466.

45. *Kramers H.A.* Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // *Physica*. — 1940. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 284–304.
46. *Van Kampen N. G.* Diffusion in inhomogeneous media // *Journal of physics and chemistry of solids*. — 1988. — Vol. 49, no. 6. — Pp. 673–677.
47. *Jayannavar A.M., Mahato M.C.* Macroscopic Equation of Motion in Inhomogeneous media. — arXiv preprint cond-mat/9509059.
48. *Burkhardt T.W.* First Passage of a Randomly Accelerated Particle // *First-Passage Phenomena and Their Applications*. — World Scientific, 2014.
49. *McKean H.J.* A winding problem for a resonator driven by a white noise // *Journal of mathematics of Kyoto University*. — 1998. — Vol. 2. — Pp. 227–235.
50. *Cornell S.J., Swift M.R., Bray A.J.* Inelastic collapse of a randomly forced particle // *Physical review letters*. — 1998. — Vol. 81, no. 6. — P. 1142.
51. *Halperin B.I.* Green's functions for a particle in a one-dimensional random potential // *Physical Review*. — 1965. — Vol. 139, no. 1A. — P. A104.
52. *Wilkinson M., Mehlig B.* Path coalescence transition and its applications // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 68, no. 4. — P. 040101.
53. *Gustavsson K., Mehlig B.* Distribution of relative velocities in turbulent aerosols // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84. — P. 045304.
54. *Gawedzki K., Herzog D. P., Wehr J.* Ergodic properties of a model for turbulent dispersion of inertial particles // *Communications in mathematical physics*. — 2011. — Vol. 308, no. 1. — Pp. 49–80.
55. *Feigel'man M.V., Tselik A.M.* Hidden supersymmetry of stochastic dissipative dynamics // *JETP*. — 1982. — Vol. 56, no. 4. — P. 823.
56. Clustering and turbophoresis in a shear flow without walls / F. De Lillo, M. Cencini, S. Musacchio, G. Boffetta // *Physics of fluids*. — 2016. — Vol. 26, no. 3.
57. *Deutsch J. M.* Aggregation-disorder transition induced by fluctuating random forces // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1985. — Vol. 18, no. 9. — P. 1449.



58. *Brutsaert W.* Evaporation into the atmosphere: theory, history and applications (Vol.1). — Springer Science and Business Media, 2013.
59. *Monin A.S.* On the boundary condition on the Earth surface for diffusing pollution // *Advances in Geophysics*. — 1959. — Vol. 6. — P. 435.
60. *Calder K.* Atmospheric diffusion of particulate material, considered as a boundary value problem // *Journal of Meteorology*. — 1959. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 413–415.
61. *Nicholson K.W.* A review of particle resuspension // *Atmospheric Environment*. — 1988. — Vol. 22. — Pp. 2639–2651.
62. *Smith R.B.* A K-theory of dispersion, settling and deposition in the atmospheric surface layer // *Boundary Layer Meteorology*. — 2008. — Vol. 129, no. 3. — P. 371–393.
63. *Rounds W.* Solutions of the two-dimensional diffusion equations // *Eos, Transactions American Geophysical Union*. — 1955. — Vol. 36, no. 3. — Pp. 395–405.
64. *Godson W.L.* The diffusion of particulate matter from an elevated source // *Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, Serie A*. — 1958. — Vol. 10, no. 4. — Pp. 305–327.
65. *Okubo A., Levin S.A.* A theoretical framework for data analysis of wind dispersal of seeds and pollen // *Ecology*. — 2008. — Vol. 70, no. 2. — P. 329–338.
66. *Chamecki M., Meneveau C.* Particle boundary layer above and downstream of an area source: scaling, simulations, and pollen transport // *Journal of Fluids Mechanics*. — 2011. — Vol. 683, no. 1. — Pp. 1–26.
67. *Pan Y., Chamecki M., S.A. Isard.* Dispersion of heavy particles emitted from area sources in the unstable atmospheric boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*. — 2013. — Vol. 146. — Pp. 1–26.
68. *Shaw R.A.* Particle-turbulence interactions in atmospheric clouds // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2003. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 183–227.
69. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of mathematical functions. — Dover, New York, 1964.

70. *Van Kampen N.G.* Stochastic processes in physics and chemistry. — Elsevier, New York, 1992. — Vol. 1. — P. 463.
71. *Marchioli C., Picciotto M., Soldati A.* Interaction between Turbulence Structures and Inertial Particles in Boundary Layer: Mechanisms for Particle Transfer and Preferential Distribution. — Springer Vienna, 2003. — 383-429 pp.
72. *Redner S.* A guide to first-passage processes. — Cambridge University Press, 2001.