

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Л. Д. ЛАНДАУ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ШТЫК Александр Викторович

**Кинетика электрон-фононных процессов и флуктуации в
неупорядоченных проводниках и сверхпроводниках**

УДК 538.945, 538.9518

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
М. В. Фейгельман

Москва — 2016

Оглавление

Введение	4
1 Поглощение ультразвука и ЭФ перенос тепла	7
1.1 Введение	7
1.2 Кинетическое уравнение	8
1.3 Заключение	13
2 Неполная экранировка	15
2.1 Введение	15
2.2 Модель электрон-фононного взаимодействия в грязном проводнике	16
2.2.1 Лабораторная система отсчета (ЛСО)	17
2.2.2 Движущаяся система отсчета (ДСО)	19
2.3 Локальные процессы	24
2.4 Вклад канала зарядовой плотности	25
2.5 Заключение	29
3 Многозонный случай	30
3.1 Введение	30
3.2 Макроскопические уравнения движения	31
3.3 Спин-поляризованный двумерный электронный газ	34
3.4 Время релаксации спиновой плотности за счет спин-орбитального взаимодействия	37
3.5 Заключение	39

4	Эффекты диффузии энергии	41
4.1	Введение	41
4.2	Нормальный металл	42
4.3	<i>s</i> -волновой сверхпроводник	46
4.3.1	Модель	46
4.3.2	Мода диффузии энергии	47
	Диффузон	47
	Эффективная вершина фонон-диффузон	48
4.3.3	Поглощение ультразвука в канале диффузии энергии	50
4.4	<i>d</i> -волновой сверхпроводник	52
4.4.1	Модель	52
4.4.2	Поглощение ультразвука в локальном канале	55
4.4.3	Диффузная мода плотности энергии	57
	Пропагатор диффузона	57
	Эффективная вершина	58
	Наивная (неполная) эффективная вершина.	59
	Полная эффективная вершина.	60
4.4.4	Поглощение ультразвука в канале диффузии энергии	60
4.5	Заключение	62
5	Поглощение ультразвука в псевдощелевом сверхпроводнике	64
5.1	Введение	64
5.2	Модель	67
5.3	Свободная энергия (\equiv статический предел)	69
5.3.1	Окрестность T_c	71
5.3.2	Низкие температуры $T \ll T_c$	72
5.4	Пропагатор параметра порядка	73
5.5	Электрон-фононное взаимодействие	76
5.6	Поглощение ультразвука	78

5.6.1	Фазовая мода	79
5.6.2	Амплитудная мода	80
5.7	Влияние Кулоновского взаимодействия	83
5.8	Заключение	87
	Заключение	89
	Публикации по теме диссертации	91
	Литература	92

Введение

Актуальность темы

Поглощение ультразвука в металлах изучается уже долгое время [1–5] и может казаться полностью понятным. Отношение скорости поглощения ультразвука $\alpha(\omega)$ частоте ультразвука ω в чистых металлах мало из-за малости адиабатического параметра $mk_F^3/\rho_m \ll 1$ где m есть электронная масса, k_F есть волновой вектор Ферми и ρ_m есть плотность вещества. Простейшая модель электрон-фононного взаимодействия это Фрелиховская модель со скалярной вершиной, позже расширенная Мигдалом [6, 7]. Эта модель хорошо работает в чистых металлах. Однако, хорошо известно, что Фрелиховская модель неадекватна когда длина волны фонона $2\pi/q$ превосходит упругую электронную длину свободного пробега l . В этом *грязном* пределе, когда $ql \ll 1$, привычная теория электрон-фононного взаимодействия приводит к концепции неэффективности Пиппарда, которая утверждает, что поглощение ультразвука на малых волновых векторах подавлено на фактор $ql \ll 1$ [5].

Поглощение ультразвука тесно связано с электрон-фононным теплообменом [8], который определяет возможный масштаб нарушения термодинамического равновесия электронного газа и фононов, решетки. В частности, в работе [9] было показано, что сильные нелинейности вольт-амперной характеристик $I(V)$ наблюдаемые в эксперименте [10] возникают благодаря перегреву электронов; более того, тщательное исследование формы $I(V)$ кривых при различных температурах позволяет определить скорость неупругих электрон-

фононных процессов. Таким образом было обнаружено, что в ряде случаев [10–12] скорость электрон-фононного охлаждения значительно выше, чем ожидается в рамках только процессов Пиппардовского типа. Следовательно важно внимательно пересмотреть как вопросы электрон-фононного теплообмена, так и поглощения ультразвука, на предмет эффектов, которые могли быть ранее упущены, а также попытаться ответить на загадки недавних экспериментов, а именно несоответствия интенсивности электрон-фононного теплообмена наблюдаемой экспериментально с предсказываемой имеющимися теоретическими моделями.

Цель работы

Целью работы являлись

1. Исследование связи скоростей электрон-фононного теплообмена и поглощения ультразвука.
2. Исследование влияния медленных диффузных мод на скорость поглощения ультразвука в неупорядоченных проводниках.
3. Построение теории электрон-фононного взаимодействия в псевдощелевых сверхпроводниках.

Основные результаты

1. Исследована связь скоростей электрон-фононного теплообмена и поглощения ультразвука. Установлена количественная связь между этими двумя физическими явлениями, справедливая при произвольной силе электрон-электронного взаимодействия.
2. Исследовано влияние медленных диффузных мод на скорость поглощения ультразвука в неупорядоченных проводниках. Обнаружены три примера таких мягких мод:

- Зарядовая плотность
 - Спиновая плотность
 - Плотность энергии
3. Построена теория электрон-фононного взаимодействия в псевдощелевых сверхпроводниках. Обнаружено, что измерение поглощения ультразвука может служить полезным инструментом при изучении таких сверхпроводников.

Структура диссертации

В главе 1 рассмотрена связь скоростей электрон-фононного теплообмена и поглощения ультразвука; главы 2, 3 и 4 посвящены эффектам зарядовой, спиновой диффузных мод и моды плотности энергии соответственно (последняя рассмотрена на примере как нормального, так и сверхпроводящих s - и d -волновых состояний); в главе 5 построена теория электрон-фононного взаимодействия в псевдощелевом сверхпроводнике.

Глава 1

Поглощение ультразвука и ЭФ перенос тепла

1.1 Введение

Вопрос о теплообмене между перегретым электронным газом и кристаллической решеткой весьма актуален. А именно, ряд относительно недавних экспериментов [10, 12, 13] был связан с косвенным измерением теплового потока от перегретых электронов к кристаллической решетке, то есть к фононам, \mathcal{J}_- . Вероятно наиболее яркими были наблюдения эксперимента [10], где наблюдался гистерезис в вольт-амперной-характеристике пленок оксида индия InO_x с гигантскими скачками значения тока. Наблюдаемое поведение оказалось возможным объяснить в рамках очень простой идеи о перегреве электронного газа. Тем не менее, хотя следующий из этих измерений поток тепла от электронной к фононной подсистеме $\mathcal{J}_- = wT^6$ и схож с предсказаниями стандартной теории, (он имеет такое же степенное температурное поведение), но вот только при этом интенсивность теплообмена оказалась гораздо сильнее ожидаемой. Измеренная константа пропорциональности w оказалась на несколько порядков большей чем следовало бы в рамках стандартной теории [5, 9, 14].

В то же время другой вопрос, вопрос о поглощении ультразвука в проводни-

ках, гораздо более стар [1, 2]. При этом и электронный теплообмен с решеткой и поглощение ультразвука по своей сути связаны с неупругим взаимодействием электронов и фононов. В этой главе мы демонстрируем довольно общую связь этих явлений.

1.2 Кинетическое уравнение

Как следует из введения, речь в этой главе идет о ситуации с наличием перегретого электронного газа с температурой T_{el} отличной от температуры решетки. Мы считаем что имеется хорошая связь фононов с тепловой баней, которая находится при температуре $T_{ph} < T_{el}$. Также предполагается сильное электрон-электронное взаимодействие, так что обе подсистемы (электронная и фононная) квазиравновесны и имеют хорошо определенные температуры. Под потоком тепла подразумевается мощность теплообмена на единицу объема

$$\mathcal{J} = \langle \dot{E}_{el,V} \rangle_V = - \langle \dot{E}_{ph,V} \rangle_V, \quad (1.1)$$

где E_{el} и E_{ph} есть плотность энергии электронной и фононной подсистем соответственно, в то время как угловые скобки $\langle \dots \rangle_V$ подразумевают усреднение по объему системы. Таким образом здесь не идет речи о *пространственном* транспорте энергии в электронной/фононной подсистеме.

Динамику теплообмена можно было бы анализировать как на языке фононного так и на языке электронного кинетических уравнений. Оказывается, что фононное кин. уравнение гораздо удобнее при рассматриваемых условиях поскольку фононная собственная энергия квазиравновесна. Как показал Мигдал [7], петлевые поправки по фононам имеют малость по адиабатическому параметру $(s/v_F)^2 \ll 1$, где s есть скорость звука, а v_F – электронная скорость Ферми. Электроны намного быстрее фононов и электрон-фононное взаимодействие достаточно учесть в нижайшем приближении. В то же время, поправки по электрон-электронному взаимодействию зачастую гораздо сильнее и их учет

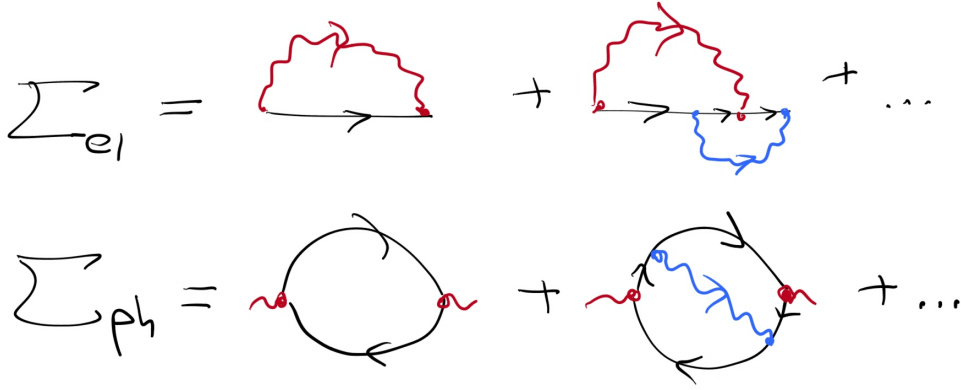


Рис. 1.1:

представляет интерес. Это приводит к тому, что анализ теплообмена действительно намного удобнее на языке фононного кинетического уравнения, которое в таких условиях строится на основе квазиравновесной собственной энергии фононов $\hat{\Sigma}_{ph}$, содержащей только электронные функции Грина, которые все берутся при одной температуре T_{el} . Функция распределения фононов в такой ситуации есть $B(\omega, T_{ph}) = \coth(\omega/2T_{ph})$, в то время как в собственную энергию $\Sigma^K = B(\omega, T_{ph})(\Sigma^R - \Sigma^A)$ входит уже *электронная* температура. Тем временем в электронную собственную энергию входят как фононная функция Грина и электроны, что делает ее существенно неравновесной величиной.

Перейдем к выводу фононного кинетического уравнения [15, 16]. Мы используем Келдышевскую диаграммную технику [17–19], в которой фононное действие есть

$$\mathcal{A}_{ph} = \int dt d\mathbf{r} \left[\frac{\rho_m \dot{\mathbf{u}}^2}{2} + \frac{\rho_m s_l^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{2} + \frac{\rho_m s_t^2 (\nabla \times \mathbf{u})^2}{2} \right]. \quad (1.2)$$

Здесь ρ_m есть плотность вещества, а $s_{l(t)}$ – скорость звука продольных (поперечных) фононов. В этой диаграммной технике Гриновские функции являются матрицами 2×2 в Келдышевском пространстве,

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D^K & D^R \\ D^A & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}^{-1} = \hat{D}_0^{-1} - \hat{\Sigma}, \quad (1.3)$$

где D_0 и D есть голая и точная фононные функции Грина и Σ есть фононная собственная энергия,

$$\widehat{D}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (D_0^A)^{-1} \\ (D_0^R)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^A \\ \Sigma^R & \Sigma^K \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Келдышевская компонента $(\dots)^K$ может быть параметризована как

$$D^K = D^R \circ B - B \circ D^A, \quad (1.5)$$

где матрица B связана с функцией распределения фононов и $B(\omega) = \coth(\omega/2T)$ в равновесии. У фононных Гриновских функций есть также 3×3 матричная структура в пространстве фононных поляризации, поскольку по определению

$$D_{\alpha\beta}^R(x, x') = \langle u_\alpha(x) u_\beta(x') \rangle^R, \quad (1.6)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Соответственно имеется три собственных значения, одна продольная поляризация и две поперечных, которым отвечают проекторы

$$P_{\alpha\beta}^{(l)} = \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}, \quad P_{\alpha\beta}^{(tr)} = 1 - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}. \quad (1.7)$$

Для простоты мы рассмотрим только продольные фононы, поперечные могут быть проанализированы абсолютно аналогично.

Для вывода кинетического уравнения обычно используют уравнение Дайсона

$$(\widehat{D}_0^{-1} - \widehat{\Sigma})\widehat{D} = 1 \quad \implies \quad (1.8)$$

$$\implies [D_0^{-1}, B] = \Sigma^K - \Sigma^R \circ B - B \circ \Sigma^A. \quad (1.9)$$

Теперь вспомним, что согласно действию (1.2), голая запаздывающая функция Грина есть

$$D_0^R(\omega, q) = \frac{1}{\rho_m} \frac{1}{(\omega + i0)^2 - s^2 q^2}, \quad (1.10)$$

что в итоге дает нам

$$2i\rho_m\omega \partial_t B(x, x') - 2i\rho_m\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} B(x, x') = \Sigma^K(x, x') - [\Sigma^R \circ B - B \circ \Sigma^A](x, x'), \quad (1.11)$$

где $(x, x') = (t, \mathbf{r}, \omega, \mathbf{q})$. Далее, поскольку нас интересует только полный тепловой поток, мы можем свободно опустить пространственно-неоднородную часть, по сути производя усреднение по объему системы и исключая зависимость от центральной координаты \mathbf{r} ,

$$2i\rho_m\omega \partial_t B(t, \omega, \mathbf{q}) = \Sigma^K(t, \omega, \mathbf{q}) - [\Sigma^R \circ B - B \circ \Sigma^A](t, \omega, \mathbf{q}). \quad (1.12)$$

Также, пока скорость распада фононов относительно мала, $\alpha \ll \omega$, фононы можно считать хорошо определенными квазичастицами и фононную квазичастичную функцию распределения можно “посадить” на массовую поверхность $\omega = sq$. Таким образом, частотно-импульсная зависимость величин в кинетическом уравнении (1.12) должна быть ограничена законом дисперсии. Для этого домножим полученное уравнение на фононную плотность состояний

$$(D^R - D^A)(\omega, q) = -\frac{i\pi}{\rho_m\omega} \left(\delta(\omega - sq) + \delta(\omega + sq) \right) \quad (1.13)$$

и проинтегрируем по всем импульсам:

$$\partial_t B(t, \omega) = -\frac{i}{2\rho_m\omega} \left(\Sigma^K(t, \omega) - [\Sigma^R \circ B - B \circ \Sigma^A](t, \omega) \right) \Big|_{sq=\omega}. \quad (1.14)$$

Перенормировка спектра фононов, которой отвечает действительная часть собственной энергии $\text{Re } \Sigma^R$ не представляет особого интереса, а остающаяся мнимая часть есть буквально скорость распада фононов:

$$\alpha(\omega, T_{el}) = -\frac{1}{\rho_m\omega} \text{Im } \Sigma^R(\omega, q, T_{el}) \Big|_{\omega=sq}. \quad (1.15)$$

Оставшийся ключевой момент это квазиравновесность фононов, которая проявляется в структуре Келдышевской компоненты $\Sigma^K = B(\omega, T_{el})(\Sigma^R - \Sigma^A)$. Все вместе это нам дает

$$\partial_t \mathfrak{B}(\omega, T_{ph}(t)) = \alpha(\omega, T_{el}) \left(\mathfrak{B}(\omega, T_{el}) - \mathfrak{B}(\omega, T_{ph}) \right). \quad (1.16)$$

где мы также ввели настоящую функцию распределения фононов $\mathfrak{B}(\omega) = (1/2)(B(\omega) - 1)$, дающую среднее число заполнения квантовых состояний.

Подчеркнем еще раз, что для слабого электрон-фононного взаимодействия фононная собственная энергия $\widehat{\Sigma}$ не содержит фононных функций Грина и в итоге является квазиравновесной величиной, зависящей только от электронной температуры T_{el} .

Чтобы получить поток тепла \mathcal{J} мы должны домножить уравнение как на фононную плотность состояний $\nu_{ph}(\omega) = \omega^3/2\pi^2s^5$ так и на энергию ω фонона, интегрируя результат по энергии:

$$\begin{aligned}\partial_t E_{ph} &= \int_0^{\infty} (\nu_{ph}(\omega) d\omega) \omega \partial_t \mathfrak{B}(\omega, T_{ph}(t)) \\ &= \int_0^{\infty} (\nu_{ph}(\omega) d\omega) \left(\alpha(\omega, T_{el}) \omega \right) \left[\mathfrak{B}(\omega, T_{el}) - \mathfrak{B}(\omega, T_{ph}) \right].\end{aligned}\quad (1.17)$$

Входящий и исходящий потоки тепла можно определить как

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(T_{el}, T_{ph}) &= \mathcal{J}_+(T_{el}) - \mathcal{J}_-(T_{ph}, T_{el}), \\ \mathcal{J}_+(T_{el}) &= \int_0^{\infty} (\nu_{ph}(\omega) d\omega) [\alpha(\omega, T_{el}) \omega] \mathfrak{B}(\omega, T_{el}), \\ \mathcal{J}_-(T_{ph}, T_{el}) &= \int_0^{\infty} (\nu_{ph}(\omega) d\omega) [\alpha(\omega, T_{el}) \omega] \mathfrak{B}(\omega, T_{ph}),\end{aligned}\quad (1.18)$$

где видно, что электрон-электронное взаимодействие приводит к зависимости исходящего потока \mathcal{J}_- как от фононной так и от электронной температур. Простейшее приближение, используемое при анализе электрон-фононного теплообмена, состоит в предположении, что скорость поглощения ультразвука не зависит от электронной температуры,

$$\alpha(\omega, T_{el}) \equiv \alpha(\omega), \quad (1.19)$$

что приводит к простому выражению для потока тепла в виде разности одной

и той же функции, взятой на электронной и фононной температурах соответственно,

$$\mathcal{J}(T_{el}, T_{ph}) = \mathcal{J}(T_{el}) - \mathcal{J}(T_{ph}) \sim (T_{el}^n - T_{ph}^n), \quad (1.20)$$

где сама функция в подавляющем большинстве моделей сводится к степенной зависимости [9, 20]. Такой подход неприменим, если эффекты электрон-электронного взаимодействия существенны и электронные параметры, такие как плотность состояний или коэффициент диффузии имеют существенную температурную зависимость. В общем случае необходимо начинать непосредственно с уравнения (1.18).

Если интересоваться временем энергетической релаксации τ_E^{-1} , то его, конечно, можно получить зная поток тепла J_{e-ph} . Каждый тип фононов вносит вклад

$$\tau_{E,\alpha}^{-1} = \frac{1}{C_e} \left. \frac{\partial J_{e-ph,\alpha}}{\partial T_{el}} \right|_{T_{ph}=T_{el}} \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2C_e T} \int_0^\infty \frac{\omega \nu_{ph}(\omega)}{\sinh^2(\omega/2T)} \alpha_\mu(\omega, T) d\omega \quad (1.22)$$

где $C_e \propto \nu T$ есть электронная теплоемкость. Полная скорость релаксации энергии тогда есть $\tau_{E,f}^{-1} = \tau_{E,l}^{-1} + (d_{ph} - 1)\tau_{E,tr}^{-1}$, где d_{ph} есть фононная размерность пространства, например $d_{el} = 3$ для объемного случая, а $(d_{ph} - 1)$ дает число возможных поперечных поляризаций фонона.

1.3 Заключение

В этой главе мы рассмотрели связь между скоростью поглощения ультразвука и потоком тепла между электронными и фононными подсистемами. Показано, что эта связь очень общего характера за которой стоит единственное ключевое приближение, которое выполнено в большинстве случаев. А именно, это приближение состоит в слабости электрон-фононного взаимодействия. Формально,

с точки зрения диаграммной техники, это значит, что электрон-фононное взаимодействие должно рассматриваться в древесном приближении, в то время как по электрон-электронному взаимодействию никаких ограничений не предполагается. В типичном металле это ограничение всегда выполнено в силу теоремы Мигдала, в силу адиабатичности электрон-фононного взаимодействия и малости параметра $s^2/v_F^2 \ll 1$.

Одним из результатов главы есть общий вид потока тепла между электронной и фононной подсистемами,

$$\mathcal{J}(T_{el}, T_{ph}) = \mathcal{J}_+(T_{el}) - \mathcal{J}_-(T_{ph}, T_{el}),$$

который, как оказывается, не сводится к стандартному приближению при описании квазиравновесной ситуации. Последнее состоит в предположении о том, что \mathcal{J} есть просто разность одной и той же функции взятой на электронной и фононной температурах, $\mathcal{J}(T_{el}) - \mathcal{J}(T_{ph})$. Стандартное приближение воспроизводится, если в электронных параметрах, таких, как например коэффициент диффузии D и плотность состояний ν можно пренебречь зависимостью от температуры $\nu(T)$, $D(T) \approx \text{const}$.

Глава 2

Неполная экранировка

2.1 Введение

В металлах приближение полной электронной нейтральности замечательно работает для большинства задач [5, 9, 14]. Конечность силы электрон-электронного взаимодействия обычно дает лишь слабые поправки. Поглощение ультразвука тем не менее является одним из особых случаев из-за того, что беспорядок подавляет электрон-фононное взаимодействие в грязных проводниках [1, 2] (концепция Пиппардовской неэффективности). Это происходит по той причине, что для эффективного электрон-фононного взаимодействия необходимо сохранение импульса (матричный элемент электрон-фононного обращается в нуль при усреднении по Ферми поверхности), в то время как естественные электронные процессы в грязном проводнике диффузные и импульс не сохраняют. Это и приводит к тому, что электрон-фононные процессы в грязных проводниках с сильным Кулоновским взаимодействием обычно определяются так называемыми Пиппардовскими процессами [1], в которых электроны должны пройти значительное расстояние (порядка длины волны фонона) не рассеявшись ни на одной примеси (то есть сохраняя свой импульс). Именно последнее требование, в силу неестественности для грязного проводника, приводит к подавлению электрон-фононного взаимодействия на фактор $ql \ll 1$ по сравнению с чистым

случаем (где q есть фононный импульс, а l длина пробега электронов).

В этой главе мы формулируем модель электрон-фононного взаимодействия для довольно общего случая (раздел 2.2). Мы сперва приводим ответ для скорости поглощения ультразвука в рамках стандартной теории, через Пиппардовские (“локальные”) процессы (раздел 2.3), и демонстрируем, что в грязных полупроводниках флуктуации зарядовой плотности хоть все еще и сильно подавлены Кулоновским взаимодействием, но могут начать доминировать над обычным Пиппардовским поглощением (раздел 2.4).

Отклонения зарядовой плотности от равновесного значения усиливаются за счет медленной диффузной природы электронной динамики. А именно, диффузное усиление возникает за счет большого времени релаксации диффузных мод $\tau \sim (Dq^2)^{-1}$, в то время как характерный временной масштаб локальных (Пиппардовских) процессов есть просто время упругого рассеяния τ . Это значит, что фактор усиления за счет диффузной природы зарядовой моды есть

$$\sim \frac{1}{\tau Dq^2} \sim \frac{1}{q^2 l^2} \gg 1, \quad (2.1)$$

где q есть волновой вектор фонона, а l – длина свободного пробега электронов. Механизм, который описывается в этой главе, тесно связан с механизмом Мандельштама-Леонтовича [21] поглощения ультразвука в жидкостях, основываясь на той же идее о зацеплении акустической волны за какую-то медленно релаксирующую моду в поглощающей среде.

2.2 Модель электрон-фононного взаимодействия в грязном проводнике

Здесь мы формулируем модель электрон-фононного взаимодействия для довольно общего случая грязного проводника [3–5], в котором, в частности, может быть несколько различных ветвей электронного спектра. Эта необходимость

возникает в многозонном случае [22, 23] или же например если имеется спин-орбитальное взаимодействие, мы будем различать сорта электронов с помощью индекса $i \in (1, N)$. В этой главе рассматривается только прямое электрон-электронное взаимодействие (плотность-плотность) в приближении случайных фаз (RPA, random phase approximation). Также имеется беспорядок и случайный потенциал считается одинаковым для всех электронов, $U_{imp,i}(\mathbf{r}) = U_{imp}(\mathbf{r})$. Нарушение этого требования приведет к (псевдо-)спиновой релаксации, что мы рассмотрим несколько позже.

Электронное действие \mathcal{A}_e есть

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_e &= \mathcal{A}_{e0} + \mathcal{A}_{e-e}, \\ \mathcal{A}_{e0} &= \int dt d\mathbf{r} \sum_i \bar{\psi}_{\mathbf{r},i} \left[\hat{\varepsilon} - \xi_i(\hat{\mathbf{p}}) - U_{imp}(\mathbf{r}) \right] \psi_{\mathbf{r},i}, \\ \mathcal{A}_{e-e} &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' V_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}'),\end{aligned}\tag{2.2}$$

где $U_{imp}(\mathbf{r})$ есть случайный потенциал, $V_0(\mathbf{q})$ есть голое Кулоновское взаимодействие, которое зависит от диэлектрической постоянной подложки ε_C ; электрон-электронное взаимодействие может испытывать дополнительную экранировку при наличии металлического затвора; $n(\mathbf{r}) = \sum_i n_i(\mathbf{r})$ и $n_i(\mathbf{r}) = \bar{\psi}_{\mathbf{r},i} \psi_{\mathbf{r},i}$ есть полная электронная плотность и плотность отдельно взятых электронов i -го сорта соответственно.

Теперь перейдем собственно к электрон-фононному взаимодействию \mathcal{A}_{e-ph} , начиная анализ с лабораторной системы отсчета (ЛСО).

2.2.1 Лабораторная система отсчета (ЛСО)

В лабораторной системе отсчета электрон-фононное взаимодействие можно разделить на два вида

- электрон-фонон-ионное (ЭФИ)
- электрон-фонон-примесное (ЭФП)

ЭФИ взаимодействие возникает в результате искажения ионной зарядовой плотности в поле звуковой волны \mathbf{u} , $n_{ion}(\mathbf{u}) = n_{ion}(1 - \text{div } \mathbf{u})$. Это есть чисто Кулоновское взаимодействие электронов с неоднородностями ионного заряда,

Второе, ЭФП взаимодействие, есть следствие смещения примесей звуковой волной, $\mathbf{r}_{imp}(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{r}_{imp} + \mathbf{u}(\mathbf{r}_{imp})$, что и приводит к деформации случайного потенциала $U(\mathbf{r}) \rightarrow U(\mathbf{r}) - \nabla_\alpha (u_\alpha(\mathbf{r})U(\mathbf{r}))$:

$$H^{LFR} = H_K + H_U + H_{e-e} + H_{e-ph}^{LFR}, \quad (2.3)$$

где H_K есть кинетическая энергия, а H_U исходный случайный потенциал,

$$H_K = \sum_{\mathbf{p},i} \xi_i(\mathbf{p}) \bar{\psi}_{\mathbf{p},i} \psi_{\mathbf{p},i}, \quad (2.4)$$

$$H_U = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}',i} U_{imp}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \bar{\psi}_{\mathbf{p},i} \psi_{\mathbf{p}',i},$$

H_{e-e} есть электрон-электронное взаимодействие

$$H_{e-e} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_0(\mathbf{q}) n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}}, \quad (2.5)$$

а H_{e-ph}^{LFR} описывает собственно электрон-фононное взаимодействие,

$$H_{e-ph}^{LFR} = H_{e-ph-ion}^{LFR} + H_{e-ph-imp}^{LFR}, \quad (2.6)$$

$$H_{e-ph-ion}^{LFR} = \sum_{\mathbf{q}} [(n_{ion} \text{div } \mathbf{u})_{\mathbf{q}} V_0(q)] n_{-\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

$$= \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},i} n_{ion} V_0(q) (i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q},i} \psi_{\mathbf{p},i},$$

$$H_{e-ph-imp}^{LFR} = \sum_{\mathbf{q}} \left[(-\nabla_\alpha [u_\alpha U_{imp}(\mathbf{r})])_{\mathbf{q}} \right] n_{-\mathbf{q}} \quad (2.8)$$

$$= \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},i} U_{imp}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) (-i(\mathbf{p}' + \mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q},i} \psi_{\mathbf{p},i},$$

Обычно этот Гамильтониан используется в приближении статической экранировки в RPA, когда $V_0(q) \rightarrow V(q) = (\sum_i \nu_i)^{-1}$. Поскольку электронейтральность в равновесии подразумевает $n_{ion} = \sum_j (n_j)_{eq} = \sum_j \nu_j (p_F v_F / d)_j$, это приводит к

$$H_{e-ph-ion}^{LFR} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},i} (p_F v_F / d) (i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q},i} \psi_{\mathbf{p},i}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Движущаяся система отсчета (ДСО)

Анализ электрон-фононного взаимодействия крайне удобно проводить в (со-) движущейся системе отсчета (ДСО), в которой координатные оси жестко связаны с ионной решеткой и деформируются при наличии звуковой волны. Как показал Цунето, переход в такую неоднородную и нестационарную движущуюся систему отсчета в линейном приближении по смещению ионов \mathbf{u} эквивалентен каноническому преобразованию \hat{U} [3-5]:

$$\psi \rightarrow \psi' = \hat{U}\psi \implies \psi = \hat{U}^{-1}\psi', \quad (2.10)$$

где собственно преобразование \hat{U} есть

$$\hat{U} = \left(1 + \frac{1}{2} \{u_\alpha, \nabla_\alpha\} \right) \quad (2.11)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \quad (2.12)$$

$$= \left(1 + i\mathbf{u}_q \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \right). \quad (2.13)$$

Это преобразование меняет Гамильтониан, генерируя новые члены линейные по смещению ионов \mathbf{u} . Такие члены появляются от H_K , H_U and H_{e-e} , в то время как $H_{e-ph}^{(LFR)}$ очевидно не меняется в линейном приближении по \mathbf{u} (поскольку он уже линеен, описывая электрон-фононное взаимодействие). Не следует забывать, что динамика системы описывается действием, в котором помимо Гамильтониана есть также временная производная, которая также приводит к дополнительному вкладу. Это эквивалентно аккуратному обращению с левой частью уравнения Шредингера, $i\partial_t\Psi$. Таким образом, мы получаем следующие линейные по фононному полю вклады:

- Временная производная

$$i\bar{\psi}\partial_t\psi \rightarrow \tag{2.14}$$

$$i\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{u} - i\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\bar{\psi}\partial_t\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{u} - i\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\psi$$

$$= i\bar{\psi}\partial_t\psi - i\bar{\psi}\left(\frac{1}{2}\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} + i\dot{\mathbf{u}}\cdot\nabla\right)\psi$$

$$\delta H_{e-ph,1}^{CFR} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},i} (\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p})\bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q},i}\psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q},i} \tag{2.15}$$

$$= \sum_{\mathbf{p},\varepsilon,\omega,\mathbf{q},i} (-i\omega\mathbf{u}_{\omega,\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p})\bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2,\varepsilon+\omega,i}\psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2,\varepsilon,i}$$

- Кинетическая энергия

$$\delta H_{e-ph,2}^{CFR} = H_K \left[\overline{(\widehat{U}^{-1}\psi)}, \widehat{U}^{-1}\psi \right] - H_K [\bar{\psi}, \psi] \tag{2.16}$$

$$= - \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},i} \bar{\psi}_i [(\xi_i(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) - \xi_i(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2)) i\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}] \psi_i$$

$$= - \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},i} \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2,i} (i\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{q})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{q}})\psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2,i} \tag{2.17}$$

- Случайный потенциал

$$\delta H_{e-ph,3}^{CFR} = H_U \left[\overline{(\widehat{U}^{-1}\psi)}, \widehat{U}^{-1}\psi \right] - H_U [\bar{\psi}, \psi] \tag{2.18}$$

$$= - \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q},i} U_{imp}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) [i\mathbf{u}_{\mathbf{q}}\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{p}')] \bar{\psi}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2,i}\psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2,i}$$

- Электрон-электронное взаимодействие

Под действием канонического преобразования электронная плотность преобразуется как

$$n_i(\mathbf{r}) = \bar{\psi}_i(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}) \rightarrow \overline{(\widehat{U}^{-1}\psi)}_i(\mathbf{r}) (\widehat{U}^{-1}\psi)_i(\mathbf{r}),$$

$$n_i(\mathbf{r}) \rightarrow n_i(\mathbf{r}) + \partial_\alpha(u_\alpha(\mathbf{r})n_i(\mathbf{r})), \tag{2.19}$$

так что вклад электрон-электронного взаимодействия

$$\begin{aligned}
\delta H_{e-ph,4}^{CFR} &= H_{e-e} \left[\overline{\left(\widehat{U}^{-1} \psi \right)}, \widehat{U}^{-1} \psi \right] - H_{e-e} [\bar{\psi}, \psi] \\
&= - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} u_{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\alpha} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \\
&= \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{Q}, \mathbf{q}, i, j} i u_{\mathbf{q}, \alpha} Q_{\alpha} V_0(\mathbf{Q}) \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}+\mathbf{q}, i} \bar{\psi}_{\mathbf{p}', j} \psi_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}, j} \psi_{\mathbf{p}, i}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Теперь мы можем собрать все вклады воедино и посмотреть на результат,

$$H_{e-ph}^{CFR} = H_{e-ph}^{LFR} + \sum_i \delta H_{e-ph, i}^{CFR}. \tag{2.21}$$

Следует подчеркнуть два факта. Во-первых, электрон-фонон-примесное взаимодействие почти полностью сокращается:

$$\begin{aligned}
&H_{e-ph-imp}^{LFR} + \delta H_{e-ph, 2}^{CFR} \\
&= - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} U_{imp}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) (i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \bar{\psi}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}, i} \psi_{\mathbf{p}, i}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Это сокращение отвечает тому факту, что преобразование эффективно возвращает примеси в равновесное положение, в то время как оставшаяся часть есть следствием пространственной неоднородности движущейся системы отсчета.

Во-вторых, в приближении среднего поля электрон-фонон-ионный член сокращается с вкладом, возникающим после преобразования из электрон-электронного взаимодействия [5]:

$$\left(H_{e-ph, 3}^{CFR} \right)_{HF} = \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{Q}, \mathbf{q}, i, j} i u_{\mathbf{q}, \alpha} Q_{\alpha} V_0(\mathbf{Q}) \langle \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}+\mathbf{q}, i} \psi_{\mathbf{p}, i} \rangle \bar{\psi}_{\mathbf{p}', j} \psi_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}, j} \\
&= - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}, j} i u_{\mathbf{q}, \alpha} q_{\alpha} V_0(\mathbf{q}) (n_{el})_{e\mathbf{q}} \bar{\psi}_{\mathbf{p}', j} \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}, j} \\
&= - H_{e-ph-ion}^{LFR}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Таким образом, электрон-фононное взаимодействие в ДСО выглядит как

$$\begin{aligned}
(H_{e-ph}^{CFR})_{HF} &= - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} (\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}) \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, i} \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2, i} \\
&- \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, i} (i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2, i} \\
&- \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} U_{imp}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) (i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \bar{\psi}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}, i} \psi_{\mathbf{p}, i}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

В рассматриваемых в этой работе задачах электрон-фононное взаимодействие определяется вторым членом, который качественно отвечает тензору деформаций электронного газа $\propto p_\alpha \partial_\beta \varepsilon \equiv p_\alpha v_\beta$. Эффекты происходящие от первого члена малы по адиабатическому параметру s/v_F . Третий член обычно приводит к поправкам порядка обратного кондактанса $(p_{Fl})^{-1}$, но его учет оказывается важным для получения правильных ответов при анализе d -wave сверхпроводника (из-за наличия существенной перенормировки вычета электронной функции Грина). В нормальном и s -wave сверхпроводящем состоянии его учет был бы ничем иным как превышением точности.

Наконец, во втором члене уравнения (2.25) нужно также учесть Кулоновскую экранировку, которая происходит от электрон-электронного взаимодействия H_{e-e} . Кулоновское взаимодействие генерирует динамическое скалярное поле, которое пытается подавить зарядовые флуктуации, так что электрон-фононное взаимодействие в таких условиях есть (смотрите также Рис. 2.1)

$$\begin{aligned}
(H_{e-ph}^{CFR})_{scr} &= \\
&- \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, i} (i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2, i} \\
&+ \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, i} \bar{\psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, i} \left(V_{RPA} \sum_j \nu_j \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)_j \text{div} \mathbf{u} \right) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2, i},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

где второй член собственно описывает электро(квази)статический потенциал, генерируемый акустической волной. Также предполагается статическая экранировка в RPA приближении, когда $V_{RPA} = (\sum_j \nu_j)^{-1}$ (в записанном Гамильтониане мы также опустили несущественные для нормального металла члены).

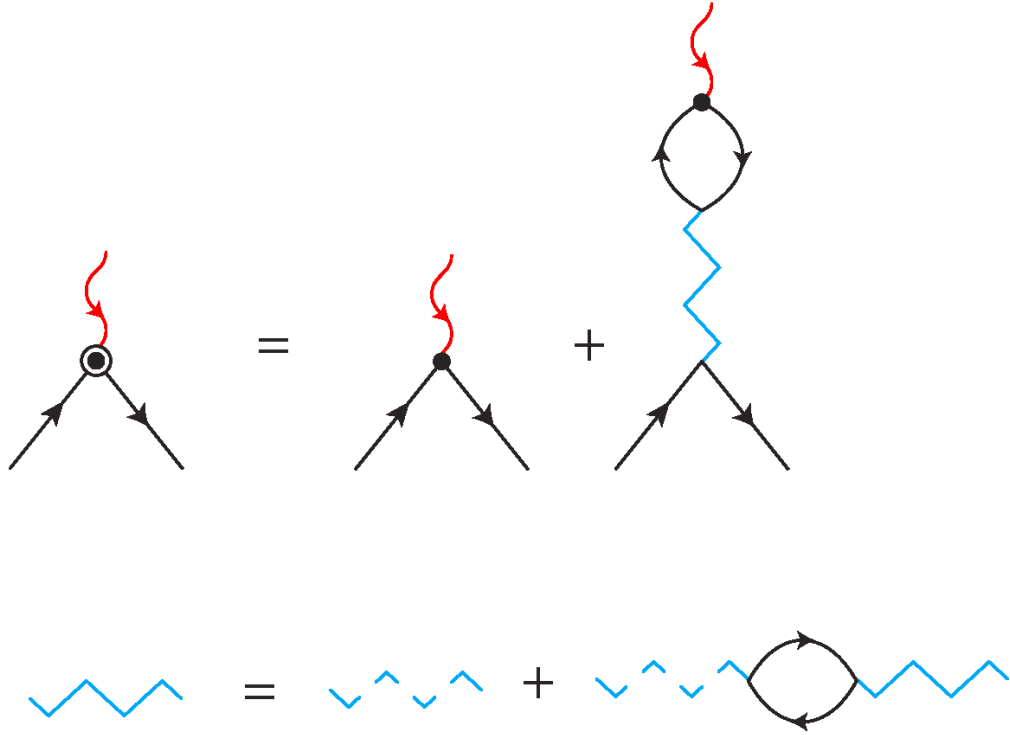


Рис. 2.1: Экранированная вершина электрон-фононного взаимодействия.

В этой главе мы сперва рассмотрим эффекты неполной экранировки, начиная с голого H_{e-ph}^{CFR} электрон-фононного взаимодействия и явно рассматривая его экранировку (Рис.2.1, Ур.(2.26)). Флуктуации зарядовой плотности, отклонение от электронейтральности, оказываются довольно сильными в сильно грязных случаях $p_F l \sim 1$.

В пределе очень сильного Кулоновского взаимодействия его влияние сводится к несжимаемости электронного газа, когда зарядовые флуктуации заморожены и электронная зарядовая плотность фиксирована и равна ионной. Это подразумевает обращение электрон-фононной вершины в нуль после усреднения по Ферми поверхности, то есть бесследовость вершины:

$$p_\alpha v_\beta \xrightarrow{\text{учет экранировки}} p_\alpha v_\beta - \frac{1}{d} p_F v_F \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.27)$$

где подразумевается однозонный случай. В следующей главе мы перейдем именно к этому пределу очень сильного Кулоновского взаимодействия, которым зачастую и ограничиваются [20]. В этом пределе, поскольку зарядовая мода за-

морожена, для получения диффузного вклада в поглощения ультразвука нам необходимо будет перейти к рассмотрению других макроскопических физических величин, например спиновой поляризации или плотности энергии (глава 4).

2.3 Локальные процессы

Приведем сперва хорошо известный ответ для поглощения в локальном канале [1, 5, 20]. Соответствующая диаграмма, описывающая локальные процессы (смотрите рисунок 2.2), дает

$$\Sigma^R = \text{Tr} \left[\check{\Gamma}_{\mathbf{q}}^{(2)} \check{G}_{-\mathbf{q}} \Gamma_{-\mathbf{q}}^{(1)} \check{G}_{\mathbf{q}} \right] \quad (2.28)$$

$$= \text{Tr} \left[\Gamma_{\mathbf{q}} G_{-\mathbf{q}}^K \Gamma_{-\mathbf{q}} G_{\mathbf{q}}^R + \Gamma_{\mathbf{q}} G_{-\mathbf{q}}^R \Gamma_{-\mathbf{q}} G_{\mathbf{q}}^K \right], \quad (2.29)$$

где индексы \pm подразумевают аргументы $\varepsilon \pm \omega/2$, $\mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2$. Мы интересуемся только поглощением ультразвука, которое определяется мнимой частью собственной энергии (действительная часть дает поправку к скорости звука, не представляющую особого интереса)

$$\alpha_{n,l} \equiv \frac{1}{\rho_m \omega} \text{Im} \Sigma^A \simeq \frac{1}{2\rho_m} \int (d\varepsilon d\mathbf{p}) \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) (\Gamma_{\mathbf{q}})_{\alpha} (\Gamma_{-\mathbf{q}})_{\beta} (G^R - G^A)^2, \quad (2.30)$$

После усреднения по направлениям электронного импульса и последующего ξ -интегрирования получаем

$$\alpha_{n,l} = \frac{1}{d(d+2)} \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{d-2}{d} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{q^2} \right) \frac{\nu_{tot}}{\rho_m \gamma} p_F^2 v_F^2 q^2, \quad (2.31)$$

это выражение является матрицей в пространстве поляризаций фононов. Итого получаем

$$\alpha_{n,l} = C \frac{\nu_{tot} p_F^2}{\rho_m} D q^2, \quad (2.32)$$

где константа C есть $4(d-1)/[d(d+2)]$ для продольных фононов и $2/(d+2)$ для поперечных. Важно заметить, что поглощение ультразвука пропорционально коэффициенту диффузии только в рамках квазиклассического приближения,

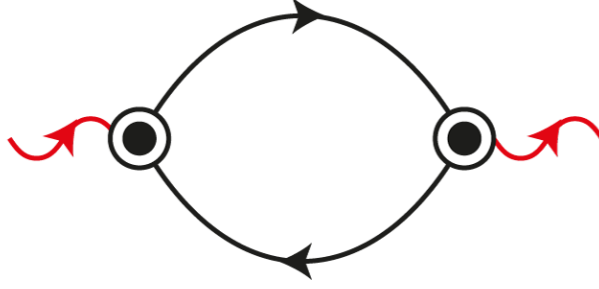


Рис. 2.2: Диаграмма отвечающая локальному поглощению ультразвука. На этом рисунке подразумевается использование со-движущейся системы отсчета. Вычисление в лабораторной системе отсчета более громоздкое и требует рассмотрения нескольких диаграмм [20].

в общем случае зависимость более сложная: слаболокализационная поправка к поглощению ультразвука положительна [24], в то время как для коэффициента диффузии она отрицательна. Также отметим, что результат можно представить в виде

$$\alpha_{n,l} \sim \frac{\rho_{el}}{\rho_m} Dq^2, \quad (2.33)$$

где ρ_{el} есть полная электронная плотность. Это выражение явно демонстрирует малость поглощения по адиабатическому параметру отношения масс электрона и иона $\propto \rho_{el}/\rho_m$.

2.4 Вклад канала зарядовой плотности

Теперь перейдем к собственно вычислению вклада (диффузионного) канала зарядовой плотности [5, 15, 20]. Голая электрон-фононная вершина (2.25) в главном приближении является диагональным тензором в пространстве сортов электронов:

$$\hat{\Gamma}_{\text{bare}} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Gamma_N \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Диагональность (2.34) отражает наше предположение об отсутствии междолинных переходов. Теперь учтем Кулоновскую экранировку, которая генериру-

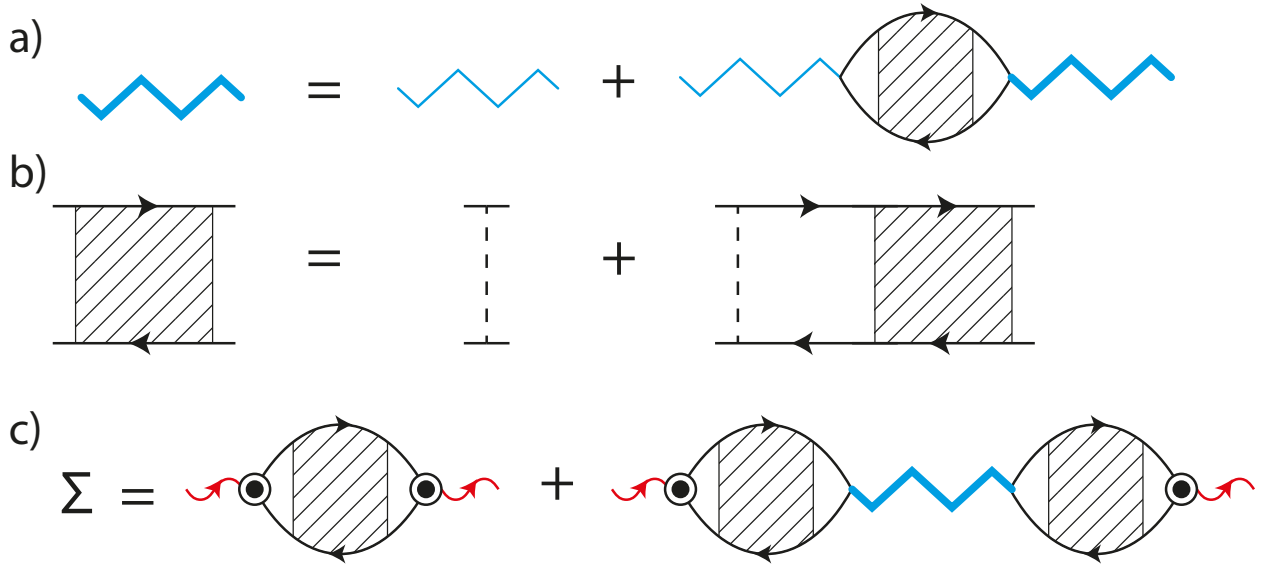


Рис. 2.3:

ет скалярное противодействие, электростатический потенциал, одинаковый для всех электронов,

$$\hat{\Gamma}_C = -\frac{\sum_i \Gamma_i \nu_i}{V_0^{-1}(q) + \sum_i \nu_i} \hat{1} \quad (2.35)$$

Полная экранированная вершина есть сумма $\hat{\Gamma}_{\text{full}} = \hat{\Gamma}_{\text{bare}} + \hat{\Gamma}_C$. Деформационные потенциалы Γ_i усредненные по ферми поверхности обычно используются в приближении [5]

$$\Gamma_i = [(\Gamma_{bs}(\mathbf{p}))|_{FS} - p_F v_F / d_e]_i \quad (2.36)$$

где Γ_{bs} представляет собой искажение спектра при сжатии решетки, а $p_F v_F / d_e$ есть усредненный тензор напряжений в электронной жидкости. Мы рассмотрим простейшую модель, в которой вклад решетки однороден в импульсном пространстве $\Gamma_{bs}(\mathbf{p}) = \Gamma_{bs}$ и сводится к сдвигу дна зоны проводимости.

Для того, чтобы получить затухание ультразвука нам надо вычислить мнимую часть фоновой собственной энергии Σ . Она дается диаграммами показанными на Рис.2.3с. Вторая диаграмма важна если в экранировке существенна динамичность, зависимость от частоты ω . В этой главе мы рассматриваем

влияние лишь зарядового канала, что подразумевает идентичность электронных ветвей. Тогда полная электрон-фононная вершина, которая дается суммой (2.34) и (2.35), диагональна:

$$\widehat{\Gamma}_s = \frac{\Gamma}{1 + N_f \nu V_0(q)}, \quad (2.37)$$

где N_f есть число фермионных ветвей. Обычно оно равно $N_f = 2N_v$ где N_v есть число идентичных долин в полупроводнике. Например, $N_v = 6$ для трехмерного кремния или $N_v = 2$ для графена. Первая диаграмма Рис.2.3с дает

$$\Sigma_1 = \left(\frac{\Gamma}{1 + \nu N_f V_0(q)} \right)^2 q^2 N_f \nu \frac{i\omega}{-i\omega + Dq^2} \quad (2.38)$$

Вторая диаграмма, как было указано выше, важна в случае динамической экранировки, когда нельзя пренебречь частотной зависимостью поляризационного оператора $\Pi(\omega, \mathbf{q})$, то есть на частотах $\omega \gtrsim Dq^2$. Ее вклад

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \left(\frac{\Gamma q}{1 + \nu N_f V_0(q)} \right)^2 \left(N_f \nu \frac{i\omega}{-i\omega + Dq^2} \right)^2 \\ &\times \left(-\frac{1}{V_0^{-1}(q) + N_f \nu Dq^2 / (-i\omega + Dq^2)} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Складывая эти два выражения $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ мы получаем

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\Gamma^2 q^2}{1 + N_f \nu V_0(q)} \times \\ &\times N_f \nu \left(\frac{i\omega(i\omega + Dq^2 + N_f \nu V_0(q) Dq^2)}{\omega^2 + (Dq^2)^2 (1 + N_f \nu V_0(q))^2} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Поглощение ультразвука определяется мнимой частью Σ ,

$$\tau_{ph,ML}^{-1} = \frac{\Gamma^2}{\rho_m v_s^2} \frac{N_f \nu Dq^2}{(Dq)^2 (1 + N_f \nu V_0(q))^2}, \quad (2.41)$$

так что отношение полного поглощения (зарядовый канал + локальный) к локальному ответу есть

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}(q) \equiv \frac{\alpha_{n,C}}{\alpha_{n,l}} = 1 + \frac{1}{c_l} \frac{(\Gamma/p_F v_F)^2}{(v_s/v_F)^2 + d_e^{-2} (q^2 l^2) (1 + N_f \nu V_0(q))^2} \quad (2.42)$$

Для двумерного электронного газа с постоянной диэлектрической постоянной ε окружающей среды мы имеем $V_0(q) = V_{2D}(q) = 2\pi e^2/\varepsilon q$. В таком случае, для релевантных значений волнового вектора \mathbf{q} фактор усиления $\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}(q)$ сводится к константе. Согласно Ур.(1.18) это соответствует мощности охлаждения, которая ведет себя как $J(T) \propto T^6$ [15], но с усиленным префактором пропорциональным $\varepsilon^2/g_{\square}^2$ (где g_{\square} есть безразмерный кондактанс на единицу площади в единицах e^2/h) при сильном беспорядке и большой диэлектрической постоянной ε . В трехмерных проводниках, где $V_0(q) \propto q^{-2}$, Ур.(2.42) имеет режим, в котором $\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}(q) \propto q^2$. Поток тепла в таком режиме соответственно ведет себя как $J(T) \propto T^8$ [15].

Интересная ситуация возникает в двумерном электронном газе с расположенным поблизости металлическим затвором, который дополнительно экранирует Кулоновское взаимодействие и таким образом усиливает характерные флуктуации плотности заряда. Для подобной геометрии и волнового вектора акустической волны \mathbf{q} параллельного плоскости электронного газа $V_0(q)$ заменяется на $V_g(q) = V_{2D}(q) (1 - e^{-2qb})$, где b есть расстояние между электронным газом и затвором. Более того, для ультразвука с длиной волны $1/q \geq b$ экранированный таким образом Кулон $V_g(q) \approx V(q) \cdot 2qb \approx \text{const}$ и наличие адиабатического параметра в знаменателе (2.42) становится важным при достаточно низких температурах:

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,C_{\text{gate}}} = 1 + \frac{4(\Gamma/p_F v_F)^2}{(v_s/v_F)^2 + (q^2 l^2)(4\pi\nu e^2 b/\varepsilon)^2}, \quad (2.43)$$

где Кулоновское взаимодействие все еще предполагается относительно сильным, $2\pi\nu e^2 b/\varepsilon \gg 1$. В этом случае возникает режим, где фактор усиления пропорционален q^{-2} , и мощность охлаждения $J(T) \propto T^4$.

2.5 Заключение

Итак, в этой главе мы рассмотрели поглощение ультразвука за счет зацепления акустической волны за диффузную моду отвечающую зарядовой плотности. В разделе 2.2 мы описали модель электрон-фононного взаимодействия, применимую для довольно общих условий и в разделе 2.3 привели обычный ответ для поглощения ультразвука, предсказываемый стандартной теорией (за счет процессов Пиппардовского типа). Раздел 2.4 же посвящен собственно описанию поглощения в диффузном канале зарядовой плотности.

Мы продемонстрировали, что рассматриваемый эффект актуален для легированных полупроводников близких к пределу применимости теории неупорядоченных проводников по критерию Иоффе-Регеля $k_F l \sim 1$, где сильный беспорядок обеспечивает релаксацию заряда достаточно медленную, чтобы перебороть эффекты Кулоновской экранировки. Наиболее существенные особенности диффузного канала состоят в росте поглощения с усилением беспорядка (в отличие от локального канала, где поглощение будет ослабевать) а также в явной зависимости от характера Кулоновского взаимодействия. Второй из перечисленных фактов будет экспериментально проявляться в виде зависимости от диэлектрической постоянной подложки. Также интересна геометрия, при которой наличие металлического затвора будет приводить к дополнительной экранировке Кулоновского взаимодействия, позволяя контролировать интенсивность поглощения ультразвука меняя расстояние между затвором и плоскостью двумерного электронного газа.

Глава 3

Многозонный случай

3.1 Введение

В предыдущей главе мы рассмотрели поглощение ультразвука за счет флуктуаций зарядовой плотности. В этом случае имела место конкуренция (сильной) Кулоновской экранировки и собственно сильное поглощение в канале за счет медленной релаксации заряда. В этой главе мы изучаем другой случай, случай возбуждения асимметричных мод плотности, например когда электронные спиновые поляризации “вверх” и “вниз” колеблются в противофазе, оставляя полную электронную плотность неизменной. Следуя аналогии с механическими колебаниями, зарядовую моду можно называть симметрической, поскольку в ней все сорта электронов вовлечены в движение и происходит оно при этом синхронно. Если же в системе имеется несколько сортов электронов, то возможны также колебательные моды, в которых движение происходит в противофазе, ортогонально симметричной моде. Номинально акустическая волна не зацеплена за такие моды, чтобы это изменить нужно внести асимметрию в электрон-фононное взаимодействие по сортам электронов. Этот сценарий был изучен на примере нескольких зон в полупроводниках в работах Пруннилы и соавторов [22, 23]. Мы описываем механизм возникновения этого эффекта а также обсуждаем принципиально новый случай поглощения ультразвука за счет

спиновой поляризации электронов [8]. Подобная ситуация релевантна для полупроводников в сильном внешнем магнитном поле и ферромагнетиков, где имеется сильное внутреннее эффективное поле из-за обменного взаимодействия.

В разделе 3.2 мы описываем подход к задаче о скорости поглощения ультразвука в многокомпонентном электронном газе на языке макроскопических уравнений движения, который справедлив при очень общих условиях. Раздел 3.3 посвящен конкретному примеру спин-поляризованного внешним магнитным полем двумерного электронного газа. В разделе 3.4 проведена оценка влияния спин-орбитального взаимодействия на поглощение ультразвука спиновой диффузной модой (поскольку спин-орбитальное взаимодействие приводит к релаксации спиновой поляризации).

3.2 Макроскопические уравнения движения

Сперва покажем, что задачу о вкладе диффузного канала в поглощение ультразвука можно рассмотреть на довольно простом языке макроскопических уравнений движения для электронной плотности и тока [8],

$$\begin{cases} \partial_t n^{(i)} + \operatorname{div} \mathbf{j}^{(i)} = 0, \\ \mathbf{j}^{(i)} = -D \nabla n^{(i)} - \kappa_i \mathbf{F}^{(i)} \end{cases} \quad (3.1)$$

где индекс (i) нумерует ветви квазичастиц, $n^{(i)}$ есть электронная плотность, $\mathbf{j}^{(i)}$ есть квазичастичный ток, $\kappa_i = \nu_i D_i$ подвижность, D_i коэффициент диффузии для i -й ветви, $\mathbf{F}^{(i)} = -\nabla U^{(i)}$ есть сила и наконец $U^{(i)}$ потенциальная энергия. Ограничиваясь простейшим случаем, мы будем считать, что процессы переброса между электронными ветвями отсутствуют и таким образом уравнения непрерывности в (3.1) действительно имеют ноль в правой части для всех плотностей $n^{(i)}$, не только для полной плотности. Влияние процессов релаксации частичных плотностей $n^{(i)}$ мы рассмотрим в следующих разделах данной главы.

Потенциальная энергия $U^{(i)} = U_C + \Phi^{(i)}$ в Ур.(3.1) имеет два вклада, Кулоновский и фононный $\Phi^{(i)} = \Gamma^{(i)} \text{div } \mathbf{u}$,

$$U^{(i)} = \int \mathcal{V}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_j \delta n^{(j)}(\mathbf{r}') + \Gamma^{(i)} \text{div } \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{V}_0(\mathbf{r})$ есть голое Кулоновское взаимодействие между электронами проводимости; мы будем в основном пользоваться его Фурье образом $V_0(q)$. Подчеркнем, что $V_0(q)$ не включает экранировку электронами проводимости в рассматриваемом образце, она возникает самосогласованным образом из уравнений движения. Уравнения (3.1), (3.2) составляют полный набор уравнений, описывающий динамику плотностей n_i ,

$$-i\omega n^{(i)} + iq_\alpha \left(-iDq^\alpha n + i\kappa_i q^\alpha \left[V_0(q) \sum_j n^{(j)} + \Gamma^{(i)} \partial_\beta u^\beta \right] \right) = 0. \quad (3.3)$$

Этот результат представим в виде

$$n^{(i)}(\omega, q) = \Pi_i(\omega, q) (\Phi_i(\omega, q) - \Phi_C(\omega, q)), \quad (3.4)$$

где $\Phi_i(\omega, q) = \Gamma^{(i)} \text{div } \mathbf{u}$, $\Phi_C(\omega, q) = V_0(q)n = V_0(q) \sum_i n^{(i)}$ есть самосогласованный динамический электростатический потенциал, противодействие Кулона возмущениям плотности, а $\Pi_i = \nu_i D_i q^2 / (-i\omega + D_i q^2)$ есть восприимчивости (поляризационные операторы) квазичастиц соответствующей ветви. Кулоновское противодействие определяется динамикой полной плотности n , уравнение на которую мы получим просто просуммировав по всем ветвям,

$$n = \sum_i \Pi_i(\omega, q) \Phi_i(\omega, q) - V_0(q) \left(\sum_i \Pi_i(\omega, q) \right) n \quad (3.5)$$

$$\implies n = \frac{\sum_i \Pi_i(\omega, q) \Phi_i(\omega, q)}{1 + V_0(q) \sum_i \Pi_i(\omega, q)}. \quad (3.6)$$

Таким образом электрический потенциал $\Phi_C(\omega, q)$ есть

$$\Phi_C(\omega, q) = \frac{\sum_i \Pi_i(\omega, q) \Phi_i(\omega, q)}{V_0^{-1}(q) + \sum_i \Pi_i(\omega, q)} \quad (3.7)$$

Предел сильного Кулоновского взаимодействия $V_0(q) \rightarrow 0$ является универсальным в смысле выпадания из ответов подробностей о голом взаимодействии.

Вклад диффузного канала в поглощение ультразвука можно выразить как $\alpha_{ph,ML} = \frac{Q_t}{2E_w}$ где Q_t и E_w есть мощность диссипации и энергия акустической волны на единицу объема [25],

$$Q_t = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{F}) , \quad E_w = \frac{\rho_m}{2} \omega^2 u_m^2, \quad (3.8)$$

где u_m есть амплитуда акустической волны и $\mathbf{u} = (\mathbf{q}/q)u_m \exp[-i\omega t + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}]$.

Для мощности диссипации мы получаем

$$Q_t = \frac{1}{2} \sum_i \text{Re} (\mathbf{j}^{(i)} \cdot \mathbf{F}^{(i)*}) \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \text{Re} \left[-i\omega (\Phi^{(i)} - \Phi_C(\omega, q)) \Pi^{(i)} (\Phi^{(i)} - \Phi_C(\omega, q))^* \right] \quad (3.10)$$

$$= \frac{\omega}{2} \sum_i \text{Im} \left[(\Phi^{(i)} - \Phi_C(\omega, q)) \Pi^{(i)} (\Phi^{(i)} - \Phi_C(\omega, q))^* \right],$$

так что затухание ультразвука дается выражением

$$\alpha_{\text{diff}} = \frac{q^2}{\rho_m \omega} \sum_i \text{Im} \left[\Gamma_s^{(i)} \Pi^{(i)} \left[\Gamma_s^{(i)} \right]^* \right], \quad (3.11)$$

где Γ_s есть экранированные электрон-фононные вершины

$$\Gamma_s^{(i)} = \Gamma^{(i)} - \frac{\sum_i \Pi_i(\omega, q) \Gamma^{(i)}}{1 + V_0(q) \sum_i \Pi_i(\omega, q)}. \quad (3.12)$$

Результат (3.11) применим для довольно общего случая. Закончим этот раздел тем, что убедимся в воспроизводимости ответа (2.41) для скорости поглощения ультразвука, полученного в предыдущей главе для случая неполной экранировки и идентичных электронных ветвей:

$$\alpha_{\text{diff}} = \frac{q^2}{\rho_m \omega} \text{Im} \left[2 \times \left(\Gamma - \frac{2V_0 \Pi \Gamma}{1 + 2V_0 \Pi} \right) \Pi \left[\Gamma - \frac{2V_0 \Pi \Gamma}{1 + 2V_0 \Pi} \right]^* \right] \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2q^2}{\rho_m \omega} \text{Im} \left[\frac{\Gamma^2 \Pi}{|1 + 2V_0 \Pi|^2} \right] \\ &= \frac{2q^2}{\rho_m \omega} \text{Im} \left[\frac{\Gamma^2 D q^2 (-i\omega + D q^2)^*}{|(-i\omega + D q^2) + 2V_0 D q^2|^2} \right] \\ &= \frac{\Gamma^2}{\rho_m v_s^2 + (2\nu V_0 + 1)^2 (D q)^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Действительно, ответ (3.14) полученный с помощью макроскопических уравнений в точности совпадает с ответом (2.41), полученным в предыдущей главе с помощью диаграммной техники.

3.3 Спин-поляризованный двумерный электронный газ

Описанный в предыдущем разделе подход справедлив в очень общем случае. Теперь рассмотрим полученный результат на примере простого частного случая электронного газа с магнитным полем в плоскости образца. Кулоновское взаимодействие при этом считается сильным $V(q) \rightarrow \infty$, так что флуктуации полной зарядовой плотности запрещены. В таком случае Кулоновский потенциал принимает вид

$$\Phi^C = \frac{\sum_i \Pi^{(i)} \Phi^{(i)}}{\sum_i \Pi^{(i)}} \quad (3.15)$$

и роль которого заморозить полную плотность состояний, так что $\delta(n_1 + n_2) = 0$. Используя результат (3.11), полученный ранее в этой главе, мы имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{q^2}{\rho_m \omega} \operatorname{Im} \left[\frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2) \Pi_2}{\Pi_1 + \Pi_2} \Pi_1 \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2) \Pi_2^*}{(\Pi_1 + \Pi_2)^*} + \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1) \Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2} \Pi_2 \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1) \Pi_1^*}{(\Pi_1 + \Pi_2)^*} \right] \\ &= \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 q^2}{\rho_m \omega} \operatorname{Im} [\Pi_1^{-1} + \Pi_2^{-1}]^{-1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Используя также связь подвижности $\kappa_i = \nu_i D_i$ с плотностью состояний и коэффициентом диффузии получаем

$$\alpha = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}{\rho_m} \frac{\nu_* D_* q^2}{v_s^2 + (D_* q)^2} \quad (3.17)$$

где $v_s = \omega/q$ есть скорость звука, а $\nu_* = (\nu_1^{-1} + \nu_2^{-1})^{-1}$ и $D_* = \nu_*^{-1} ((\nu_1 D_1)^{-1} + (\nu_2 D_2)^{-1})^{-1}$ есть приведенные плотность состояний и коэффициент диффузии. Полное затухание ультразвука дается суммой канала спиновой диффузии и

локального ответа, где последний равен

$$\alpha_{n,l} = c_l \frac{p_F^2}{\rho_m} (\nu_1 D_1 + \nu_2 D_2) q^2. \quad (3.18)$$

Это уравнение совпадает с выражением из главы 2 если оба электронных спина идентичны, $\nu_1 = \nu_2$, $D_1 = D_2$. Таким образом, относительный вклад спиновой диффузии есть

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,H}(q) = \frac{\alpha}{\alpha_l} = \frac{1}{c_l} \left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{p_F v_F} \right)^2 \frac{\nu_* D_*}{\nu_1 D_1 + \nu_2 D_2} \frac{v_F^2}{v_s^2 + (D_* q)^2} \quad (3.19)$$

Двумерный электронный газ с магнитным полем приложенным в плоскости образца является одним из важных частных случаев. Асимметрия между электронными ветвями “спин вверх” и “спин вниз” возникает в следствие Зеемановского расщепления, $\varepsilon_{\uparrow(\downarrow)} = \varepsilon_F \pm \mu H/2$, $D_{\uparrow(\downarrow)} = D(1 \pm \mu H/2\varepsilon_F)$ (в то время как $\nu_{\uparrow} = \nu_{\downarrow} = \nu$). Ключевая асимметрия, однако, это асимметрия в электрон-фононной вершине Γ , которая возникает от зависящей от импульса части,

$$\Gamma_{\uparrow} - \Gamma_{\downarrow} = (\partial\Gamma/\partial\varepsilon_F)\mu H \quad (3.20)$$

В простейшей модели

$$\Gamma(p_F) = \Gamma_0 + p_F v_F/2 \rightarrow \partial\Gamma/\partial\varepsilon_F = +1. \quad (3.21)$$

Вводя безразмерное магнитное поле $h = \mu H/2\varepsilon_F$, мы получаем ответ

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,H}(q, h) = 1 + \frac{v_F^2 h^2 (1 - h^2)}{v_s^2 + (Dq(1 - h^2))^2}. \quad (3.22)$$

Фактор усиления $\mathcal{F}_{n,l}^{n,H}$ может стать очень большим для сильной спиновой поляризации, $h \sim 1$. В частности, для малых значений волнового вектора, $ql \leq v_s/v_F$, фактор $\mathcal{F}_{n,l}^{n,H}$ оказывается порядка обратного адиабатического параметра $(v_F/v_s)^2 \sim 10^5$. Этот ответ справедлив в отсутствие какой-либо релаксации спина, что редко имеет место в реальных опытах. Поэтому важно понять, какое влияние она оказывает на полученный ответ.

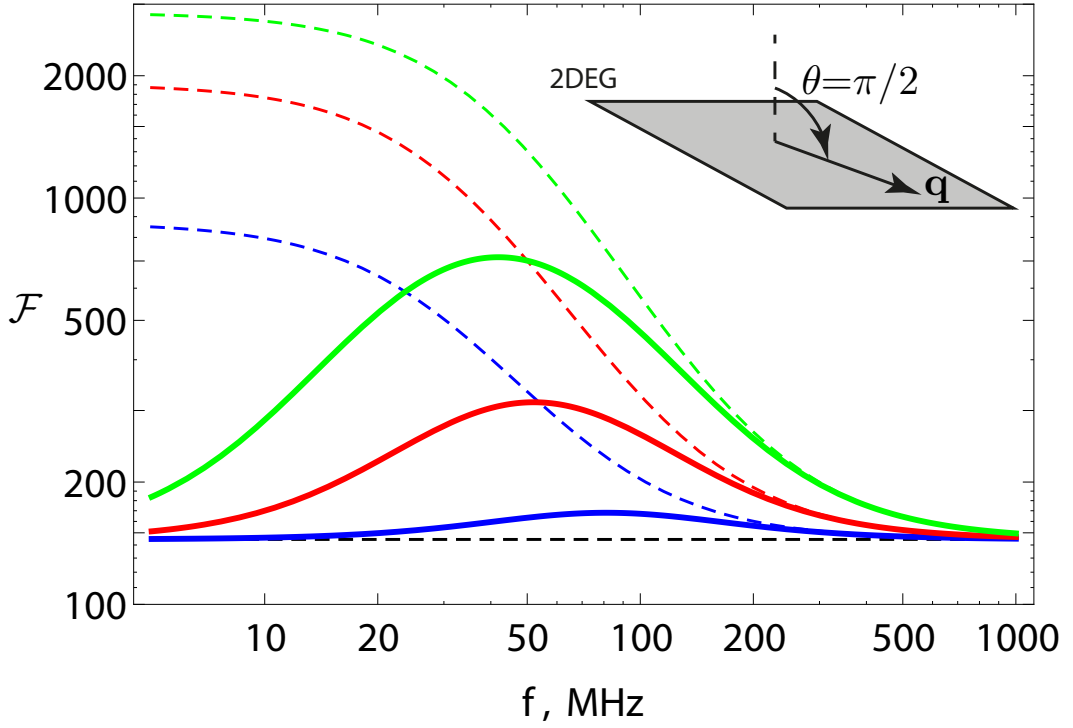


Рис. 3.1: Полный фактор усиления $\mathcal{F}_{n,l}^{n,\text{diff}} = \alpha_{n,\text{diff}}/\alpha_{n,l}$ для ультразвука, распространяющегося параллельно плоскости образца, двумерной пленки InSb. Используемые параметры есть $n = 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, $p_{Fl} = 50$, $\Delta_{SO} = 0.1 \text{ meV}$ [26–29] и магнитные поля 3 Т (синий), 5 Т (красный) и 7 Т (зеленый). Штриховые линии дают ответ в отсутствие спин-орбитального взаимодействия, $\Delta_{SO} = 0$. Черная штриховая линия же дает поглощение ультразвука за счет зарядовой диффузии, описанной в главе 2, $\mathcal{F}_{n,l}^{n,C}$, которое, как можно видеть, оказывается в приведенном случае весьма существенным.

С качественной точки зрения, процессы переворота спина со скоростью релаксации τ_{so}^{-1} нарушают сохранение полной спиновой плотности таким образом ограничивая любые эффекты связанные с диффузией спиновой плотности. Количественно это влияние можно учесть посредством модификации пропагатора спиновой плотности, диффузона, феноменологически вводя в него конечное время жизни спиновой моды,

$$\frac{D_* q^2}{-i\omega + D_* q^2} \Rightarrow \frac{D_* q^2}{-i\omega + D_* q^2 + 1/2\tau_{so}}, \quad (3.23)$$

где τ_{so} есть характерное время спиновой релаксации (которое зачастую возникает от спин-орбитального взаимодействия). Это в итоге ограничивает погло-

щение в спиновом канале

$$\mathcal{F}_{n,l}^{\text{n,spin+SO}}(q, h) = 1 + \frac{q^2 v_F^2 h^2 (1 - h^2)}{(q v_s)^2 + (D q^2 (1 - h^2) + 1/2\tau_{so})^2} \quad (3.24)$$

Таким образом, сильное спин-орбитальное взаимодействие, перемешивающее электронные ветви отвечающие спину “вверх” и спину “вниз”, действительно ограничивает величину усиления. Его максимальное значение становится равным $\mathcal{F}_{max} \sim \tau_{SO}/\tau$ (напомним, что τ_{SO} есть время спиновой релаксации и $\tau \ll \tau_{SO}$ есть время упругого рассеяния) вместо $\mathcal{F}_m \sim (v_F/v_s)^2$. Это делает задачу оптимизации параметров для максимизации фактора усиления сложной, поскольку материалы с большим g -фактором (чтобы максимизировать μH) обычно имеют также и сильное спин-орбитальное взаимодействие. Тем не менее пример пленки InSb показывает, что $\mathcal{F} \sim 10^2$ экспериментально достижим (смотрите Рис.3.1).

Другой релевантный пример дают представляют ферромагнетные металлы с сильным расщеплением зон благодаря обменному взаимодействию. В случае железа Fe: $\mu H^* \approx 1.8 \text{ eV}$, $\varepsilon_F = 11.1 \text{ eV}$, $v_F = 1.98 \times 10^8 \text{ cm/s}$, $v_s \approx 6 \times 10^5 \text{ cm/s}$. Спиновую релаксацию можно оценить как $\tau/\tau_{SO} \sim (\alpha Z)^4 \sim 10^{-3}$, где $\alpha = 1/137$ есть постоянная тонкой структуры и $Z = 26$ есть атомный номер. Это приводит к фактору усиления затухания ультразвука вплоть до значения порядка $\mathcal{F}^H \sim (\mu H^*/\varepsilon_F)^2 (\tau_{SO}/\tau) \sim 10$.

3.4 Время релаксации спиновой плотности за счет спин-орбитального взаимодействия

Теперь мы вычислим τ_{so}^{-1} вследствие спин-орбитального взаимодействия. Мы предполагаем относительную слабость спин-орбитального (SO) взаимодействия, так что SO-расщепление Ферми уровней много меньше Зеемановского, $\Delta_{SO} \ll \Delta_H = g\mu_B H$. Для определенности мы рассмотрим СО-взаимодействие

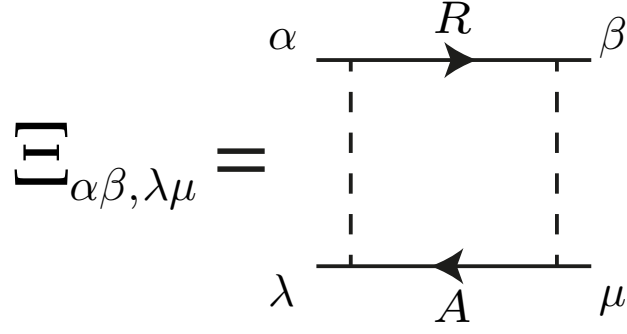


Рис. 3.2: Собственная энергия диффузона, одна ступенька лестницы изображенной на рисунке 2.3b.

типа Рашбы. Нетривиальная по спину часть Гамильтониана тогда равна

$$H_{H+SO} = -\frac{\Delta_H}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{\Delta_{SO}}{2}(\sigma_x n_y - \sigma_y n_x), \quad (3.25)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ есть единичный вектор по направлению импульса. Время упругого рассеяния оказывается одинаковым для электронов обеих поляризаций (при условии отсутствия электрон-дырочной асимметрии):

$$\hat{G}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \sum_{\pm} \frac{\hat{P}_{\pm}}{\varepsilon - \xi \mp \Delta(\mathbf{n})/2 + i/2\tau}, \quad (3.26)$$

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\Delta_H \sigma_x - \Delta_{SO}(\sigma_x n_y - \sigma_y n_x)}{\Delta(\mathbf{n})} \right), \quad (3.27)$$

$$\Delta(\mathbf{n}) = \sqrt{\Delta_H^2 + \Delta_{SO}^2 - 2\Delta_H \Delta_{SO} n_x}. \quad (3.28)$$

где \hat{G}^R есть запаздывающая электронная функция Грина. Чтобы найти время спиновой релаксации мы вычислим собственную энергию диффузона на нулевых частоте и импульсе ($\omega = 0$, $\mathbf{q} = 0$), изображенную на рисунке 3.2:

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \hat{G}^A(0, \mathbf{p}) \otimes \hat{G}^R(0, \mathbf{p}) \quad (3.29)$$

Вычисление в духе работы [30] приводит к следующему ответу для статического предела $q, \omega = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}(0, \mathbf{0}) = & \left(1 - \hat{S}_x^2 \left[1 - \frac{1}{1 + \tau^2 \Delta_H^2} \right] - \frac{i\tau \Delta_H}{1 + \tau^2 \Delta_H^2} \hat{S}_x \right) \\ & - \frac{\Delta_{SO}^2}{2\Delta_H^2} \left(\frac{\tau^2 \Delta_H^2}{1 + \tau^2 \Delta_H^2} \hat{S}_y^2 - \tau^2 \Delta_H^2 \frac{(3 + \tau^4 \Delta_H^4)}{(1 + \tau^2 \Delta_H^2)^3} \hat{S}_x^2 - \frac{4i\tau^3 \Delta_H^3}{(1 + \tau^2 \Delta_H^2)^3} \hat{S}_x \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $\widehat{\mathbf{S}} = (\widehat{\mathbf{1}} \otimes \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \widehat{\mathbf{1}})/2$ есть полный спин электрон-дырочной пары. Мы заинтересованы только в подпространстве $S_x = 0$ поскольку оно содержит оба интересующих нас собственных вектора. Совершенно естественным образом синглетная мода ($S = 0$), отвечающая зарядовой плотности, остается нетронутой с $\Xi_{S=0} = 1$, в то время как триплетная мода ($S = 1, S_x = 0$) описывающая диффузию спиновой плотности действительно обзаводится конечным временем жизни:

$$\Xi_{S=1, S_x=0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta_{SO}^2}{\Delta_H^2 + \tau^{-2}}. \quad (3.31)$$

Это приводит к следующему ответу для скорости релаксации спиновой плотности:

$$\tau_r^{-1} \equiv \tau_{so}^{-1} = \frac{\Delta_{SO}^2}{\Delta_H^2 + \tau^{-2}} \tau^{-1} \ll \tau^{-1}. \quad (3.32)$$

В процессе вывода Ур.(3.31) мы использовали тождество

$$\langle S = 1, S_x = 0 | \widehat{S}_y^2 | S = 1, S_x = 0 \rangle = 1. \quad (3.33)$$

Еще раз подчеркнем, что Ур.(3.32) было выводилось в предположении слабого спин-орбитального взаимодействия, $\Delta_{SO} \ll \Delta_H$.

3.5 Заключение

В этой главе мы рассмотрели поглощение ультразвука в диффузных каналах, отвечающих асимметричным модам электронной плотности. Этот эффект особенно актуален для хороших проводников, где флуктуации зарядовой плотности обычно запрещены Кулоновским взаимодействием. Принципиально новый предсказываемый эффект касается поглощения за счет возбуждения диффузии спиновой плотности, который может иметь место во внешнем магнитном поле или в ферромагнетиках (раздел 3.3). Мы рассмотрели случай магнитного поля направленного в плоскости двумерного образца, в котором Зеемановское расщепление приводит к разным положениям Ферми уровня для разных спиновых поляризаций электронов. По мере увеличения магнитного поля вклад спинового

канала в поглощение ультразвука растет согласно уравнению 3.24, тем не менее исчезая на самых сильных полях, когда электронный газ достигает состояния полной поляризации.

Поглощение ультразвука в спиновом канале чувствительно к спин-орбитальным эффектам, поскольку они приводят к релаксации спиновой поляризации. Мы провели количественный расчет эффектов спин-орбитального взаимодействия в разделе 3.4.

Наконец, в разделе 3.2 мы также показали, что задача о вкладе диффузных каналов в поглощение ультразвука формулируется на языке чисто классических уравнений движения для сохраняющихся макроскопических величин.

Глава 4

Эффекты диффузии энергии

4.1 Введение

Как мы уже обсуждали в предыдущих главах, неэффективность поглощения ультразвука электронной жидкостью в грязных проводниках в основном связана с “выключенным” состоянием диффузных каналов отвечающих плотностям сохраняющихся в системе величин. Это происходит за счет замораживания канала, как например в случае зарядовой плотности и Кулоновского взаимодействия рассмотренных в главе 2. Или, например, если сохранение физической величины в данной системе нарушено, как в случае спиновой поляризации и спин-орбитального взаимодействия, рассмотренных в главе 3.

В этой главе мы показываем, что даже в простейшем случае однозонного электронного спектра и идеальной экранировки, привычной теории электрон-фононного взаимодействия в грязных проводниках (поглощение в локальном канале в терминологии предыдущих глав) может быть недостаточно. Причина этому в том, что электронная жидкость обладает дополнительной *имманентной* диффузной модой. Этой модой является *плотность энергии*, за счет возбуждения которой возникает дополнительное поглощение ультразвука. Мы рассмотрим как случай нормального металла (раздел 4.2), так и случаи *s*-волнового и *d*-волнового сверхпроводников (разделы 4.3 и 4.4 соответственно).

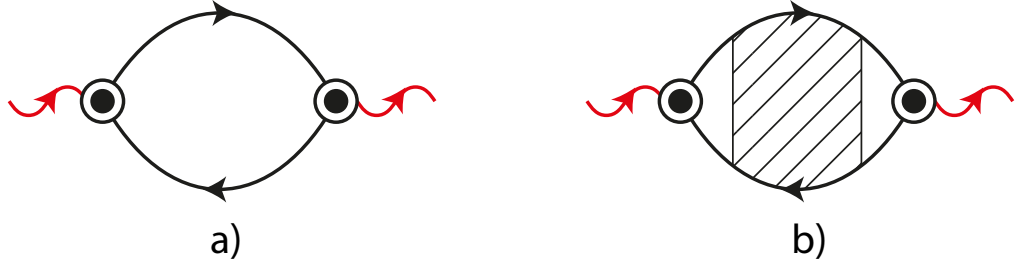


Рис. 4.1: Вклад локальных (а) и диффузных (б) процессов в собственную энергию фонона.

4.2 Нормальный металл

Для локальных процессов информация об электронном движении сохраняется между актами поглощения и излучения фонона. Таким образом усреднение произведения двух вершин по направлениям импульса в диаграмме (Рис. 4.1а) приводит к большому результату:

$$\langle \Gamma_n(\mathbf{p})\Gamma_n(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} \sim p_F^2 v_F^2. \quad (4.1)$$

Однако, когда диффузные процессы разрешены, эта информация теряется между поглощением и испусканием фононов. На формальном уровне это видно из диаграммы на Рис. 4.1б), где примесная лестница, вставленная в диаграмму, расцепляет электрон-фононные вершины. Многочисленные столкновения с примесями удерживают электроны в областях поглощения и излучения фононов приводя к независимым усреднениям электрон-фононных вершин Γ по направлениям электронных импульсов. Это дает гораздо меньшее значение эффективно эквивалентной электрон-фононной вершины, которое теперь порядка температуры $T \ll p_F v_F$

$$\langle \Gamma_n(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} \sim \varepsilon \sim T. \quad (4.2)$$

Именно этот факт и является причиной того, что обычно диффузные моды игнорируются при рассмотрении электрон-фононного взаимодействия в неупорядоченных проводниках.

Удобно определить эффективную вершину фонон-диффузон, которая зависит от энергии электронов вместо быстро релаксирующего импульса. На диа-

граммном языке (Рис. 4.1б) всегда есть блок из двух функций Грина, который стоит между фононом и диффузной модой и приводит к усреднению по электронному импульсу. Таким образом эффективную фонон-диффузную вершину $\langle \Gamma \rangle_n$ можно определить с помощью следующего интегрального представления:

$$\langle \Gamma \rangle_n^{\alpha\beta}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int (dp) G_-^R [\Gamma_n^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}_+)] G_+^A, \quad (4.3)$$

где индексы \pm подразумевают аргументы $(\varepsilon \pm \omega/2, \mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2)$. В общем случае, эффективная вершина зависит от двух электронных энергий $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \omega/2$, но в пределе $\omega \ll \varepsilon \sim T$ зависимость от фононной частоты пренебрежима. Используя явный вид электрон-фононной вершины и электронных пропагаторов в нормальном состоянии получаем

$$\langle \Gamma \rangle_n^{\alpha\beta}(\varepsilon) = \frac{1}{2d\pi\nu\tau} \int \nu(\xi) d\xi \frac{pv - p_F v_F}{(\varepsilon - \xi)^2 + 1/4\tau^2}. \quad (4.4)$$

Таким образом, новая вершина $\langle \Gamma \rangle_n^{\alpha\beta}(\varepsilon)$ дается выражением

$$\langle \Gamma \rangle_n^{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varkappa \varepsilon \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.5)$$

где

$$\varkappa = \frac{\partial(pv/d)}{\partial\varepsilon} \equiv \left(1 - \frac{p_F v_F}{d} \frac{\partial \ln \nu}{\partial\varepsilon} \right). \quad (4.6)$$

Диффузные электронные моды живут на гораздо больших временных масштабах $\sim (Dq^2)^{-1}$, что увеличивает эффективность поглощения ультразвука. В это же время как квадрат вершины имеет фактор малости $(T/\varepsilon_F)^2$, диссипация диффузной моды сильнее на фактор $(ql)^{-2}$ (при самых низких частотах усиление насыщается и выходит на v_F^2/s^2 , где s есть скорость звука в веществе). Таким образом вклад моды диффузии энергии в поглощение ультразвука определяется конкуренцией этих двух параметров.

Насколько известно, подобные процессы для однозонного проводника при условии идеального Кулоновского экранирования до сих пор всегда пренебрегались. Соответствующая процессу диаграмма (Рис. 4.1б) и ее вычисление при-

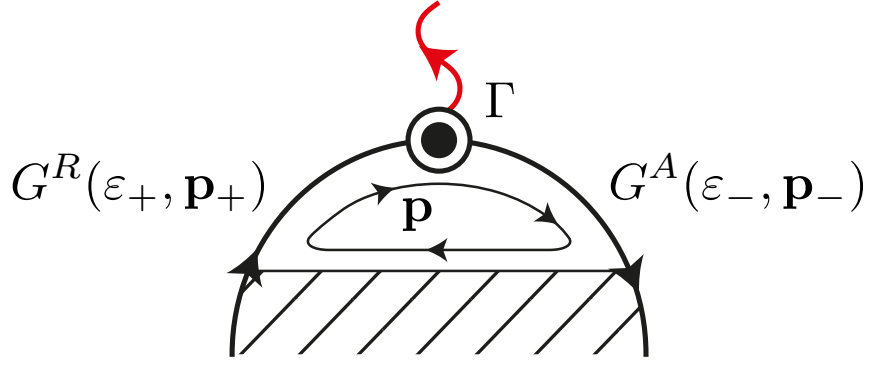


Рис. 4.2: При конверсии фонона в диффузон электрон-фононная вершина всегда усредняется по электронному импульсу \mathbf{p} который бежит в блоке из двух Гриновских функций предшествующих диффузону.

водит к следующему результату, справедливому при $\hbar\omega \ll T$,

$$\alpha_{n,d} = \int_0^\infty \left(d\varepsilon \frac{\partial f(\varepsilon, T)}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_{n,d}^{(\varepsilon)}(\omega), \quad (4.7)$$

где $\alpha_{n,d}^{(\varepsilon)}(\omega)$ дает вклад электронов с энергиями в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$,

$$\alpha_{n,d}^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{q^2}{\rho_m} (\kappa\varepsilon)^2 (2\nu \operatorname{Re} \mathcal{D}(\omega, q)). \quad (4.8)$$

Формула (4.8) содержит диффузный пропагатор $\mathcal{D}(\omega, q)$ (соответствующие диаграммы показаны на Рис.4.3),

$$\mathcal{D}(\omega, q) = \frac{1}{-i\omega + Dq^2}, \quad (4.9)$$

где $\tau = l/v_F$ есть электронное время рассеяния за счет упругих процессов и $D = \tau v_F^2/d$ есть коэффициент диффузии. Вычисление интеграла в (4.7) приводит к

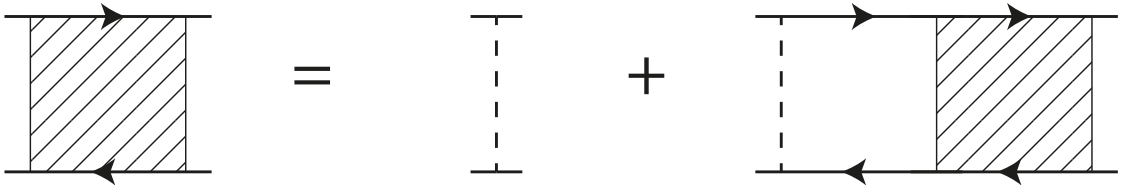


Рис. 4.3: Диффузные моды соответствующие примесным лестницам. Величина $\mathcal{D}(\dots)$ в тексте дается суммой этой лестницы, за исключением одного фактора $(2\pi\nu\tau)^{-1}$ происходящего от первой, общей для всех членов примесной линии.

следующему ответу для поглощения ультразвука частоты ω при температуре T :

$$\alpha_{n,d} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{\nu D}{\rho_m s^4} \frac{\varkappa^2 T^2 \omega^2}{1 + (D\omega/s^2)^2}. \quad (4.10)$$

Полезно представить ответ также в виде отношения (4.10) к локальному ответу, Ур.(2.32):

$$\mathcal{F}_{n,l}^{n,d} \equiv \frac{\alpha_{n,d}}{\alpha_{n,l}} = \frac{\pi^2}{3c_l} \left(\frac{\varkappa T}{p_F s} \right)^2 \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + \omega^2}; \quad \omega_c = \frac{s^2}{D}. \quad (4.11)$$

Два механизма диссипации приводят также к различным зависимостям поглощения от температуры и частоты: "локальная" скорость поглощения слабо зависит от температуры T и растет как ω^2 ; С другой стороны, поглощение из-за "диффузного" механизма пропорционально T^2 . Диссипация за счет диффузионного механизма не зависит от частоты при высоких частотах $\omega \gg \omega_c = s^2/D$ и ведет себя как ω^2 на низких частотах. Таким образом, из данных по поглощению ультразвука можно извлекать значения коэффициента диффузии электронов D .

Для тепловых фононов с $\hbar\omega \sim T$ поглощение в диффузном канала всегда мало, $\alpha_{n,d} \ll \alpha_{n,l}$. Тем не менее, для затухания ультразвука на низких частотах $\omega \ll T/\hbar$ ситуация может быть совершенно иной, особенно в легированных полупроводниках при умеренных температурах. Рассмотрим, например, сильно легированный Si с $n = 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, $m = 0.36m_0$, $p_F l = 10$, $s \approx 8 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$. При температуре $T = 0.1E_F \approx 200K$ получаем

$$\frac{\alpha_{n,d}}{\alpha_{n,l}} \approx 100, \quad f = 2\pi\omega \leq 10 \text{ GHz}, \quad (4.12)$$

то есть в данном случае включение диффузного канала в рассмотрение усиливает поглощение ультразвука на два порядка!

4.3 s-волновой сверхпроводник

4.3.1 Модель

В этом разделе мы рассмотрим сверхпроводник типа БКШ с s-wave спариванием и микроскопической константой взаимодействия g ,

$$\mathcal{A}_{el,sc-int} = \int dt(d\mathbf{r}) [g\psi^*(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})]. \quad (4.13)$$

Для анализа грязного сверхпроводника удобно определить функцию Грина (в чистом пределе) как

$$\begin{aligned} \check{G}_{\alpha\beta}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) &= -i \langle \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta \rangle \\ &= [(\varepsilon + i0)\check{\tau}_3 - \xi\check{\tau}_0 - \Delta(i\check{\tau}_2)]_{\alpha\beta}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где 4-х компонентный спинор Ψ определен следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{p}\uparrow} \\ \psi_{-\mathbf{p}\downarrow}^* \\ \psi_{\mathbf{p}\downarrow} \\ -\psi_{-\mathbf{p}\uparrow}^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \Psi^+ \check{\tau}_3. \quad (4.15)$$

Четырехмерное пространство Намбу-Горькова соответствует произведению спиновых и частично-дырочных пространств. Тем не менее, для наших целей релевантно только подпространство частица-дырка, как это видно из (4.14), где присутствуют только матрицы Паули $\check{\tau}$ типа частица-дырка. Таким образом, мы будем игнорировать спиновую структуру и эффективно работать с 2-компонент-ными спинорами $\Psi, \bar{\Psi}$.

Включение в рассмотрение случайного беспорядка дает в самосогласованном Борновском приближении хорошо известный результат[31]

$$\check{G}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \left[\eta(\varepsilon) \left(\varepsilon\check{\tau}_3 - \Delta(i\check{\tau}_2) \right) - \xi\check{\tau}_0 \right]^{-1} \quad (4.16)$$

где

$$\eta(\varepsilon) = \left(1 + \frac{i}{2\tau E} \right), \quad E = \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}. \quad (4.17)$$

4.3.2 Мода диффузии энергии

Диффузон

Диффузные моды описываются примесной лестницей, показанной на Рис.4.3. Эта лестница может быть проанализирована с помощью уравнения Бете - Солпитера

$$(\widehat{\mathcal{D}})^{-1}(\varepsilon, \omega, q) = \widehat{\mathbb{1}} - \widehat{\Xi}(\varepsilon, \omega, q) \quad (4.18)$$

с собственной энергией

$$\widehat{\Xi}(\varepsilon, \omega, q) = u \int (d\mathbf{p}) \check{G}^R(\varepsilon_-, \mathbf{p}) \otimes \check{G}^A(\varepsilon_+, \mathbf{p}). \quad (4.19)$$

Функция Грина является матрицей 2×2 в пространстве частица-дырка (напомним, что спиновое двумерное пространство мы не рассматриваем). Таким образом, $\widehat{\mathcal{D}}$ и $\widehat{\Xi}$ являются матрицами в 4-мерном пространстве составленном из двух 2-мерных подпространств частица-дырка. Эти 4×4 матрицы $\widehat{\mathcal{D}}$ и $\widehat{\Xi}$ можно интерпретировать как супероператоры над 2×2 операторами, такими как например эффективная электрон-фононная вершина $\check{\Gamma}$ (для s-wave состояния $\check{\Gamma}$ определяется далее в этой главе), оператор зарядовой плотности или плотности энергии. Например, если \check{A} , \check{B} и \check{X} являются 2×2 матрицами, то $\check{Y} = \check{A}\check{X}\check{B}$ также является матрицей этого типа. Это означает, что $\check{A} \otimes \check{B}$ описывает отображение $\check{X} \rightarrow \check{Y}$, таким образом действительно являясь супероператором.

При нулевых внешних частоте и импульсе собственная энергия оказывается равной

$$\widehat{\Xi} = \frac{1}{2} \check{\tau}_0 \otimes \check{\tau}_0 + \frac{(\varepsilon \check{\tau}_3 - \Delta(i\check{\tau}_2)) \otimes (\varepsilon \check{\tau}_3 - \Delta(i\check{\tau}_2))}{2(\varepsilon^2 - \Delta^2)}. \quad (4.20)$$

Анализ матричной структуры показывает, что есть две безмассовые моды, которым отвечают операторы

$$\check{\tau}_0 \quad \text{и} \quad \varepsilon \check{\tau}_3 - \Delta(i\check{\tau}_2). \quad (4.21)$$

Мода, отвечающая матрице $\check{\tau}_0$ симметрична в пространстве частица-дырка и соответствует зарядовой плотности, в то время как асимметричная мо-

да $\varepsilon\check{\tau}_3 + \Delta(i\check{\tau}_2)$ соответствует плотности энергии. Соответствующие собственные значения матричного диффузного пропагатора, определенного в уравнении (4.18)

$$(\widehat{\mathcal{D}})(\varepsilon, \omega, q) \rightarrow \frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \mathcal{D}_s^{(\varepsilon)}(\omega, q), \quad (4.22)$$

где

$$\mathcal{D}_s^{(\varepsilon)}(\omega, q) = \frac{1}{[-i(E_+ - E_-) + Dq^2]} \quad (4.23)$$

и $E_{\pm} = \sqrt{(\varepsilon \pm \omega/2)^2 - \Delta^2}$. Флуктуации заряда запрещены сильным Кулоновским взаимодействием, так что мы не будем их здесь рассматривать.

Строго говоря, есть еще две диффузные моды типа "Куперона", которые связаны с конверсией заряда из электронных возбуждений в флуктуации конденсата (параметра порядка). В отличие от (4.19) эти моды строятся из матричных произведений типа $\check{G}^R(\varepsilon_-, \mathbf{p}) \otimes \check{G}^A(-\varepsilon_+, \mathbf{p})$. Соответствующий пропагатор пропорционален $(-i(E_+ + E_-) + Dq^2)^{-1}$. Важно, что в пределе $Dq^2 \ll \sqrt{T\Delta}$ вклад этих мод значительно слабее, чем в канале диффузии энергии, так что Куперовским каналом можно пренебречь.

Эффективная вершина фонон-диффузон

При определении эффективной вершины фонон-диффузон мы теперь должны следить за матричной структурой в пространстве Намбу-Горькова (при этом $\check{\Gamma}_n = \Gamma_n \cdot \check{1}$),

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_s(\varepsilon) = \int (dp) \check{G}_-^R \Gamma_n(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}_+) \check{G}_+^A, \quad (4.24)$$

что модифицирует вершину (4.5) в

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_s(\varepsilon) = \varkappa \left(\varepsilon\check{\tau}_3 - \Delta(i\check{\tau}_2) \right) \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.25)$$

Здесь видно, что ультразвук и плотность заряда действительно не разговаривают друг с другом, Кулоновское взаимодействие было включено в задачу правильно и она самосогласована.

Как правило, акустическая волна также изменяет эффективную константу БКШ взаимодействия λ , порождая дополнительную электрон-фононную вершину. Эта вершина имеет ту же матричную структуру, что и параметр порядка:

$$\check{\Lambda} = \varkappa_{\Delta}(\Delta\check{\tau}_1)\delta_{\alpha\beta}, \quad (4.26)$$

с константой \varkappa_{Δ} равной

$$\varkappa_{\Delta} = -\frac{d\Delta}{d\ln\rho} \stackrel{BCS}{=} -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{d\ln\lambda}{d\ln\rho} \right). \quad (4.27)$$

Здесь $\lambda = \nu g$ есть безразмерная константа БКШ взаимодействия. Далее в этой главе мы считаем, что температура и другие релевантные энергетические масштабы значительно меньше щели, $T, \omega, Dq^2 \ll \Delta$.

Изменения константы λ появляются либо через прямое изменение плотности состояний электронов ν , либо же посредством изменений константы g ,

$$\frac{d\ln\lambda}{d\ln\rho} = \frac{d\ln\nu}{d\ln\rho} + \frac{d\ln g}{d\ln\rho}. \quad (4.28)$$

В рамках нашей модели $d\ln\nu/d\ln\rho = (p_F v_F/d)(d\ln\nu/dE)$ и возникает вследствие сдвигов химпотенциала в присутствии акустической волны. (Мы не вводили дополнительного микроскопического параметра $d\ln g/d\ln\rho$.)

Определяя эффективную вершину $\langle\check{\Lambda}\rangle_s$ аналогично (4.24), мы получим

$$\langle\check{\Lambda}\rangle_s(\varepsilon) = \varkappa_{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{\varepsilon^2 - \Delta^2} \right) \left(\varepsilon\check{\tau}_3 - \Delta(i\check{\tau}_2) \right) \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.29)$$

Заметим, что эффективная вершина $\langle\check{\Lambda}\rangle_s$ значительно усиливается благодаря сингулярной плотности состояний, в отличие от вершины $\langle\check{\Gamma}\rangle_s$.

4.3.3 Поглощение ультразвука в канале диффузии энергии

Аналогично случаю нормального металла, вклад диффузного канала в затухания ультразвука дается следующим интегралом (предполагая $\omega \ll T$)

$$\alpha_{s,d}(\omega) = \int_0^\infty \left(d\varepsilon \frac{\partial f(\varepsilon, T)}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_{s,d}^{(\varepsilon)}(\omega), \quad (4.30)$$

где $\alpha_{s,d}^{(\varepsilon)}(\omega)$ есть вклад квазичастиц с энергиями в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$,

$$\alpha_{s,d}^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{q^2}{\rho_m} \left(\kappa E + \kappa_\Delta \frac{\Delta^2}{E} \right)^2 \left(2\nu_n \operatorname{Re} \mathcal{D}_s^{(\varepsilon)}(\omega, q) \right). \quad (4.31)$$

Здесь $\mathcal{D}_s^{(\varepsilon)}(\omega, q)$ есть диффузон в сверхпроводящем состоянии определяемый формулой (4.23) и $E = \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}$. Мы также добавили индекс (n) к нормальной металлической плотности состояний ν_n во избежание возможной путаницы. Снова заметим, что вклад от вариаций безразмерной константы БКШ взаимодействия (который описывается вершиной $\langle \check{\Lambda} \rangle$) усилен в связи с сингулярностью в плотности состояний на краю щели, $\nu(\varepsilon)/\nu_n \simeq \Delta/\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}$.

Подстановка (4.31) в (4.30) и интегрирование дает итоговый ответ для скорости поглощения ультразвука в диффузном канале s-wave сверхпроводника:

$$\alpha_{s,d}(\omega) = 2 \frac{\nu}{\rho_m D} \exp \left[-\frac{\Delta}{T} \right] \times \quad (4.32)$$

$$\times \begin{cases} (\Delta/T) \left(\kappa_\Delta^2 \Delta^2 \ln \frac{T}{A(\omega)} + 4\kappa\kappa_\Delta \Delta T + 4\kappa^2 T^2 \right) & \omega \gg \omega_c \sqrt{\frac{\Delta}{T}}, \\ 2 \left(\kappa_\Delta^2 \Delta^2 + 4\kappa\kappa_\Delta \Delta T + 8\kappa^2 T^2 \right) \times \left(\frac{D\omega}{s^2} \right)^2 & \omega \ll \omega_c \sqrt{\frac{\Delta}{T}}, \end{cases}$$

где $A(\omega) \equiv \omega + \Delta(\omega_c/\omega)^2$ и $\omega_c = s^2/D$ есть частота кроссовера в нормальном состоянии. Формула (4.32) была получены при условиях, что

$$\omega, Dq^2 \ll T \ll \Delta \ll \tau^{-1} \ll p_F v_F \quad (4.33)$$

и содержит два кроссовера с характерными частотами, $\omega_{c,s1} = \omega_c (\Delta/T)^{1/2}$, и $\omega_{c,s2} = \omega_c^{2/3} \Delta^{1/3}$.

Заметим, что $\omega_{c,s2}$ описывает слабый логарифмический кроссовер, который происходит от сингулярности DOS в сверхпроводящем состоянии; фактор (Δ/T) в первой строке (4.32) также есть результат поведения плотности состояний. Этот кроссовер существует, только если $\omega_{c,s2} > \omega_{c,s1}$ и при температурах не ниже $T > (\Delta\omega_c^2)^{1/3}$. Частота второго кроссовера $\omega_{s,c2}$ может быть маленькой или большой по сравнению с $\omega_{s,c1}$ в зависимости от конкретного вещества.

Чтобы сравнить скорость поглощения из-за диффузии энергии (4.32) со скоростью поглощения ультразвука, возникающей от обычных локальных процессов в сверхпроводящем состоянии (обозначим его как $\alpha_{s,l}$), обратим внимание, что последняя пропорциональна плотности квазичастичных возбуждений. Таким образом, искомое соотношение есть

$$\frac{\alpha_{s,l}}{\alpha_{n,l}} = \int_{\Delta}^{\infty} d\varepsilon \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \simeq 2 \exp \left[-\frac{\Delta}{T} \right], \quad (4.34)$$

так что $\alpha_{s,l} \propto \omega^2$, как и в нормальном состоянии. Таким образом, мы видим, что на высоких частотах $\omega \gg \omega_{c,s2}$ роль диффузии энергии растет с понижением частоты:

$$\frac{\alpha_{s,d}}{\alpha_{s,l}} = \frac{1}{2c_l} \frac{1}{p_F^2 s^2} \left(\kappa_{\Delta}^2 \frac{\Delta^3}{T} \ln \frac{T}{A(\omega)} + 4\kappa\kappa_{\Delta} \Delta^2 + \right. \quad (4.35) \\ \left. + 4\kappa^2 \Delta T \right) \times \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2.$$

В этом диапазоне частот поглощение из-за энергетической диффузии имеет только слабую логарифмическую зависимость от частоты; оно также нетривиальным образом зависит от температуры, зависимость не сводится к температурной зависимости электронной плотности в нормальном состоянии.

На самых низких частотах, когда $\omega \leq \omega_{c,s1}$, частотная зависимость α_s обычного вида, но вот температурная зависимость отличается от локального вклада:

$$\frac{\alpha_{s,d}}{\alpha_{s,l}} = \frac{1}{c_l} \frac{1}{p_F^2 s^2} \left(\kappa_{\Delta}^2 \Delta^2 + 2\kappa\kappa_{\Delta} \Delta T + 8\kappa^2 T^2 \right). \quad (4.36)$$

Анализ отношения (4.36) показывает, что, как правило, оно довольно мало. Интересное исключение дается сверхпроводниками с чрезвычайно низкой

плотностью электронов, которые не далеко от кроссовера к режиму "локальных пар". Частный пример такого рода дает недавно обнаруженное соединение YPtBi [32] с плотностью электронов проводимости при температуре около Кельвина достигающей значений $n = 2 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$. Вместе со значениями других параметров, таких как как $m = 0.15m_0$, длины свободного пробега электронов $l = 130 \text{nm}$, $T_c = 0.77 \text{K}$, $\omega_D = 200 \text{K}$ и скорости звука (для оценки мы берем значение скорости звука в висмуте) $s = 2 \cdot 10^5 \text{cm/s}$, мы находим, что при $T = 0.2 \text{K}$ отношение вклада диффузии энергии к стандартному локальному результату $\alpha_{s,l}$ есть

$$\frac{\alpha_{s,d}}{\alpha_{n,l}} \approx 1, \quad f = 2\pi\omega \leq 1 \text{GHz}. \quad (4.37)$$

4.4 d-волновой сверхпроводник

4.4.1 Модель

В этой главе мы рассмотрим модель сильно анизотропного d-wave сверхпроводника, в которой будем игнорировать дисперсию электронов в направлении поперек слоев. Тогда параметр порядка зависит от направления импульса (Рис.4.4) следующим образом

$$\Delta(\mathbf{p}) = \Delta_0(\cos p_x a - \cos p_y a), \quad (4.38)$$

где a есть постоянная решетки. При низких температурах $T \ll \Delta_0$ такой параметр порядка приводит к угловой зависимости затухания ультразвука для локальных процессов. В то же время, вклад диффузного канала оказывается изотропным.

В чистом d-wave сверхпроводнике одночастичная функция Грина есть

$$\check{G}_{\alpha\beta}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -i \langle \Psi_\alpha \Psi_\beta^+ \rangle = [(\varepsilon + i0)\check{\tau}_3 - \xi - (i\check{\tau}_2)\Delta]^{-1}. \quad (4.39)$$

В d-wave сверхпроводящем состоянии Ферми поверхность квазичастиц состоит из 4 точек для четырех различных направлений импульса, при которых щель

обращается в нуль, см. (Рис.4.4). Около этих направлений спектр может быть линеаризован:

$$\xi = v_F k_1, \Delta = v_g k_2, \quad (4.40)$$

где импульс \mathbf{k} измеряется относительно выбранного узла, $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{node}$, причем базис отдельный для каждого узла(см. Рис.4.4). Из-за наличия низколежащих возбуждений, все тепловые эффекты при $T \ll T_c$ пропорциональны степеням T , а не экспоненциально малы как в s-wave случае.

Теперь включим в задачу случайный потенциал, который мы рассматриваем в приближении потенциала типа белого шума:

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = u\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.41)$$

Рассеяние на беспорядке приводит к перенормировке электронного пропагатора, генерируя как скорость рассеяния γ , так и перенормировку энергии, $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon}$. В самосогласованном Борновском приближении находим

$$\langle \check{G}_{\alpha\beta}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle = [(\tilde{\varepsilon} + i\gamma)\check{\tau}_3 - \xi\check{\tau}_0 + (i\check{\tau}_2)\Delta]^{-1}, \quad (4.42)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ по сути описывает перенормировку электронного вычета Z ,

$$\varepsilon \equiv Z(\varepsilon)\tilde{\varepsilon}(\varepsilon). \quad (4.43)$$

Получаем привычное уравнение самосогласования

$$\check{\Sigma}^R(\varepsilon) = u \int (d\mathbf{p}) \check{G}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \quad (4.44)$$

$$= \int (d\mathbf{p}) \frac{(\varepsilon_* + i\gamma)\check{\tau}_3 + \xi - (i\check{\tau}_2)\Delta}{(\varepsilon_* + i\gamma)^2 - \Delta^2 - \xi^2}. \quad (4.45)$$

Искомые величины γ и ε_* в итоге должны определяться из уравнений самосогласования [33]

$$1 = K \left(\frac{\varepsilon_*}{\gamma} \arctan \frac{\varepsilon_*}{\gamma} + \ln \frac{\Delta_0}{\sqrt{\varepsilon_*^2 + \gamma^2}} \right), \quad (4.46)$$

$$\varepsilon = K \frac{\varepsilon_*^2 + \gamma^2}{\gamma} \arctan \frac{\varepsilon_*}{\gamma}, \quad (4.47)$$

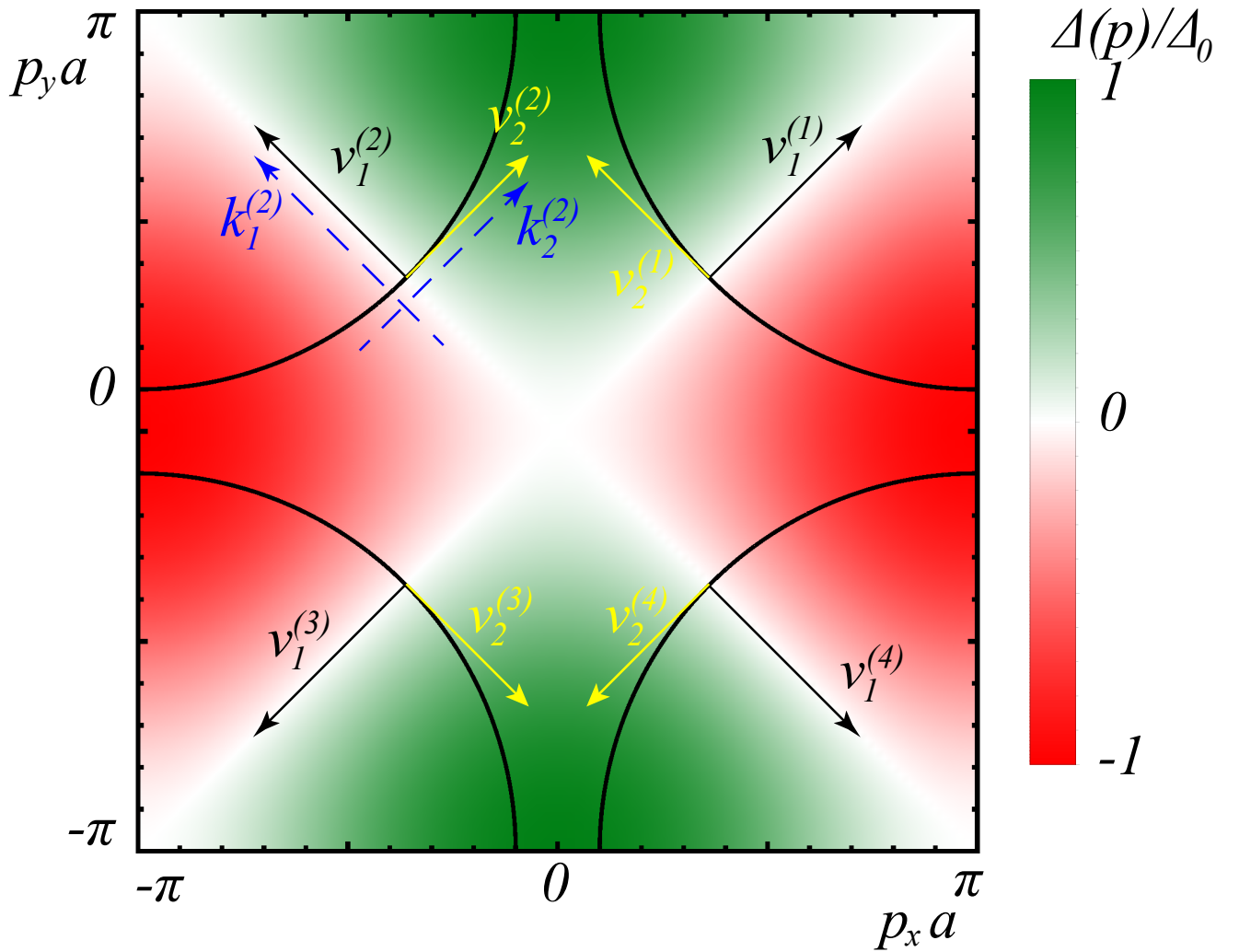


Рис. 4.4: Схематическое изображение Ферми поверхности d-wave сверхпроводника. Фоновый цвет представляет угловую зависимость параметра порядка $\Delta(\mathbf{p})$, которая обладает четырьмя узловыми направлениями на поверхности Ферми. Каждый узел имеет собственную Ферми $\mathbf{v}_1 = d\xi/d\mathbf{p}$ и "целевую" $\mathbf{v}_2 = d\Delta/d\mathbf{p}$ скорости. Для удобства мы выбираем четыре системы отсчета $(k_1, k_2)^{(i)}$ (для ясности изображена только одна) вокруг каждого узла, с осями сонаправленными с локальными Ферми и Δ -скоростями электронов, в то время как x, y оси совпадают с $[100]$ и $[010]$ кристаллическими осями; a есть постоянная решетки.

где K есть безразмерная константа, отвечающая силе беспорядка

$$K = \frac{Nu}{2\pi v_F v_g} \equiv N \frac{v_F}{v_g} G_n^{-1}. \quad (4.48)$$

Здесь N есть число долин ($N = 4$), и G_n есть безразмерный кондактанс в нормальном состоянии, из расчета на один слой (в единицах e^2/\hbar). Самосогласованное Борновское приближении верно покуда $K \ll 1$; так как v_F/v_g является

большим параметром (например для BSCCO сверхпроводников это отношение порядка 20 [34]), то кондактанс в нормальном состоянии должен быть достаточно большим, $G_n \geq 100$, для того, чтобы этот подход работал.

Асимптотическое поведение $\gamma(\varepsilon)$ и $Z(\varepsilon)$ представляет особый интерес, оно дается выражениями

$$\varepsilon \ll \gamma_0 : \gamma(0) = \Delta_0 e^{-1/K}, \quad Z(0) = K, \quad (4.49)$$

$$\varepsilon \gg \gamma_0 : \gamma = \frac{\pi}{2K} \frac{\varepsilon}{(\ln(\varepsilon/\gamma_0))^2}, \quad Z(\varepsilon) = K \ln(\varepsilon/\gamma_0), \quad (4.50)$$

где $\gamma_0 \equiv \gamma(0)$ есть скорость рассеяния на Ферми-поверхности. Подобные результаты были получены ранее для графена [35]. Ниже мы ограничимся только случаем промежуточных температур, в диапазоне $\gamma_0 \ll T \ll \Delta_0$.

Электрон-фононное взаимодействие все еще можно рассматривать с помощью тензора напряжения в электронном газе, (2.26,2.27), но теперь следует принять во внимание угловую зависимость параметра порядка $\Delta(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_d^{\alpha\beta} &= p_\alpha \partial_\beta \check{H} - \frac{p_F v_F}{2} \delta_{\alpha\beta} \\ &= \begin{pmatrix} (v_F p_F/2) + v_F k_F & (p_F + k_F) v_g (i\check{\tau}_2) \\ k_g v_F & -(p_F v_F/2) + k_g v_g (i\check{\tau}_2) \end{pmatrix}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

где мы использовали Гамильтониан $\check{H} = \xi \check{\tau}_0 + \Delta(i\check{\tau}_2)$.

4.4.2 Поглощение ультразвука в локальном канале

Как и ранее, поглощение ультразвука в d -wave сверхпроводнике в локальном канале можно описать диаграммой типа "электронного пузырька" (Рис.4.1а), соответствующее аналитическое выражение

$$\alpha_{d,l} = \frac{q^2}{2\rho_m \omega} \text{Tr} [(f_+ - f_-) \check{\Gamma} (\check{G}_-^R - \check{G}_-^A) \check{\Gamma} (\check{G}_+^R - \check{G}_+^A)], \quad (4.52)$$

где безиндексное $\check{\Gamma}$ является сокращением для

$$\check{\Gamma} = e_\alpha \check{\Gamma}_{d,l}^{\alpha\beta} e_\beta, \quad (4.53)$$

где e_α есть единичный вектор в направлении фононного импульса (направлении распространения ультразвуковой волны) q_α , при этом вектор поляризации продольных фононов совпадает с e_α). В отличие от нормального и s-wave состояний, поглощение ультразвука в d-wave состоянии принципиально анизотропно из-за двух различных скоростей v_F, v_g и нетривиальной симметрии параметра порядка.

Вклад в скорость поглощения ультразвука от электронов с энергиями $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ находим равным

$$\alpha_{d,l}^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{q^2}{2\pi^2 v_F v_g \rho_m} \left(1 + \frac{Z(\varepsilon)}{K} \right) \times \left(p_F^2 v_F^2 F(\theta) \right), \quad (4.54)$$

где функция $F(\theta)$ происходит от электрон-фононной вершины и описывает угловую зависимость поглощения,

$$F(\theta) = \sin^2 2\theta + \left(\frac{v_g}{v_F} \right)^2 \cos^2 2\theta. \quad (4.55)$$

Интегрирование по электронной энергии дает полный вклад, который равен

$$\alpha_{d,l} = \frac{F(\theta) v_F p_F^2 \omega^2}{2\pi^2 v_g \rho_m s^2} \ln \frac{T}{\gamma_0}. \quad (4.56)$$

Сравнивая результат (4.56) с поглощением в (изотропном) нормальном состоянии, мы получаем

$$\frac{\alpha_{d,l}}{\alpha_{n,l}} = 2K F(\theta) \ln \frac{T}{\gamma_0}, \quad (4.57)$$

где K есть безразмерная мера силы беспорядка, определенная уравнением (4.48) и γ_0 есть скорость рассеяния на Ферми поверхности, формула (4.49). Заметим, что в пределе $T \ll \gamma_0$ локальный вклад подобен (4.56), за тем исключением, что нужно заменить логарифм на двойку, $\ln(T/\gamma_0) \rightarrow 2$.

Рейт поглощения (4.56) обладает необычным логарифмическим поведением $\propto \ln(T/\gamma_0)$ которое не соответствует наивным ожиданиям для случая линейной плотности состояний $\alpha \propto T$. Дело в том, что скорость упругого рассеяния γ тесно связан с электронно плотностью состояний, скорость рассеяния уменьшается с температурой T одновременно с плотностью состояний. Действительно,

формула (4.50) показывает, что при (разумно) высоких температурах $\gamma \propto T$ с точностью до логарифмического фактора.

4.4.3 Диффузная мода плотности энергии

Пропагатор диффузора

Здесь мы будем действовать полностью аналогично s-wave случаю. Диффузные моды описываются уравнением Бете-Солпитера, Рис.(4.3),

$$(\widehat{D})^{-1}(\varepsilon, \omega, q) = 1 - \widehat{\Xi}(\varepsilon_-, \varepsilon_+, \mathbf{q}), \quad (4.58)$$

с собственной энергией

$$\widehat{\Xi}(\varepsilon, \omega, \mathbf{q}) = u \sum_{nodes} \int (d\mathbf{p}) \check{G}_-^R \otimes \check{G}_+^A. \quad (4.59)$$

Мода диффузии плотности энергии отвечает собственному вектору $\check{\tau}_3$ (фактически собственному оператору супероператора) и соответствующее собственное значение собственной энергии есть

$$\widehat{\Xi}(\varepsilon, \omega, \mathbf{q}) \rightarrow u \sum_{nodes} \int (d\mathbf{p}) \text{Tr} [\check{\tau}_3 \check{G}_-^R \check{\tau}_3 \check{G}_+^A]. \quad (4.60)$$

Суммирование примесной лестницы дает

$$(\widehat{D})(\varepsilon, \omega, \mathbf{q}) \rightarrow 2u\gamma(\varepsilon) \mathcal{D}_d^{(\varepsilon)}(\omega, q), \quad (4.61)$$

где $\mathcal{D}_d^{(\varepsilon)}$ есть пропагатор диффузора в d-wave состоянии,

$$\mathcal{D}_d^{(\varepsilon)}(\omega, q) = \frac{1}{-i\omega + D_d^{(\varepsilon)} q^2}. \quad (4.62)$$

При этом коэффициент диффузии

$$D_d^{(\varepsilon)} = \frac{K + Z(\varepsilon)}{2\gamma(\varepsilon)} \langle v^2 \rangle, \quad (4.63)$$

где $\langle v^2 \rangle = (v_F^2 + v_g^2)/2 \simeq v_F^2/2$.

Куперовские моды в d-wave состоянии иррелевантны при не слишком низких температурах $T \gg \gamma_0$ по тем же причинам, что и в s-wave состоянии.

Эффективная вершина

Эффективная фонон-диффузная вершина определяется аналогично s-wave случаю:

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_d^{\alpha\beta}(\varepsilon_+, \varepsilon_-) = u \sum_{nodes} \int (dp) \check{G}_+^R \check{\Gamma}_d^{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \check{G}_-^A. \quad (4.64)$$

Вычисление этой вершины дает

$$\check{\Gamma}_{d,d}^{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon \check{\tau}_3 \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.65)$$

Эффективная вершина, описывающая связь с диффузной энергетической модой оказывается изотропной, $\propto \delta_{\alpha\beta}$ после суммирования по всем узлам на Ферми поверхности, несмотря на сильную анизотропию электронной скорости для каждого отдельного узла.

Получение этого простого и естественного ответа требует осторожного обращения с электрон-фононной вершиной и ниже мы описываем эти тонкости. Дело в том, что деформация примесного потенциала акустической волной в общем случае не сводится просто к смещению примесей,

$$U(\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{acoustic wave}} U(\mathbf{r}) + \partial_\alpha [u^\alpha U](\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{LFR} \rightarrow \text{CFR}} U(\mathbf{r}) + [\partial_\alpha u^\alpha] U(\mathbf{r}), \quad (4.66)$$

неоднородная часть деформации примесного потенциала остается при переходе в со-движущуюся систему отсчета. До этого момента мы всегда пренебрегали этим остатком, поскольку он давал бы только поправки, малые по обратному кондактансу системы, $(p_F l)^{-1}$. В *d*-wave сверхпроводнике же ситуация противоположная. Качественно это связано с тем, что в *d*-wave случае происходит сильная перенормировка электронного вычета Z (смотрите Ур.4.50). Итак, действие, описывающее электрон-фононное взаимодействие,

$$\mathcal{A}_{el-ph} = (\mathcal{A}_{el-ph})_1 + (\mathcal{A}_{el-ph})_2, \quad (4.67)$$

состоит из двух кусков, привычного

$$(\mathcal{A}_{el-ph})_1 = \int (d\mathbf{r}) \bar{\psi} \left(p_\alpha \partial_\beta \check{H} - (p_F v_F / d) \delta_{\alpha\beta} \right) \partial_\beta u_\alpha \psi. \quad (4.68)$$

и дополнительного,

$$(\mathcal{A}_{el-ph})_2 = \int (d\mathbf{r}) \bar{\psi} \left[-U(\mathbf{r})(\partial_\alpha u_\alpha) \right] \psi. \quad (4.69)$$

Последнему вкладу не уделялось внимания в литературе, поскольку в большинстве задач его учет будет превышением точности.

Наивная (неполная) эффективная вершина. Начнем с того, что покажем, какой ответ получается при наивном вычислении эффективной электрон-фононной вершины, игнорируя связанную с беспорядком вершину. Учитывая только $(\mathcal{A}_{el-ph})_1$ мы имеем

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_{d1}^{\alpha\beta} = u \sum_{nodes} \int (dp) \check{G}_+^R (p_\alpha \partial_\beta \check{H} - (p_F v_F / d) \delta_{\alpha\beta}) \check{G}_-^A. \quad (4.70)$$

Для продольных фононов, после того, как проведено суммирование по узлам, релевантные члены возникающие из вершины есть

$$\sum_{nodes} (p_\alpha \partial_\beta \check{H} - (p_F v_F / d) \delta_{\alpha\beta}) = 2 \left[\xi \check{\tau}_0 + \Delta(i\check{\tau}_2) \right] \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.71)$$

Для краткости мы опустим $\delta_{\alpha\beta}$ и индексы α, β . Первый член, $\xi \check{\tau}_0$, например дает

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_{d1a}(\varepsilon) = u \int (d\mathbf{p}) \frac{2\xi^2 \tilde{\varepsilon} \check{\tau}_3}{((\varepsilon_k - \tilde{\varepsilon})^2 + \gamma^2)^2} \quad (4.72)$$

$$= \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) \left(1 - \frac{1}{2} Z(\varepsilon) \right) \check{\tau}_3, \quad (4.73)$$

где $\varepsilon_k = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$. Ровно такой же вклад происходит от $\Delta(i\check{\tau}_2)$ давая в сумме

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_{d1}(\varepsilon) = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) \left(2 - Z(\varepsilon) \right) \check{\tau}_3. \quad (4.74)$$

В общем случае вершина (4.74) зависит от электронной энергии довольно нетривиальным образом. В то же время, в чистом пределе, когда влияние примесей пренебрежимо и $\tilde{\varepsilon}(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$, $Z(\varepsilon) \rightarrow 1$, мы получаем очень простой ответ $\langle \check{\Gamma} \rangle_{d1} = \varepsilon \check{\tau}_3$. Оказывается, что именно это простое выражение является правильным после того, как учесть оставшуюся часть электрон-фононного взаимодействия.

Полная эффективная вершина. Пропущенная только что часть электрон-фононного взаимодействия $(\mathcal{A}_{el-ph})_2$, связанная с искажениями случайного потенциала, дает следующий вклад в электрон-фононную вершину:

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_{d2}^{\alpha\beta} = u \sum_{nodes} \int (dp) \check{G}_+^R(U) \check{G}_-^A. \quad (4.75)$$

После того, как мы усредним эту вершину по беспорядку, мы видим, что она дает

$$\begin{aligned} \langle \check{\Gamma} \rangle_{d2} &= u \sum_{nodes} \int (dp) \check{G}_+^R (\check{\Sigma}^R + \check{\Sigma}^A) \check{G}_-^A \\ &= \dots \\ &= 2 \operatorname{Re} \check{\Sigma}^R = 2 \left(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) \right) \check{\tau}_3. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Другими словами, эта вершина тесно связана с перенормировкой электронной энергии. В отсутствие ренормировки энергии отсутствует и эта вершина.

Вспоминая связь $\varepsilon = Z(\varepsilon)\tilde{\varepsilon}(\varepsilon)$ мы теперь видим, что настоящая, полная эффективная фонон-диффузионная вершина и правда зависит только от настоящей электронной энергии ε :

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_{d1} = (2\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\check{\tau}_3, \quad \langle \check{\Gamma} \rangle_{d2} = (2\varepsilon - 2\tilde{\varepsilon})\check{\tau}_3, \quad (4.77)$$

так что

$$\langle \check{\Gamma} \rangle_d = \langle \check{\Gamma} \rangle_{d1} + \langle \check{\Gamma} \rangle_{d2} = \varepsilon \check{\tau}_3, \quad (4.78)$$

есть в точности объявленный ранее ответ.

4.4.4 Поглощение ультразвука в канале диффузии энергии

Вклад диффузных процессов мы, как и ранее, разобьем на электронные вклады отдельных энергий:

$$\alpha_{d,d}(\omega) = \int_0^\infty \left(d\varepsilon \frac{\partial f(\varepsilon, T)}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_{d,d}^{(\varepsilon)}(\omega), \quad (4.79)$$

где

$$\alpha_{d,d}^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{q^2}{\rho_m} \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(2\nu_d(\varepsilon) \operatorname{Re} \mathcal{D}_d^{(\varepsilon)}(\omega, q) \right) \quad (4.80)$$

и $\nu_d(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon)/\pi i$ плотность состояний в d-wave сверхпроводнике. Тогда (4.80) дает

$$\alpha_{d,d}^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{v_F}{v_g} \left(1 + \frac{Z(\varepsilon)}{K} \right) \frac{\varepsilon^2}{\rho_m s^4} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2/\omega_{c,d}^2(\varepsilon)} \quad (4.81)$$

с частотой кроссовера $\omega_{c,d}(\varepsilon) = s^2/D_d^{(\varepsilon)}$. Нам интересен только случай слабого беспорядка $K \ll 1$ и не слишком низких температур $T \gg \gamma_0$. Эффективная частота кроссовера, которая определяет итоговый ответ следующий из (4.79) есть

$$\omega_{c,d}(T) = \frac{\pi s^2}{2v_F^2} \frac{KT}{[1 - K \ln(\Delta_0/T)]^3}, \quad T \gg \gamma_0. \quad (4.82)$$

В (4.82) мы использовали тождество $K \ln(T/\gamma_0) \equiv 1 - K \ln(\Delta_0/T)$.

При низких температурах полная скорость поглощения ультразвука имеет $\propto T^2 \ln T$ температурную зависимость,

$$\alpha_{d,d}(\omega) = \frac{1}{3} \frac{v_F}{v_g} \frac{T^2 \omega^2}{\rho_m s^4} \ln(T/\gamma_0), \quad \omega \ll \omega_{c,d}(T), \quad (4.83)$$

в то время как на высоких частотах он ведет себя грубо говоря как $\propto T^4$,

$$\alpha_{d,d}(\omega) = \frac{7\pi^4}{60\rho_m v_F^3 v_g} \frac{KT^4}{[1 - K \ln(\Delta_0/T)]^5}, \quad \omega \gg \omega_{c,d}(T).$$

Две дополнительные степени температуры, $\propto T^4$ по сравнению с $\propto T^2$ в нормальном состоянии, есть результат линейной плотности состояний на высоких энергиях, $\nu_d(\varepsilon) \propto \varepsilon$, с точностью до логарифмического фактора. Заметим, что энергетическая зависимость коэффициента диффузии имеет то же происхождение, $D_d^{(\varepsilon)} \propto \gamma(\varepsilon) \propto \nu_d^{-1}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-1}$.

Вклад диффузного канала особенно выражен в направлениях минимумов поглощения в локальном канале (Рис.4.4, формула 4.56). Для таких направлений на самых низких частотах, когда $\omega \leq \omega_{c,d}$, результат для отношения вкладов в поглощение ультразвука от E-диффузного и локального каналов подобен

этому же отношению в нормальной фазе:

$$\frac{\alpha_{d,d}}{(\alpha_{d,l})_{min}} = \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{v_F}{v_g}\right)^2 \frac{T^2}{p_F^2 s^2}. \quad (4.84)$$

Для более высоких частот $\omega \gg \omega_{c,d}$ находим

$$\frac{\alpha_{d,d}}{(\alpha_{d,l})_{min}} = \frac{14\pi^4}{15} \left(\frac{v_F}{v_g}\right)^2 \frac{T^2}{p_F^2 s^2} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2, \quad (4.85)$$

Все результаты справедливы покуда мы проводим анализ в грязном пределе $ql \ll 1$. (Ситуация должна быть грязной с точки зрения электрон-фононного взаимодействия. Напомним, что для электронов все еще должен выполняться критерий Иоффе-Регеля $p_F l \geq 1$, который требует, чтобы де Бройлевская длина волны электрона была все еще больше длины пробега электронов). Это условие эквивалентно тому, что $D_d(T)q^2 \ll \gamma(T)$ что в свою очередь дает $\omega \ll \omega_0^{(d)}(T)$,

$$\omega_0^{(d)}(T) \simeq \frac{s}{v_F} \frac{\gamma(T)}{\sqrt{Z(T)}} = \frac{\pi s}{2v_F} \frac{KT}{[1 - K \ln(\Delta_0/T)]^{5/2}}. \quad (4.86)$$

Используя параметры для BSCCO сплавов [34, 36–38], мы можем оценить отношение (изотропной) скорости поглощения в диффузном канале (4.84) к скорости поглощения в локальном канале в направлениях распространения ультразвука, где она минимальна:

$$\frac{\alpha_{d,d}}{(\alpha_{d,l})_{min}} \approx 10, \quad f = 2\pi\omega \lesssim 1GHz. \quad (4.87)$$

Здесь мы использовали следующие значения релевантных параметров: $n = 5 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}$, $v_F = 2.5 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$, $v_F/v_g = 20$, $T = 10 \text{ K}$, скорость рассеяния на примесях $\gamma_0 = 1 \text{ K}$ и скорость звука $s = 4.6 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$.

4.5 Заключение

В этой главе мы показали, что ультразвук в неупорядоченных проводниках и сверхпроводниках испытывает дополнительное поглощение благодаря взаимодействию модуляций плотности решетки и газа термически возбужденных

квазичастиц, которые находятся в неравновесных условиях по отношению к решетке из-за конечной частоты индуцированных акустической волной модуляций. Неравновесное распределение энергии квазичастиц тогда медленно релаксирует подобно тому, как это происходит в релаксации типа Мандельштама-Леонтовича. Эффект особенно силен в легированных полупроводниках при не слишком малом отношении T/E_F и частотах ультразвука $\omega \ll T/\hbar$. В частности мы оценили, что поглощение ультразвука в легированном Si будет сильнее на фактор порядка 100 благодаря этому механизму. Частотная зависимость скорости поглощения ультразвука $\alpha(\omega)$ содержит типичную частоту кроссовера ω_c , смотрите Ур.(4.11), которая явно зависит от коэффициента электронной диффузии D . Иными словами, измерения $\alpha(\omega)$ могут быть использованы для определения D . Подобное явление существует и в сверхпроводниках; для обычного s -волнового сверхпроводника, поглощение в канале диффузии энергии обычно слабое, но может быть важным для материалов с очень низкой электронной плотностью вблизи кроссовера BCS-BEC, как например недавно открытый сверхпроводник YPtBi. Для d -волновых сверхпроводников мы вычислили как обычное(локальное) поглощение, так и поглощение в канале диффузии энергии и показали, что последнее может доминировать в сильно анизотропных веществах при умеренных температурах, например в сверхпроводниках BSCCO семейства. Возможность извлекать электронные параметры такие как коэффициент диффузии D из измерений $\alpha(\omega)$ d -волновом случае особенно интересна, поскольку они обладают нетривиальными зависимостями от температуры и беспорядка, благодаря квантовой критичности d -волнового состояния [39].

Глава 5

Поглощение ультразвука в псевдощелевом сверхпроводнике

5.1 Введение

Интерес к изучению сильно неупорядоченных сверхпроводников в окрестности квантового фазового перехода сверхпроводник-изолятор существенно ожил в последнее десятилетие, как с точки зрения эксперимента [10, 40–44], так и с теоретической точки зрения [45, 46]. С экспериментальной стороны возрождение интереса к этому вопросу существенно обязано возникновению новых экспериментальных методов. В частности, низкотемпературная сканирующая туннельная микроскопия сделала возможным локальное изучение свойств сверхпроводящего состояния на нанометровых масштабах, которое позволило продемонстрировать [43, 44] сильное подавление плотности состояний на температурах значительно выше температуры сверхпроводящего перехода T_c . Так, пленки аморфного InO_x обладают практически нулевой плотностью состояний около Ферми уровня при температурах $T \leq 1.5T_c$. Это явление было названо

псевдощелью, по аналогии со сходным явлением, имеющим место в некоторых семействах высокотемпературных сверхпроводников. Экспериментально отличие между одночастичной щелью (псевдощелью) Δ_P и коллективной сверхпроводящей щелью Δ было четко продемонстрировано с помощью Андреевской спектроскопии [47] тех же InO_x пленок.

С теоретической точки зрения возникновение псевдощели удалось объяснить [45] как результат эффективного (посредством фононов) электрон-электронного притяжения между двумя электронами, локализованными в состояниях достаточно большого радиуса. Детальная полуколичественная теория сверхпроводимости, начинающая с модели, подобной БКШ, но со слабо локализованными одноэлектронными состояниями (около трехмерного перехода Андерсона), была развита в работе [46]. Качественно похожие результаты были позднее получены в работах [48, 49] с помощью методов Ренормализационной группы разработанных для двумерных систем. Применение идей, полученных в работе [46] оказалось полезным [50] для понимания необычного скейлинга сверхпроводящей плотности как функции сверхпроводящей щели, $\rho_s \propto \Delta^2$, который был описан в работе [51]. Метод, основанный на поглощении микроволнового излучения использованный в [51] может стать альтернативой Андреевской спектроскопии [47, 52] для измерения настоящей сверхпроводящей щели.

Настоящая глава посвящена еще одному явлению, которое напрямую связано с коллективной сверхпроводящей щелью при низких температурах около перехода сверхпроводник-изолятор. А именно, мы рассматриваем скорость поглощения $\alpha(\omega, T)$ ультразвуковой волны распространяющейся в сверхпроводящем веществе с хорошо развитой псевдощелью $\Delta_P \gg \Delta$, при температурах $T \ll \Delta/k_B$ и при сравнительно низких частотах $\hbar\omega \ll k_B T$ (ниже постоянная Больцмана k_B полагается равной единице). В главе 2 мы показали, что скорость поглощения ультразвука тесно связана с неупругим электрон-фононным теплообменом, который становится крайне неэффективным при суб-Кельвиновских температурах, приводя к температурным неустойчивостям и

электронному перегреву [9] в “смежной” изоляторной фазе того же (или подобного) вещества. [10, 53, 54] В предыдущих главах 3-5 мы также определили несколько механизмов ведущих к значительному усилению электрон-фононного неупругого взаимодействия благодаря присутствию медленно диффундирующих мод в электронной жидкости (плотность частиц, плотность намагниченности, и т.д.).

В главе 4 мы описали пример такого диффузного усиления [55] благодаря диффузной энергетической моде. Этот механизм естественно присутствует в любом неупорядоченном проводнике, в то время как его относительный вклад (по сравнению со стандартным локальным Пиппардовским вкладом, смотрите главу 2) сильно варьируется. В частности, мы вычислили [55] скорость поглощения ультразвука $\alpha(\omega, T)$ как для s -волнового, так и для d -волнового сверхпроводящих состояний БКШ-типа (а также в нормальном состоянии на примере легированного кремния); в s -волновом случае как локальный Пиппардовский, так и диффузный механизм дают экспоненциально подавленное низкотемпературное поглощение $\alpha(\omega, T) \propto \exp(-\Delta/T)$, различаясь лишь предэкспоненциальными множителями.

Для псевдощелевого сверхпроводника с большой одночастичной щелью Δ_P , все *локальные* неупругие электрон-фононные процессы очевидно подавлены как $\propto \exp(-\Delta_P/T)$, в то время как поглощение ультразвука благодаря моде диффузии энергии ожидается пропорциональным экспоненте $\propto \exp(-\Delta/T)$ содержащей меньшую коллективную щель Δ . Таким образом естественно ожидать, что низкотемпературное поведение $\alpha(\omega, T)$ будет контролироваться именно последним, коллективным, механизмом. Цель данной главы состоит в вычислении $\alpha(\omega, T)$ в рамках простейшей модели псевдощелевого сверхпроводника.

5.2 Модель

Согласно анализу, проведенному в работе [46], псевдощелевое сверхпроводящее состояние может быть реализовано в плохих проводниках, где одночастичные электронные состояния слаболокализованы (длина локализации больше среднего расстояния между электронами проводимости), и между электронами имеется эффективное Куперовское притяжение. Для выполнения последнего условия (вместе с сильным беспорядком, необходимым для локализации), Кулоновское отталкивание между электронами проводимости должно быть сильно подавлено. Это позволяет нам начать с простейшей модели, формулируемой на языке “псевдоспинов” $\frac{1}{2}$ впервые предложенной Андерсоном в работе [56]:

$$H[\mathbf{S}_i] = -2 \sum_{i=1}^N \xi_i S_i^z - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} [S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-], \quad (5.1)$$

Здесь $S_i^+ = S_i^x + iS_i^y$ и $S_i^- = S_i^x - iS_i^y$ являются операторами, создающими (аннигилирующими) пару электронов на заполненном i -ом локализованном состоянии в рамках задачи о свободных электронах (без учета электрон-электронного взаимодействия), в то время как $S_i^z + 1/2$ измеряет число этих пар. Соответственно $2\xi_i$ есть локальная энергия Куперовской пары сидящей на “узле” i . Для простоты изложения мы предполагаем, что узлы i выстроены в кубическую решетку с элементарной ячейкой размера a . Гамильтониан (5.1) действует в редуцированном Гильбертовом пространстве, порожденным локализованными электронными парами с полным спином равным нулю; возможность одноэлектронного заполнения уровней исключена благодаря большой энергии $\Delta_P \gg \Delta$ с этим связанной.

Значения ξ_i случайно распределены с вероятностью $p(\xi) = (2W)^{-1}\Theta(W - |\xi|)$ типа ступеньки, с энергиями в интервале $\xi \in (-W, W)$. Это подразумевает эффективную алотность состояний $\nu = 1/(2Wa^3)$. Второй член уравнения (5.1) описывает прыжки Куперовских пар между орбиталями, или, что эквивалентно, взаимодействие между псевдоспинами. В длинноволновом пределе

это взаимодействие (его Фурье образ) можно разложить по степеням малого импульса \mathbf{k} ,

$$J(\mathbf{k}) = g [1 - R^2 k^2 + O(k^4)] , \quad (5.2)$$

где $g \equiv J(\mathbf{0})$ есть полная сила взаимодействия (со всеми соседями) и R можно понимать как типичный радиус взаимодействия (длину прыжка Куперовской пары). Гамильтониан (5.1) не содержит никаких следов дальнедействующего Кулоновского отталкивания между электронами; это идеализированная модель, которой мы будем пользоваться в этой главе. Мы обсудим роль (слабого) Кулоновского отталкивания в конце главы. Этот же Гамильтониан (5.1) был использован в работе [57] для изучения квантового фазового перехода между сверхпроводящим состоянием (на языке спинов это состояние с нарушенной симметрией и отличным от нуля $\langle S_i^{x,y} \rangle$) и изоляторной фазой. В этой главе мы не будем рассматривать специфических деталей, связанных с этим фазовым переходом; здесь мы заинтересованы в исследовании свойств коллективных возбуждений глубоко в сверхпроводящем состоянии, вдали от фазового перехода (т.е. на температурах $T \ll T_c$). Именно поэтому мы будем работать в рамках модели с очень большим радиусом взаимодействия (прыжка) $R \gg a$, и мы ограничимся приближением среднего поля основанным на этом неравенстве. В этом смысле наш подход эквивалентен обычной квазиклассической теории сверхпроводимости.

Для решения задачи мы используем представление Федотова-Попова для операторов спина- $\frac{1}{2}$, которое полезно для построения диаграммного подхода к изучению коллективных мод в упорядоченном состоянии. В работе [58] (которая была позднее несколько обобщена и сформулирована в реальном времени [59]) было показано, что статсумма взаимодействующей спиновой системы может быть строго (без каких-либо приближений) преобразована с помощью представления спиновых операторов через специальный тип фермионных опе-

раторов:

$$S_i^\alpha = (1/2)\psi_i^\dagger \sigma^\alpha \psi_i, \quad (5.3)$$

где σ^α три матрицы Паули ($\alpha=1,2,3$) и (антикоммутирующие) двухкомпонентные спиноры $\psi(\tau)$, $\psi^\dagger(\tau)$ подчиняются следующим граничным условиям в мнимом Мацубаровском времени: $\psi(\tau + \beta) = i\psi(\tau)$, $\psi^\dagger(\tau + \beta) = -i\psi^\dagger(\tau)$, where $\beta = \hbar/T$. Следуя Опперману и Киселеву [59], мы будем называть такие модифицированные фермионы “семионами”.

Используя представление (5.3), мы переписываем исходный Гамильтониан как

$$H = - \sum_i \psi_i^+ \xi_i \sigma^z \psi_i - \frac{1}{4} \sum_{i,j} J_{ij} (\psi_i^\dagger \sigma^\alpha \psi_i) (\psi_j^+ \sigma^\alpha \psi_j), \quad (5.4)$$

где в члене со взаимодействием индекс $\alpha = x, y$. Чтобы справиться со взаимодействием, мы вводим комплексное поле параметра порядка Δ с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича и после этого интегрируем по семионным полям. Это приводит к эффективному действию во мнимом времени:

$$\mathcal{A}[\Delta] = -\text{Tr} [\Delta^* J^{-1} \Delta] + \text{Tr} \ln \left[i\varepsilon_l + \xi \sigma^z + \frac{1}{2} (\Delta \sigma^- + \Delta^* \sigma^+) \right]. \quad (5.5)$$

Мацубаровские энергии здесь семионного типа, $\varepsilon_l = 2\pi T(l + 1/4)$, в то время как след берется по всем пространствам. Это действие является краеугольным камнем данной главы. Немного погодя мы также включим взаимодействие с акустической волной.

5.3 Свободная энергия (\equiv статический предел)

Мацубаровское действие, вычисленное на статической конфигурации поля параметра порядка, определяет свободную энергию в приближении среднего поля,

$$\mathcal{F} = - \int_r \Delta^* J^{-1} \Delta + T \sum_l \int_r \text{tr} \ln \left[i\varepsilon_l + \xi \sigma^z + \frac{1}{2}(\Delta \sigma^- + \Delta^* \sigma^+) \right], \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_l = 2\pi T \left(l + \frac{1}{4} \right).$$

На статической конфигурации сумму по Мацубаровским частотам во втором члене можно вычислить:

$$\begin{aligned} \sum_l \text{tr} \ln [i\varepsilon_l + \xi \sigma^z + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Delta}] &= \ln \prod_l (i\varepsilon_l + E)(i\varepsilon_l - E), \quad E = \sqrt{\Delta^2 + \xi^2} \\ &= \ln \prod_l \frac{\varepsilon_l^2 + E^2}{\varepsilon_l^2} + \text{const} = \ln \prod_l \left[1 + \frac{(E/T)^2}{[2\pi(l + 1/4)]^2} \right] + \text{const} = \ln \cosh \frac{\Delta}{T}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Заметим, что наличие гиперболического косинуса в ответе практически очевидно, если смотреть на исходный псевдоспиновый Гамильтониан (5.1).

Таким образом, свободная энергия есть

$$\mathcal{F} = - \sum_{i,j} \Delta_i^* J_{ij}^{-1} \Delta_j + T \sum_i \ln \cosh \frac{\sqrt{\xi_i^2 + \Phi_i^2}}{T}. \quad (5.8)$$

Как мы уже упоминали (уравнение 5.2), мы ограничиваемся разложением взаимодействия до второго порядка по неоднородностям распределения параметра порядка. Это значит, что в главном приближении плотность свободной энергии дается выражением

$$\mathcal{F}_V = \frac{R^2}{g} |\nabla \Delta|^2 + \frac{1}{g} \Delta^2 + \frac{T}{a^3} \left\langle \ln \cosh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{T} \right\rangle_\xi, \quad (5.9)$$

где мы ограничиваемся среднеполевым приближением по случайному полю ξ , так что угловые скобки подразумевают выражение

$$\langle \dots \rangle_\xi = \frac{1}{2W} \int_{-W}^{+W} d\xi (\dots) \quad (5.10)$$

Фактическое значение параметра порядка определяется минимумом свободной энергии (5.9),

$$\frac{\partial \mathcal{F}_V}{\partial \Delta} = 0, \quad (5.11)$$

которое приводит к уравнению самосогласования

$$1 = \frac{g}{Wa^3} \int d\xi \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}} \tanh \frac{\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}}{T}, \quad (5.12)$$

Это уравнение практически идентично уравнению самосогласования в БКШ модели, с точностью до замены $2T \rightarrow T$. Это проявление того факта, что в нашей модели элементарным возбуждением является Куперовская пара с энергией 2Δ , в то время, как в БКШ модели имеются одноэлектронные возбуждения с энергией Δ .

Без ограничения общности мы предположили, что параметр порядка действителен. Температура сверхпроводящего фазового перехода определяется обращением параметра порядка Δ в нуль, так что из уравнения (5.11) следует, что она равна

$$T_c = 2.27We^{-1/\lambda}, \quad (5.13)$$

где

$$\lambda = \frac{g}{Wa^3} \equiv \frac{J}{W} \equiv \nu g. \quad (5.14)$$

есть безразмерная константа взаимодействия.

5.3.1 Окрестность T_c

В окрестности фазового перехода мы можем разложить свободную энергию по степеням Δ^2 и получить свободную энергию Гинзбурга-Ландау,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V(\mathbf{q} = 0) &= \frac{1}{2g}\Delta^2 - \frac{T}{a^3} \left\langle \ln \cosh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{T} \right\rangle_{\xi} \\ &\simeq \mathcal{F}_V(0, T) + \nu \left(\frac{1}{2}A\Delta^2 + \frac{1}{4}B\Delta^4 \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

где оба параметра разложения A и B выражаются через семионные Мацубаровские суммы, с энергией $\varepsilon_l = 2\pi T(l + 1/4)$. Первый параметр описывает массу амплитудной моды выше точки перехода,

$$A = \lambda^{-1} - W \left\langle T \sum_l \frac{1}{\varepsilon_l^2 + \xi^2} \right\rangle_{\xi} = \frac{1}{\lambda} - W \left\langle \frac{\tanh \xi/T}{\xi} \right\rangle_{\xi} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{T}{T_c}. \quad (5.16)$$

Второй член B определяет величину нелинейного члена четвертого порядка и равен

$$B = W \left\langle T \sum_l \frac{1}{(\varepsilon_l^2 + \xi^2)^2} \right\rangle_\xi = \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2 T^2}. \quad (5.17)$$

Из уравнения (5.15) в частности следует обычный закон обращения параметра порядка в нуль в точке перехода, а именно

$$\Delta = \sqrt{\frac{7\zeta(3)g}{4\pi^2 W T^3} (T_c - T)} \propto (T_c - T)^{1/2}. \quad (5.18)$$

Также мы получаем выражение для длины когерентности в рамках псевдоспиновой модели,

$$\xi_{\text{coh}} = R \sqrt{\frac{T_c}{2(T_c - T)}}, \quad (5.19)$$

которое проясняет физический смысл радиуса взаимодействия R .

5.3.2 Низкие температуры $T \ll T_c$

При низких температурах значение параметра порядка определяется уравнением (5.12), которое принимает вид

$$1 = \lambda \int_0^W d\xi \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}}, \quad (5.20)$$

так что параметр порядка при нуле температуры $\Delta_0 = 2W e^{-1/\lambda}$.

Раскладывая свободную энергию по отклонениям от основного состояния, $\eta = (\Delta - \Delta_0)/\Delta_0$, получаем для свободной энергии

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V(\mathbf{q} = 0) &= \frac{1}{2g} \Delta^2 - \frac{T}{a^3} \left\langle \ln \cosh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{T} \right\rangle_\xi \simeq \frac{1}{2g} \Delta^2 - a^{-3} \left\langle \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \right\rangle_\xi \\ &\simeq \nu \left(\frac{1}{2} A_0 \Delta_0^2 \eta^2 + \frac{1}{3} C_0 \Delta_0^3 \eta^3 + \frac{1}{4} B_0 \Delta_0^4 \eta^4 \right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где параметры

$$\begin{aligned}
A_0 &= \lambda^{-1} - W \left\langle \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - \frac{\Delta^2}{(\xi^2 + \Delta^2)^{3/2}} \right\rangle_{\xi} = 1. \\
B_0 &= W \left\langle \frac{3\Delta^2\xi^2}{(\xi^2 + \Delta^2)^{5/2}} \right\rangle_{\xi} = \frac{1}{3\Delta_0}. \\
C_0 &= W \left\langle \frac{3\Delta^2\xi^2}{(\xi^2 + \Delta^2)^{5/2}} \right\rangle_{\xi} = \frac{1}{9\Delta_0^2},
\end{aligned} \tag{5.22}$$

причем первый из них определяет вид статического пропагатора амплитуды параметра порядка, а второй и третий (B_0 и C_0 соответственно) описывают нелинейные эффекты и отвечают вершинам третьего и четвертого порядка на языке диаграммной техники.

Для длины когерентности при нуле температуры мы получаем, подобно уравнению 5.19,

$$\xi_{\text{coh}}(0) = \lambda^{-1/2} R. \tag{5.23}$$

Наконец заметим, что истинный параметр порядка конечно неоднороден (при большом, но конечном радиусе взаимодействия R), поскольку он должен минимизировать уравнение (5.8), но отклонения от среднего значения малы и по порядку величины равны $O(Z^{-1})$, где $Z \sim R^3/a^3$ есть среднее число соседей одного псевдоспина:

$$\delta\Delta_i = \Delta_i - \Delta = \sum_j J_{ij} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2 + \xi_i^2}} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2 + \xi^2}} \right\rangle \right) + O(Z^{-3/2}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{Z}}\right), \tag{5.24}$$

так что $\langle \Delta \rangle = \Delta_0$ с как минимум $o(Z^{-1})$ точностью (настоящее среднее значение параметра порядка тоже, вообще говоря, не совпадает со среднеполевым значением).

5.4 Пропагатор параметра порядка

В этом и следующем разделах мы сосредоточимся на случае низких температур $T \ll T_c$. В сверхпроводящей фазе, при температурах $T < T_c$, симметрия нару-

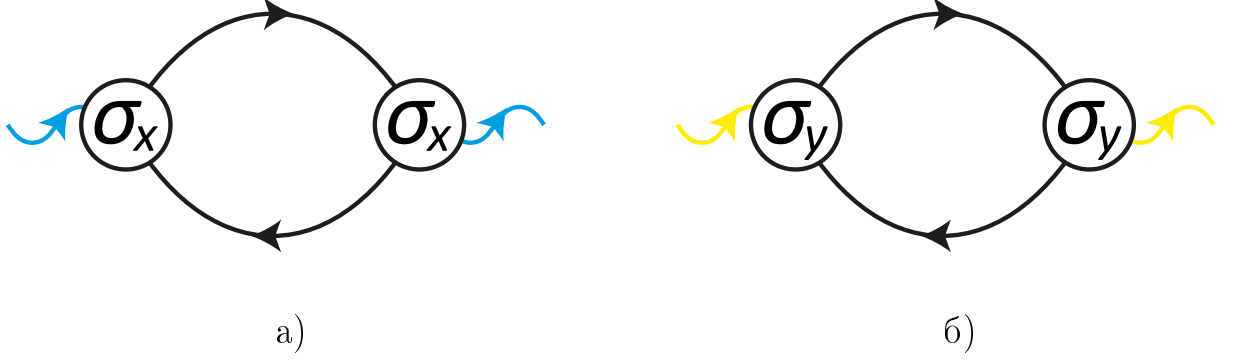


Рис. 5.1: Собственная энергия коллективной сверхпроводящей моды (амплитудной слева, синие внешние линии и фазовой справа, желтые линии). Здесь черные линии обозначают семионные пропагаторы.

шена и флуктуации параметра порядка вокруг ненулевого среднего значения можно параметризовать как

$$\Delta = (1 + \eta)\Delta_0 e^{i\varphi}, \quad (5.25)$$

явно выделяя две коллективные моды: массивную амплитудную η (Андерсон-Хиггсовскую) и безмассовую Голдстоуновскую, фазовую ϕ .

Действие (5.5) можно разложить по флуктуациям вокруг основного состояния Δ_0 . Квадратическая Гауссова часть описывает динамику коллективных мод. После разложения, действие дает для амплитудного пропагатора

$$L_\eta^{-1}(\Omega, \mathbf{k}) = -\frac{\Delta^2}{a^3} [-J^{-1}(\mathbf{k}) - \Pi_{xx}(\Omega, \mathbf{k})], \quad (5.26)$$

где Π_{xx} есть $\sigma_x - \sigma_x$ семионный коррелятор (смотрите также Рис.5.1),

$$\Pi_{xx} = T \sum_l \int_\xi \text{tr} \sigma_x G(i\varepsilon_l) \sigma_x G(i\varepsilon_{l+n}). \quad (5.27)$$

G есть семионная функция Грина, элементарный блок семионной диаграммной техники, которая равна

$$G(i\varepsilon_l) = \frac{1}{i\varepsilon_l + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{\pm} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2E} \right) \frac{1}{i\varepsilon_l \pm E} \quad (5.28)$$

с вектором $\mathbf{E} = (\Delta, 0, \xi)$, $E = \sqrt{\Delta^2 + \xi^2}$.

Вычисление коррелятора дает

$$\Pi_{xx} = \sum_l \int_\xi \left[\frac{\Delta^2}{E^2} \left(\frac{1}{i\varepsilon_{l+n} - E} \frac{1}{i\varepsilon_l - E} + (E \rightarrow -E) \right) + \right. \quad (5.29)$$

$$\left. + \frac{\xi^2}{E^2} \left(\frac{1}{i\varepsilon_{l+n} + E} \frac{1}{i\varepsilon_l - E} + (E \rightarrow -E) \right) \right], \quad (5.30)$$

где в низкотемпературном пределе $T \ll \Delta$ первый член дает экспоненциально малый вклад, в то время как второй член приводит к

$$\Pi_{xx} = \int_\xi \frac{\xi^2}{E^2} \cdot \frac{E}{E^2 + (\Omega_n/2)^2} = g^{-1} - W^{-1} \frac{\sqrt{4\Delta^2 + \Omega_n^2} \operatorname{arcsch} \left| \frac{\Omega_n}{2\Delta} \right|}{|\Omega_n|}, \quad (5.31)$$

где в процессе вывода мы воспользовались уравнением самосогласования (5.11). Вспоминая разложение (5.2) по степеням волнового вектора, мы получаем пропагатор во мнимом времени

$$L_\eta^{-1}(i\Omega_n, \mathbf{k}) = -\nu \left[\Delta^2 b \left(\frac{i\Omega_n}{2\Delta} \right) + \frac{v^2 k^2}{4} \right], \quad (5.32)$$

где мы ввели скорость

$$v = \lambda^{-1/2} \Delta R \quad (5.33)$$

и функцию

$$b(ix) = \sqrt{1+x^2} \frac{\operatorname{arcsch}|x|}{|x|}. \quad (5.34)$$

Полученный пропагатор имеет особенность в виде разреза вдоль $(-\infty, -2\Delta] \cup [2\Delta, +\infty)$. Аналитическое продолжение на действительные частоты $i\Omega_n \rightarrow \Omega + i0$ дает для запаздывающего пропагатора

$$(L_\eta^R(\Omega, \mathbf{Q}))^{-1} = -\nu \left[\Delta^2 b^R \left(\frac{\Omega + i0}{2\Delta} \right) + \frac{v^2 k^2}{4} \right], \quad (5.35)$$

где функция

$$b^R(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} (\arcsin x/x) & |x| < 1 \\ \sqrt{1-x^2} \left[\frac{i\pi}{2} + \operatorname{arch} x \right] & |x| > 1 \end{cases}. \quad (5.36)$$

Для энергий слегка превышающих энергию сверхпроводящей щели $b^R \simeq i\pi\sqrt{(x-1)/2}$, так что

$$(L_\eta^R(\Omega, \mathbf{Q}))^{-1} = -\nu\Delta^2 \left[i\pi\sqrt{\frac{\Omega-2\Delta}{4\Delta}} + \frac{v^2k^2}{4\Delta^2} \right], \quad (5.37)$$

$(\Omega > 2\Delta, |\Omega - 2\Delta| \ll \Delta)$

в то время как на больших энергиях $b^R \simeq i\pi/2 + \ln 2x$,

$$(L_\eta^R(\Omega, \mathbf{Q}))^{-1} = -\nu\Delta^2 \left[\frac{i\pi}{2} + \ln \frac{\Omega}{\Delta} + \frac{v^2k^2}{4\Delta^2} \right]. \quad (5.38)$$

$(\Omega \gg 2\Delta)$

Наконец, для малых энергий мы имеем

$$(L_\eta^R(\Omega, \mathbf{Q}))^{-1} = -\nu\Delta^2 \left[1 - \frac{\Omega^2}{12\Delta^2} + \frac{v^2k^2}{4\Delta^2} \right]. \quad (5.39)$$

$(|\Omega| \ll 2\Delta)$

Рассмотрим теперь фазовую моду. Она не имеет щели, а в то же время существенные в нашей задаче энергии ω, T много меньше сверхпроводящей щели Δ . Это значит, что мы можем разложить выражение для фазового пропагатора по частоте Ω_n . Вычисление дает

$$L_\phi^{-1}(i\Omega_n, \mathbf{k}) = -\frac{\nu}{4} [\Omega_n^2 + v^2k^2]. \quad (5.40)$$

5.5 Электрон-фононное взаимодействие

Взаимодействие с продольными фононами можно ввести посредством модуляций амплитуды перескока Куперовской пары (то есть взаимодействия псевдоспинов) как

$$H_{\text{e-ph}}[\mathbf{S}_i] = \kappa \sum_{i,j=1}^N (J_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}) [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y] \quad (5.41)$$

с константой взаимодействия κ , которая обычно порядка единицы $\kappa \sim 1$. Выбор такой модели электрон-фононного взаимодействия в эффективном псевдоспиновом Гамильтониане разумен, поскольку слагаемое, описывающее прыжки

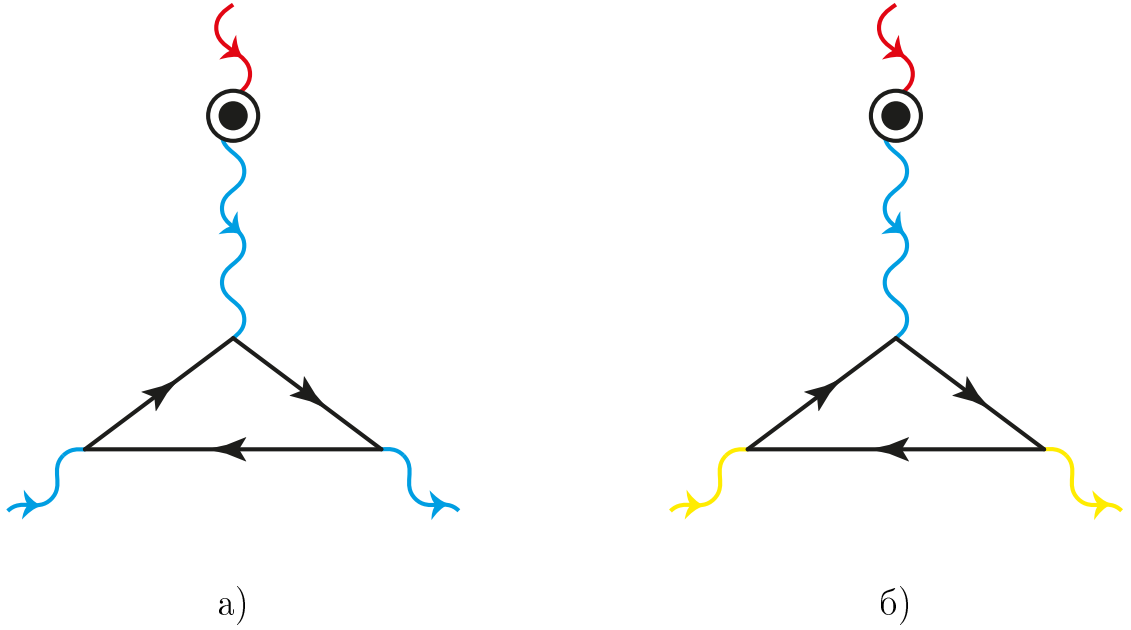


Рис. 5.2: Вершина взаимодействия фонон-коллективные-сверхпроводящие моды. Слева изображена вершина конверсии фонона в две амплитудные моды, а справа в две фазовые; черные линии в треугольнике являются семионными пропагаторами.

Куперовских пар, собственно и происходит от Куперовского взаимодействия между электронами, переносчиками которого являются фононы. Такая модель электрон-фононного взаимодействия также находится в очень близкой аналогии с электрон-фононным взаимодействием, описанным в главе 4 для слабоупорядоченных сверхпроводников. А именно, в адиабатическом пределе $\omega, q \rightarrow 0$ влияние акустической волны сводится к модуляциям безразмерной константы связи

$$\lambda \rightarrow \lambda(1 - \kappa \operatorname{div} \mathbf{u}). \quad (5.42)$$

Важнейшим следствием таких модуляций константы взаимодействия λ является изменение параметра порядка Δ_0 в основном состоянии, из-за экспоненциальной чувствительности последнего:

$$\Delta = 2W e^{-1/\lambda} \rightarrow \Delta \left(1 + \frac{\kappa}{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{u} \right). \quad (5.43)$$

Используя явные выражения для амплитудного (5.32) и фазового (5.40) пропагаторов, мы в итоге получаем действие, описывающее электрон-фононное

взаимодействие

$$\mathcal{A}_{\text{e-ph}}[\Delta, \mathbf{u}] = -\text{Tr} (\Gamma_\eta \eta^2 + \Gamma_\phi \phi^2) \delta\Delta, \quad (5.44)$$

где $\delta\Delta = (\kappa/\lambda)\Delta \text{div} \mathbf{u}$ обозначает изменение параметра порядка при деформации решетки и $\Gamma_{\eta(\phi)}$ определяются обратными пропагаторами с помощью тождества, подобному тождеству Уорда в электродинамике,

$$\Gamma_{\eta(\phi)} = \frac{\delta L_{\eta(\phi)}^{-1}}{\delta\Delta}. \quad (5.45)$$

Взаимодействие (5.44) справедливо в довольно общих условиях. В частности, оно дает электрон-фононное взаимодействие как в при наличии, так и при отсутствии Кулоновского взаимодействия. При наличии Кулона подразумевается, что мы исключаем электромагнитное поле, интегрируя по нему в функциональном интеграле, что приводит к возникновению щели в фазовой моде и модификации пропагатора L_ϕ^{-1} .

В отсутствие Кулоновского взаимодействия, используя явные выражения для пропагаторов амплитудной (5.32) и фазовой мод (5.40) мы имеем

$$\mathcal{A}_{\text{e-ph}}[\eta, \phi, \mathbf{u}] = \frac{\kappa_*}{W} \text{Tr} \left(\frac{\partial(\Delta^2 b)}{\partial \ln \Delta} \eta^2 + \frac{v^2}{4} [(\nabla \eta)^2 + (\nabla \phi)^2] \right) \text{div} \mathbf{u}, \quad (5.46)$$

где мы ввели “усиленную” константу взаимодействия $\kappa_* = \kappa/\lambda$ и $b \equiv b(i\Omega_n)$ есть функция, определяемая уравнением (5.34).

5.6 Поглощение ультразвука

Как и в предыдущих главах, поглощение ультразвука α связано с мнимой частью фононной собственной энергии,

$$\alpha = \frac{1}{\rho_m \omega} \text{Im} \Sigma_{\text{ph}}^A, \quad (5.47)$$

где Σ_{ph}^A есть собственная энергия акустического фонона взятая на действительной частоте и ρ_m есть плотность вещества. Фононный спектр, как и в предыдущих главах, полагается акустическим $\omega(q) = sq$, со скоростью звука много

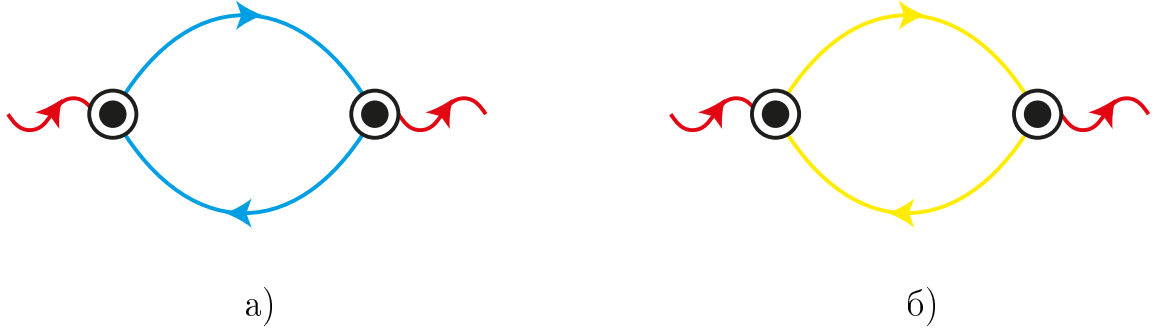


Рис. 5.3: Вклад сверхпроводящих коллективных мод в поглощение ультразвука. Слева изображен вклад амплитудной моды, когда фонон (красная линия) распадается на две амплитудные моды (синие линии). Аналогичный процесс имеет место через фазовые моды (желтые линии), он изображен справа.

меньше скорости коллективных возбуждений в сверхпроводнике: $s \ll v$. В псевдощелевом сверхпроводнике имеется два вклада в поглощение ультразвука, от фазовой и от амплитудной моды, которые мы и рассматриваем ниже.

5.6.1 Фазовая мода

Поглощение ультразвука из-за взаимодействия с фазовой модой описывается процессом в котором акустический фонон распадается на два фазона,

$$\Sigma_{\text{ph-}\phi}(i\omega_n, \mathbf{q}) = \sum_{m, \mathbf{k}} |\Gamma_{\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{q})|^2 \times L_{\phi}(i\Omega_m, \mathbf{k}) L_{\phi}(i\Omega_{m+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (5.48)$$

где электрон-фононная вершина взаимодействия Γ_{ϕ} следует из уравнения (5.46),

$$\Gamma_{\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = iq \frac{\kappa_* \nu^2 v^2}{4} [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})]. \quad (5.49)$$

Таким образом мы имеем выражение

$$\Sigma_{\text{ph-}\phi}(i\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{\kappa_*^2 \nu^2 v^4}{16} q^2 \sum_{m, \mathbf{k}} [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})]^2 \times L_{\phi}(i\Omega_m, \mathbf{k}) L_{\phi}(i\Omega_{m+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (5.50)$$

Аналитическое продолжение выполняется стандартным образом и дает для

мнимой части собственной энергии

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{\text{ph-}\phi}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\kappa_*^2 \nu^2 v^4}{8} q^2 \int_{\Omega, \mathbf{Q}} [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})]^2 \times [B(\Omega + \omega) - B(\Omega)] \times \\ \times \text{Im } L_\phi^{\text{R}}(\Omega, \mathbf{k}) \text{Im } L_\phi^{\text{R}}(\Omega + \omega, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

с бозонной функцией распределения $B(x) = \coth x/2T$. Поскольку мнимая часть фазового пропагатора пропорциональна сумме дельта функций,

$$\text{Im } L_\phi^{\text{R}}(\Omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{\nu v k} \left(\delta(\Omega - vk) - \delta(\Omega + vk) \right), \quad (5.52)$$

как это следует из уравнения (5.40), мы в конечном итоге получаем

$$\alpha_{\text{ph-}\phi} = \frac{2\pi^4 \kappa_*^2}{15} \frac{T^4}{\rho_m s v^4} \omega, \quad (5.53)$$

где мы предполагали следующую иерархию энергетических масштабов:

$$\omega = sq \ll vq \ll T. \quad (5.54)$$

Ответ можно также переписать как

$$\alpha_{\text{ph-}\phi} = \frac{2\pi^4}{15} \kappa_*^2 \left(\frac{a_0}{R} \right)^4 \left(\frac{T}{\Delta} \right)^4 \omega, \quad (5.55)$$

где $a_0 = (\rho_m s)^{-1/4}$ по порядку величины равно постоянной *ионной* решетки вещества, а R есть характерный радиус взаимодействия псевдоспинов, т.е. величина несколько большая, чем длина локализации одноэлектронных состояний, смотрите раздел 6 статьи [46].

5.6.2 Амплитудная мода

Вклад амплитудной моды в поглощение ультразвука происходит от амплитудных коллективных возбуждений η с энергиями близкими к пороговой $\Omega = 2\Delta$, плотность которых экспоненциально мала при $T \ll \Delta$. На этих энергиях электрон-фононная вершина сингулярна, эта сингулярность имеет вид:

$$\Gamma_\eta(i\Omega_k) \simeq i\kappa_* \nu q \frac{\Delta^2 b \left(\frac{i\Omega_k}{2\Delta} \right)}{1 + (\Omega_k/2\Delta)^2}, \quad (5.56)$$

где Ω есть энергия коллективной моды и фононная частота $\omega \rightarrow 0$. После аналитического продолжения, для действительных частот близких к энергии щели, мы получаем для квадрата вершины

$$|\Gamma_\eta(\Omega)|^2 \simeq \frac{\pi^2}{4} \kappa_*^2 \nu^2 q^2 \frac{\Delta^5}{|\Omega - 2\Delta|}. \quad (5.57)$$

Учет ненулевой акустической частоты ω ослабляет сингулярность в вершине:

$$\frac{1}{\Omega - 2\Delta} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(\Omega - 2\Delta)(\Omega + \omega - 2\Delta)}}. \quad (5.58)$$

Амплитудный пропагатор дается уравнением (5.37), и в частности его мнимая часть равна

$$\begin{aligned} \text{Im } L_\eta^{\text{R}}(\Omega, \mathbf{k}) &= \frac{8}{\nu} \frac{\gamma \Delta^2}{\Delta^4 \gamma^2 + \nu^4 k^4}, \\ (\gamma &= 2\pi \sqrt{(\Omega - 2\Delta)/\Delta}) \end{aligned} \quad (5.59)$$

где предполагается, что энергия $\Omega > 2\Delta$ (и $|\Omega - 2\Delta| \ll \Delta$).

Подобно фазонному вкладу (5.51), для поглощения ультразвука в процессах распада акустического фонона на два кванта амплитудной моды, мы имеем

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{\text{ph-}\eta}(\omega, \mathbf{q}) &= \int_{\Omega, \mathbf{Q}} |\Gamma_\eta(\Omega, \omega)|^2 \times [B(\Omega + \omega) - B(\Omega)] \times \\ &\times \text{Im } L_\eta^{\text{R}}(\Omega, \mathbf{k}) \text{Im } L_\eta^{\text{R}}(\Omega + \omega, \mathbf{k} + \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Этот интеграл имеет инфракрасную расходимость, которая регуляризуется фононной частотой ω , так что ведущий вклад происходит от частот $(\Omega - 2\Delta) \sim \omega$,

$$\alpha_{\text{ph-}\eta} = \frac{64\sqrt{\pi}}{3} \kappa_*^2 \frac{\Delta^5}{\rho_m s^2 \nu^3} \left(\frac{\Delta}{T}\right) \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^{7/4} e^{-2\Delta/T} \quad (5.61)$$

Сравнивая этот вклад с фазонным (5.55), мы видим, что фазовый и амплитудный механизмы приводят к весьма разным функциональным зависимостям скорости поглощения ультразвука от частоты ω и температуры T . В частности, амплитудный вклад ведет себя как $\omega^{7/4}$, в то время как фазовый не зависит от

частоты. Отношение вкладов получается равным

$$\frac{\alpha_{\text{ph}-\eta}}{\alpha_{\text{ph}-\phi}} = \frac{480}{\underbrace{\pi^{7/2}}_{=8.73}} \left(\frac{v}{s}\right) \left(\frac{\Delta}{T}\right)^5 \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^{3/4} e^{-2\Delta/T}, \quad (5.62)$$

из которого мы видим, что возникает кроссовер как в частотном, так и в температурном поведении поглощения ультразвука. Для частотного кроссовера мы имеем

$$\omega_* = \Delta \left(\frac{\pi^{7/2} s}{480 v}\right)^{4/3} \left(\frac{T}{\Delta}\right)^{20/3} e^{8\Delta/3T} : \quad \begin{array}{l} \omega > \omega_* \text{ доминирует амплитуда} \\ \omega < \omega_* \text{ доминирует фаза} \end{array}, \quad (5.63)$$

в то время как температурный кроссовер происходит при температуре (с логарифмической точностью)

$$T_* = \frac{2\Delta}{\ln\left(\frac{480}{\pi^{7/2}} \left(\frac{v}{s}\right) \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^{3/4}\right)} : \quad \begin{array}{l} T > T_* \text{ доминирует амплитуда} \\ T < T_* \text{ доминирует фаза} \end{array}, \quad (5.64)$$

Обратим особое внимание на нетривиальные температурные зависимости кроссоверных частоты и температуры ω_* , T_* . В частности, частота кроссовера имеет нетривиальную экспоненту с “активационной энергией” $(8/3)\Delta$.

В асимптотическом пределе $T/\Delta \rightarrow 0$, фазовый вклад доминирует, хотя есть небольшое окно относительно малых $T/\Delta \ll 1$, где главный вклад дается амплитудной модой. Несмотря на это, фазовая мода на самом деле является артефактом модели с полностью выключенным Кулоновским взаимодействием. Как мы увидим в следующем разделе, даже относительно слабое дальнедействующее Кулоновское взаимодействие отодвигает энергии самых мягких коллективных мод на энергию 2Δ .

Полученный результат (5.61) можно сравнить с подобными ответами (4.32), (4.34) приведенными в главе 4 для скорости поглощения ультразвука в обычном s -wave сверхпроводнике, где ответ пропорционален $\alpha \propto \exp(-\Delta/T)$. Различие на фактор 2 в экспоненте важно и оно отражает принципиальное отсутствие одночастичных возбуждений в псевдощелевом состоянии (у которых энергия

$\Delta_P \gg 2\Delta$), так что элементарное возбуждение отвечает целой Куперовской паре с энергией 2Δ .

5.7 Влияние Кулоновского взаимодействия

В этой главе мы пока что ограничивались случаем “выключенного” Кулоновского взаимодействия. В этом разделе мы полуколичественно рассмотрим изменения, к которым приводит Кулоновское взаимодействие, а именно возникновение щели у фазовой моды вследствие механизма Андерсона-Хиггса. (или Андерсона-Браута-Энглера-Гуральника-Хагена-Хиггса-Киббла-т’Хоофта, как его называет сам Питер Хиггс [60]). Это в итоге влечет за собой то, что и амплитудный и фазовый вклад в скорость поглощения ультразвука оказываются пропорциональными экспоненте с коллективной щелью $\propto \exp(-2\Delta/T)$.

Мы рассматриваем трехмерный случай, в котором включаем Кулоновское взаимодействие в нашу модель минимальным образом, через скалярный потенциал Φ , так что Гамильтониан (5.1) получает дополнительные члены

$$H[\mathbf{S}_i] = -2 \sum_{i=1}^N (\xi_i + \Phi_i) S_i^z - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} [S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-] + \sum_{i<j} \Phi_i \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right)^{-1} \Phi_j, \quad (5.65)$$

где в последнем члене подразумевается матричное обращение и он описывает коррелятор скалярного потенциала (обычный закон Кулона с диэлектрической постоянной ϵ). Действуя по той же схеме, по которой мы перешли от уравнения (5.1) к (5.5), мы получаем действие с учетом Кулоновского взаимодействия,

$$\mathcal{A}[\Delta] = -\text{Tr} [\Delta^* J^{-1} \Delta] + \text{Tr} \ln \left[i\epsilon_l + (\xi + \Phi)\sigma^z + \frac{1}{2}(\Delta\sigma^- + \Delta^*\sigma^+) \right] - \text{Tr} \left[\Phi_i \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right)^{-1} \Phi_j \right]. \quad (5.66)$$

Наиболее драматическим следствием Кулоновского отталкивания есть так называемое “поедание” Голдстоуновского бозона калибровочным полем, когда

эти два поля перемешиваются оставляя после себя только массивные моды (эффект Андерсона-Хиггса). В этом разделе мы концентрируемся именно на этом эффекте, так что разложим действие по фазовым флуктуациям

$$\mathcal{A}[\phi, \Phi] = -\nu\Delta^2 \text{Tr} \left[\left(-\frac{v^2 k^2}{4\Delta^2} + \Pi_{yy} \right) \phi^2 + 2\Pi_{yz}\phi \cdot \left(\frac{\Phi}{\Delta} \right) + \right. \\ \left. + (\Pi_{zz} + \nu^{-1}V^{-1}(k)) \cdot \left(\frac{\Phi}{\Delta} \right)^2 \right] \quad (5.67)$$

где $V(q) = 4\pi e^2/\epsilon q^2$ есть пропагатор Кулоновского взаимодействия и $\Pi_{\alpha\beta}$ есть семионные корреляторы подобные (5.27), смотрите также рисунок (5.1). Вычисление семионных корреляторов $\Pi_{\alpha\beta} = T \sum_l \int_\xi \text{tr} \sigma_\alpha G(i\varepsilon_l) \sigma_\beta G(i\varepsilon_{l+n})$ дает

$$\Pi_{yy}(x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{arcsch } x, \quad (5.68)$$

$$\Pi_{yz}(x) = i\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{arcsch } x, \quad (5.69)$$

$$\Pi_{zz}(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \text{arcsch } x, \quad (5.70)$$

где $x = \Omega_n/2\Delta$. Напомним, что корреляторы (5.68-5.70) вычисляются в пределе низких температур $T \ll \Delta$. Для получения пропагатора фазовой моды избавимся от калибровочного поля, проинтегрировав по нему,

$$\int D\phi e^{-\mathcal{A}_{\text{eff}}[\phi]} = \int D\phi D\Phi e^{-\mathcal{A}[\phi, \Phi]}, \quad (5.71)$$

получая эффективное действие для фазовой моды

$$\mathcal{A}_{\text{eff}}[\phi] = -\nu\Delta^2 \int_\xi \text{Tr} \left[\phi \left(-\frac{v^2 k^2}{4\Delta^2} + \Pi_{yy} - \frac{\Pi_{yz}^2}{\Pi_{zz} + \nu^{-1}V^{-1}} \right) \phi \right]. \quad (5.72)$$

Таким образом, фазовый пропагатор во мнимом времени оказывается равным

$$L_\phi^{-1}(i\Omega_n) = -\nu\Delta^2 \left[\frac{v^2 k^2}{4\Delta^2} - \frac{\Pi_{yy}}{1 + (\nu V)\Pi_{zz}} \right], \quad (5.73)$$

где использовали тот факт, что между корреляторами $\Pi_{\alpha\beta}$ имеется соотношение $\Pi_{yz}^2 = -\Pi_{yy}\Pi_{zz}$. Таким образом обратный пропагатор фазовой моды дается

выражением

$$L_{\phi}^{-1}(i\Omega_n) = \frac{\nu v^2 k^2}{4} \left[1 + \frac{\epsilon \Omega_n^2}{4\pi\nu e^2 v^2} \left(1 + \left(\frac{\epsilon k^2}{4\pi\nu e^2} \right) \frac{\frac{\Omega_n}{2\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_n}{2\Delta}\right)^2}}{\operatorname{arcsinh} \frac{\Omega_n}{2\Delta}} \right)^{-1} \right]. \quad (5.74)$$

Для дальнейшего анализа полученного выражения следует продолжить его на действительные частоты $i\Omega_n \rightarrow \Omega$. Эта процедура проводится довольно прямолинейно, причем в процессе мы обнаруживаем у данного пропагатора как разрез вдоль $(-\infty, -2\Delta] \cup [2\Delta, +\infty)$, так и полюс около энергии

$$\Delta_{\phi} = \sqrt{4\pi\nu e^2 v^2 / \epsilon}. \quad (5.75)$$

В итоге аналитическое продолжение дает

$$(L_{\phi}^R(\Omega, k))^{-1} = \frac{\nu v^2 k^2}{4} \times \begin{cases} 1 - \frac{\Omega^2}{\Delta_{\phi}^2} \left(1 + \left(\frac{v^2 k^2}{\Delta_{\phi}^2} \right) \frac{\frac{\Omega}{2\Delta} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{2\Delta}\right)^2}}{\arcsin \frac{\Omega}{2\Delta}} \right)^{-1} & \Omega < 2\Delta \\ 1 - \frac{\Omega^2}{\Delta_{\phi}^2} \left(1 + \left(\frac{v^2 k^2}{\Delta_{\phi}^2} \right) \frac{\frac{\Omega}{2\Delta} \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2\Delta}\right)^2 - 1}}{\ln \left[\frac{\Omega}{2\Delta} + \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2\Delta}\right)^2 - 1} \right] - i\frac{\pi}{2}} \right)^{-1} & \Omega \geq 2\Delta \end{cases}. \quad (5.76)$$

Из полученного результата явно видно наличие разреза начинающегося с энергией 2Δ . Также из ответа для энергий $\Omega > 2\Delta$ мы видим наличие полюса в пропагаторе; полагая $(L_{\phi}^R(\Omega, k))^{-1} = 0$ мы получаем дисперсию фазовой моды (выражение ниже справедливо при не слишком больших импульсах k)

$$\Omega^2 = \Delta_{\phi}^2 + v_{\phi*}^2 k^2, \quad (5.77)$$

где скорость массивного фазона есть

$$v_{\phi*} = v \times \frac{\Delta_{\phi}}{2\Delta} \left(\ln \frac{\Delta_{\phi}}{\Delta} \right)^{-1/2} \gg v. \quad (5.78)$$

Ниже мы приведем оценки, показывающие, что в типичном случае плазменная щель значительно больше амплитудной $\Delta_{\phi} \geq 2\Delta$. Вместо использования выражения (5.75), сформулированного на языке параметров модели, удобно

переписать Δ_ϕ через наблюдаемые:

$$\Delta_\phi^2 = \frac{4\pi e^2 \hbar^2 \rho_s}{\epsilon e^2} \quad (5.79)$$

где ρ_s есть сверхпроводящая плотность определенная через отклик тока на внешнее электромагнитное уравнение, $\mathbf{j} = -\rho_s \mathbf{A}/c$. Далее мы используем оценку [50] для сверхпроводящей плотности в псевдощелевом сверхпроводнике, $\rho_s \sim \nu_0 e^2 R^2 \Delta^2 / \hbar^2$, получая

$$\frac{\Delta_\phi^2}{4\Delta^2} \approx \frac{\pi e^2}{\epsilon} \nu_0 R^2 \quad (5.80)$$

Чтобы получить представление о релевантных порядках величины параметров, мы используем значения известные для аморфных пленок сверхпроводящего InO_x : для плотности состояний мы берем [61] оценку $\nu_0 \sim 2 \cdot 10^{33} \text{ эрг}^{-1} \text{ см}^{-3}$; чтобы оценить эффективную длину прыжка R Куперовской пары мы можем использовать значение сверхпроводящей длины когерентности $\xi_0 \approx 4 - 5 \text{ нм}$ полученное из измерений критического поля H_{c2} в образцах сверхпроводящего InO_x с более слабым беспорядком в работе [62]. Собирая все вместе, мы находим $\approx 500/\epsilon$ для правой части уравнения (5.80). К сожалению, эффективная диэлектрическая константа связи InO_x пока что не была измерена.

Иной подход к вопросу оценки соотношения плазмонной и амплитудной щели чисто теоретический. Рассмотрим невзаимодействующий Андерсоновский изолятор с длиной локализации L_{loc} и найдем его диэлектрический отклик при нулевой температуре $T = 0$. Эта программа была недавно реализована численно [63]; для 3D случая это дает $\epsilon \approx 3e^2 \nu_0 L_{loc}^2$. Подставляя эту оценку в отношение (5.80), мы находим удивительно простой ответ: $\Delta_\phi/2\Delta \approx R/L_{loc} > 1$. Таким образом мы можем сделать вывод, что плазмонная щель вероятнее всего слишком велика и фазовая мода оказывается нерелевантной для поглощения ультразвука.

Однако сделанный вывод может быть неверным для некоторых веществ с очень большой диэлектрической постоянной, таких как SrTiO_3 с его $\epsilon > 10^4$.

Слабое легирование SrTiO_3 превращает его в сверхпроводник [64, 65]. Такой сверхпроводник может иметь аномально малую плазмонную щель $\Delta_\phi \ll \Delta$; в этом случае ответы (5.53, 5.55) для скорости поглощения ультразвука фазовой модой могут оказаться релевантными.

5.8 Заключение

В этой главе мы вычислили скорость поглощения ультразвука в псевдощелевом сверхпроводнике за счет коллективных сверхпроводящих мод. Ключевое отличие от эффектов, рассмотренных в предыдущих главах 3-5, состоит в том, что одночастичная щель значительно превышает коллективную сверхпроводящую $\Delta_P \gg \Delta$ и низкотемпературное поглощение ультразвука определяется исключительно коллективными сверхпроводящими модами (в отличие от случаев, рассмотренных в главах 3-5, где доминантность диффузионного вклада зачастую требовала благоприятных параметров вещества).

В псевдощелевом сверхпроводнике присутствуют две коллективные моды, массивная амплитудная и безмассовая фазовая, каждая дающая вклад в поглощение ультразвука (уравнения 5.61 и 5.55 соответственно). В пренебрежении Кулоновским отталкиванием их вклад в скорость поглощения ультразвука имеет следующую температурную зависимость:

$$\alpha_{\text{amp}} \propto \exp\left[-\frac{2\Delta}{T}\right], \quad \alpha_{\text{phase}} \propto T^4, \quad (5.81)$$

так что при самых низких температурах вклад от бесщелевой фазовой моды всегда является ведущим. В реальных системах Кулоновское взаимодействие тем не менее всегда присутствует и относительно сильное, что приводит к возникновению щели в фазовой моде по механизму Андерсона-Хиггса. Мы количественно рассмотрели это явление и показали, что в этих условиях оба вклада от сверхпроводящих коллективных мод ведут себя как

$$\alpha \propto \exp\left[-\frac{2\Delta}{T}\right] \quad (5.82)$$

при низких температурах $T \ll \Delta$. Этот факт является ключевым результатом этой главы. Он позволяет заключить, что измерение скорости поглощения ультразвука в псевдощелевом сверхпроводнике представляет собой новый (в контексте данного применения) ценный способ напрямую измерять свойства псевдощелевого состояния, а именно коллективную сверхпроводящую щель Δ .

Если Кулоновское взаимодействие между электронами проводимости сильно подавлено из-за большой диэлектрической постоянной $\epsilon \geq 10^3$, то фазонный вклад может выжить (из-за неэффективности механизма Андерсона-Хиггса в таких условиях) и уравнения для вклада фазовой моды (5.53, 5.55, 5.81) будут релевантными. Различные частотные и температурные зависимости амплитудного и фазового вкладов в скорость поглощения ультразвука позволяют разделить эти два вклада.

Заключение

Основные результаты диссертации:

1. Указана фундаментальная связь потока тепла и скорости поглощения ультразвука, справедливая при произвольном электрон-электронном взаимодействии.
2. Показано, что в легированных полупроводниках, близких к пределу применимости теории неупорядоченных проводников по критерию Иоффе-Регеля $k_F l \sim 1$, ожидается усиленное поглощение ультразвука благодаря зарядовой диффузной моде, несмотря на наличие сильного Кулоновского взаимодействия.
3. Предсказан эффект поглощения ультразвука за счет возбуждения моды диффузии спиновой плотности, который может иметь место во внешнем магнитном поле или в ферромагнетиках. Рассмотрен конкретный пример магнитного поля направленного в плоскости двумерного электронного газа.
4. Показано, что ультразвук в неупорядоченных проводниках и сверхпроводниках испытывает дополнительное поглощение благодаря взаимодействию модуляций плотности решетки и газа термически возбужденных квазичастиц, которые находятся в неравновесных условиях по отношению к решетке из-за конечной частоты индуцированных акустической волной модуляций. Рассмотрены случаи нормального, s -волнового и d -волнового

сверхпроводящих состояний. Для d -волновых сверхпроводников мы вычислили также локальное поглощение, которое обладает сильной анизотропией с симметрией сверхпроводящего параметра порядка.

5. Развита теория электрон-фононного взаимодействия и поглощения ультразвука в псевдощелевом сверхпроводящем состоянии. Показано, что измерение скорости поглощения ультразвука может служить полезным инструментом для измерения коллективной сверхпроводящей щели.

Публикации по теме диссертации

1. A.V. Shtyk, M.V. Feigel'man, V.E. Kravtsov, Magnetic Field-Induced Giant Enhancement of Electron-Phonon Energy Transfer in Strongly Disordered Conductors, Phys. Rev. Lett. 111, 166603 (2013)
2. A. Shtyk, M. Feigel'man, Ultrasonic attenuation via energy diffusion channel in disordered conductors, Phys. Rev. B 92, 195101 (2015)
3. A. Shtyk, M. Feigel'man, Ultrasonic attenuation in a pseudogapped superconductor – arXiv:1609.01683.

Литература

- [1] A. B. Pippard. CXXII. Ultrasonic attenuation in metals. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 46(381):1104–1114, 1955.
- [2] А. И. Ахиезер, М. И. Каганов и Г. Я. Любарский. Затухание ультразвука в металлах. *ЖЭТФ*, 32:837, 1957.
- [3] E. I. Blount. Ultrasonic attenuation by electrons in metals. *Physical Review*, 114(2):418, 1959.
- [4] T. Tsuneto. Ultrasonic attenuation in superconductors. *Physical Review*, 121(2):402, 1961.
- [5] A. Schmid. Electron-phonon interaction in an impure metal. *Zeitschrift für Physik*, 259(5):421–436.
- [6] H. Fröhlich. Theory of the superconducting state. i. the ground state at the absolute zero of temperature. *Physical Review*, 79(5):845, 1950.
- [7] А. Б. Мигдал. Взаимодействие электронов с колебаниями решетки в нормальном металле. *ЖЭТФ*, 34(6):1438–1446, 1958.
- [8] A. V. Shtyk, M. V. Feigelman and V. E. Kravtsov. Magnetic field-induced giant enhancement of electron-phonon energy transfer in strongly disordered conductors. *Physical review letters*, 111(16):166603, 2013.

- [9] B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, I. V. Lerner and I. L. Aleiner. Jumps in current-voltage characteristics in disordered films. *Physical review letters*, 102(17):176803, 2009.
- [10] M. Ovadia, B. Sacépé, and D. Shahar. Electron-phonon decoupling in disordered insulators. *Phys. Rev. Lett.*, 102:176802, Apr 2009.
- [11] M. E. Gershenson, Yu. B. Khavin, D. Reuter, P. Schafmeister, and A. D. Wieck. Hot-electron effects in two-dimensional hopping with a large localization length. *Physical review letters*, 85(8):1718, 2000.
- [12] A. Savin, J. Pekola, M. Prunnila, J. Ahopelto and P. Kivinen. Electronic cooling and hot electron effects in heavily doped silicononinsulator film. *Physica Scripta*, 2004(T114):57, 2004.
- [13] M. E. Gershenson, D. Gong, T. Sato, B. S. Karasik, and A. V. Sergeev. Millisecond electron-phonon relaxation in ultrathin disordered metal films at millikelvin temperatures. *Applied Physics Letters*, 79:2049, 2001.
- [14] М. Ю. Рейзер и А. В. Сергеев. Влияние электрон-фононного взаимодействия на проводимость примесных металлов. *ЖЭТФ*, 92(6):2291–2298, 1987.
- [15] A. Sergeev and V. Mitin. Breakdown of pippard ineffectiveness condition for phonon-electron scattering in micro and nanostructures. *EPL (Europhysics Letters)*, 51(6):641, 2000.
- [16] A. D. Semenov, G. N. Gol'tsman, and R. Sobolewski. Hot-electron effect in superconductors and its applications for radiation sensors. *Superconductor Science and Technology*, 15(4):R1, 2002.
- [17] Л. В. Келдыш. Диаграммная техника для неравновесных процессов. *ЖЭТФ*, 47(4):1515–1523, 1965.

- [18] A. Kamenev and A. Levchenko. Keldysh technique and non-linear σ -model: basic principles and applications. *Advances in Physics*, 58(3):197–319, 2009.
- [19] J. Rammer and H. Smith. Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals. *Reviews of modern physics*, 58(2):323, 1986.
- [20] V. I. Yudson and V. E Kravtsov. Electron kinetics in isolated mesoscopic rings driven out of equilibrium. *Phys. Rev. B*, 67:155310, Apr 2003.
- [21] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. *Гидродинамика. Издание 6-е*. Физматлит, 2015.
- [22] M. Prunnila, P. Kivinen, A. Savin, P. Törmä, and J. Ahopelto. Intervalley-scattering-induced electron-phonon energy relaxation in many-valley semiconductors at low temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, 95:206602, Nov 2005.
- [23] M. Prunnila. Electron–acoustic-phonon energy-loss rate in multicomponent electron systems with symmetric and asymmetric coupling constants. *Phys. Rev. B*, 75:165322, Apr 2007.
- [24] B. G. Kotliar and T. V. Ramakrishnan. Ultrasonic attenuation in strongly disordered electronic systems. *Physical Review B*, 31(12):8188, 1985.
- [25] А. А. Абрикосов. *Основы теории металлов*. Наука, 1987.
- [26] <http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/InSb/index.html>.
- [27] S. Gopalan, J. K. Furdyna, and S. Rodriguez. Inversion asymmetry and magneto-optical selection rules in n-type zinc-blende semiconductors. *Physical Review B*, 32(2):903, 1985.
- [28] I. Saïdi, S. Ben Radhia, and K. Boujdaria. Band parameters of GaAs, InAs, InP, and InSb in the 40-band k sp model. *Journal of Applied Physics*, 107(4):3701, 2010.

- [29] M. Cardona and N. E. Christensen. Acoustic deformation potentials and heterostructure band offsets in semiconductors. *Physical Review B*, 35(12):6182, 1987.
- [30] M. A. Skvortsov. Weak antilocalization in a 2D electron gas with chiral splitting of the spectrum. *Письма в ЖЭТФ*, 67(2):118–123, 1999.
- [31] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков и И. Е. Дзялошинский. *Методы квантовой теории поля в статистической физике*. Добросвет, 2006.
- [32] N. P. Butch, P. Syers, K. Kirshenbaum, A. P. Hope, and J. Paglione. Superconductivity in the topological semimetal YPtBi. *Physical Review B*, 84(22):220504, 2011.
- [33] A. E. Koshelev and A. A. Varlamov. Mesoscopic variations of local density of states in disordered superconductors. *Physical Review B*, 85(21):214507, 2012.
- [34] J. Mesot, M. R. Norman, H. Ding, M. Randeria, J. C. Campuzano, A. Paramakanti, H. M. Fretwell, A. Kaminski, T. Takeuchi, T. Yokoya, et al. Superconducting gap anisotropy and quasiparticle interactions: a doping dependent photoemission study. *Physical review letters*, 83(4):840, 1999.
- [35] P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Electron transport in disordered graphene. *Physical Review B*, 74(23):235443, 2006.
- [36] G. Heine, W. Lang, X. L. Wang, and S. X. Dou. Positive in-plane and negative out-of-plane magnetoresistance in the overdoped high-temperature superconductor $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$. *Physical Review B*, 59(17):11179, 1999.
- [37] L. Forro, D. Mandrus, C. Kendziora, L. Mihaly, and R. Reeder. Hall-effect measurements on superconducting and nonsuperconducting copper-oxide-based metals. *Physical Review B*, 42(13):8704, 1990.

- [38] J. Dominec. Ultrasonic and related experiments in high- T_c superconductors. *Superconductor Science and Technology*, 6(3):153, 1993.
- [39] O. Vafek and Z. Tešanović. Quantum criticality of d-wave quasiparticles and superconducting phase fluctuations. *Physical review letters*, 91(23):237001, 2003.
- [40] S. P. Chockalingam, M. Chand, A. Kamlapure, J. Jesudasan, A. Mishra, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri. Tunneling studies in a homogeneously disordered s-wave superconductor: NbN. *Physical Review B*, 79(9):094509, 2009.
- [41] G. Sambandamurthy, L. W. Engel, A. Johansson, and D. Shahar. Superconductivity-related insulating behavior. *Physical review letters*, 92(10):107005, 2004.
- [42] В. Ф. Гантмахер и В. Т. Долгополов. Квантовый фазовый переход сверхпроводник-изолятор. *УФН*, 180:3–53, 2010.
- [43] B. Sacepe, T. Dubouchet, C. Chapelier, M. Sanquer, M. Ovadia, D. Shahar, M. Feigelman, and L. Ioffe. Localization of preformed cooper pairs in disordered superconductors. *Nature Physics*, 7(3):239–244, 2011.
- [44] B. Sacepe, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer. Disorder-induced inhomogeneities of the superconducting state close to the superconductor-insulator transition. *Physical review letters*, 101(15):157006, 2008.
- [45] M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. A. Yuzbashyan. Eigenfunction fractality and pseudogap state near the superconductor-insulator transition. *Physical review letters*, 98(2):027001, 2007.
- [46] M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. Cuevas. Fractal

- superconductivity near localization threshold. *Annals of Physics*, 325(7):1390–1478, 2010.
- [47] Th. Dubouchet. PhD thesis, Neel Institute, Grenoble, 2010.
- [48] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Superconductor-insulator transitions: Phase diagram and magnetoresistance. *Physical Review B*, 92(1):014506, 2015.
- [49] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Local density of states and its mesoscopic fluctuations near the transition to a superconducting state in disordered systems. *Physical Review B*, 93(20):205432, 2016.
- [50] M. V. Feigel'man and L. B. Ioffe. Superfluid density of a pseudogapped superconductor near the superconductor-insulator transition. *Physical Review B*, 92(10):100509, 2015.
- [51] D. Sherman, U. S. Pracht, B. Gorshunov, S. Poran, J. Jesudasan, M. Chand, P. Raychaudhuri, M. Swanson, N. Trivedi, A. Auerbach, et al. The higgs mode in disordered superconductors close to a quantum phase transition. *Nature Physics*, 2015.
- [52] С. Chapelier. Приглашенный доклад на конференции в Черногловке. Черногловка, Россия, 2015. ИТФ Ландау. http://intgroup.itp.ac.ru/prog_conf2015.html.
- [53] .F Ladieu, M. Sanquer, and J. P. Bouchaud. Depinning transition in Mott-Anderson insulators. *Physical Review B*, 53(3):973, 1996.
- [54] T. Levinson, A. Doron, I. Tamir, G. C. Tewari, and D. Shahar. A direct determination of the temperature of overheated electrons in an insulator. *arXiv:1606.07089*, 2016.

- [55] A. Shtyk, and M. Feigelman, Mikhail. Ultrasonic attenuation via energy diffusion channel in disordered conductors. *Physical Review B*, 92(19):195101, 2015.
- [56] P. W. Anderson. Theory of dirty superconductors. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 11(1-2):26–30, 1959.
- [57] M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, and M. Mezard. Superconductor-insulator transition and energy localization. *Physical Review B*, 82(18):184534, 2010.
- [58] В. Н. Попов и С. А. Федотов. Метод функционального интегрирования и диаграммная техника для спиновых систем. *ЖЭТФ*, 94(3):183–194, 1988.
- [59] M. N. Kiselev and R. Oppermann. Schwinger-keldysh semionic approach for quantum spin systems. *Physical review letters*, 85(26):5631, 2000.
- [60] I. Sample. The long story of how the boson got only Higgs’s name. *Nature*, 466(7307):689–689, 2010.
- [61] Z. Ovadyahu. Private communication.
- [62] B. Sacépé, J. Seidemann, M. Ovadia, I. Tamir, D. Shahar, C. Chapelier, C. Strunk, and B. A. Piot. High-field termination of a Cooper-pair insulator. *Physical Review B*, 91(22):220508, 2015.
- [63] D. A. Ivanov M. V. Feigelman and E. Cuevas. To be published.
- [64] C. S. Koonce, M. L. Cohen, J. F. Schooley, W. R. Hosler, and E. R. Pfeiffer. Superconducting Transition Temperatures of Semiconducting SrTiO₃. *Physical Review*, 163(2):380, 1967.
- [65] X. Lin, C. W. Rischau, C. J. van der Beek, B. Fauqué, and K. Behnia. s-wave superconductivity in optimally doped SrTi_{1-x}Nb_xO₃ unveiled by electron irradiation. *Physical Review B*, 92(17):174504, 2015.