

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Л.Д.ЛАНДАУ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Марихин Владимир Георгиевич

**Квазиштеккелевы гамильтонианы,
канонические преобразования Беклунда
и другие аспекты теории интегрируемых систем**

Специальность 01.01.03 – Математическая физика

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка – 2016

Оглавление

Введение	6
1 Классические квазиштеккелевы гамильтонианы	18
1.1 Штеккелевы гамильтонианы в форме Бененти	18
1.2 Диагонализация пары квадратичных гамильтонианов	21
1.3 Определение функций, задающих квазиштеккелевы гамильтонианы	24
1.4 Универсальная формула для решения уравнения Гамильтона-Якоби	26
1.5 Классификация. Примеры	31
1.5.1 Класс 1	31
1.5.2 Класс 2	32
1.5.3 Класс 3	35
1.6 Классические волчки и квазиштеккелевы гамильтонианы	36
1.6.1 Волчок Клебша на $e(3)$	37
1.6.2 Волчок Ковалевской с гиростатом на $e(3)$	38
1.6.3 Двухспиновая модель I - Волчок Шоттки - Манакова на $so(4)$	41
1.6.4 Двухспиновая модель II - Волчок Стеклова на $so(4)$	44
1.7 Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	45
1.7.1 Представление коммутирующих гамильтонианов через век- торный потенциал и потенциал	46
1.7.2 Классификация и примеры	48
1.7.3 Переход к физическим координатам. Примеры.	52
1.8 Квазиштеккелевы гамильтонианы с 3-мя степенями свободы	55
1.8.1 Каноническая форма квазиштеккелевых гамильтонианов с тремя степенями свободы	55
1.8.2 Симметричный случай	56
1.8.3 Несимметричный случай	60

2	Квантовые квазиштеккелевы гамильтонианы	62
2.1	Диагонализация квантовых квадратичных операторов	62
2.1.1	Пары коммутирующих квадратичных операторов	62
2.1.2	Переход к квазиштеккелевым гамильтонианам	66
2.1.3	Переход к уравнению Шредингера. Примеры	68
2.2	Два новых примера двумерного уравнения Шредингера с магнитным полем	72
2.2.1	Пример 1. Отталкивающий потенциал	74
2.2.2	Пример 2. Нерациональный случай	77
2.2.3	Некоторые свойства функций $HeunV$ и $HeunC$	79
2.2.4	Обсуждение	81
3	Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов	84
3.1	Введение	84
3.2	Волчки на $so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$	87
3.2.1	Координаты Дарбу и операторное представление	87
3.2.2	Волчок Шоттки–Манакова	90
3.2.3	Волчок Стеклова	91
3.2.4	Волчок М. Адлера–ван Мёрбеке	93
3.2.5	Волчок Соколова	95
3.2.6	Классический предел	96
3.3	Волчки на $e(3)$	97
3.3.1	Координаты Дарбу и операторные представления	97
3.3.2	Волчок Клебша	100
3.3.3	Волчок Ковалевской	101
3.3.4	Случай Горячёва–Чаплыгина	102
3.4	Спектры	102
3.4.1	Матричное представление $so(3)$	103
3.4.2	Спектр волчка Эйлера на $so(3)$	104
3.4.3	Матричное представление для волчка Шоттки–Манакова	105
3.5	Тест Пенлеве и свойство факторизуемости (3.2)	107
4	Канонические преобразования Беклунда	109
4.1	”u-v” системы типа нелинейного уравнения Шредингера	110

4.1.1	Преобразования Беклунда и гамильтонианы $u - v$ систем	112
4.1.2	Переход к $u - v$ системам	113
4.1.3	Гамильтониан и преобразования обобщенной модели ЛЛ	114
4.1.4	Возможные обобщения	115
4.2	Гамильтонова теория преобразований Беклунда	116
4.2.1	Канонические преобразования	116
4.2.2	Уравнения типа НШ и цепочки типа Тоды	120
4.2.3	Уравнения типа Буссинеска	122
4.2.4	Уравнения типа КдФ, \sinh -Гордон и другие	123
4.3	Преобразование Беклунда уравнения Цицейки	127
4.4	Решетки преобразований Беклунда	129
4.4.1	Гамильтонов метод построения решеток	129
4.4.2	Решетки общего типа	130
4.4.3	Гамильтониан и преобразования Миуры для симметричных моделей	131
4.4.4	Уравнения для решетки Тоды	133
4.4.5	Уравнения для решетки Вольтерры	134
4.4.6	Уравнения для решетки Гейзенберга	134
4.4.7	Представление Лакса для решетки Тоды	135
4.4.8	Модель Ландау-Лифшица	136
4.4.9	Решетка ПБ для модели Ландау - Лифшица	136
4.4.10	Представление Хироты для решеток	138
4.4.11	Обсуждение	139
4.5	Трехмерная решетка преобразований Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви-Стюартсона	140
4.5.1	Система ДС	141
4.5.2	Преобразования Беклунда	143
4.5.3	Конструкция решетки ПБ системы ДС	145
5	Метод одевания с разделенными переменными	151
5.1	Случай $S = \partial_x - \partial_y$	153
5.2	Уравнение Эйлера-Дарбу	155
5.3	Возможные схемы решения в общем случае	156
5.4	Двумерные уравнения типа уравнения Шредингера	156
5.5	Случай $t = 1$. Одевание оператора типа Шредингера	159

5.6	Случай анизотропных масс	162
6	Представление кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве	165
6.1	Введение	165
6.2	Динамика полюсов рациональных решений системы Леви	166
6.2.1	Преобразования Беклунда для рациональных решений системы Леви	167
6.2.2	Степени полиномов. Возможные замыкания	170
6.2.3	Система Тоды	171
6.2.4	Автомодельное решение системы Леви	172
6.3	Представление кулоновского газа и преобразования Беклунда уравнений Пенлеве	173
6.3.1	Уравнение Пенлеве <i>II</i>	176
6.3.2	Уравнение Пенлеве <i>III</i>	177
6.3.3	Уравнение Пенлеве <i>IV</i>	178
6.3.4	Решетка для <i>PIV</i>	180
6.3.5	Уравнение Пенлеве <i>V</i>	181
6.3.6	Уравнение Пенлеве <i>VI</i>	182
7	Примеры других подходов в теории интегрируемых систем	187
7.1	Интегрируемые системы с квадратичной нелинейности в Фурье пространстве	187
7.1.1	Классификация бездисперсионных уравнений	189
7.1.2	Системы с дисперсией	192
7.1.3	Обобщения	194
7.2	Динамика электронных уровней в присутствии примеси и одно из "gold-fish" уравнений Калоджеро	197
	Заключение	203
	Литература	205

Введение

Данная диссертация посвящена различным вопросам теории интегрируемых систем. Основное внимание уделяется двум объектам исследования — квазиштеккелевым гамильтонианам и каноническим преобразованиям Беклунда. Также будут рассмотрены представления интегрируемых квантовых волчков в виде дифференциальных операторов; одевание систем с разделенными переменными в двумерном случае и приложения, связанные с этим методом; построение двумерных уравнений типа уравнения Шредингера; представление кулоновского газа для рациональных решений нелинейных систем, в том числе системы Леви и уравнения Пенлеве $PII - PIV$; классификация скалярных интегрируемых уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в Фурье пространстве.

Для изучения интегрируемых систем особо важны методы, применяемые в конкретной задаче. В том числе — это метод обратной задачи, предложенный Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой и развитый потом Гарднером, Захаровым, Фаддеевым для уравнения КдФ, Захаровым и Шабатом для нелинейного уравнения Шредингера и многими другими авторами; представление Лакса, или пара Лакса, введенная Лаксом для солитонов в непрерывной среде; метод одевания Захарова–Шабата; преобразования Беклунда, симметричный метод, разработанный Шабатом и его учениками, тест Пенлеве, разделение переменных, а также другие методы и комбинация этих и упомянутых выше методов исследования.

Отчасти эти методы (комбинация этих методов) будут использованы и в данной диссертации.

Актуальность темы и степень ее разработанности. Квазиштеккелевы гамильтонианы (т.е. штеккелевы гамильтонианы с магнитным полем) являются важным объектом для изучения, поскольку классические волчки с дополнительным квадратичным интегралом движения с помощью координат Дарбу

можно привести к паре коммутирующих квадратичных по импульсам гамильтонианов с двумя степенями свободы, которые в свою очередь могут быть преобразованы к паре квазиштеккелевых гамильтонианов, как будет показано в Главе 1. Это значительно расширяет круг возможных приложений. Объекты, аналогичные квазиштеккелевым гамильтонианам, появлялись в литературе ранее в работе Фералонтова и Форди [41], где были получены ряд примеров таких пар; достаточно много представителей таких систем (в несколько иной калибровке) получил Яхья [161] (см. также ссылки в этой работе). Стоит выделить также работу Дорици, Грамматикоса, Рамани и Винтерница [37]. Следует отметить, что публикаций, где изучаются объекты типа квазиштеккелевых гамильтонианов, относительно немного по сравнению с десятками публикаций, где изучаются штеккелевы гамильтонианы (см. Раздел 1.1 Главы 1).

При коммутировании квазиштеккелевых гамильтонианов возникают два нетривиальных условия (в отличие от штеккелевых гамильтонианов, где подобные условия вообще не возникают), которые непросто разрешить. Вообще, такого рода трудности возникают в системах, зависящих от магнитного поля. Следует отметить, что именно изучение различных систем с магнитным полем является наиболее актуальным. Отметим также, что объекты, сходные с квазиштеккелевыми гамильтонианами с тремя степенями свободы, ранее не изучались и частично изучены в данной диссертации.

Классические волчки, особенно волчок Клебша и волчок Шоттки–Манакова, активно изучались во многих известных работах [2, 30, 40, 67, 65, 73, 83], а также [113, 121, 125, 132, 20] и др. Связь этих и других волчков с квазиштеккелевыми гамильтонианами будет изучаться в данной диссертации.

Что касается квантовых аналогов квазиштеккелевых систем, то эта тема не отражена должным образом в литературе, в отличие от квантовых штеккелевых гамильтонианов, которые изучались, в частности, в работе [18]. Проблема интегрируемых случаев двумерного уравнения Шредингера в электромагнитном поле изучается довольно давно (см. [41] и ссылки там), но до сих пор не исследована до конца и требует дальнейшего развития, чему посвящена Глава 2 данной диссертации.

С появлением современных методов интегрируемых систем были рассмотрены разные аспекты исследуемой задачи. В работе [38] был изучен класс решений (конечнозонных) уравнения Шредингера с магнитным полем (см. также [116]). В работе [43] для решения данной задачи применялся метод факто-

ризации (см. также ссылки в этой работе).

Задача об уравнении Шредингера в магнитном поле с дополнительным линейным либо квадратичным дополнительным интегралом движения рассматривалась в работе [16] (см. также цитируемые там работы). В этой работе был получен ряд интересных примеров таких уравнений в различных системах координат, но дифференциальные уравнения, соответствующие этим примерам, не были проинтегрированы. В диссертации приведены и проинтегрированы два новых примера таких уравнений.

Коммутативные кольца дифференциальных операторов играют важную роль в математической физике. В случае одной независимой переменной задача их описания была поставлена и решена в работах Шура [136] и Бёрчнелла-Чонди [25]. Позднее эти результаты нашли многочисленные приложения в теории интегрируемых уравнений типа Кортевега–де Фриза, отметим лишь описание конечнозонных операторов, полученное Новиковым, Кричевером и др. [115, 76], и алгоритм проверки необходимых условий интегрируемости, разработанный Шабатом и др. [108]. Глава 3 частично посвящена исследованию коммутирующих дифференциальных операторов специального типа.

Преобразования Беклунда (ПБ) являются довольно мощным инструментом в теории интегрируемых систем. С одной стороны, они являются критерием интегрируемости системы, с другой стороны позволяют ”размножать” решения системы, начиная с любого ее решения, даже тривиального.

Данное преобразование было получено впервые Беклундом в 1883 году [13]. Он получил преобразование, которое одну поверхность отрицательной кривизны трансформирует в другую. Это преобразование эквивалентно преобразованию Беклунда уравнения sin-Gordon . Впоследствии ПБ приобрели не только геометрический смысл.

По мере появления новых интегрируемых систем вскоре появлялись преобразования Беклунда и для них. Поскольку большинство этих систем выражается через представление Лакса с матрицами размера 2×2 , получение соответствующих преобразований Беклунда не вызывало особых сложностей. Однако в случае матриц с большим размером ситуация значительно усложняется. Мы приведем пример такого рода далее. Представление преобразований Беклунда в виде канонического преобразования было введено в работе Кодамы и Вадати [66] для уравнений КдФ, мКдФ, sin-Gordon . Данный метод также применялся в работе Кузнецова и Склянина [77] для периодической цепочки Тоды и для

эллиптической модели Руйзенарса. Данный метод развит в Главе 4, где приведены примеры применения данного метода, построены новые ПБ.

Методы одевания и разделения переменных являются чрезвычайно эффективными для исследования интегрируемых систем. Однако насколько нам известно, синтез этих методов не применялся ранее. Изучению этого метода посвящена Глава 5.

Уравнения Пенлеве ($PI - PVI$) [62], известные еще с конца прошлого века, в настоящее время привлекают пристальное внимание из-за их широкого применения в различных областях физики и математики. Изначально они были получены Пенлеве как дифференциальные уравнения второго порядка, решения которых не обладают подвижными особыми точками, кроме полюсов. На самом деле подвижные особенности решений всех уравнений Пенлеве, кроме Пенлеве I , являются полюсами первого порядка в общем случае. Уравнение Пенлеве I выбивается из общего ряда, во-первых, из-за того, что его решения могут иметь подвижные особенности только в виде полюсов второго порядка, во-вторых, это уравнение не имеет преобразований Беклунда.

Как известно, некоторые уравнения Пенлеве могут быть получены как автомодельные редукции интегрируемых динамических систем. В работе [22] было показано, что уравнение PIV может быть получено как автомодельная редукция нелинейного уравнения Шредингера (НШ), а в Главе 6 рассмотрен лагранжиан системы Леви, показано, что в автомодельных переменных вариация этого лагранжиана приводит к уравнению PIV , а также установлено, что все рациональные решения уравнения PIV определяют решение задачи о стационарном распределении двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале.

Используемый в диссертации метод представления дифференциальных нелинейных уравнений в пространстве Фурье имеет свой аналог (но не буквально), так называемый символьный метод.

Этот метод был введен в теорию интегрируемых систем Гельфандом и Диким [48], а также Захаровым и Шульманом как пертурбативный подход и улучшен в недавних работах Сандерса [130], а также Михайлова и В. Новикова [106]. Общей чертой и основным преимуществом обоих методов является то обстоятельство, что все коэффициенты рассматриваемых уравнений в пространстве Фурье являются функциями волновых чисел k , а не операторами. Применению этого метода для скалярных динамических уравнений с квадра-

тичной нелинейностью частично посвящена Глава 7.

Суммируя вышесказанное можно сказать, что данная диссертация посвящена развитию ряда актуальных вопросов современной теории интегрируемых систем.

Цель работы. Целью работы является изучение квазиштеккелевых гамильтонианов как в классическом, так и в квантовом случаях, их связи с классическими волчками, а также с гамильтоновыми системами, квадратичными по импульсу. Кроме того, будет исследоваться определенный класс дифференциальных операторов, связанных с квантовыми аналогами интегрируемых волчков. Еще одной целью работы является развитие нового метода получения преобразований Беклунда, а также построение производящих функций этих преобразований. Также будут изучаться: применение метода одеяния к системам с разделенными переменными, построение представления кулоновского газа для некоторых трансцендент Пенлеве, построение пары Лакса, классификация скалярных динамических систем с квадратичной нелинейностью в представлении Фурье и изучение других вопросов.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, принадлежат автору. В некоторых случаях для логической связности текста в диссертации будут использованы результаты, полученные совместно с соавторами. И хотя вклад автора в получение этих результатов существенен, они не выносятся на защиту.

Такие результаты как новые примеры двумерных интегрируемых уравнений Шредингера, преобразование Беклунда уравнения Цицейки, представление кулоновского газа и другие результаты, выносимые на защиту и перечисленные ниже, являются новыми и представляют несомненный интерес.

Положения, выносимые на защиту.

1. Получены необходимые и достаточные условия коммутирования пары квадратичных по импульсам гамильтонианов с двумя степенями свободы. Предложен метод "частичного" разделения переменных. Вычислены алгебраические кривые и функции Гамильтона–Якоби. Найдено преобразование гамильтонианов к канонической квазиштеккелевой паре (штеккелевы гамильтонианы с магнитным полем).

2. Классический случай обобщен на квантовый. Построена полная классификация квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному оператору Шредингера с магнитным полем. Получены новые "квазиточно решаемые" примеры таких операторов, которые проинтегрированы в терминах функций Гойна.
3. Получены трехкомпонентные классические и квантовые квазиштеккелевы системы. В классическом случае проведена полная классификация этих систем. В простейшем случае система проинтегрирована в квадратурах.
4. Исследованы квантовые аналоги интегрируемых волчков на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$. Генераторы соответствующих алгебр представлены в виде дифференциальных операторов первого порядка, и получены пары коммутирующих дифференциальных операторов с двумя независимыми переменными. Получены квантовые аналоги волчка М. Адлера–ван Мёрбеке и волчка Соколова на $so(4)$.
5. Развита метод получения преобразований Беклунда, основанный на инвариантности вариации действия относительно ПБ. Построены треугольные решетки ПБ для дивергентных систем и уравнения Ландау–Лифшица. Найдено новое ПБ для уравнения Цицейки. Построена октаэдрическая решетка для интегрируемых версий системы Дэви–Стюартсона. Чисто дискретное уравнение, принадлежащее этой решетке, совпадает со знаменитым уравнением Хироты.
6. Установлено, что задача об L-A парах в Фурье представлении для скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью сводится к решению двух функциональных уравнений. Получены новые примеры бездисперсионных систем. Показано, что в рассматриваемом классе уравнений новых систем с дисперсией нет.
7. Найдено представление кулоновского газа для нулей числителя и знаменателя рациональных решений уравнений Пенлеве $P_{II} - P_{IV}$. Показано, что любое рациональное решение этих уравнений определяет стационарную конфигурацию электрических зарядов, причём заряды могут быть разноименными. Исследована решётка ПБ для уравнения Пенлеве IV . Выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений $PV - PVI$.

8. Исследована динамика полюсов для рациональных решений системы Леви и двумеризованной системы Тоды. Получено алгебраическое решение задачи Коши для одного из многочастичных уравнений Калоджеро (рационального уравнения Руйзенарса–Шнайдера).

Теоретическая и практическая значимость работы. Данная диссертация является теоретической работой. Ее результаты развивают теорию интегрируемых систем, в том числе в области конечномерных гамильтоновых систем, нелинейных дифференциальных уравнений математической физики и других областях науки. Эти результаты имеют целый ряд приложений, часть из которых исследовалась в диссертации.

Методы исследования. В диссертации использованы такие методы, как представление Лакса, являющееся основным для построения интегрируемых систем, высших симметрий для них; тест Пенлеве, который является необходимым условием интегрируемости системы и чрезвычайно эффективным способом "отсекать" неинтегрируемые случаи; метод одевания, который обычно используется для построения преобразований Беклунда, однако в данной работе он использовался как одевание на один шаг для системы с разделенными переменными и др. Отметим, что некоторые методы, используемые в диссертации, разработаны автором — приведение коммутирующих гамильтонианов к квазиштеккелеву виду, что сильно упрощает анализ системы; метод получения алгебраических кривых соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов; метод "частичного разделения переменных"; а также использование пары Лакса в Фурье-пространстве для динамических систем с квадратичной нелинейностью.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов не вызывает сомнений, так как при их исследовании применялись методы, широко используемые в теории интегрируемых систем. Было проведено сравнение некоторых из полученных результатов с аналогичными результатами, полученными другими методами. К примеру, алгебраические кривые, описывающие динамику некоторых классических волчков, сравнивались с кривыми, полученными с использованием пары Лакса. Приведенные в диссертации примеры преобразований Беклунда сравнивались с уже известными.

Однако поскольку большинство результатов, полученных в данной диссертации, являются новыми, их нельзя сравнить с результатами других авторов.

Результаты диссертации докладывались на семинарах Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Института по атомной энергии СЕА-Saclay (Франция), на Научных сессиях Совета РАН по нелинейной динамике (Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН), а также на конференциях: Optical Solitons: Theoretical Challenges and Industrial Perspectives: Les Houches Workshop (1998, Centre de Physique des Houches), International Workshop on Solitons, Collapses, Turbulence: Developments and Perspectives (1999, ИТФ, Черноголовка, Россия), "Workshop on Classical and Quantum Integrability" (2000, University of Leeds, Great Britain), "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (2000, Институт Математики с ВЦ РАН, БГУ, Уфа, Россия), "Классические и квантовые интегрируемые системы" памяти М.В.Савельева (2001, 2003 Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Россия).

Публикации. Диссертация выполнена на основе работ [6]—[7], [85]—[103] — всего 21 статья. Все эти статьи опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в международные базы данных Web of Science, Scopus и в перечень ВАК. Часть работ написана в соавторстве. Вклад автора в приведённые в диссертации результаты является основным.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из Введения, 7 глав, Заключения и Списка литературы, который содержит 167 наименований. Общий объём диссертации — 220 страниц.

План диссертации следующий:

1) В первой главе рассматриваются системы с двумя и тремя степенями свободы. Введено понятие квазиштеккелевого гамильтониана. Доказана теорема о том, что любая пара коммутирующих (в смысле канонической скобки Пуассона) гамильтонианов, квадратичных по импульсам, может быть приведена к паре коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов композицией точечного и канонического преобразований в том случае, если точечное преобразование, зависящее от коэффициентов при старших членах по импульсам первоначальных гамильтонианов, невырождено. Получены необходимые и достаточные условия коммутирования квазиштеккелевых гамильтонианов. Для каждо-

го случая выведен универсальный метод получения алгебраической кривой, не использующий представления Лакса, получена функция Гамильтона–Якоби в переменных координаты-значения гамильтонианов на поверхности уровня. Для вывода этого метода используется техника резольвент Лагранжа, которая позволяет записать решение для четырех переменных (координат и импульсов) в виде функций от трех переменных. Данное преобразование позволяет получить метод ”частичного” разделения переменных. Рассмотрены примеры квазиштеккелевых гамильтонианов, связанных с классическими волчками Клебша, Шоттки–Манакова, Стеклова и волчком Ковалевской с гиростатом, вычислены соответствующие алгебраические кривые. Отдельно рассмотрен случай движения заряженной частицы в электромагнитном поле. В этом примере проведена полная классификация соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов. Определено понятие квазиштеккелевого гамильтониана в 3-х мерном случае. Показано, что в этом случае условия инволюции всех трех гамильтонианов приводит лишь к одному случаю 3-х мерных коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов, зависящих от полинома третьей степени, с точностью до коэффициентов этого полинома. В случае, когда этот полином — константа, приводится точное решение этого примера в квадратурах.

2) Во второй главе классический случай квазиштеккелевых гамильтонианов обобщен на квантовый. Получен и доказан аналог вышеуказанной теоремы для квантового случая, причем гамильтониан и дополнительный интеграл в оригинальных переменных и соответствующая пара квазиштеккелевых гамильтонианов имеют эрмитов вид. Также получены необходимые и достаточные условия коммутирования квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов. В отличие от классического случая, в квантовом случае в одном из двух этих условий появляются квантовые поправки. Особое место в квантовом случае занимает класс квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному уравнению Шредингера с дополнительным интегралом, квадратичным по операторам импульса. Получен общий вид точечного обратимого преобразования к квазиштеккелевым гамильтонианам, зависящего от 3-х параметров, которые связаны одним алгебраическим соотношением. Показано, что в случае уравнения Шредингера одна из определяющих функций $S(x)$ всегда является полиномом 2-ой степени. Этот факт позволяет провести полную классификацию соответствующих пар квазиштеккелевых гамильтонианов в этом классе. Как результат получено ”общее” решение, а также 5 изолированных решений. При

переходе к классическому пределу остается "общее" решение и 3 изолированных. Отмечено, что при произвольных параметрах точечного преобразования к уравнению Шредингера не удастся получить новые уравнения из-за недостатка вычислительной мощности. Произведена редукция параметров. Получены как известные, так и неизвестные примеры уравнения Шредингера с электромагнитным полем. Получены два новых примера уравнения Шредингера с ненулевым магнитным полем, относящиеся к классу "почти точно решаемых" задач. Эти примеры проинтегрированы в терминах функций Гойна. Определение дискретного спектра и волновых функций сведено к решению алгебраического уравнения, которое может быть проделано численно, что и означает термин "почти точно решаемые" задачи.

3) В третьей главе рассмотрены пары коммутирующих дифференциальных операторов. Приведены квантовые аналоги интегрируемых волчков таких, как волчки Клебша, Ковалевской, случай Горячева–Чаплыгина на алгебре $e(3)$, волчки Шоттки–Манакова, Стеклова, М. Адлера–ван Мёрбеке, Соколова на алгебре $so(4)$. Квантование по крайней мере последних двух волчков является новым. В результате квантования, добавляются соответствующие квантовые поправки в гамильтониан и дополнительный интеграл этих волчков. Показано, что в ряде случаев можно к квадратичной части волчка добавить некоторую линейную часть. Генераторы соответствующих алгебр представлены в виде дифференциальных операторов первого порядка — аналогов координат Дарбу. При подстановке дифференциального представления этих генераторов в гамильтониан и в соответствующий дополнительный интеграл этих волчков, получается пара коммутирующих дифференциальных операторов. Получены уравнения для спектров ряда волчков с использованием их дифференциального представления. Получено необходимое условие интегрируемости пары коммутирующих дифференциальных операторов определенного вида как факторизация полинома от x, y определяемого коэффициентами при старших производных операторов.

4) В четвертой главе исследуется метод получения преобразования Беклунда лагранжевых систем, заключающийся в инвариантности вариации действия до и после применения преобразования Беклунда. Сначала рассмотрены так называемые $u-v$ системы типа нелинейного уравнения Шредингера. Получено их преобразование к гамильтоновой форме с канонической скобкой Пуассона. В этом и других случаях получена производящая функция каноническо-

го преобразования, не меняющего вариацию гамильтонианов при применении преобразования Беклунда, что эквивалентно сохранению вариации действия. Получены производящие функции для ряда примеров таких, как дивергентные системы, уравнение Ландау–Лифшица, уравнения КдФ, уравнения Кричевера–Новикова и других систем. Интересно, что такие уравнения как КдФ и уравнение Кричевера–Новикова удалось записать в лагранжевом виде. Впервые получено преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, содержащее только полевые переменные и их производные по координатам. Комбинируя преобразования Беклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера, построена треугольная решетка этих преобразований. Изучены все преобразования Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви–Стюартсона. Комбинируя эти преобразования и используя преобразования Миуры, переводящие 2-мерную цепочку Тоды в 2-мерную цепочку Вольтерры и далее в 2-мерную цепочку Гейзенберга, построена трехмерная октаэдрическая решетка преобразований Беклунда в виде уравнений Хироты. Одно из этих уравнений совпадает со знаменитым чисто дискретным уравнением Хироты.

5) В пятой главе исследуется синтез метода одевания и разделения переменных в двумерном случае, а именно: одевание гамильтониана, в котором переменные изначально разделены, приводит к интегрируемому гамильтониану, в котором разделения переменных уже нет. Метод применен к одной известной задаче, решение которой было ранее получено путем цепочки нетривиальных манипуляций. Применение метода одевания (точнее раздевания гамильтониана, в котором нет разделения переменных до гамильтониана, где это разделение появляется) в этом случае, позволяет легко найти ответ. Подход обобщен до общего случая квадратичных по операторам импульсов гамильтониана. Метод применен для операторов типа операторов Шредингера с магнитным полем, где получен общий ответ.

6) В шестой главе рассматриваются рациональные решения ряда динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера, в частности, системы Леви. Получены уравнения динамики полюсов и преобразования Беклунда для этих решений. Показано, что возможна редукция этих решений в рациональные решения уравнения Пенлеве P_{IV} , причем уравнения динамики полюсов переходят в стационарные уравнения для двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале. Соответствующие кулоновские системы получены для уравнений Пенлеве $P_{II} - P_{IV}$. Выведены уравнения на нули и полюса раци-

ональных решений уравнений $PV - PVI$. С помощью гамильтонового формализма построено спиновое представление для уравнений Пенлеве.

7) В седьмой главе рассматривается классификация скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в представлении Фурье. Такой подход приводит к необходимости исследования функциональных уравнений, что позволяет получить замкнутый ответ. Классификация разделяется на два этапа — сначала определяется класс бездисперсионных уравнений, а затем класс систем с дисперсией получен как подкласс "бездисперсионного" класса. Функциональные уравнения сводятся к дифференциальным, анализ решений которых приводит к полному ответу. В результате, в дисперсионном подклассе получены такие известные системы как КдВ, уравнение промежуточной воды (ILW), системы Камасса–Холма и система Дегаспериса. Анализ показывает, что других систем в подклассе дисперсионных систем нет. Что касается бездисперсионного класса, то среди его представителей есть новые системы.

В конце этой главы исследуется динамика уровней энергии при добавлении примеси в любую квантовую систему. Показано, что эта динамика подчиняется одному из многочастичных "gold-fish" уравнений Калоджеро. Изучение этой простой квантовомеханической задачи позволяет решить общую задачу Коши для данного уравнения Калоджеро чисто алгебраически.

8) В Заключении диссертации излагаются итоги выполненного исследования, обсуждаются перспективы дальнейшего развития результатов диссертации, а также возможные приложения этих результатов.

Глава 1

Классические квазиштеккелевы гамильтонианы

Квазиштеккелевы гамильтонианы являются обобщением штеккелевых гамильтонианов (П. Штеккель, [147]) на случай ненулевого магнитного поля. Иными словами, штеккелевы гамильтонианы содержат только квадратичные по импульсам члены, причем без перекрестных членов плюс потенциал, а квазиштеккелевы гамильтонианы содержат также и линейные по импульсам члены, которые нельзя устранить каноническим преобразованием. Кроме того, квазиштеккелевыми гамильтонианами мы будем называть не все гамильтонианы, определенные выше, а только имеющие каноническую форму, введенную в теореме 1.2 Раздела 1.2.

Будет показано, что целый ряд моделей интегрируемых волчков таких, как волчок Шоттки–Манакова на $so(4)$, волчок Клебша, гиростат Ковалевской и др., может быть сведен к задаче о паре коммутирующих гамильтонианов со стандартной скобкой Пуассона. Кроме того, будет найдено решение уравнения Гамильтона–Якоби для каждой рассматриваемой системы.

Одной из целей данной Главы будет построение универсального решения уравнения Гамильтона–Якоби в общем случае коммутирующих пар квазиштеккелевых гамильтонианов с двумя степенями свободы.

1.1 Штеккелевы гамильтонианы в форме Бененти

Исследования штеккелевых гамильтонианов [148] имеют довольно давнюю историю. Следует выделить статьи [39], [17] и ссылки в этих работах, а также статью [19].

Вопросы о связи штеккелевых гамильтонианов с разделением переменных, например, были изучены в работах [143] и [64]. Популярность штеккелевых

систем можно объяснить тем, что многие конечномерные системы сводятся к ним заменой переменных. Кроме того, штеккелевы гамильтонианы, например, в форме Бененти [15], коммутируют в силу канонической скобки Пуассона.

Мы будем пользоваться формой Бененти [15] для штеккелевых систем произвольного порядка n . Рассмотрим систему:

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_i s_k^{n-i-1} = S(s_k)P_k^2 + u(s_k), \quad k = 1..n. \quad (1.1)$$

Решим систему (1.1) относительно H_i , для чего удобно ввести производящие функции:

$$H(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i \alpha^{n-i-1}, \quad h(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \alpha^{n-i-1}, \quad (1.2)$$

где h_i — значения гамильтонианов H_i на поверхности уровня. Тогда, нетрудно показать, что

$$H(\alpha) = \sum_{k=1}^n (S(s_k)P_k^2 + u(s_k)) \prod_{j \neq k} \frac{\alpha - s_j}{s_k - s_j}, \quad (1.3)$$

Действительно, вычислим $H(s_k)$, $k = 1..n$, используя (1.3), получая $H(s_k) = S(s_k)P_k^2 + u(s_k)$, что эквивалентно системе (1.1), учитывая определение (1.2).

Отметим, что $\{H(\alpha), H(\beta)\} = 0$, в силу канонической скобки Пуассона $\{P_i, s_j\} = \delta_{ij}$, а значит и $\{H_i, H_j\} = 0$, $i, j = 0..n-1$. Мы пользуемся обозначениями P_i, s_i для канонически сопряженных импульсов и координат, поскольку будем использовать обозначения p_i, q_i для других целей. Кроме того, координаты s_1, s_2 играют, в известном смысле, роль переменных Ковалевской при интегрировании соответствующего волчка.

Подойдем к анализу системы (1.1) с другой стороны - зафиксируем значения гамильтонианов на поверхности уровня — $H_i = h_i$. Тогда система (1.1) распадается на n строк, причем k -я строка зависит только от k -ых импульсов и координат P_k, s_k . Выразим импульсы через координаты, проинтегрируем и сложим полученные выражения, тогда функцию Гамильтона - Якоби можно представить в следующем виде, где все переменные разделены:

$$V(\vec{s}, h_0, h_1..h_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{h(s_k) - u(s_k)}{S(s_k)}} ds_k, \quad (1.4)$$

Соответствующие уравнения Гамильтона - Якоби (в том числе в случае,

когда нет разделения переменных) имеют вид:

$$P_k = \frac{\partial}{\partial s_k} V(\vec{s}, h_0, h_1..h_{n-1}), \quad \vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n), \quad k = 1, 2..n, \quad (1.5)$$

а также

$$t_i - t_{i,0} = \frac{\partial}{\partial h_i} V(\vec{s}, h_0, h_1..h_{n-1}), \quad i = 0, 1..n - 1. \quad (1.6)$$

где t_i — времена (потоки), соответствующие динамике в силу гамильтонианов H_i , а $t_{i,0}$ — произвольные постоянные В общем случае, для практического получения функции V , необходимо решить систему уравнений

$$H_i(s_j, \frac{\partial V}{\partial s_j}) = h_i.$$

Замечание 1.1. Отметим, что здесь и далее мы рассматриваем только обобщенно-консервативные функции Гамильтона ($\frac{\partial H_i}{\partial t_j} = 0$). Кроме того, мы используем функцию Гамильтона-Якоби $V(s_1, s_2..s_n; h_0, h_1, ..h_{n-1})$, зависящую от координат и от значений гамильтонианов на поверхности уровня.

Такие уравнения Гамильтона-Якоби были выведены в книге Гантмахера [46] в случае одного гамильтониана. Подобные уравнения в случае n коммутирующих гамильтонианов приведены выше.

Далее функцию V мы будем называть просто функцией Гамильтона-Якоби.

Представленные рассуждения являются общеизвестными кроме, быть может, введения производящей функции $H(\alpha)$, использование которой чрезвычайно упрощает вычисления.

Использованные обозначения несколько отличаются от принятых в литературе тем, что в нашем случае выделен "основной" гамильтониан H_0 , остальные гамильтонианы нумеруются от 1 до $n - 1$, что никак не сказывается на полученных результатах.

Еще раз подчеркнем, что штеккелевы гамильтонианы коммутируют друг с другом автоматически, что не так для квазиштеккелевых гамильтонианов (подробнее см. в следующем Разделе).

Для случая с двумя степенями свободы будем пользоваться общепринятыми обозначениями

$H = h_0$, $K = -h_1$ для штеккелевых гамильтонианов, тогда

$$\begin{aligned}
H &= \frac{S(s_1)P_1^2 - S(s_2)P_2^2}{s_1 - s_2} + \frac{u(s_1) - u(s_2)}{s_1 - s_2}, \\
K &= \frac{s_2S(s_1)P_1^2 - s_1S(s_2)P_2^2}{s_1 - s_2} + \frac{s_2u(s_1) - s_1u(s_2)}{s_1 - s_2},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2 Диагонализация пары квадратичных гамильтонианов

Задача о парах коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам была, в частности, рассмотрена в работах [37, 42, 41, 105, 161]. .

Рассмотрим пару гамильтонианов вида

$$H = ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \tag{1.8}$$

$$K = Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F, \tag{1.9}$$

коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Коэффициенты в формулах (1.8), (1.9) - некоторые (локально) аналитические функции переменных q_1, q_2 . Пусть s_1, s_2 являются корнями уравнения

$$\Phi(s, q_1, q_2) = (B - bs)^2 - (A - as)(C - cs) = 0, \tag{1.10}$$

Тогда, если якобиан точечного преобразования $(q_1, q_2) \rightarrow (s_1, s_2)$ не равен нулю, мы будем называть пару гамильтонианов H, K из формул (1.8), (1.9) *невырожденной*. Имеет место теорема

Теорема 1.2. *Любая пара коммутирующих невырожденных гамильтонианов (1.8)-(1.9) может быть сведена с помощью точечного (определенного выше) и канонического преобразования*

$$\hat{P}_1 = P_1 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \quad \hat{P}_2 = P_2 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_2}$$

к паре вида

$$H = \frac{U_1 - U_2}{s_1 - s_2}, \quad K = \frac{s_2 U_1 - s_1 U_2}{s_1 - s_2}, \tag{1.11}$$

где

$$U_1 = S_1(s_1)P_1^2 + \frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_1}}{(s_1 - s_2)}P_2 - \frac{S_1(s_1)Z_{s_1}^2}{4(s_1 - s_2)^2} + V_1(s_1, s_2), \quad (1.12)$$

$$U_2 = S_2(s_2)P_2^2 - \frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_2}}{(s_1 - s_2)}P_1 - \frac{S_2(s_2)Z_{s_2}^2}{4(s_2 - s_1)^2} + V_2(s_1, s_2),$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\sqrt{S_1(s_1)}\partial_{s_1}\left(\sqrt{S_1(s_1)}\frac{Z_{s_1}^2}{s_1 - s_2}\right) + f_1(s_1), \quad (1.13)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\sqrt{S_2(s_2)}\partial_{s_2}\left(\sqrt{S_2(s_2)}\frac{Z_{s_2}^2}{s_2 - s_1}\right) + f_2(s_2)$$

$$Q = \frac{V_1 - V_2}{s_1 - s_2} \quad (1.14)$$

для некоторых функций $Z(s_1, s_2)$, $S_i(s_i)$ и $f_i(s_i)$. Гамильтонианы H, K (1.11) коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона $\{P_i, s_j\} = \delta_{i,j}$ тогда и только тогда, когда

$$Z_{s_1, s_2} = \frac{Z_{s_1} - Z_{s_2}}{2(s_2 - s_1)} \quad (1.15)$$

и

$$Z_{s_1}Q_{s_2} - Z_{s_2}Q_{s_1} = 0. \quad (1.16)$$

Доказательство. Каноническое преобразование

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (s_1, s_2, P_1, P_2) : \quad (1.17)$$

$$p_1 = -\left(\frac{\Phi_{q_1}^1}{\Phi_{s_1}^1}P_1 + \frac{\Phi_{q_1}^2}{\Phi_{s_2}^2}P_2\right), \quad p_2 = -\left(\frac{\Phi_{q_2}^1}{\Phi_{s_1}^1}P_1 + \frac{\Phi_{q_2}^2}{\Phi_{s_2}^2}P_2\right),$$

где $\Phi^i = \Phi(s_i, q_1, q_2)$ при условии $\{H, K\} = 0$ преобразует пару (1.8), (1.9) к виду

$$H = \frac{U_1 - U_2}{s_1 - s_2}, \quad K = \frac{s_2 U_1 - s_1 U_2}{s_1 - s_2}, \quad (1.18)$$

где

$$U_1 = S_1(s_1)P_1^2 + \tilde{d}P_1 + \tilde{e}P_2 + \tilde{f}, \quad U_2 = S_2(s_2)P_2^2 + \tilde{D}P_1 + \tilde{E}P_2 + \tilde{F}, \quad (1.19)$$

а также

$$S_i(s_i) = \frac{1}{(\Phi_{q_i}^i)^2}((as_i - A)(\Phi_{q_1}^i)^2 + 2(bs_i - B)\Phi_{q_1}^i\Phi_{q_2}^i + (cs_i - C)(\Phi_{q_2}^i)^2). \quad (1.20)$$

Вычислим скобку Пуассона от H и K . Тогда коэффициенты при P_1^2, P_2^2, P_1P_2 равны нулю при условии

$$\begin{aligned}\tilde{d} &= 2S_1(s_1)\frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_1}, & \tilde{e} &= \frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_1}}{s_1 - s_2}, \\ \tilde{D} &= -\frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_2}}{s_1 - s_2}, & \tilde{E} &= 2S_2(s_2)\frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_2},\end{aligned}$$

где $Z(s_1, s_2), F(s_1, s_2)$ - некоторые функции. и

$$Z_{s_1, s_2} = \frac{Z_{s_1} - Z_{s_2}}{2(s_2 - s_1)}. \quad (1.21)$$

Применяя каноническое преобразование

$$\hat{P}_1 = P_1 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \quad \hat{P}_2 = P_2 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_2},$$

обнулим члены с \tilde{d}, \tilde{E} .

Тогда коэффициенты при P_1, P_2 равны нулю, если U_1, U_2 имеют вид как в теореме 1. Наконец, свободный член скобки Пуассона равен нулю тогда и только тогда, когда выполнено уравнение (1.16) теоремы 1. Теорема доказана.

■

Определение 1.3. Пару гамильтонианов H и K , определяемую формулой (1.11), мы будем называть **квазиштеккелевыми гамильтонианами**. Условие того, что квазиштеккелевы гамильтонианы являются коммутирующими приведено в формулировке Теоремы 1.2.

Замечание 1.4. Коэффициенты (1.19) изначально есть функции от q_1, q_2, s_1, s_2 . Для того чтобы установить отображение $(q_1, q_2, s_1, s_2) \rightarrow (s_1, s_2)$, удобно использовать понятие результанта, в том случае, если все рассматриваемые коэффициенты являются рациональными функциями по q_1 и q_2 . Например, вычислим некоторую величину $f(q_1, q_2, s_1, s_2)$ в переменных s_1, s_2 :

Пусть $F = \text{numer}(f(x, y, s_1, s_2) - t)$, т.е F -числитель соответствующего рационального выражения. Вычислим

$$Eq = R(R(\Phi(s_1, q_1, q_2), F, q_2), R(\Phi(s_1, q_1, q_2), \Phi(s_2, q_1, q_2), q_2), q_1),$$

где $R(a(x), b(x), x) = \text{resultant}_x(a, b)$. Решая уравнение $Eq = 0$ по t , получаем функцию $\hat{f}(s_1, s_2) : \text{устанавливая отображение } f(q_1, q_2, s_1, s_2) \rightarrow \hat{f}(s_1, s_2)$, вычисляя таким образом все коэффициенты как функции s_1, s_2 .

Функция Z в (1.12)-(1.13) определена с точностью до сдвига $Z \mapsto Z + k_1$. Функции f_i в (1.13) определены с точностью до сдвига $f_i(x) \mapsto f_i(x) + k_2x + k_3$, где k_i - произвольные постоянные. Этот сдвиг соответствует преобразованию $H \mapsto H + k_2$, $K \mapsto K + k_3$.

Воспользовавшись первыми уравнениями Гамильтона:

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= \frac{\partial H}{\partial P_1} = 2\frac{S(s_1)}{s_1 - s_2}P_1 + \sqrt{S(s_1)S(s_2)}\frac{Z_{s_2}(s_1, s_2)}{(s_1 - s_2)^2}, \\ \dot{s}_2 &= \frac{\partial H}{\partial P_2} = -2\frac{S(s_2)}{s_1 - s_2}P_2 + \sqrt{S(s_1)S(s_2)}\frac{Z_{s_1}(s_1, s_2)}{(s_1 - s_2)^2},\end{aligned}\quad (1.22)$$

выражая импульсы P_1, P_2 из (1.22) и подставляя их в (1.18), получаем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{s}_1^2}{4S(s_1)(s_1 - s_2)} - \frac{\dot{s}_2^2}{4S(s_2)(s_1 - s_2)} + \frac{V_1 - V_2}{s_1 - s_2} &= h \\ \frac{s_2\dot{s}_1^2}{4S(s_1)(s_1 - s_2)} - \frac{s_1\dot{s}_2^2}{4S(s_2)(s_1 - s_2)} + \frac{1}{2}\sqrt{S(s_1)S(s_2)}\left(\frac{\dot{s}_1}{S(s_1)}Z_{s_2} + \frac{\dot{s}_2}{S(s_2)}Z_{s_1}\right) \\ + \frac{s_2V_1 - s_1V_2}{s_1 - s_2} - \frac{S(s_1)Z_{s_2}^2 + S(s_2)Z_{s_1}^2}{4(s_1 - s_2)^2} &= k.\end{aligned}\quad (1.23)$$

В отличие от гамильтонианов и дополнительных интегралов, зависящих от импульсов, уравнения движения не зависят от выбора калибровки, и иногда более удобны для идентификации динамической системы.

1.3 Определение функций, задающих квазиштеккелевы гамильтонианы

Вернемся к анализу возможных функций, входящих в квазиштеккелевы гамильтонианы.

Отметим, что впервые уравнение Эйлера-Дарбу (1.15) в связи с задачей о паре коммутирующих квадратичных гамильтонианов возникло в работе [161].

Общее аналитическое решение уравнения Эйлера-Дарбу (1.15) имеет вблизи линии сингулярности $s_1 = s_2$ следующее разложение:

$$\begin{aligned}Z(s_1, s_2) &= A + \ln(s_1 - s_2) B, \\ A &= \sum_0^{\infty} a_i(s_1 + s_2)(s_1 - s_2)^{2i}, \quad B = \sum_0^{\infty} b_i(s_1 + s_2)(s_1 - s_2)^{2i}.\end{aligned}$$

В этой формуле a_0 и a_1 - произвольные функции. Остальные коэффициенты могут легко быть выражены через эти две функции и их производные. Например, $b_0 = \frac{1}{2}a_0''$.

Подставляя этот ряд в (1.16), находим, что $B = 0$. Нетрудно проверить, что всякое решение уравнения (1.15) с $B = 0$ задается формулой:

$$Z(x, y) = z_0 + (x + y)\delta + (x - y)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(2k)}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2^{2k}k!(k+1)!} (x - y)^{2k}, \quad (1.24)$$

где $g(x)$ - произвольная функция и z_0, δ - произвольные постоянные. Будем называть функцию $g(x)$ *производящей функцией* для (1.24). Без потери общности положим $z_0 = 0$. Что касается δ , то этот параметр играет важную роль при классификации гамильтонианов из Теоремы 1.

Обрывая ряд для $Z(x, y)$ (как правило, достаточно оборвать ряд при $n = 6$ или $n = 7$), вычисляя Q по формуле (1.14), подставляем Z, Q в уравнение (1.16). Полученное выражение разлагаем по степеням $(x - y)$, получая при $x = y$ несколько обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $g(x), f(x), S(x)$, которые позволяют в тех или иных случаях найти эти функции (см. Разделы 1.5, 1.6, 1.7).

Опишем в замкнутом виде все функции Z , соответствующие рациональным производящим функциями g . Выбирая $g(x) = x^n$, получаем бесконечную последовательность полиномиальных решений $Z^{(n)}$ для (1.15). В частности,

$$g(x) = 1 \iff Z^{(0)}(x, y) = (x - y)^2,$$

$$g(x) = x \iff Z^{(1)}(x, y) = (x + y)(x - y)^2,$$

$$g(x) = x^2 \iff Z^{(2)}(x, y) = \frac{1}{4} \left((x - y)^2 + 4(x + y)^2 \right) (x - y)^2.$$

Вся последовательность может быть построена (с точностью до постоянных множителей) с помощью "рождающего" оператора

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}(x + y),$$

действующего на Z^0 . Рациональные функции $g(x) = (x - \mu)^{-n}$ порождают еще один класс точных решений уравнения (1.15). Например, имеем

$$g_\mu(x) = \frac{1}{8} \frac{1}{x - \mu}, \quad z_0 = \mu, \quad \delta = -\frac{1}{2} \iff Z_\mu(x, y) = \sqrt{(\mu - x)(\mu - y)}.$$

Решение, соответствующее полюсу порядка $n \geq 2$, может быть получено дифференцированием последней формулы по параметру μ . Поскольку соответствие между функциями Z и g линейно, мы построили решение Z с произвольной рациональной производящей функцией $g(x) = \sum_i c_i x^i + \sum_{i,j} d_{ij} (x - \mu_i)^{-j}$.

Гипотеза 1. Для любого гамильтониана (1.11)-(1.16) производящая функция g рациональна и имеет вид $g(x) = \frac{P(x)}{S(x)}$, где P и S - некоторые многочлены такие, что $\deg P < 5$, $\deg S < 6$.

1.4 Универсальная формула для решения уравнения Гамильтона-Якоби

Пусть H и K имеют вид (1.11)-(1.13). Рассмотрим систему $H = h$, $K = k$, где h, k - значения гамильтониана и дополнительного интеграла на поверхности уровня. Пусть $P_1 = F_1(x, y)$, $P_2 = F_2(x, y)$ - ее решение. Здесь и далее мы используем обозначения x и y вместо s_1 и s_2 . Из известной леммы Якоби следует, что если $\{H, K\} = 0$, то $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Чтобы найти функцию Гамильтона-Якоби $V(x, y, h, k)$, достаточно в явном виде решить совместную систему

$$\frac{\partial}{\partial x} V = F_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} V = F_2.$$

Перепишем формулы $H = h$, $K = k$ в виде

$$P_1^2 + aP_2 + b = 0, \quad P_2^2 + AP_1 + B = 0, \quad (1.25)$$

где

$$a = \frac{Z_x}{x-y} \sqrt{\frac{S_2(y)}{S_1(x)}}, \quad A = -\frac{Z_y}{x-y} \sqrt{\frac{S_1(x)}{S_2(y)}},$$

$$b = -\frac{Z_x^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_1 - hx + k}{S_1(x)}, \quad B = -\frac{Z_y^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_2 - hy + k}{S_2(y)}.$$

Легко проверить, что

$$2b_y + Aa_x + 2aA_x = 0, \quad 2Aa_y + aA_y + 2B_x = 0. \quad (1.26)$$

Используя уравнения (1.15) и (1.16), нетрудно получить также следующее тождество

$$Ab_x - aB_y + 2A_x b - 2a_y B = 0. \quad (1.27)$$

Используя стандартную технику резольвент Лагранжа (см., например, [122]), сведем систему (1.25), эквивалентную алгебраическому уравнению степени 4, к системе

$$uv = \frac{1}{4}aA, \quad (1.28)$$

$$Au^3 + 4\frac{b}{a}u^2v - 4\frac{B}{A}uv^2 - av^3 = 0, \quad (1.29)$$

которая эквивалентна кубическому уравнению относительно u^2 .

Пусть (u_k, v_k) , $k = 1, 2, 3$ -решения системы (1.28), (1.29) такие, что

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= -b, & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= -B \\ u_1u_2u_3 &= -\frac{1}{8}a^2A, & v_1v_2v_3 &= -\frac{1}{8}A^2a. \end{aligned}$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} P_1 &= u_1 + u_2 + u_3, & P_2 &= v_1 + v_2 + v_3; \\ P_1 &= u_3 - u_1 - u_2, & P_2 &= v_3 - v_1 - v_2; \\ P_1 &= u_2 - u_1 - u_3, & P_2 &= v_2 - v_1 - v_3; \\ P_1 &= u_1 - u_2 - u_3, & P_2 &= v_1 - v_2 - v_3 \end{aligned}$$

определяют четыре решения (1.25). Для определенности будем рассматривать первое из них.

Лемма 1.5. Для $i = 1, 2, 3$ выполнены соотношения $\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{\partial v_i}{\partial x}$.

Доказательство. Дифференцируя уравнения (1.28) и (1.29) по x и y , находим u_y и v_x как функции от u и v . Тогда, выражая v через u , получаем, что условие $u_y = v_x$ эквивалентно выполнению тождеств (1.26) и (1.27). ■

Лемма 1.5 означает, что в переменных u_1, u_2, u_3 происходит "частичное" разделение переменных. А именно, $V = V_1 + V_2 + V_3$, где V - искомая функция Гамильтона-Якоби, а функции V_i определяются из системы

$$\frac{\partial}{\partial x}V_i = u_i, \quad \frac{\partial}{\partial y}V_i = v_i.$$

Положим

$$u = \frac{1}{2} \frac{Z_x}{x-y} \sqrt{\frac{y-\xi}{x-\xi}}, \quad v = -\frac{1}{2} \frac{Z_y}{x-y} \sqrt{\frac{x-\xi}{y-\xi}}.$$

Легко видеть, что пара (u, v) для любого ξ удовлетворяет соотношению (1.28). Кроме того, нетрудно проверить, что если Z удовлетворяет (1.15), то $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Пользуясь этим фактом, введем функцию $\sigma(x, y, \xi)$ такую, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = v.$$

Ясно, что функция σ определена неоднозначно, с точностью до прибавления произвольной функции от переменной ξ . В случае, когда производящая функция g рациональна, соответствующая функция Z выражается через квадратичные радикалы и σ находится явно без каких-либо проблем. Положим $Y = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}$.

После умножения соотношения (1.29) на множитель

$$-2 \frac{\sqrt{S_1(x)} \sqrt{S_2(y)} \sqrt{x - \xi} \sqrt{y - \xi} (x - y)}{Z_x Z_y},$$

левая часть (1.29) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, \xi; h, k) = & -k + h\xi + \\ & + \frac{y - \xi}{x - y} \left(V_1 - \frac{S_1(x) Z_x^2}{4(x - \xi)(x - y)} \right) - \frac{x - \xi}{x - y} \left(V_2 + \frac{S_2(y) Z_y^2}{4(y - \xi)(x - y)} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Предложение 1. Пусть выполнены соотношения (1.15), (1.16). Тогда выражение (1.30) является функцией переменных Y и ξ .

Доказательство. Рассмотрим якобиан

$$J = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Заменяя $\frac{\partial Y}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y}{\partial x}$ на $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, соответственно, нетрудно непосредственно проверить, что J тождественно равен нулю в силу соотношений (1.15), (1.16). ■

Согласно Предложению 1, соотношение $\Psi(x, y, \xi; h, k) = 0$ может быть записано в виде $\phi(\xi, Y, h, k) = 0$. Для практического нахождения функции ϕ полезно положить $y = x$ или $x = 0$. После этого выражение $Y(x, y, \xi; h, k)$ значительно упрощается, и функция $\Psi(x, x, \xi; h, k)$ легко выражается через ξ и $Y(x, x, \xi; h, k)$.

Уравнение

$$\phi(\xi, Y; h, k) = 0 \quad (1.31)$$

задает кривую, в терминах дифференциалов на которой выражается функция Гамильтона-Якоби V .

Замечание 1.6. Функция $\phi(\xi, Y; h, k)$ не является полиномом по ξ, Y . Однако достаточно ввести полиномиальную функцию $Al(\xi, Y, h, k) = f_1(\xi)f_2(Y)\phi(\xi, Y; h, k)$, где f_1, f_2 некоторые (полиномиальные функции), которая и определяет искомую алгебраическую кривую. Мы будем использовать обозначение $\phi(\xi, Y, h, k) \cong Al(\xi, Y, h, k)$, подставляя вычисленную функцию Al в правую часть этого равенства, иногда опуская зависимость функции ϕ от параметров h, k .

Например, типичный вид кривой, записанный по вышеуказанному правилу, выражается как

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)Y^2 + f(\xi) - h\xi + k.$$

Кроме того, в редких случаях функция ϕ может содержать радикалы, исключение которых довольно просто, но приводит к довольно громоздким выражениям.

Обозначим через $\xi_k(x, y; h, k)$, где $k = 1, 2, 3$, корни кубического уравнения $\Psi(x, y, \xi; h, k) = 0$.

Теорема 1.7. *Функция Гамильтона -Якоби V имеет вид*

$$V(x, y; h, k) = \sum_{k=1}^3 \left(\sigma(x, y, \xi_k(x, y; h, k)) - \int^{\xi_k} Y(\xi) d\xi \right), \quad (1.32)$$

где $Y(\xi)$ - алгебраическая функция на кривой $\phi(\xi, Y) = 0$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = \sum_{k=1}^3 \sigma_x(x, y, \xi_k) + \sum_{k=1}^3 \{ \sigma_\xi(x, y, \xi_k) - Y(\xi_k) \} \xi_{k,x} = \sum_{k=1}^3 u_k = P_1.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} V(x, y) = P_2.$$

Отсюда и из вывода выражения для импульсов как функций координат при фиксированных значениях гамильтонианов, следует, что выполняются определяющие уравнения на функцию V :

$$H(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}) = h, \quad (x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}) = k. \quad (1.33)$$

Необходимые абелевы дифференциалы вычисляются дифференцированием по параметрам h, k функции Y , поскольку, например (см. формулу (1.6)):

$$t - t_0 = \frac{\partial V}{\partial h} = - \sum_{k=1}^3 \int_{\xi_0}^{\xi_k} \frac{\partial Y(\xi)}{\partial h} d\xi = \sum_{k=1}^3 \int_{\xi_0}^{\xi_k} \Omega_1(\xi).$$

Итак,

$$\Omega_1 = -\frac{\partial Y}{\partial h} d\xi, \quad \Omega_2 = -\frac{\partial Y}{\partial k} d\xi,$$

или, как нетрудно видеть,

$$\Omega_1 = \frac{\partial \phi / \partial h}{\partial \phi / \partial Y} d\xi, \quad \Omega_2 = \frac{\partial \phi / \partial k}{\partial \phi / \partial Y} d\xi.$$

■

Для нахождения явного решения необходимо найти обратное преобразование Якоби следующей системы

$$\begin{cases} t - t_0 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Omega_1(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_2} \Omega_1(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_3} \Omega_1(\xi), \\ \tau - \tau_0 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Omega_2(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_2} \Omega_2(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_3} \Omega_2(\xi), \\ \text{Alg}(Y_1, Y_2, Y_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3; h, k) = 0, \end{cases} \quad (1.34)$$

где последняя строчка в системе означает некоторое алгебраическое условие. Например, если можно найти такую переменную $\eta = a(x, y)\xi + b(x, y) = g(\xi, Y)$, тогда пары точек $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой. Это может означать, что динамические переменные лежат на примитиве алгебраической кривой (1.31). Автор благодарен П.Г. Гриневичу за это наблюдение.

В этих случаях алгебраическая кривая является разветвленным накрытием над эллиптической кривой - кубикой $\tilde{\phi}(\xi, \eta)$, являющейся числителем функции, получающейся при подстановке $Y = G(\xi, \eta)$ в функцию $\phi(\xi, Y)$, где функция G является обратной к функции g : $g(\xi, G(\xi, \eta)) = \eta$.

Времена t и τ соответствуют динамике системы по потокам, соответствующим гамильтониану H и дополнительному интегралу K , а величины t_0, τ_0 — произвольные константы.

Конечно, можно следить за динамикой системы только по "основному" времени t , зафиксировав величину τ и считая ее параметром.

1.5 Классификация. Примеры

1.5.1 Класс 1

Для моделей из этого класса

$$S_1 = S_2 = S, \quad f_1 = f_2 = f. \quad (1.35)$$

Теорема 1.8. Пусть

$$g = \frac{\tilde{G}}{S}, \quad \tilde{G} = G - \frac{\delta}{10}S', \quad f = -\frac{4\tilde{G}^2}{S} - \frac{4\delta}{3}\tilde{G}' - \frac{\delta^2}{12}S'',$$

где

$$S(x) = s_5x^5 + s_4x^4 + s_3x^3 + s_2x^2 + s_1x + s_0, \quad G(x) = g_3x^3 + g_2x^2 + g_1x + g_0,$$

и s_i, g_i, δ - произвольные постоянные. Тогда функции S, f и функция Z , соответствующая (см. §1) производящей функции g , удовлетворяют системе (1.15), (1.16).

Замечание. Параметр δ из Теоремы 3 совпадает с параметром δ из формулы (1.24). Предположим, что в формуле (1.24) $\delta = 0$. Тогда можно проверить, что всякая пара гамильтонианов (1.11)-(1.16), (1.35), удовлетворяющая этому условию, описывается Теоремой 3.

Рассмотрим случай общего положения

$$S(x) = s_5(x - \mu_1)(x - \mu_2)(x - \mu_3)(x - \mu_4)(x - \mu_5),$$

где $s_5 \neq 0$ и все корни μ_i многочлена S различны. Нетрудно проверить, что функция Z для интегрируемой модели из Теоремы 3 имеет вид

$$Z(x, y) = \sum_{i=1}^5 \nu_i \sqrt{(\mu_i - x)(\mu_i - y)}, \quad (1.36)$$

где ν_i - произвольные постоянные. Коэффициенты g_i и δ выражаются через постоянные ν_j из формулы (1.24). Например, $2\delta = -\sum \nu_i$. Функция f задается формулой

$$f(x) = -\frac{1}{16} \sum_{i=1}^5 \nu_i^2 \frac{S'(\mu_i)}{x - \mu_i} + k_1x + k_0,$$

где k_1, k_0 - произвольные постоянные.

Вычисления показывают, что для функции (1.36)

$$\sigma(x, y, \xi) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \nu_i \log \frac{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\mu_i} + \sqrt{y-\xi} \sqrt{x-\mu_i}}{\sqrt{x-y} \sqrt{\mu_i-\xi}}, \quad (1.37)$$

$$Y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\sqrt{(x-\mu_i)(y-\mu_i)}}{(\xi-\mu_i) \sqrt{(x-\xi)(y-\xi)}}.$$

Алгебраическая кривая имеет вид

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)Y^2 + f(\xi) - \xi h + k = 0$$

и является гиперэллиптической рода 2.

Оказывается, что волчок Стеклова на $so(4)$ [149] является частным случаем модели из Теоремы 3 (см. подраздел 1.6.4).

1.5.2 Класс 2

Функции Z для моделей этого класса являются очень специальными случаями функций Z из класса 1. Однако именно для этих специальных случаев функции S и f содержат гораздо больше произвольных параметров, чем обеспечивает общая формула из Теоремы 1.8.

Такие функции Z могут быть определены, как решения системы

$$Z_{xy} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)} = \frac{1}{3} U(Z) Z_x Z_y, \quad (1.38)$$

где U - некоторая функция одной переменной.

Замечание 1.9. Можно проверить, что этот класс решений уравнения Дарбу-Эйлера $Z_{xy} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)}$ совпадает с классом решений вида

$$Z = F \left(\frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right),$$

где F и h - некоторые функции одной переменной. При этом оказывается, что $U = F''/F'^2$.

Лемма 1.10. Система (1.38) совместна, если и только если

$$U = \frac{3B'}{2B}, \quad B(Z) = b_2 Z^2 + b_1 Z + b_0,$$

где b_i - произвольные постоянные.

В случае $\deg B = 2$, с точностью до линейных замен Z , можно считать, что

$$Z(x, y) = \sqrt{(x - \mu_1)(y - \mu_1)} + \sqrt{(x - \mu_2)(y - \mu_2)}. \quad (1.39)$$

При этом $b_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_0 = -(\mu_1 - \mu_2)^2$.

Если $\deg B = 1$, то

$$Z(x, y) = \sqrt{xy} + \frac{1}{2}(x + y), \quad (1.40)$$

$b_1 = 1$, $b_2 = b_0 = 0$.

Наконец, если $\deg B = 0$, то

$$Z(x, y) = x + y. \quad (1.41)$$

1. Пусть функция Z задается формулой (1.39). Тогда

$$S(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)P(x) + (x - \mu_1)^{3/2}(x - \mu_2)^{3/2}Q(x), \quad \deg P \leq 3, \deg Q \leq 2,$$

и

$$\begin{aligned} f(x) = & f_0 + f_1x + k_2(x - \mu_1)^{1/2}(x - \mu_2)^{1/2} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{16} \left\{ \frac{P(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{P(\mu_2)}{x - \mu_2} \right\} \\ & + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{32} (x - \mu_1)^{1/2}(x - \mu_2)^{1/2} \left\{ \frac{Q(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{Q(\mu_2)}{x - \mu_2} \right\}. \end{aligned}$$

В случае, когда $Q = 0$, $k_2 = 0$, эти формулы совпадают с соответствующими формулами для класса 1. Функции σ , Y задаются той же формулой (1.37), что и для класса 1 :

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, \xi) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \log \frac{\sqrt{x - \xi} \sqrt{y - \mu_i} + \sqrt{y - \xi} \sqrt{x - \mu_i}}{\sqrt{x - y} \sqrt{\mu_i - \xi}}, \\ Y = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \frac{\sqrt{(x - \mu_i)(y - \mu_i)}}{(\xi - \mu_i) \sqrt{(x - \xi)(y - \xi)}}. \end{aligned}$$

Алгебраическую кривую в этом случае можно записать в виде

$$[S_R(\xi) + \eta S_I(\xi)]Y^2 - [k_R(\xi) + \eta k_I(\xi)] = 0, \quad (1.42)$$

где

$$S_R(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)P(x), \quad S_I(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)Q(x),$$

$$k_R(x) = -k + hx - f_0 - f_1x - \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{16} \left\{ \frac{P(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{P(\mu_2)}{x - \mu_2} \right\},$$

$$k_I(x) = k_2 - \frac{1}{32}(\mu_1 - \mu_2)^2 - \frac{1}{16}(\mu_1 - \mu_2) \left\{ \frac{Q(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{Q(\mu_2)}{x - \mu_2} \right\},$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\xi - \mu_1}\sqrt{\xi - \mu_2}} \sqrt{1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{16(\xi - \mu_1)^2(\xi - \mu_2)^2 Y^2}}.$$

Отметим, что из последней формулы можно выразить η^2 как функцию ξ, Y и после простых преобразований привести уравнение для кривой к стандартной алгебраической форме $\phi(\xi, Y) = \sum_{i,j} c_{ij} Y^i \xi^j = 0$. Однако ответ получается довольно громоздким.

Выражая Y как функцию от (ξ, η) и подставляя в (1.42), можно проверить, что в переменных (ξ, η) , эта кривая приобретает вид произвольной 10-ти параметрической кубики. Таким образом, в случае общего положения кривая $\phi(\xi, Y) = 0$, в терминах которой записывается функция Гамильтона-Якоби (см. Теорему 2), является накрытием над эллиптической кривой. Поскольку

$$\eta = \frac{\xi - \mu_1}{\frac{\sqrt{x-\mu_1}}{\sqrt{x-\mu_2}} + \frac{\sqrt{y-\mu_1}}{\sqrt{y-\mu_2}}} + \frac{\xi - \mu_2}{\frac{\sqrt{x-\mu_2}}{\sqrt{x-\mu_1}} + \frac{\sqrt{y-\mu_2}}{\sqrt{y-\mu_1}}},$$

а значит точки $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

2. Для функции Z вида (1.40) имеем

$$S(x) = xP(x) + x^{3/2}Q(x), \quad \deg P \leq 3, \quad \deg Q \leq 2,$$

$$f(x) = -\frac{1}{16x}P(x) - \frac{1}{32\sqrt{x}}Q(x) + f_1x + f_q\sqrt{x} + f_0.$$

Функция Y задается формулой $Y = \frac{\xi + \sqrt{x}\sqrt{y}}{4\xi\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\xi}}$. Кривая и в этом случае может быть записана в виде (1.42), где

$$S_R(x) = xP(x), \quad S_I(x) = xQ(x),$$

$$k_R(x) = -k + hx - f_0 - f_1x + \frac{1}{16x}P(x), \quad k_I(x) = \frac{1}{16x}Q(x) - f_q,$$

$$\eta = \frac{4Y\xi^{3/2}}{\sqrt{16Y^2\xi^2 - 1}}.$$

В переменных (ξ, η) она также имеет вид произвольной кубики. Из формулы $\eta = \frac{\xi + \sqrt{xy}}{\sqrt{x+\sqrt{y}}}$ следует, что точки $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

3. Для функции Z , заданной формулой (1.41), имеем

$$S(x) = s_6x^6 + s_5x^5 + s_4x^4 + s_3x^3 + s_2x^2 + s_1x + s_0,$$

$$f(x) = -\frac{1}{40}S''(x) + f_2x^2 + f_1x + f_0.$$

В этом случае $Y = \frac{1}{2\sqrt{x - \xi}\sqrt{y - \xi}}$. Кривая имеет относительно простой алгебраический вид

$$S(\xi)Y^6 - F(\xi)Y^4 - \left(\frac{1}{8}F''(\xi) + \frac{7}{1920}S^{IV}(\xi) - \frac{k_2}{2}\right)Y^2 - \frac{s_6}{64} = 0, \quad F(\xi) = -k + h\xi - f(\xi)$$

и в переменных (ξ, η) , где $\eta = \xi^2 - \frac{1}{4Y^2}$, имеет вид произвольной кубики. Поскольку $\eta = \xi(x + y) - xy$, то точки $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

1.5.3 Класс 3

Гамильтониан (1.11)-(1.16) назовем *несимметрическим*, если $S_1(x) \neq S_2(x)$, или $f_1(x) \neq f_2(x)$.

Теорема 1.11. *В несимметрическом случае функции Z, S_i, f_i удовлетворяют (1.15), (1.16) если и только если*

$$\delta = 0, \quad g = \frac{1}{H}, \quad S_{1,2} = W H \pm M H^{3/2}, \quad f_{1,2} = -\frac{4W}{H} \mp 2M H^{-1/2} \pm a H^{1/2},$$

где g - порождающая функция для Z ,

$$W(x) = w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0, \quad H(x) = h_2x^2 + h_1x + h_0,$$

$$M(x) = m_2x^2 + m_1x + m_0.$$

Здесь w_i, h_i, m_i, a - произвольные постоянные.

Рассмотрим случай общего положения $H(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)$. Алгебраическая кривая в этом случае задается формулой

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, Y) = & -k + h\xi - \frac{RW(\xi)}{2(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1)} + \\ & 4M(\xi)\sqrt{2}Y \frac{\sqrt{\xi - \mu_1}\sqrt{\xi - \mu_2}}{(\mu_2 - \mu_1)^{3/2}} \sqrt{R} + 8b\sqrt{2}Y \frac{(\xi - \mu_1)^{3/2}(\xi - \mu_2)^{3/2}}{\sqrt{R}\sqrt{\mu_2 - \mu_1}} = 0, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где

$$Y = \frac{\sqrt{(x - \mu_1)(y - \mu_1)}}{(\xi - \mu_1)\sqrt{(x - \xi)(y - \xi)}} - \frac{\sqrt{(x - \mu_2)(y - \mu_2)}}{(\xi - \mu_2)\sqrt{(x - \xi)(y - \xi)}},$$

$$R = 16(\xi - \mu_1)^2(\xi - \mu_2)^2 Y^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2.$$

Подставляя

$$Y = \frac{1}{4} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^{\frac{3}{2}} \eta}{(\xi - \mu_2)(\xi - \mu_1)\sqrt{\eta^2(\mu_2 - \mu_1) - 8(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)}}$$

в (1.43), получаем кубику в переменных (ξ, η) с полным набором из десяти независимых параметров. Нетрудно проверить, что $\eta = a(x, y)\xi + b(x, y)$, где a, b - некоторые функции.

Таким образом, в случае моделей из Классов 2 и 3 алгебраическая кривая является разветвленным негиперэллиптическим накрытием над эллиптической кривой. Динамика трех точек $(\xi_1, Y_1), (\xi_2, Y_2), (\xi_3, Y_3)$ на этой кривой (см. Теорему 2) подчиняется условию: их проекции на эллиптическую базу $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

Гипотеза 2. Всякая пара гамильтонианов (1.11)-(1.16) принадлежит к одному из трех классов, описанных выше.

1.6 Классические волчки и квазиштеккелевы

ГАМИЛЬТОНИАНЫ

Для того чтобы связать некоторые классические волчки с квазиштеккелевыми гамильтонианами, необходимо сначала привести пару гамильтонианов, описывающих волчки, к паре гамильтонианов квадратичных по импульсам и коммутирующих в силу стандартной скобки Пуассона с помощью так называемых координат Дарбу. Затем, используя теорему 1.2, получить соответствующие квазиштеккелевы гамильтонианы. Далее стандартным способом, описанным ранее, получить алгебраическую кривую и функцию Гамильтона - Якоби.

1.6.1 Волчок Клебша на $e(3)$

Рассмотрим гамильтониан и дополнительный интеграл волчка Клебша

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + \frac{1}{2}(\lambda_1\gamma_1^2 + \lambda_2\gamma_2^2 + \lambda_3\gamma_3^2), \\ K &= (\lambda_1M_1^2 + \lambda_2M_2^2 + \lambda_3M_3^2) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\frac{\gamma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda_2} + \frac{\gamma_3^2}{\lambda_3}\right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

где λ_i - произвольные параметры. Функции H и K коммутируют относительно линейных скобок Пуассона алгебры $e(3)$

$$\{M_i, M_j\} = e_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = e_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$$

Зафиксируем значения функций Казимира этих скобок:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \alpha^2, \quad M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = l.$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} M_1 &= -p_1q_1q_2 + \frac{1}{2}p_2(q_1^2 - q_2^2 - 1) + \frac{l x (q_1^2 + q_2^2 + 1)}{2\alpha (q_1^2 + q_2^2)}, \\ M_2 &= \frac{1}{2}p_1(q_1^2 - q_2^2 + 1) + p_2q_1q_2 + \frac{l y (q_1^2 + q_2^2 + 1)}{2\alpha (q_1^2 + q_2^2)}, \\ M_3 &= p_1q_2 - p_2q_1, \\ \gamma_1 &= \frac{2\alpha q_1}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}, \quad \gamma_2 = \frac{2\alpha q_2}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha(q_1^2 + q_2^2 - 1)}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

задают вещественные координаты Дарбу (p_1, p_2, q_1, q_2) на симплектическом листе общего положения.

Подставляя (1.45) в (1.44) и используя результаты теоремы 1.2, получаем:

$$\begin{aligned} S(x) &= -2(x - 2\lambda_1)(x - 2\lambda_2)(x - 2\lambda_3), \quad Z(x, y) = i\frac{l}{\alpha}(x + y), \\ f(x) &= -\frac{\alpha^2}{4}x^2 + \frac{\alpha^2}{2}x(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Наличие мнимой единицы в выражении для $Z(x, y)$ из (1.46) приводит к необходимости сделать замену

$$i\sqrt{S(x)S(y)} \rightarrow \sqrt{-S(x)S(y)}$$

При этом легко видеть, что все коэффициенты в гамильтониане и дополнительном интеграле являются вещественными при условии, что переменные s_1, s_2 находятся в «правильных» промежутках между корнями многочлена S (полиномы $S(s_1)$ и $S(s_2)$ должны иметь разные знаки в силу динамики системы).

Следуя схеме Раздела 1.4, получаем

$$\sigma(x, y, \xi) = \frac{l}{\alpha} \arctan\left(\frac{\sqrt{x-\xi}}{\sqrt{\xi-y}}\right), \quad Y = \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma = -\frac{l}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{x-\xi}\sqrt{\xi-y}}. \quad (1.47)$$

Используя (1.30), мы вычисляем соответствующую алгебраическую кривую рода 3:

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)Y^4 + (f(\xi) - h\xi + k)Y^2 - \frac{l^2}{16} = 0. \quad (1.48)$$

Отметим, что алгебраическая кривая (1.48) совпадает с кривой, полученной Переломовым из 3×3 пары Лакса для волчка Клебша [121]. Изложенный выше метод позволяет строить алгебраические кривые без использования пары Лакса.

Введем новую переменную

$$\eta = \frac{l^2}{4\alpha^2 Y^2} + \xi^2 = (x+y)\xi - xy. \quad (1.49)$$

Последнее равенство означает, что пары точек $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

Введем обозначения

$$\tilde{l} = \frac{l}{\alpha^2}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{\alpha^2}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{\alpha^2}, \quad I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

тогда выражая переменную Y из (1.49) и подставляя в (1.48), получаем кубику

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\xi, \eta) = & 2(\tilde{l}^2 + I_1 - 2\tilde{h})\xi^3 - \xi^2\eta - 4(\tilde{l}^2 I_1 - \tilde{k})\xi^2 - \\ & - 2(I_1 - 2\tilde{h})\xi\eta + \eta^2 + 8\tilde{l}^2 I_2 \xi - 4\tilde{k}\eta - 16\tilde{l}^2 I_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

- кривую рода 1.

1.6.2 Волчок Ковалевской с гириостатом на $e(3)$

Рассмотрим в качестве примера волчок Ковалевской с гириостатом.

Гамильтониан для гиростата Ковалевской имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - 2\lambda M_3) + c\gamma_1, \quad (1.51)$$

где c и λ - некоторые постоянные.

Гамильтоновская структура волчка задается $e(3)$ -скобками Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$

Эта скобка обладает функциями Казимира

$$A = \sum_{k=1}^3 \gamma_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^3 \gamma_k M_k. \quad (1.52)$$

Дополнительный интеграл движения задается формулой [73]

$$K = \xi_1 \xi_2 + 4\lambda \left((M_3 - \lambda) z_1 z_2 - (z_1 + z_2) c \gamma_3 \right), \quad (1.53)$$

где

$$\xi_1 = z_1^2 - 2c(\gamma_1 + i\gamma_2), \quad \xi_2 = z_2^2 - 2c(\gamma_1 - i\gamma_2)$$

и

$$z_1 = M_1 + iM_2, \quad z_2 = M_1 - iM_2.$$

Поскольку дополнительный интеграл имеет 4-ую, а не вторую степень, теорема 1.2 не применима напрямую к данному случаю, однако систему можно привести к форме коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов, пользуясь уравнениями движения.

В работе Комарова и Цыганова [73], были получены необходимые уравнения движения:

$$h = \frac{s_1 - s_2}{2} \left(\frac{\dot{s}_1^2}{\varphi_1} - \frac{\dot{s}_2^2}{\varphi_2} \right) - \frac{s_1 + s_2}{2}, \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{4} &= (2h + s_1 + s_2)\lambda^2 - \lambda\sqrt{-\varphi_1\varphi_2} \left(\frac{\dot{s}_1}{\varphi_1} + \frac{\dot{s}_2}{\varphi_2} \right) + \\ &+ (s_1 - s_2) \left(\frac{s_2\dot{s}_1^2}{\varphi_1} - \frac{s_1\dot{s}_2^2}{\varphi_2} \right) - s_1s_2 + h^2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Здесь $\varphi_i = S(s_i)$,

$$S(s) = 4s^3 - 8hs^2 + 4h^2s - ks + 4c^2as + 4c^2b. \quad (1.56)$$

Полученные в этой работе уравнения движения совпадают с уравнениями (1.23) при условии

$$Z(x, y) = -\frac{i}{2}\lambda(x + y), \quad f(x) = -\frac{x^2}{4}, \quad h_q = \frac{h}{2} - \lambda^2, \quad k_q = -\frac{h^2}{4} - h\lambda^2 + \frac{k}{16}. \quad (1.57)$$

Все коэффициенты в квазиштеккелевых гамильтонианах станут вещественными (как и уравнения движения) при замене

$$i\sqrt{S(x)S(y)} \rightarrow \sqrt{-S(x)S(y)},$$

см. формулу (1.55), взятую из работы [73], а также в предыдущем подразделе, при изучении волчка Клебша.

Таким образом, приведенная в разделе 3 схема разделения переменных применима в этом случае буквально, а именно, получаем следующие формулы:

$$\sigma(x, y, \xi) = \lambda \arctan\left(\frac{\sqrt{x - \xi}}{\sqrt{\xi - y}}\right), \quad Y = \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{\sqrt{x - \xi} \sqrt{\xi - y}}. \quad (1.58)$$

Кривая $\phi(\xi, Y)$ рода 3 имеет вид:

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)Y^4 + (f(\xi) - h_q\xi + k_q)Y^2 - \frac{\lambda^2}{16} = 0. \quad (1.59)$$

Поскольку полином $S(s)$ в этом случае зависит от h, k , для вычисления абелевых дифференциалов необходимо вместо параметров h_q, k_q подставить в кривую (1.59) параметры h_0, k_0 , вычислить абелевы дифференциалы по схеме Раздела 1.4, дифференцируя при этом по параметрам h_0, k_0 , а не по h, k , затем делая обратную замену $h_0 = h_q, k_0 = k_q$.

Итак, получаем

$$\begin{cases} t - t_0 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Omega_1(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_2} \Omega_1(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_3} \Omega_1(\xi), \\ \tau - \tau_0 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Omega_2(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_2} \Omega_2(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi_3} \Omega_2(\xi), \\ \text{пары точек } (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3) \text{ лежат на одной прямой,} \end{cases} \quad (1.60)$$

поскольку можно ввести новую переменную

$$\eta = \frac{\lambda^2}{4Y^2} + \xi^2 = (x + y)\xi - xy, \quad (1.61)$$

из последнего равенства и следует необходимое алгебраическое условие (последняя строка в системе (1.60)). Схема вычисления абелевых дифференциалов Ω_1, Ω_2 описана выше.

1.6.3 Двухспиновая модель I - Волчок Шоттки -Манакова на $so(4)$

Рассмотрим следующую двухспиновую модель

$$\hat{H} = (\vec{S}_1, A\vec{S}_1) + 2(\vec{S}_1, B\vec{S}_2) + (\vec{S}_2, A\vec{S}_2), \quad (1.62)$$

Хорошо известно (см. например, [158, 112]), что гамильтониан H где $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $B = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$, коммутирует с некоторым дополнительным интегралом K , квадратичным по генераторам алгебры $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ относительно стандартных спиновых скобок Пуассона

$$\{S_i^\alpha, S_j^\beta\} = \kappa \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma \delta_{ij} \quad (1.63)$$

если и только если

$$b_1^2(a_2 - a_3) + b_2^2(a_3 - a_1) + b_3^2(a_1 - a_2) + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) = 0. \quad (1.64)$$

В формуле (1.63) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ -полностью кососимметричный тензор, κ -параметр.

Матрицы A и B , задающие гамильтониан K , без ограничения общности могут быть выбраны в виде

$$A = \text{diag}(-\lambda_1^2, -\lambda_2^2, -\lambda_3^2), \quad B = \text{diag}(\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2).$$

Поскольку H и K можно заменить на произвольные линейные комбинации H , K и двух функций Казимира

$$j_1^2 = (\vec{S}_1, \vec{S}_1), \quad j_2^2 = (\vec{S}_2, \vec{S}_2) \quad (1.65)$$

скобок (1.63), дополнительный интеграл K может быть приведен [65] к виду

$$\hat{K} = 2(\vec{S}_1, \hat{C}\vec{S}_2), \quad C = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Сведение к стандартным скобкам Пуассона. Координаты Дарбу
Зафиксируем значения функций Казимира: $(\vec{S}_k, \vec{S}_k) = j_k^2$. Тогда координаты Дарбу для генераторов \vec{S}_k алгебры $so(3)$

$$\vec{S}_k = p_k \vec{E}(q_k) + \frac{j_k}{2} \vec{E}'(q_k), \quad \text{где} \quad \vec{E}(q) = ((q^2 - 1), i(q^2 + 1), 2q), \quad (1.66)$$

задают переход от переменных \vec{S}_1, \vec{S}_2 со скобкой (1.63), где $\kappa = -2i$, к новым переменным p_1, p_2, q_1, q_2 с канонической скобкой Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. В результате этого преобразования получаем

$$\hat{H} = p_1^2 r(q_1) + \frac{j_1}{2} p_1 r'(q_1) + \frac{j_1^2}{12} r''(q_1) + p_2^2 r(q_2) + \frac{j_2}{2} p_2 r'(q_2) + \frac{j_2^2}{12} r''(q_2) + 2 \left(p_1 + \frac{j_1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) \left(p_2 + \frac{j_2}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) z(q_1, q_2) \quad (1.67)$$

$$\hat{K} = -2 \left(p_1 + \frac{j_1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) \left(p_2 + \frac{j_2}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) v(q_1, q_2), \quad (1.68)$$

где

$$r(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{E}(x), A\vec{E}(x)) = -\lambda_1^2(x^2 - 1)^2 + \lambda_2(x^2 + 1)^2 - 4\lambda_3 x^2, \quad (1.69)$$

$$z(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{E}(x), B\vec{E}(y)) = \lambda_2 \lambda_3 (x^2 - 1)(y^2 - 1) - \lambda_3 \lambda_1 (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4\lambda_1 \lambda_2 xy, \quad (1.70)$$

$$v(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{E}(x), C\vec{E}(y)) = \lambda_1(x^2 - 1)(y^2 - 1) - \lambda_2(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4\lambda_3 xy. \quad (1.71)$$

Можно проверить, что

$$z^2(x, y) - r(x)r(y) = v(x, y)\bar{v}(x, y), \quad (1.72)$$

где \bar{v} - некоторый многочлен второй степени по каждой из переменных.

Поскольку вместо гамильтониана и дополнительного интеграла можно брать любые их комбинации, положим

$$H = -\hat{K}, \quad K = \hat{H} - \lambda \hat{K}, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (1.73)$$

Замечание 1.12. В этом подразделе мы сделали замену 1.73, что несколько необычно, однако при такой замене мы получим более удобные квазиштеккелевы гамильтонианы. Конечно, такое переобозначение можно было бы сделать в теореме 1.2, однако в этом случае гамильтониан движения заряженной частицы в электромагнитном поле, который мы рассмотрим далее, стал бы дополнительным интегралом K , что неприемлемо, поскольку с точки зрения новых приложений этот случай для нас более важен (также как и оператор Шредингера в квантовом случае). В любом случае, во избежание путаницы, следует фиксировать обозначения в теореме 1.2, вместо того чтобы подгонять ее к каждому конкретному случаю.

Пользуясь формулами (1.10), (1.20), получаем функции, определяющие квазиштеккелевы гамильтонианы:

$$Z(x, y) = (x + y)\delta, \quad \delta = \frac{1}{2}(j_2 - j_1), \quad (1.74)$$

$$S(x) = 4(x - 2\lambda_1)(x - 2\lambda_2)(x - 2\lambda_3)(x - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)), \quad (1.75)$$

$$f(x) = -\frac{j_1^2 + j_2^2}{96}S''(x). \quad (1.76)$$

Отметим, что данный набор квазиштеккелевых гамильтонианов принадлежит классу 2 Раздела 1.5.

Пользуясь универсальной схемой Раздела 1.4 вычислим алгебраическую кривую, на которой происходит динамика Волчка Шоттки — Манакова на $so(4)$:

$$\sigma(x, y, \xi) = -\delta \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{x - \xi}}{\sqrt{y - \xi}}, \quad Y = \frac{\delta}{2\sqrt{x - \xi}\sqrt{y - \xi}} \quad (1.77)$$

алгебраическая кривая

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)Y^4 + (f(\xi) - h\xi + k)Y^2 + \frac{1}{64}(j_1^2 - j_2^2)^2. \quad (1.78)$$

Введем новую переменную

$$\eta = \xi^2 - \frac{l^2}{4\alpha^2 Y^2} = -(x + y)\xi + xy. \quad (1.79)$$

Последнее равенство означает, что пары точек (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) лежат на одной прямой.

Замечание 1.13. Все выполненные преобразования, кроме перехода от волчка на $so(4)$, а именно переход от квадратичных по импульсам коммутирующих гамильтонианов к квазиштеккелевым, переход от квазиштеккелевых гамильтонианов к функции Гамильтона - Якоби и алгебраической кривой, вещественны. Более того, полученная алгебраическая кривая совпадает с кривой, полученной с помощью представления Лакса, причем переменные, принадлежащие кривой, однозначно связаны с динамическими переменными волчка. Однако переменные Дарбу в случае волчка Шоттки - Манакова на $so(4)$ являются комплексными, что можно понять из следующих рассуждений — гамильтониан и дополнительный интеграл квадратично зависят от генераторов алгебры $so(3)$ (используется 2-х спиновая версия этого волчка), так как целью является преобразовать "спиновые" гамильтонианы в квадратичные по импульсам и коммутирующие в силу канонической скобки Пуассона гамильтонианы. Значит генераторы

$so(3)$ должны быть линейны по импульсам — пусть, например, $\vec{S} = p\vec{E} + \vec{E}_1$, где \vec{E}, \vec{E}_1 — некоторые вектора, зависящие от координаты q . Тогда из равенства $(\vec{S}, \vec{S}) = j^2$ (где j — длина спина) немедленно следует, что коэффициент при p^2 равен $(\vec{E}, \vec{E}) = 0$, а значит \vec{E} — комплексный вектор (ср. с координатами Дарбу выше). Таким образом в случае этого волчка нельзя претендовать на построение вещественного решения из данной конструкции, однако алгебраическая кривая и функция Гамильтона-Якоби имеют смысл и в этом случае (простейшая из кривых, как выясняется, вообще не зависит от способов ее получения). Кроме того, вещественные квазиштеккелевы гамильтонианы сами по себе заслуживают отдельного изучения.

1.6.4 Двухспиновая модель II - Волчок Стеклова на $so(4)$

Покажем, что случай волчка Стеклова на $so(4)$ после ограничения на симплектические листы является частным случаем модели из Класса 1. Гамильтониан и дополнительный интеграл в случае волчка Стеклова имеют вид

$$H = (\vec{S}_1, A\vec{S}_1) + (\vec{S}_1, B\vec{S}_2), \quad K = (\vec{S}_1, \bar{A}\vec{S}_1) + (\vec{S}_1, \bar{B}\vec{S}_2),$$

где

$$A = -\alpha^2 \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1^2}, \frac{1}{\alpha_2^2}, \frac{1}{\alpha_3^2}\right), \quad B = \alpha \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\bar{A} = -\operatorname{diag}(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2), \quad \bar{B} = \alpha \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right),$$

$\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Здесь $\tilde{\mathbf{S}}_i$ — трехмерные векторы с компонентами S_i^α . Легко проверить, что H и K коммутируют относительно спиновой скобки Пуассона (1.63).

Используя координаты Дарбу (1.66), получаем

$$\begin{aligned} H &= p_1^2 r(q_1) + 2p_1 p_2 v + j_2 p_1 v_{q_2} + \frac{1}{2} j_1 p_1 r'(q_1) + \\ &+ j_1 p_2 v_{q_1} + \frac{1}{2} j_1 j_2 v_{q_1, q_2} + \frac{j_1^2}{12} r''(q_1), \\ K &= p_2^2 R(q_2) + 2p_1 p_2 w + j_2 p_1 w_{q_2} + \frac{1}{2} j_2 p_2 R'(q_2) + \\ &+ j_1 p_2 w_{q_1} + \frac{1}{2} j_1 j_2 w_{q_1, q_2} + \frac{j_2^2}{12} R''(q_2), \end{aligned} \tag{1.80}$$

где $v = v(q_1, q_2)$, $w = w(q_1, q_2)$,

$$\begin{aligned}
r(x) &= -(x^2 - 1)^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + (x^2 + 1)^2 \alpha_1^2 \alpha_3^2 - 4x^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2, \\
R(x) &= -(x^2 - 1)^2 \alpha_1^2 + (x^2 + 1)^2 \alpha_2^2 - 4x^2 \alpha_3^2, \\
v(x, y) &= \alpha \left((x^2 - 1)(y^2 - 1) \alpha_1 - (x^2 + 1)(y^2 + 1) \alpha_2 + 4xy \alpha_3 \right), \\
w(x, y) &= (x^2 - 1)(y^2 - 1) \alpha_2 \alpha_3 - (x^2 + 1)(y^2 + 1) \alpha_1 \alpha_3 + 4xy \alpha_1 \alpha_2.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Используя теорему 1.2, получаем пару коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов с функциями, определяющих их (1.11)-(1.13), (1.35):

$$\begin{aligned}
S(x) &= 16x(\alpha_1^2 x - 1)(\alpha_2^2 x - 1)(\alpha_3^2 x - 1), \\
Z(x, y) &= -\frac{1}{2} j_1(x + y) - j_2 \sqrt{xy}, \quad f(x) = -j_1^2 \alpha^2 x^2 + \frac{j_2^2}{x}.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Следуя общей схеме Раздела 1.4, получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma(x, y, \xi) &= \frac{j_1}{2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{y - \xi}}{\sqrt{x - \xi}} \right) + \frac{j_2}{2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{x} \sqrt{y - \xi}}{\sqrt{y} \sqrt{x - \xi}} \right), \\
Y &= -\frac{1}{4} \frac{j_1 \xi + j_2 \sqrt{xy}}{\xi \sqrt{x - \xi} \sqrt{y - \xi}}.
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Получаем алгебраическую кривую рода 2

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi) Y^2 + (f(\xi) - h\xi + k) = 0. \tag{1.84}$$

Переменную η в этом случае определить нельзя. Однако числитель функции $\Psi(x, y, \xi)$ является полиномом 3-й степени по ξ . В рассматриваемом случае данный полином не содержит члена линейного по ξ , поэтому имеет место алгебраическое условие:

$$\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 = 0.$$

1.7 Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

В этом Разделе мы рассмотрим задачу о движении заряженной частицы в электромагнитном поле в двумерном случае. Эта задача важна сама по себе как физическое приложение, кроме того она является классическим пределом уравнения Шредингера, который будет рассмотрен в следующем Разделе. В этом

случае возможна полная классификация этих систем благодаря специфическому виду гамильтониана (его сигнатуры, т.е. коэффициентов перед старшими членами по импульсу). Мы рассматриваем эту задачу отдельно от квантового случая, во - первых, потому что часть решений в квантовом случае содержат квантовые поправки, кроме того, мы вычислим алгебраические кривые, соответствующие рассматриваемым системам.

1.7.1 Представление коммутирующих гамильтонианов через векторный потенциал и потенциал

В данном случае будет построена полная классификация таких пар в классе мероморфных решений для основной функции $g(t)$ (см. ниже), что эквивалентно тесту Пенлеве, который является одним из главных необходимых критериев интегрируемости задачи в теории интегрируемых систем.

Для простоты пары, которые коммутируют в смысле стандартной скобки Пуассона $\{p_i, q_i\} = \delta_{i,j}$, мы будем называть просто коммутирующими.

Задача о классическом движении заряженной частицы в электромагнитном поле с дополнительным интегралом движения рассматривалась, например, в работе [37] (см. также цитированные там работы и работу [41]). В этих работах был получен ряд интересных примеров таких уравнений, однако используемый подход едва ли может претендовать на полную классификацию таких систем. Мы используем переход к переменным типа Ковалевской и получаем каноническую форму квадратичных коммутирующих операторов. Мы получим полную классификацию коммутирующих гамильтонианов в смысле Пенлеве (см. выше). Обратный переход к гамильтониану заряженной частицы и к дополнительному интегралу осуществляется возвратом к оригинальным переменным.

Рассмотрим задачу о коммутирующих парах гамильтонианов, квадратичных по импульсам $\{H, K\} = 0$. Наиболее общий вид таких пар имеет вид:

$$\begin{aligned}
 H &= a_1(q_1, q_2)p_1^2 + 2b_1(q_1, q_2)p_1p_2 + c_1(q_1, q_2)p_2^2 + \\
 &\quad + d_1(q_1, q_2)p_1 + e_1(q_1, q_2)p_2 + f_1(q_1, q_2) \\
 K &= a_2(q_1, q_2)p_1^2 + 2b_2(q_1, q_2)p_1p_2 + c_2(q_1, q_2)p_2^2 + \\
 &\quad + d_2(q_1, q_2)p_1 + e_2(q_1, q_2)p_2 + f_2(q_1, q_2),
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

где $\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j}$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $i, j = 1, 2$.

Далее мы будем в основном следовать схемам Раздела 1.2. Мы рассмотрим гамильтониан и дополнительный интеграл в несколько иной форме, чем в Разделе 1.2, явно через векторный потенциал и потенциал, имея ввиду, в том числе, рассмотрение уравнения Шредингера в следующей главе. Пусть

$$H = \pi_1^2 \frac{S(x)}{(x-y)} - \pi_2^2 \frac{S(y)}{(x-y)} + \frac{U_1 - U_2}{(x-y)}, \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} K = & \pi_1^2 \frac{y S(x)}{(x-y)} - \pi_2^2 \frac{x S(y)}{(x-y)} \pi_2 - \\ & - 2 S(x) A_1 \pi_1 - 2 S(y) A_2 \pi_2 - \\ & - S(x) A_1^2 - S(y) A_2^2 + \frac{y U_1 - x U_2}{(x-y)}, \end{aligned} \quad (1.87)$$

где

$$\begin{aligned} \pi_1 = & P_1 - A_1, \quad \pi_2 = P_2 - A_2, \\ A_1 = & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{S(y)}}{\sqrt{S(x)}} \frac{Z_y}{x-y}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S(x)}}{\sqrt{S(y)}} \frac{Z_x}{x-y}, \end{aligned} \quad (1.88)$$

здесь $Z = Z(x, y)$ – функция двух переменных и

$$U_1 = \frac{1}{2} \sqrt{S(x)} \partial_x \left[\sqrt{S(x)} \frac{Z_x^2}{(x-y)} \right] + f(x), \quad (1.89)$$

$$U_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{S(y)} \partial_y \left[\sqrt{S(y)} \frac{Z_y^2}{(x-y)} \right] + f(y)$$

$$Q = \frac{U_1 - U_2}{x-y}, \quad (1.90)$$

тогда пара (1.86), (1.87) коммутирует тогда и только тогда, когда выполнены следующих два условия:

$$Z_{x,y} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)} \quad (1.91)$$

$$Z_x Q_y - Z_y Q_x = 0, \quad (1.92)$$

т.е. определяющие уравнения (1.91), (1.92) полностью совпадают с общим случаем Теоремы 1.2.

1.7.2 Классификация и примеры

Следуя схеме Раздела 1.2, получим несколько обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $g(x)$, $f(x)$, $S(x)$.

В следующем подразделе мы получим, что функция $S(x)$ является полиномом второй степени для случая, когда гамильтониан в начальных переменных имеет вид, соответствующий движению заряженной частицы в электромагнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом движения (подробнее см. ниже).

Находя функцию $f(x)$ из первого вышеупомянутого ОДУ и подставляя $f(x)$ в следующие уравнения, получаем

$$\hat{A}_2 \hat{B}(g(x)S(x)) = 0, \quad \hat{A}_3 \hat{B}(g(x)S(x)) = 0, \quad \hat{B} = \partial_x^4, \quad (1.93)$$

где \hat{A}_2 и \hat{A}_3 - дифференциальные операторы по производным по x второй и третьей степени соответственно, которые не зависят от $S(x)$ (!), а зависят, только от g и ее производных, вплоть до $g^{(VI)}$, а также от параметра δ . Мы не приводим явные выражения этих операторов ввиду их громоздкости.

Возможны два варианта :

1. $\hat{B}(g(x)S(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{P_3(x)}{S(x)}$, где $P_3(x)$ - произвольный полином третьей степени.
2. $\hat{B}(g(x)S(x)) = \psi(x) \Rightarrow \hat{A}_2 \psi = 0, \quad \hat{A}_3 \psi = 0.$

В этом случае последовательно найдем из последних двух уравнений ψ_{xxx} , ψ_{xx} , ψ_x . Рассмотрим тождество $\partial_x \psi_x = \psi_{xx}$. Подставив производные ψ , получим в качестве условия совместности уравнение вида:

$$g^{(6)} = F(g^{(5)}, g^{(4)}, g^{(3)}, g^{(2)}, g', g, \delta), \quad (1.94)$$

где F - рациональная функция от всех аргументов.

Применим к этому уравнению тест Пенлеве, т.е. будем искать регулярные особенности функции $g(x)$. Ответ состоит в том, что уравнение (1.94) допускает только два изолированных решения:

$$g(t) = -\frac{\delta}{8(t - \mu)} \quad (1.95)$$

или

$$g(t) = -\frac{\delta}{4(t - \mu)}, \quad (1.96)$$

а также решение $g(t) = 0$.

Подставляя полученные решения в уравнение (1.16), видим, что оно выполняется, т.е. все интегрируемые случаи в смысле Пенлеве найдены.

Для восстановления точной функции (а не ряда) $Z(x, y)$ заметим, что если $g(x)$ - полином, то ряд (1.24) обрывается, и $Z(x, y)$ - полином от x и y , например $g(x) = 1 \Rightarrow Z(x, y) = (x - y)^2$, $g(x) = x \Rightarrow Z(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x - y)^2$, в случае, если

$$g(x) = \frac{-q}{8(x - \mu)} \Rightarrow \quad (1.97)$$

$$Z(x, y) = (\delta - \frac{1}{2}q)(x + y) + q\sqrt{x - \mu}\sqrt{y - \mu}.$$

Без потери общности выберем полином второй степени S в виде $S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)$.

Теорема 1.14. *Если функция S является полиномом второй степени, то все пары коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов канонического вида (1.11) принадлежат к одному из нижеперечисленных случаев:*

1. *Общий случай*
2. *Случай типа Шоттки-Манакова*
3. *Случай типа Стеклова*
4. *Корневой случай*

Все эти случаи описаны ниже

Итак, первый случай, когда $g(x) = \frac{P_3(x)}{S(x)}$ разрешается, и мы имеем (с точностью до сдвига)

Общий случай

$$Z(x, y) = (\delta - \frac{1}{2}(q_1 + q_2))(x + y) + q_m(x - y)^2(x + y) \quad (1.98)$$

$$+ q_1\sqrt{x - x_1}\sqrt{y - x_1} + q_2\sqrt{x - x_2}\sqrt{y - x_2}, \quad S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2),$$

$$f(x) = -\frac{x_1 - x_2}{4} \left[\frac{q_1^2}{x - x_1} - \frac{q_2^2}{x - x_2} \right] - 16q_m^2 x^2 S(x) - 16q_m x^2 (\delta - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)).$$

Следуя схеме Раздела 1.4, получаем

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, \xi) = & -\left(\delta - \frac{q_1}{2} - \frac{q_2}{2}\right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{y-\xi}}{\sqrt{x-\xi}}\right) - \\ & - \frac{q_1}{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{x-x_1}\sqrt{y-\xi}}{\sqrt{y-x_1}\sqrt{x-\xi}}\right) - \frac{q_2}{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{x-x_2}\sqrt{y-\xi}}{\sqrt{y-x_2}\sqrt{x-\xi}}\right) + \\ & + q_m(x+y+2\xi)\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\xi}, \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} Y = & \frac{1}{4\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\xi}} \left((2\delta - q_1 - q_2) + q_1 \frac{\sqrt{x-x_1}\sqrt{y-x_1}}{\xi-x_1} + \right. \\ & \left. + q_2 \frac{\sqrt{x-x_2}\sqrt{y-x_2}}{\xi-x_2} \right) - 2q_m((x-y)^2 + 4(x+y)\xi - 8\xi^2). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Используя (1.30), мы вычисляем соответствующую алгебраическую кривую рода 2:

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)(S(\xi)Y^2 + f(\xi) - h\xi + k) = 0. \quad (1.101)$$

Во втором случае изолированных решений (1.95) и (1.96) имеем

$$Z = (x+y)\delta, \quad Z = \left(\frac{1}{2}(x+y) + \sqrt{x}\sqrt{y}\right)\delta, \quad Z = 2\sqrt{x}\sqrt{y}\delta.$$

Формально при соответствующем выборе констант три последних случая являются подслучаями общего решения (1.98), однако функции $f(x)$ не являются пределами общего случая (1.98) и должны быть рассмотрены отдельно:

Случай типа Шоттки-Манакова

$$Z(x, y) = (x+y)\delta, \quad S(x) = 4(x-x_1)(x-x_2), \quad (1.102)$$

$$f(x) = f_2x^2.$$

Следуя схеме Раздела 1.4, получаем

$$\sigma(x, y, \xi) = -\delta \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{y-\xi}}{\sqrt{x-\xi}}\right), \quad Y = \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma = \frac{\delta}{2} \frac{1}{\sqrt{x-\xi}\sqrt{\xi-y}}. \quad (1.103)$$

Используя (1.30), мы вычисляем соответствующую алгебраическую кривую рода 3:

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)Y^4 + (f(\xi) - h\xi + k)Y^2 - \frac{f_2\delta^2}{4} = 0. \quad (1.104)$$

Введем новую переменную

$$\eta = \frac{\delta^2}{4Y^2} - \xi^2 = -(x+y)\xi + xy. \quad (1.105)$$

Последнее равенство означает, что пары точек $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

Кубика

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta) = f_2\eta^2 + (f_2\xi^2 + h\xi - k)\eta - \delta^2(\xi - x_1)(\xi - x_2) - k\xi^2 + h\xi^3.$$

Случай типа Стеклова

$$Z(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x + y) + \sqrt{x}\sqrt{y}\right)\delta, \quad S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2), \quad (1.106)$$

$$f(x) = f_q\sqrt{x} + x_1\frac{\delta^2}{4x}, \quad x_2 = 0.$$

Следуя схеме Раздела 1.4, получаем

$$\sigma(x, y, \xi) = -\frac{\delta}{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{y - \xi}}{\sqrt{x - \xi}}\right) - \frac{\delta}{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{y - \xi}}{\sqrt{y}\sqrt{x - \xi}}\right), \quad (1.107)$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma = \frac{\delta}{4\xi} \frac{\xi + \sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x - \xi}\sqrt{\xi - y}}.$$

Используя (1.30), мы вычисляем соответствующую алгебраическую кривую рода 2:

$$\phi(\xi, Y) \cong (\xi(S(\xi)Y^2 - h\xi + k) + \frac{\delta^2}{4}x_1)^2(Y^2\xi^2 - \frac{\delta^2}{16}) - f_q^2\xi^5Y^2 = 0. \quad (1.108)$$

Введем новую переменную

$$\eta = \frac{4Y\xi^{3/2}}{\sqrt{16Y^2\xi^2 - \delta^2}} = \frac{\xi + \sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}. \quad (1.109)$$

Последнее равенство означает, что пары точек $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

Кубика

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta) = (4k - 4h\xi + \delta^2)\eta^2 + 4h\xi^2 - 4k\xi - \delta^2x_1 \pm 4f_q\eta(\eta^2 - \xi).$$

Знак \pm в этой формуле обусловлен выбором ветви в формуле (1.109).

Корневой случай

$$Z(x, y) = 2\sqrt{x}\sqrt{y}\delta, \quad S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2), \quad (1.110)$$

$$f(x) = \frac{f_m}{x} - 2x_1x_2\frac{\delta^2}{x^2}.$$

Следуя схеме Раздела 1.4, получаем

$$\sigma(x, y, \xi) = -\delta \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{y-\xi}}{\sqrt{y}\sqrt{x-\xi}}\right), \quad Y = \frac{\partial}{\partial \xi}\sigma = \frac{\delta}{2} \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x-\xi}\sqrt{\xi-y}}. \quad (1.111)$$

Используя (1.30), мы вычисляем соответствующую алгебраическую кривую рода 3:

$$\phi(\xi, Y) \cong \xi^4 Y^2 (S(\xi) Y^2 + (f(\xi) - h\xi + k)) + \frac{\delta^2}{4} ((x_1 x_2 + (x_1 + x_2)\xi)\delta^2 - f_m \xi) = 0. \quad (1.112)$$

Введем новую переменную

$$\eta = \frac{1}{\xi} - \frac{\delta^2}{4\xi^3 Y^2} = \frac{y + x - \xi}{xy}. \quad (1.113)$$

Последнее равенство означает, что пары точек (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) лежат на одной прямой.

Кубика

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta) = (f_m \xi - \delta^2(x_1 x_2 + (x_1 + x_2)\xi))\eta^2 + (-h\xi^2 + k\xi - f_m + 2(x_1 + x_2)\delta^2)\eta - \delta^2 - k + h\xi.$$

В следующем разделе мы покажем, почему в данной физической задаче $S(x)$ - полином второй степени, опишем переход к физическим координатам и приведем ряд примеров.

1.7.3 Переход к физическим координатам. Примеры.

Перепишем гамильтониан H движения заряженной частицы в электромагнитном поле в более привычной форме

$$H = \tilde{\pi}_1^2 + \tilde{\pi}_2^2 + u(q_1, q_2), \quad (1.114)$$

где

$$\tilde{\pi}_1 = p_1 - \mathcal{A}_1(q_1, q_2), \quad \tilde{\pi}_2 = p_2 - \mathcal{A}_2(q_1, q_2),$$

а значит $a_1(q_1, q_2) = 1$, $b_1(q_1, q_2) = 0$, $c_1(q_1, q_2) = 1$ в (1.85).

Можно выбрать дополнительный интеграл, коммутирующий с H в виде

$$K = a_2(q_1, q_2)\tilde{\pi}_1^2 + 2b_2(q_1, q_2)\tilde{\pi}_1\tilde{\pi}_2 + c_2(q_1, q_2)\tilde{\pi}_2^2 + w_1(q_1, q_2)\tilde{\pi}_1 + w_2(q_1, q_2)\tilde{\pi}_2 + U(q_1, q_2), \quad (1.115)$$

тогда условие $\{H, K\} = 0$ для старших по импульсам членам приводит к следующему выражению для старших коэффициентов (с точностью до сдвига переменных q_1, q_2 и умножения K на число) дополнительного интеграла K :

$$a_2(q_1, q_2) = q_2^2 + \mu^2, \quad b_2(q_1, q_2) = -q_1q_2 + \kappa, \quad (1.116)$$

$$c_2(q_1, q_2) = q_1^2 + \nu^2.$$

Кроме того, поскольку все коэффициенты a_i, b_i, c_i известны, вычислим функцию $S(s)$ по формуле (1.20), получая в результате

$$S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1 = \mu^2 + \lambda^2, \quad x_2 = \nu^2 - \lambda^2, \quad (1.117)$$

где параметр λ определяется условием

$$\kappa^2 = \lambda^2(\mu^2 - \nu^2 + \lambda^2),$$

т.е. функция S во всех случаях является полиномом второй степени, более того, корни этого полинома параметризованы целым образом.

Дальнейшая процедура состоит в следующем:

1. Вычислим функции $s_1(q_1, q_2)$ и $s_2(q_1, q_2)$ из уравнения (1.10).
2. Выберем какой-либо набор функций $Z(x, y)$, $S(x)$, $f(x)$ из (1.98), (1.106) или (1.110).
3. Вычисляем все коэффициенты в выражениях для H и K (1.86) и (1.87) соответственно с помощью формул (1.88) и (1.89).
4. Обратим формулу (1.17), получая

$$P_1 = -\Phi_{s_1}^1 \frac{(\Phi_{q_2}^2 p_1 - \Phi_{q_1}^2 p_2)}{\Phi_{q_1}^1 \Phi_{q_2}^2 - \Phi_{q_2}^1 \Phi_{q_1}^2}, \quad (1.118)$$

$$P_2 = \Phi_{s_2}^2 \frac{(\Phi_{q_2}^1 p_1 - \Phi_{q_1}^1 p_2)}{\Phi_{q_1}^1 \Phi_{q_2}^2 - \Phi_{q_2}^1 \Phi_{q_1}^2}.$$

5. Подставляем выражения для импульсов P_1, P_2 в вычисленные H и K , делаем замены

$$s_1 \rightarrow s_1(q_1, q_2), \quad s_2 \rightarrow s_2(q_1, q_2), \quad x \rightarrow s_1(q_1, q_2), \quad y \rightarrow s_2(q_1, q_2),$$

получая коммутирующую пару $H(p_1, p_2, q_1, q_2)$, $K(p_1, p_2, q_1, q_2)$, которую можно привести к физическому виду (1.114) (1.115).

Хотя описанная выше процедура является прямой, тем не менее, представляет довольно нетривиальную алгебраическую задачу преобразования выражений, содержащих корни от полиномов (и даже корни от полиномов плюс корни от других полиномов) к рациональному виду (как правило). Однако в каждом конкретном случае задача может быть доведена до конца, при этом коэффициенты $F_i(q_1, q_2)$ при различных степенях импульсов представляют из себя очень громоздкие выражения, что можно понять, подсчитав число параметров. А именно, общий случай (1.98) содержит 4 параметра, переход к физическим переменным - еще 3 параметра плюс сами независимые переменные q_1, q_2 , т.е. коэффициенты $F_i(q_1, q_2)$ зависят на самом деле от 9 переменных.

Поэтому начнем с изолированных решений (1.110) и (1.106). Отметим, что в случае (1.110) магнитное поле ведет себя как $B \sim \frac{1}{r^3}$, а потенциал $u \sim \frac{1}{r^2}$ при $r \rightarrow \infty$.

Примеры становятся менее громоздкими при редукции $\lambda = \nu \Rightarrow \kappa = \mu\nu$, $x_2 = 0$, $x_1 = \mu^2 + \nu^2$.

Случай Стеклова (1.106) при этой редукции оказывается тривиальным $H = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{\sqrt{(x-\mu)^2+(y+\nu)^2}}$ и при сдвиге координат легко интегрируется в полярных координатах.

Рассмотрим еще подслучай общего случая (1.98): $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. В этом примере $i q_m \rightarrow q_m$, $i\delta \rightarrow \delta$

$$\mathcal{A}_1(q_1, q_2) = \frac{q_m}{2}(3y\mu^2 - 2\mu\nu x + 3y^3 + 3x^2y + \nu^2y),$$

$$\mathcal{A}_2(q_1, q_2) = \frac{q_m}{2}(x\mu^2 - 2\mu\nu y + 3xy^2 + 3x\nu^2 + 3x^3),$$

$$u = -2q_m^2((x - \mu)^2 + (y - \nu)^2)(x^2 + y^2 + \mu^2 + \nu^2)((x + \mu)^2 + (y + \nu)^2) + 4q_m\delta(\mu^2 + \nu^2 - x^2 - y^2).$$

Магнитное поле $B = 2q_m(3(x^2 + y^2) + \mu^2 + \nu^2)$, а дополнительный интеграл можно восстановить.

В этом подразделе мы получили полную классификацию квазиштеккелевых гамильтонианов (т.е. функций H, K вида (1.86), (1.87)) в случае, когда функция $S(x)$ - полином второй степени, который после преобразования к исходным переменным q_1, q_2 описывает движение заряженной частицы в электромагнитном поле.

1.8 Квазиштеккелевы гамильтонианы с 3-мя степенями свободы

В этом разделе будет рассмотрено 3-х мерное обобщение квазиштеккелевых гамильтонианов. Будет проведена их полная классификация, которая приведет к двум семействам - симметричному и несимметричному - для этих гамильтонианов. Также будут получены системы гидродинамического типа из этих систем, которые являются 3-х мерными обобщениями систем Гиббонса - Царева.

1.8.1 Каноническая форма квазиштеккелевых гамильтонианов с тремя степенями свободы

Квазиштеккелевы с двумя степенями свободы рассматривались ранее.

Квазиштеккелевы гамильтонианы в форме Бененти в случае n - степеней свободы могут быть определены следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_i^k h_{n-1-k} = S(q_i) p_i^2 + \sum_{j=1}^n z_{i,j}(\vec{q}) p_j + u_i(\vec{q}). \quad (1.119)$$

Аналогично штеккелеву случаю могут быть получены производящие функции $h(\alpha)$

$$h(\alpha) = \sum_{k=1}^n \left(S(q_k) p_k^2 + \sum_{i=1}^n z_{k,i}(\vec{q}) p_i + u_k(\vec{q}) \right) \prod_{j \neq k} \frac{\alpha - q_j}{q_k - q_j}. \quad (1.120)$$

Для того чтобы выделить интегрируемые случаи, нужно найти гамильтонианы h_i как коэффициенты производящей функции $h(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \alpha^{n-k-1}$, вычислить коммутаторы и приравнять их нулю:

$$\{h_i, h_j\} = 0, \quad i, j = 0, \dots, n-1. \quad (1.121)$$

В отличие от штеккелевых гамильтонианов, коммутаторы не равны нулю автоматически, и, чтобы получить полную классификацию, нужно найти функции $S, z_{i,j}, u_i$ из системы $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений квадратичных по импульсам. Это трудная задача для случая $n > 3$, поэтому только случай $n = 3$ будет рассмотрен в этом Разделе.

Во-первых, надо решить уравнения, которые зануляют квадратичные по импульсам члены. Процедура при этом прямая, хотя вычисления довольно громоздкие и приводят к следующему Утверждению:

Утверждение 1.15. *Если семейство (1.120) коммутативно, тогда коэффициенты z_{ij} имеют следующий вид*

$$z_{ij} = \Delta_{ij} \frac{\sqrt{S(q_i)}\sqrt{S(q_j)}}{q_i - q_j}, \quad z_{ii} = 0, \quad (1.122)$$

где Δ_{ij} - произвольные константы.

Отметим, что диагональные коэффициенты могут иметь следующий вид $z_{ii} = S(q_i) \frac{\partial}{\partial q_i} F(\vec{q})$, однако можно положить $z_{ii} = 0$, используя каноническое преобразование $p_i \rightarrow p_i - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} F(\vec{q})$.

Анализ оставшихся уравнений приводит к двум возможным случаям:.

1. Симметричный случай: $\Delta_{i,i} = 0$, $\Delta_{i \neq j} = -\delta$, $S(x) = a(x)^2$, где $a(x)$ - кубический полином.

2. Несимметричный случай: $\Delta_{2,3} = \Delta_{3,2} = -\delta$, а остальные $\Delta_{i,j} = 0$ (с точностью до перенумерации), а S - полином 6-ой степени.

Эти случаи описывают все возможные квазиштеккелевы системы с 3-мя степенями свободы.

Подчеркнем, что динамика квазиштеккелевых систем определяется гамильтонианами h_i . Далее мы рассмотрим эти два случая подробно.

1.8.2 Симметричный случай

Следующее Утверждение определяет весь симметричный случай:

Утверждение 1.16. *В симметричном случае семейство гамильтонианов имеет вид (1.120)*

$$h(\alpha) = \sum_{k=1}^3 \left(S(q_k) p_k^2 + \sum_{i=1}^3 z_{k,i}(\vec{q}) p_i + u_k(\vec{q}) \right) \prod_{j \neq k} \frac{\alpha - q_j}{q_k - q_j}, \quad \{h(\alpha), h(\beta)\} = 0, \quad (1.123)$$

где

$$S(x) = a^2(x), \quad z_{i,j}(\vec{q}) = -\delta \frac{a(q_i)a(q_j)}{q_i - q_j}, \quad i \neq j, \quad z_{i,i}(\vec{q}) = 0, \quad (1.124)$$

$$a(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$u_1(\vec{q}) = u(q_1, q_2, q_3), \quad u_2(\vec{q}) = u(q_2, q_3, q_1), \quad u_3(\vec{q}) = u(q_3, q_1, q_2)$$

u

$$u(x, y, z) = -\frac{\delta^2}{4} \left(3S(x) \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x-z)^2} \right) - S'(x) \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-z} \right) + \frac{1}{5} S''(x) \right).$$

Замечание 1.17. 1) Отметим, что потенциал $u(x, y, z)$ определен с точностью до квадратичного полинома $b(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$, который может быть исключен сдвигом $h_i \rightarrow h_i - b_i$.

2) В случае $a_3 = 0$, т.е. когда $a(x)$ - квадратичный полином, каноническое преобразование

$$p_i \rightarrow p_i + \frac{\partial}{\partial q_i} G(q_1, q_2, q_3), \quad G(x, y, z) = \frac{\delta}{2} \log((x-z)(x-y)(y-z))$$

позволяет исключить потенциал u полностью. В этом случае семейство гамильтонианов (1.123) имеет вид

$$h(\alpha) = \sum_{k=1}^3 \left(a^2(q_k) p_k^2 + a(q_k) \delta \sum_{i \neq k} \frac{a(q_k) p_k - a(q_i) p_i}{q_k - q_i} \right) \prod_{j \neq k} \frac{\alpha - q_j}{q_k - q_j}. \quad (1.125)$$

Используя соотношение $h(\alpha) = \sum_{k=0}^2 h_k \alpha^{2-k}$, получаем гамильтонианы h_0, h_1, h_2 в инволюции: $\{h_0, h_1\} = 0, \{h_1, h_2\} = 0, \{h_2, h_0\} = 0$, таким образом, система (1.125) интегрируема по Лиувиллю. Обсудим некоторые приложения этой системы к задачам гидродинамического типа. Для этого мы определим три времени (потока) t, τ, ξ , которые описывают полную эволюцию системы:

$$A_t = \{A, h_0\}, \quad A_\tau = \{A, h_1\}, \quad A_\xi = \{A, h_2\}. \quad (1.126)$$

Введем обозначения $I_1 = q_1 + q_2 + q_3, I_2 = q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1, I_3 = q_1q_2q_3$.

Нетрудно показать вычислением выражений $\frac{\partial h_1}{\partial p_k} + (I_1 - q_k) \frac{\partial h_0}{\partial p_k}$, что каждое решение (1.126) удовлетворяет системе гидродинамического типа.

$$q_{k,\tau} + (I_1 - q_k) q_{k,t} = \frac{\delta}{2} a''(q_k) a(q_k) - a^2(q_k) \delta \prod_{j \neq k} \frac{1}{q_k - q_j}, \quad I_{1,\tau} = -I_{2,t} \quad (1.127)$$

Аналогично, вычисление $\frac{\partial h_2}{\partial p_k} - \frac{I_3}{q_k} \frac{\partial h_0}{\partial p_k}$ приводит к другой системе гидродинамического типа.

$$q_{k,\xi} - \frac{I_3}{q_k} q_{k,t} = -a(q_k) \delta \sum_{(i,j,k)=(1,2,3)} \frac{a(q_i) q_j}{(q_i - q_k)(q_i - q_j)}, \quad I_{1,\xi} = I_{3,t}. \quad (1.128)$$

Система (1.127) – обобщение широко известной системы Гиббонса-Царева [49]. Системы, аналогичные (1.127,1.128), изучались в работе [42] и недавно в работе [117]. Обе эти системы можно обобщить на случай произвольной размерности.

На данный момент неизвестно разделение переменных для системы (1.125), и является ли она точнорешаемой в общем случае.

Однако будет показано, что в специальном симметричном случае $a(x) = 1$, рассматриваемая система интегрируема в квадратурах. В конце этого подраздела мы детально рассмотрим этот случай и получим его точное решение. Мы выписываем систему (1.119), где $a(x) = 1$ в ”разделенной форме” (в случае $\delta = 0$ переменные действительно разделяются, а сама система является штеккелевой):

$$q_k^2 h_0 + q_k h_1 + h_2 - p_k^2 - \delta \sum_{j \neq k} \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j} = 0, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (1.129)$$

Решая систему (1.129), линейную относительно h_k , обозначим $h_k = H_k + V_k \delta$, $k = 0, 1, 2$ и получим

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_k p_k^2 \prod_{j \neq k} \frac{1}{q_k - q_j}, & H_1 &= \sum_k p_k^2 (q_k - I_1) \prod_{j \neq k} \frac{1}{q_k - q_j}, \\ H_2 &= \sum_k p_k^2 \prod_{j \neq k} \frac{q_j}{q_k - q_j}, \end{aligned} \quad (1.130)$$

$$V_0 = 0, \quad V_1 = \sum_k p_k \prod_{j \neq k} \frac{1}{q_k - q_j}, \quad V_2 = \sum_k p_k (2q_k - I_1) \prod_{j \neq k} \frac{1}{q_k - q_j}. \quad (1.131)$$

Введем еще две функции

$$V_3 = \sum_k p_k (I_1^2 - 2I_2 - 2q_k^2) \prod_{j \neq k} \frac{1}{q_k - q_j}, \quad V_4 = \sum_k p_k, \quad (1.132)$$

получаем алгебру Пуассона с 7-ю генераторами $H_0, H_1, H_2, V_1, V_2, V_3, V_4$:

$$\begin{aligned} \{H_0, H_1\} &= 0, & \{H_1, H_2\} &= 0, & \{H_2, H_0\} &= 0, \\ \{H_0, V_1\} &= 0, & \{H_0, V_2\} &= 0, & \{H_0, V_3\} &= 0, & \{H_0, V_4\} &= 0, \\ \{V_1, V_2\} &= 0, & \{V_1, V_3\} &= 0, & \{V_1, V_4\} &= 0, \\ \{V_2, V_3\} &= 2V_1, & \{V_2, V_4\} &= V_1, & \{V_3, V_4\} &= 2V_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{H_1, V_1\} &= -V_1^2, \quad \{H_1, V_2\} = -V_1V_2, \quad \{H_1, V_3\} = -V_2^2, \quad \{H_1, V_4\} = 2H_0, \\ \{H_2, V_1\} &= \{H_1, V_2\}, \quad \{H_2, V_2\} = -V_1V_3, \\ \{H_2, V_3\} &= -V_2(V_3 + 2V_4) - 2H_1, \quad \{H_2, V_4\} = H_1.\end{aligned}$$

Основной причиной того, что в этом случае система просто интегрируется в квадратурах, является не только интегрируемость по Лиувиллю, но и тот факт, что выполняются следующие соотношения $\{h_0, V_i\} = 0$, $i = 1, \dots, 4$. Это позволяет ввести обозначения $V_i = v_i(\tau, \xi)$ и найти импульсы p_1, p_2, p_3 из линейной системы $V_1 = v_1(\tau, \xi)$, $V_2 = v_2(\tau, \xi)$, $V_4 = v_4(\tau, \xi)$. Тогда переменные q_i находятся с помощью первых уравнений Гамильтона:

$$q_{i,t_\alpha} = \frac{\partial h_\alpha}{\partial p_i}$$

после подстановки вычисленных ранее импульсов. Для того чтобы найти функции q_i , удобно рассмотреть следующую систему

$$\frac{\partial I_j}{\partial t_\beta} = \{I_j, H_\beta\}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \beta = 0, 1, 2, \quad t_{\beta=0} = t, \quad t_{\beta=1} = \tau, \quad t_{\beta=2} = \xi. \quad (1.133)$$

Сначала находится t -динамика симметрических функций I_k :

$$\begin{aligned}I_1 &= -2v_1(\tau, \xi)t + c_1(\tau, \xi), \\ I_2 &= -v_1(\tau, \xi)(-v_1(\tau, \xi)t^2 + c_1(\tau, \xi)t) + v_2(\tau, \xi)t + c_2(\tau, \xi), \\ I_3 &= -\frac{1}{18}c_1(\tau, \xi)^3 - v_1(\tau, \xi)v_2(\tau, \xi)t^2 + v_2(\tau, \xi)c_1(\tau, \xi)t + v_3(\tau, \xi)t + c_3(\tau, \xi).\end{aligned} \quad (1.134)$$

Затем шаг за шагом восстанавливается τ - и ξ -зависимость с использованием дополнительных тождеств:

$$V_3 = v_3(\tau, \xi), \quad h_i = \tilde{h}_i,$$

где \tilde{h}_i значения гамильтонианов h_i .

Наконец, мы получаем общее решение квазиштеккелевой системы, как корни кубического уравнения:

$$(q - q_1)(q - q_2)(q - q_3) = q^3 - I_1q^2 + I_2q - I_3 = 0$$

с коэффициентами

$$I_1 = \frac{-2(t - t_0) + \lambda r}{\tau_0 - \tau} - \lambda\tau_1,$$

$$I_2 = \frac{(t - t_0 - \frac{1}{2}\lambda r)^2}{(\tau_0 - \tau)^2} - \frac{1}{4}\lambda^2(\tau_0 - \tau)^2 + \lambda^2\tau_2(\tau_0 - \tau) - \lambda^2\tau_1^2,$$

$$I_3 = \lambda\tau_1\left(\frac{t - t_0 - \frac{1}{2}\lambda r}{\tau_0 - \tau} + \tau_1\lambda\right)^2 - \lambda^2(t - t_0)\tau_2 + \frac{1}{2}\lambda^3 r\tau_2$$

$$-(\lambda^3\tau_1\tau_2 + \delta)(\tau_0 - \tau) - \frac{1}{4}\lambda^3(\tau_1 - 2\tau_3)(\tau_0 - \tau)^2,$$

при этом использованы обозначения

$$f(\lambda\xi) = C_1 + C_2\lambda\xi + C_3e^{-\lambda\xi} + C_4e^{\lambda\xi}, \quad \tau_0 = f(\lambda\xi),$$

$$\tau_1 = f'(\lambda\xi), \quad \tau_2 = f''(\lambda\xi), \quad \tau_3 = f'''(\lambda\xi),$$

$$r = \lambda\xi((\tau_1 - \tau_3)^2 + \tau_3^2 - \tau_2^2) + \tau_0(\tau_1 - \tau_3) + \tau_2(3\tau_1 - 2\tau_3),$$

$$h_0 = \frac{1}{4}\lambda^2, \quad h_1 = -\frac{1}{2}C_2\lambda^3, \quad h_2 = \lambda^4(C_3C_4 + \frac{1}{4}C_2^2).$$

Это решение зависит от полного набора констант интегрирования $t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, \lambda$.

1.8.3 Несимметричный случай

В этом случае мы получаем одномерную штеккелеву систему (напомним, мы считаем, что H_i - константы)

$$x^2H_0 + xH_1 + H_2 - S(x)p_1^2 = 0.$$

Функция Гамильтона-Якоби в этом случае имеет вид $\mathbf{S} = \int dx \sqrt{\frac{x^2H_0 + xH_1 + H_2}{S(x)}}$, а также, квазиштеккелеву систему с двумя степенями свободы

$$y^2H_0 + yH_1 + H_2 - S(y)p_2^2 - \delta \frac{\sqrt{S(y)}\sqrt{S(z)}}{y - z} p_3 + \frac{\delta^2}{4} \left(3 \frac{S(y)}{(y - z)^2} - \frac{S'(y)}{y - z} + \frac{1}{10} S''(y) \right) = 0,$$

$$z^2H_0 + zH_1 + H_2 - S(z)p_3^2 - \delta \frac{\sqrt{S(y)}\sqrt{S(z)}}{z - y} p_2 + \frac{\delta^2}{4} \left(3 \frac{S(z)}{(z - y)^2} - \frac{S'(z)}{z - y} + \frac{1}{10} S''(z) \right) = 0,$$

где S - полином 6-ой степени - см. случай 3 класса 2 раздела 1.5.

Подчеркнем, что гамильтонианы H_i , определяемые вышеупомянутыми системами, трехмерны, поскольку зависят от всех переменных $q_i, p_i, i = 1, \dots, 3$.

В данном Разделе получена полная классификация трехмерных квазиштеккелевых систем, а именно два семейства: симметричное и несимметричное.

Несимметричное семейство соответствует прямой сумме одномерного штеккелевого гамильтониана и двухкомпонентного квазиштеккелевого гамильтониана. Этот случай может быть проинтегрирован методами, полученными в этой Главе для двухкомпонентных квазиштеккелевых систем, а также простым интегрированием одномерной штеккелевой системы.

Что касается симметричного случая, то он представляет собой тройку квазиштеккелевых гамильтонианов в инволюции, зависящую от кубического полинома $a(x)$ и параметра δ . В случае, когда полином $a(x)$ является квадратичным, то с помощью канонического преобразования можно избавиться от потенциала. В случае $a(x) = 1$ получено общее решение симметричной трехмерной квазиштеккелевой системы в квадратурах. Вычисления становятся очень сложными в случае $n > 3$, и на данный момент едва ли можно рассчитывать на получение полной классификации даже в случае $n = 4$. С другой стороны, система (1.129) может быть прямо обобщена на случай $n > 3$. Первоначальные вычисления показывают, что в случае $n = 4$ мы получаем $\{h_i, h_j\} = 0$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, кроме соотношения $\{h_2, h_3\} \neq 0$. Это несколько неожиданно и говорит о том, что в этом случае нет интегрируемости по Лиувиллю.

Итак, в этой Главе мы ввели каноническую пару квазиштеккелевых гамильтонианов в двухкомпонентном случае (тройку гамильтонианов в 3-х компонентном случае), доказали теорему о приведении произвольной невырожденной пары коммутирующих гамильтонианов квадратичных по импульсам к канонической паре коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов. Был предложен метод "частичного" разделения переменных, а также универсальная схема вычисления функции Гамильтона–Якоби и алгебраической кривой, соответствующая динамике системы коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов. Установлена связь между рядом классических волчков и квазиштеккелевыми гамильтонианами.

Глава 2

Квантовые квазиштеккелевы гамильтонианы

2.1 Диагонализация квантовых квадратичных операторов

В этом Разделе будет изучаться преобразование двумерных квантовых операторов, квадратичных по операторам импульса с дополнительным интегралом к квазиштеккелеву виду. Доказывается теорема, аналогичная теореме 1.2 в классическом случае. Классификация в квантовом случае затруднительна в общем случае из-за квантовых поправок, поэтому мы сконцентрируемся на квазиштеккелевых гамильтонианах, соответствующих уравнению Шредингера в оригинальных координатах. Как и в классическом случае, где рассматривался пример движения частицы в электромагнитном поле, мы проведем классификацию квазиштеккелевых гамильтонианов. Ряд получившихся коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов будут преобразованы в уравнения Шредингера. Применяя редукцию параметров, мы получим два случая двумерных уравнений Шредингера в электромагнитном поле из класса "почти точно решаемых задач", т.е. таких, решение которых может быть сведено к алгебраическим уравнениям. Эти случаи будут поробно изучены в следующем Разделе. Уравнения такого типа рассматриваются впервые.

2.1.1 Пары коммутирующих квадратичных операторов

В данном Разделе мы перейдем к переменным типа Ковалевской и получим квазиштеккелеву каноническую форму квадратичных коммутирующих операторов.

Рассмотрим сначала общую задачу о коммутирующих парах квантовых операторов в электромагнитном поле, квадратичных по операторам импульса $[H, K] = 0$. В наиболее общем виде такие пары выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= a_1(q_1, q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_1(q_1, q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_1(q_1, q_2)\hat{p}_2^2 + \\ &+ d_1(q_1, q_2)\hat{p}_1 + e_1(q_1, q_2)\hat{p}_2 + f_1(q_1, q_2), \\ \hat{K} &= a_2(q_1, q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_2(q_1, q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_2(q_1, q_2)\hat{p}_2^2 + \\ &+ d_2(q_1, q_2)\hat{p}_1 + e_2(q_1, q_2)\hat{p}_2 + f_2(q_1, q_2),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\hat{p}_1 = -i\hbar\partial_{q_1}$, $\hat{p}_2 = -i\hbar\partial_{q_2}$. Мы удерживаем во всех формулах постоянную Планка \hbar для того, чтобы иметь возможность провести переход к классическому случаю, в том числе в применении к случаю движения заряженной частицы в электромагнитном поле и в некоторых случаях производить построение решений полученных уравнений по степеням \hbar .

Следует пояснить, почему выбрана такая схема решения поставленной задачи (промежуточный переход к квазиштеккелевым гамильтонианам). Дело в том, что прямое коммутирование операторов \hat{H} , \hat{K} и приравнивание коммутатора нулю приводит к необходимости решать целый набор уравнений в частных производных на функции, по крайней мере на $d_1, e_1, f_1, d_2, e_2, f_2$. Данная задача, по-видимому, решается крайне сложно напрямую, в то время как подход, применяемый в данном Разделе, позволяет преодолеть эту трудность.

Мы обобщим Теорему 1.2 на квантовый случай, используя гамильтониан и квадратичный интеграл в эрмитовой форме.

Диагонализуем одновременно пару H и K , т.е. оператор $K - sH$, где s —параметр [39]. Нетрудно видеть, что для этого должно быть выполнено уравнение на s :

$$\Phi(q_1, q_2, s) \equiv (b_2 - s b_1)^2 - (a_2 - s a_1)(c_2 - s c_1) = 0.\tag{2.2}$$

Решая квадратное уравнение (2.2), получаем в общем случае два корня $s_1(q_1, q_2), s_2(q_1, q_2)$. Мы будем называть систему (2.1) невырожденной, если якобиан $\frac{D(s_1, s_2)}{D(q_1, q_2)} \neq 0$.

Теорема 2.1. *Любая невырожденная система вида (2.1) может быть приведена заменой переменных $(q_1, q_2) \rightarrow (s_1, s_2)$ и калибровочным преобразованием $H \rightarrow g^{-1}H g$, $K \rightarrow g^{-1}K g$ к каноническому (квазиштеккелеву) виду (для упрощения мы делаем замену $s_1 = x$, $s_2 = y$) :*

$$H = \hat{\pi}_1 \frac{S_1(x)}{(x-y)} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 \frac{S_2(y)}{(x-y)} \hat{\pi}_2 + \frac{U_1 - U_2}{(x-y)}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} K &= \hat{\pi}_1 \frac{y S_1(x)}{(x-y)} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 \frac{x S_2(y)}{(x-y)} \hat{\pi}_2 - \\ &- S_1(x) A_1 \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1 S_1(x) A_1 - S_2(y) A_2 \hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_2 S_2(y) A_2 - \\ &- S_1(x) A_1^2 - S_2(y) A_2^2 + \frac{y U_1 - x U_2}{(x-y)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \pi_1 &= -i\hbar\partial_x - A_1, \quad \pi_2 = -i\hbar\partial_y - A_2, \\ A_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{S_2(y)}}{\sqrt{S_1(x)}} \frac{Z_y}{x-y}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S_1(x)}}{\sqrt{S_2(y)}} \frac{Z_x}{x-y}, \end{aligned}$$

здесь $Z = Z(x, y)$ — функция двух переменных и

$$U_1 = V_1 + \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} S_1''(x) + \frac{1}{16} \frac{(S_1'(x))^2}{S_1(x)} + \frac{1}{2} \frac{S_1'(x)}{x-y} - \frac{3}{4} \frac{S_1(x)}{(x-y)^2} \right],$$

$$U_2 = V_2 + \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} S_2''(y) + \frac{1}{16} \frac{(S_2'(y))^2}{S_2(y)} - \frac{1}{2} \frac{S_2'(y)}{x-y} - \frac{3}{4} \frac{S_2(y)}{(x-y)^2} \right],$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{S_1(x)} \partial_x \left[\sqrt{S_1(x)} \frac{Z_x^2}{(x-y)} \right] + f_1(x), \\ V_2 &= -\frac{1}{2} \sqrt{S_2(y)} \partial_y \left[\sqrt{S_2(y)} \frac{Z_y^2}{(x-y)} \right] + f_2(y). \end{aligned}$$

Введем еще функцию $Q = \frac{V_1^q - V_2^q}{x-y}$, где

$$V_1^q = V_1 + \hbar^2 \left[\frac{1}{8} \frac{S_1'(x)}{x-y} - \frac{5}{16} \frac{S_1(x)}{(x-y)^2} \right],$$

$$V_2^q = V_2 + \hbar^2 \left[-\frac{1}{8} \frac{S_2'(y)}{x-y} - \frac{5}{16} \frac{S_2(y)}{(x-y)^2} \right]$$

и функции R_1 и R_2

$$\begin{aligned} R_1 &= \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} \partial_x \frac{\sqrt{S_1(x)}}{x-y} \partial_x \frac{\sqrt{S_1(x)}}{x-y} \partial_x Z + \frac{3}{8} \partial_x \frac{S_1(x)}{(x-y)^3} \partial_x Z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{16} \frac{4S_1(x) - (x-y)S_1'(x)}{(x-y)^4} \partial_x Z \right], \end{aligned}$$

$$R_2 = \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} \partial_y \frac{\sqrt{S_2(y)}}{x-y} \partial_y \frac{\sqrt{S_2(y)}}{x-y} \partial_y Z - \frac{3}{8} \partial_y \frac{S_2(y)}{(x-y)^3} \partial_y Z + \right. \\ \left. + \frac{3}{16} \frac{4S_2(y) + (x-y)S_2'(y)}{(x-y)^4} \partial_y Z \right],$$

тогда пара (2.3), (2.4) коммутирует тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

$$Z_{x,y} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)}, \quad (2.5)$$

$$Z_x Q_y - Z_y Q_x + R_1 - R_2 = 0. \quad (2.6)$$

Доказательство этого утверждения состоит в прямом вычислении. Для начала заметим, что производные преобразуются следующим образом

$$(q_1, q_2) \rightarrow (s_1, s_2) : \quad (2.7)$$

$$\partial_{q_1} = -\left(\frac{\Phi_{q_1}^1}{\Phi_{s_1}^1} \partial_{s_1} + \frac{\Phi_{q_1}^2}{\Phi_{s_2}^2} \partial_{s_2} \right), \quad \partial_{q_2} = -\left(\frac{\Phi_{q_2}^1}{\Phi_{s_1}^1} \partial_{s_1} + \frac{\Phi_{q_2}^2}{\Phi_{s_2}^2} \partial_{s_2} \right),$$

где $\Phi^i = \Phi(s_i, q_1, q_2)$.

Нетрудно убедиться, что при таком преобразовании перекрестных членов вида $(\partial_{s_1} \partial_{s_2})$ в преобразованных операторах H, K нет, а главные (квадратичные) члены имеют вид как в (2.3), функции S_i можно вычислить по формуле (в которой переменные q_i нужно выразить через s_i)

$$S_i(s_i) = \frac{1}{(\Phi_{s_i}^i)^2} [(a_1 s_i - a_2)(\Phi_{q_1}^i)^2 + 2(b_1 s_i - b_2)\Phi_{q_1}^i \Phi_{q_2}^i + (c_1 s_i - c_2)(\Phi_{q_2}^i)^2]. \quad (2.8)$$

Линейные по производным члены можно привести к виду (2.3) выбором калибровки, остальные члены фиксируются так же, как и уравнения на функции $S_1(s_1), S_2(s_2), Z(s_1, s_2), f_1(s_1), f_2(s_2)$. Снова делаем замену $s_1 = x, s_2 = y$, - утверждение доказано. Конечно, функции $Z(x, y), f_1(x), f_2(y)$ можно выразить через коэффициенты начальной пары H, K (2.1), однако полученные выражения слишком громоздки и мало пригодны для явных вычислений, т.е. целесообразно проводить их отдельно в каждом конкретном случае. Однако сформулированное утверждение гарантирует возможность преобразования любой невырожденной пары к каноническому виду (2.3), (2.4), и в дальнейшем мы будем исследовать именно пары вида (2.3), (2.4).

Остановимся еще раз на терминологии: квазиштеккелевой (квантовой) системой мы называем пару (2.3),(2.4). Действительно, при переходе к классическому пределу мы получим классические квазиштеккелевы гамильтонианы, причем при условии $Z(x, y) = 0$ эти гамильтонианы переходят в хорошо известные штеккелевы гамильтонианы (заметим, что в этом случае векторные потенциалы, а значит, и магнитное поле, равны 0).

2.1.2 Переход к квазиштеккелевым гамильтонианам

Вернемся к гамильтонианам (2.1). Отметим, что в случае уравнения Шредингера

$$a_1(q_1, q_2) = 1, \quad b_1(q_1, q_2) = 0, \quad c_1(q_1, q_2) = 1.$$

Мы уже получали параметризацию коэффициентов перед старшими членами по импульсам в Разделе 1.7, однако повторим ее и в этом Разделе для ясности изложения. Коммутируя гамильтонианы (2.1) и следя за уравнениями при старших производных, получим, что с точностью до сдвигов и растяжений, главные коэффициенты K могут быть выбраны в виде:

$$a_2(q_1, q_2) = q_2^2 + \mu^2, \quad b_2(q_1, q_2) = -q_1q_2 + \kappa, \quad c_2 = q_1^2 + \nu^2. \quad (2.9)$$

Вычисляя S_i , получим, что в этом случае $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$

$$S(t) = 4(t - x_1)(t - x_2), \quad x_1 = \nu^2 - \lambda^2, \quad x_2 = \lambda^2 + \mu^2, \quad \kappa^2 = \lambda^2(\mu^2 - \nu^2 + \lambda^2). \quad (2.10)$$

Таким образом, в случае уравнения Шредингера функция $S(t)$ — квадратичный полином, а старшие коэффициенты K и корни этого полинома параметризованы как целые функции от трех параметров λ, μ, ν , за исключением коэффициента $b_2(q_1, q_2)$, в который входит дополнительный параметр κ , корневым образом зависящий от параметров λ, μ, ν .

Дальнейшая процедура состоит в следующем. При фиксированном полиноме $S(x)$ необходимо найти функцию от двух переменных $Z(x, y)$ и функцию одной переменной $f(x)$ (в нашем случае $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$), решая систему (2.5,2.6).

Пользуясь схемой подраздела 1.7.2 и частично повторяя выкладки, получаем уравнения на функцию g .

Оказывается, что первые два нетривиальных уравнения имеют вид:

$$B_2 \partial_x^4(g(x)S(x)) = 0, \quad B_3 \partial_x^4(g(x)S(x)) = 0, \quad (2.11)$$

где B_2, B_3 — дифференциальные операторы второго и третьего порядка, которые зависят только от g и ее производных, но не зависят от S , и в отличие от классического случая 1.7.2 зависят от постоянной Планка.

Возможны два варианта:

1. $\partial_x^4(g(x)S(x)) = 0 \iff g(x) = \frac{P_3(x)}{S(x)}$, где P_3 — произвольный полином 3-й степени.

2. Одновременно выполняются уравнения $B_2\psi(x) = 0$, $B_3\psi(x) = 0$.

Исключая последовательно ψ''', ψ'', ψ' , получим уравнение совместности на функцию g вида $g^{VI} = F(g^V, g^{IV}, g''', g'', g', g)$. Применяя к этому уравнению тест Пенлеве, получим (с точностью до сдвигов), что оно имеет только изолированные решения

$$g(t) = -\frac{1}{8} \frac{z}{t}, \quad z = 0, \delta, 2\delta, \pm i\hbar, 2\delta \pm i\hbar, \delta \pm \frac{1}{2}i\hbar$$

или $\delta = \pm \frac{7}{2}\hbar$.

По данной функции $g = -\frac{1}{8} \frac{z}{t}$ легко восстановить и функцию

$$Z(x, y) = (x + y)\left(\delta - \frac{z}{2}\right) + z\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Конечно, не все полученные решения с данным z являются решением (2.6), но достаточно подставить полученное выражение для Z в (2.6), найти f и проверить выполнение уравнения (2.6) точно (без разложения в ряд).

Рассмотрим подробнее эти случаи:

I. Решение с двумя корнями $S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)$

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= \left(\delta - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right)(x + y) + \frac{1}{2}z_m(x - y)^2(x + y) + z_c(x - y)^2 + \\ &+ z_1\sqrt{x - x_1}\sqrt{y - x_1} + z_2\sqrt{x - x_2}\sqrt{y - x_2}, \\ f(x) &= -4z_m^2x^2S(x) + 4z_mx^2(z_1 + z_2 - 2\delta) - \\ &- 16z_cx^2(2z_m(x - x_1 - x_2) + z_c) - \frac{z_1^2}{4} \frac{x_1 - x_2}{x - x_1} - \frac{z_2^2}{4} \frac{x_2 - x_1}{x - x_2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

II. Решение с одним корнем

$$Z(x, y) = (x + y)\left(\delta - \frac{z}{2}\right) + z\sqrt{x}\sqrt{y}, \quad S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2) \quad (2.13)$$

1. $z = 0$,

$$f(x) = f_2 x^2.$$

2. $z = \delta$, $x_1 = 0$

$$f(x) = f_m \sqrt{x} + \frac{\delta^2}{4x} x_2.$$

3. $z = \delta$, $\delta = \pm i\hbar$

$$f(x) = f_m \sqrt{x} + \hbar^2 \frac{x_1 x_2}{2x^2} - \frac{\hbar^2}{4x} (x_1 + x_2).$$

4. $z = 2\delta$,

$$f(x) = \frac{f_m}{x} - \frac{x_1 x_2}{4x^2} (3\hbar^2 + 8\delta^2).$$

5. $z = 2\delta \pm i\hbar$,

$$f(x) = -(2\delta \pm i\hbar)^2 \left(\frac{x_1 x_2}{2x^2} - \frac{x_1 + x_2}{4x} \right).$$

Остальные решения, получаемые из возможных вариантов решения теста Пенлеве, являются частными решениями вышеперечисленных.

2.1.3 Переход к уравнению Шредингера. Примеры

Рассмотрим оператор Шредингера в магнитном поле

$$H = \tilde{\pi}_1^2 + \tilde{\pi}_2^2 + u(q_1, q_2), \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{\pi}_1 = -i\hbar \partial_{q_1} - \mathcal{A}_1(q_1, q_2), \quad \tilde{\pi}_2 = -i\hbar \partial_{q_2} - \mathcal{A}_2(q_1, q_2).$$

Дополнительный эрмитов интеграл K , коммутирующий с H , имеет вид

$$K = \tilde{\pi}_1 a_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_1 b_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_2 b_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 c_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_2 + w_1(q_1, q_2) \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_1 w_1(q_1, q_2) + w_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_2 w_2(q_1, q_2) + U(q_1, q_2). \quad (2.15)$$

Эта пара является канонической формой пары (2.1), переписанной через операторы скорости. Для того, чтобы перейти от квазиштеккелевой системы (2.3), (2.4) к паре (2.14), (2.15), необходимо обратить производные и сделать замену переменных. В явном виде это выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{W_x^1}{J} \left(\Phi_{q_2}^2 \frac{\partial}{\partial q_1} - \Phi_{q_1}^2 \frac{\partial}{\partial q_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\Phi_y^2}{J} \left(\Phi_{q_2}^1 \frac{\partial}{\partial q_1} - \Phi_{q_1}^1 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=s_1, y=s_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x=s_1, y=s_2},$$

где $J = \Phi_{q_1}^1 \Phi_{q_2}^2 - \Phi_{q_2}^1 \Phi_{q_1}^2$, при этом $\Phi^1 = \Phi(q_1, q_2, x)$, $\Phi^2 = \Phi(q_1, q_2, y)$, а нижние индексы обозначают производные по соответствующим переменным.

Для упрощения вычислений, используя параметризацию (2.9) и введя элемент Q , можно записать корни s_1, s_2 уравнения (2.2) в виде

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + \mu^2 + \nu^2 \pm Q),$$

делая замену $Q \rightarrow Q(q_1, q_2)$, где

$$Q(q_1, q_2) = (q_2^4 + 2q_2^2\mu^2 + 2q_1^2q_2^2 - 2q_2^2\nu^2 + \mu^4 - 2\mu^2q_1^2 + 2\mu^2\nu^2 + \\ + q_1^4 + 2q_1^2\nu^2 + \nu^4 - 8q_1q_2\mu\nu)^{\frac{1}{2}},$$

после упрощений. Например, замену производных можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = -\frac{1}{4} \frac{2q_1\kappa + q_2\nu^2 - q_1^2q_2 - q_2^3 - q_2\mu^2 + q_2Q}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_1} + \\ + \frac{1}{4} \frac{2q_2\kappa + \mu^2q_1 - q_1q_2^2 - q_1^3 - \nu^2q_1 + q_1Q}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial Q}, \\ \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{4} \frac{q_1^2q_2 - 2q_1\kappa - q_2\nu^2 + q_2^3 + q_2\mu^2 + q_2Q}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_1} - \\ - \frac{1}{4} \frac{q_1q_2^2 - 2q_2\kappa - \mu^2q_1 + q_1^3 + \nu^2q_1 + q_1Q}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial Q}.$$

Дальнейшая процедура является чисто технической и заключается в замене производных, окончательной замене переменных $(s_1, s_2) \rightarrow (q_1, q_2)$ в паре (2.3), (2.4), приводя получившееся выражение к каноническому виду (2.14), (2.15).

Следует отметить, что процедура позволяет получить все двумерные уравнения Шредингера (невырожденные в смысле п.1), однако получающиеся выражения чрезвычайно громоздки, поэтому в данном Разделе мы приведем лишь несколько примеров.

Попытка найти все пары вида (2.1), непосредственно коммутируя их, приводит к тому, что при фиксированных коэффициентах $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1$ (уравнение Шредингера) можно определить старшие коэффициенты дополнительного интеграла K (2.9). Остальные коэффициенты H, K определяются дифференциальными уравнениями с частными производными, которые не решаются в общем виде. Поэтому необходимо найти все коммутирующие пары

квазиштеккелевых систем (2.3), (2.4) и провести замену переменных $(s_1, s_2) \rightarrow (q_1, q_2)$, получая полную классификацию уравнений Шредингера в электромагнитном поле с дополнительным (квадратичным) интегралом движения.

Остаются вопросы о разделении переменных в рассматриваемых системах в общем случае. Возможно, что для этого необходимо решать квазиштеккелевы квантовые уравнения $H\psi = \lambda\psi$, $K\psi = \mu\psi$, а затем проводить замену переменных. Следует отметить, что штеккелевы квантовые системы позволяют просто найти разделение переменных и проинтегрировать их. В общем (квазиштеккелевом) виде может помочь квазиклассическое разложение.

Однако, в частных случаях, применяя редукцию параметров, можно проинтегрировать соответствующие уравнения Шредингера. Приведем два таких примера.

а) В случае параметризации μ, ν , а $\lambda = 0$ вычисления дают, что системы II 1-5 приводят к тривиальным системам с уже разделенными переменными и легко интегрируются. Поэтому рассмотрим пример I с максимально возможным числом параметров - единственное ограничение - $z_2 = 0$.

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= -i\delta\left(\frac{1}{2}(x+y) + \sqrt{x}\sqrt{y}\right) + (x-y)^2\left(\frac{1}{2}q_m(x+y) + q_c\right), \\ S(x) &= 4x(x - (\mu^2 + \nu^2)), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$f(x) = 16q_m^2x^3(x - \mu^2 - \nu^2) + 4q_mx^2\delta + 16q_cx^2(2q_m(x - \mu^2 - \nu^2) + q_c) - \frac{1}{4}(\mu^2 + \nu^2)\frac{\delta^2}{x},$$

тогда

$$\mathcal{A}_1(x, y) = -\frac{1}{2}q_m(\nu^2y - 2x\nu\mu + 3y\mu^2 + 3x^2y + 3y^3) - 2q_cy,$$

$$\mathcal{A}_2(x, y) = \frac{1}{2}q_m(3\nu^2x + 3x^3 + \mu^2x - 2\mu\nu y + 3y^2x) + 2q_cx,$$

$$B(x, y) = 2q_m(3(x^2 + y^2) + \mu^2 + \nu^2) + 4q_c$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2(-q_m^2(y^2 + \mu^2 + x^2 + \nu^2) - 2q_mq_c)(\nu^2 + \mu^2 - 2\mu x + x^2 - 2y\nu + y^2) \times \\ &\times (\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x + x^2 + 2y\nu + y^2) - q_m\delta(-2\mu^2 - 2\nu^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4y\nu + 4\mu x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= -\frac{1}{2}q_m(3\mu^4y - 4\mu^3\nu x + 2\mu^2\nu^2y + 2\mu^2x^2y + 6\mu^2y^3 - 4\mu\nu^3x - 4\mu\nu x^3 - \\ &- 12\mu\nu xy^2 - \nu^4y + 2\nu^2x^2y - 2\nu^2y^3 + 3x^4y + 6x^2y^3 + 3y^5) - \\ &- 2q_c(y\mu^2 - 2x\nu\mu - \nu^2y + x^2y + y^3) - \frac{1}{2}\delta(y + \nu), \end{aligned}$$

$$v_2(x, y) = -\frac{1}{2}q_m(\mu^4x + 4\mu^3\nu y - 2\mu^2\nu^2x + 2\mu^2x^3 - 2\mu^2xy^2 + 4\mu\nu^3y + \\ + 12\mu\nu x^2y + 4\mu\nu y^3 - 3\nu^4x - 6\nu^2x^3 - 2\nu^2xy^2 - 3x^5 - 6x^3y^2 - 3xy^4) - \\ - 2q_c(\mu^2x + 2\mu\nu y - \nu^2x - x^3 - y^2x) + \frac{1}{2}(x + \mu)\delta,$$

$$U(x, y) = \left(\frac{1}{4}q_m^2(\nu^4 + 10x^2\nu^2 + 6y^2\nu^2 + 2\mu^2\nu^2 - 8\nu xy\mu + 9x^4 + 9y^4 + \mu^4 + 18x^2y^2 + \\ + 10y^2\mu^2 + 6\mu^2x^2) + 4q_c^2 + 2q_cq_m(\nu^2 + \mu^2 + 3(x^2 + y^2))\right)(\nu^2 + \mu^2 - 2\mu x + x^2 - 2y\nu + y^2) \times \\ \times (\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x + x^2 + 2y\nu + y^2) - \frac{1}{2}q_m\delta(\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x - 3x^2 + 2y\nu - 3y^2) \times \\ \times (\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x + x^2 + 2y\nu + y^2) - q_c\delta(-2y^2 - 2x^2 - 4y\nu - 4\mu x + 2\mu^2 + 2\nu^2).$$

б) В случае полной λ, μ, ν параметризации наиболее компактным является чисто корневой случай - приведем его здесь в параметризации с вещественной структурой. Мы приводим сначала выбранные функции квазиштеккелевых гамильтонианов, затем выписываем все неизвестные функции уравнения Шредингера и дополнительного интеграла (в физических переменных - векторный и скалярный потенциал, магнитное поле и параметры дополнительного интеграла):

$$Z(x, y) = 2i\delta\sqrt{x}\sqrt{y}, \quad f(t) = -\alpha\frac{3\hbar^2 - 8\delta^2}{4t^2} + \frac{f_m - 2\delta^2(\mu^2 + \nu^2)}{t}, \quad (2.18)$$

$$S(t) = 4(t - x_1)(t - x_2),$$

$$\mathcal{A}_1(x, y) = -\delta\frac{R_y G - G_y R}{G^2 - 4R^2}, \quad \mathcal{A}_2(x, y) = \delta\frac{R_x G - G_x R}{G^2 - 4R^2}, \quad B(x, y) = \delta\frac{\alpha}{R^3}, \\ u(x, y) = -\frac{f_m}{2R^2} + \frac{3}{4}\hbar^2\alpha\frac{G}{R^4}, \quad (2.19)$$

$$w_1(x, y) = \delta R_y, \quad w_2(x, y) = -\delta R_x,$$

$$U(x, y) = -f_m\frac{G}{2R^2} + \frac{3}{4}\hbar^2\frac{\alpha}{R^2} + \frac{3}{4}\hbar^2\alpha\frac{G^2}{R^4},$$

где

$$\alpha = x_1 x_2 = \mu^2 \nu^2 - \kappa^2, \quad R = \sqrt{\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 + 2\kappa xy + \alpha}, \quad G = x^2 + y^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Для того, чтобы привести рассмотренные примеры к виду уравнения Шредингера со всеми размерными параметрами, необходимо сделать следующие преобразования:

$$H_S = \frac{H}{2m}, \quad u_S = \frac{u}{2m}, \quad A_x = \frac{c}{e}A_1, \quad A_y = \frac{c}{e}A_2, \quad (2.20)$$

где H_S - оператор Шредингера, а u_S - потенциал.

Примеры операторов Шредингера, имеющие дополнительный интеграл, квадратичный по импульсам, приведенных выше, не интегрируемы при произвольных соотношениях между параметрами, поэтому редуцируем число параметров:

В случае а) положим

$$\mu = 0, \nu = 0, \kappa = 0, q_m = \frac{\hbar}{a^4}, \delta = k \hbar, q_c = \frac{\hbar}{4a^2} \epsilon, E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \lambda.$$

В случае б) положим

$$\mu = a, \nu = a, \kappa = 0, f_m = \frac{1}{2} \hbar^2 a^2 (3 + \epsilon), \delta = k \hbar, E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \chi^2,$$

где a - параметр размерности длины, а параметры k , ϵ , λ , χ , - безразмерны, причем, как будет показано, k - целое число.

Мы приведем выражения для векторных потенциалов и потенциалов в следующем Разделе, где примеры с редуцированными параметрами будут проинтегрированы. Отметим, что упрощенный пример а) соответствует Примеру 1 следующего Раздела, а редуцированный пример б) - примеру 2. Кроме того, мы будем опускать индекс S у гамильтониана и потенциала.

2.2 Два новых примера двумерного уравнения

Шредингера с магнитным полем

В этом Разделе будут проинтегрированы два анонсированных ранее примера двумерных уравнений Шредингера с магнитным полем. Переходя к полярным координатам в симметричной калибровке, решения этих уравнений будут построены через биконфлюэнтную (HeunB) и конфлюэнтную (HeunV) функции Гойна [55]. Будут выведены правила квантования для этих систем, исследован дискретный спектр.

Задача поиска интегрируемых случаев уравнения Шредингера имеет долгую историю. Число таких примеров не слишком велико, наиболее известные примеры можно найти в известном курсе Ландау и Лифшица [78], исторически они появились в классических работах самого Шредингера [133]–[135], систематизированы в знаменитой работе Инфельда и Хулла [61].

Следует отметить, что в курсе [78] приведены только примеры точно решаемых задач квантовой механики. Класс таких задач характеризуется тем, что дискретный спектр в этих задачах может быть найден аналитически, а волновые функции выражаются через "простые" специальные функции (ортогональные полиномы), которые могут быть построены для любого номера дискретного спектра (главного квантового числа) рекуррентно. Новые представители этого класса уже давно не появляются.

Примерно в 1980 годах начали появляться многочисленные примеры более широкого класса, так называемые "почти точно решаемые" задачи квантовой механики, или иначе "почти точно решаемые" потенциалы, поскольку исследовались одномерные уравнения Шредингера с потенциалом. Слово "почти" означает, что дискретный спектр может быть найден как корни некоторых алгебраических уравнений, поскольку уравнения этого случая решаются через функции Гойна и его редукций, а условие полиномиальности функций Гойна, что необходимо для квадратичной интегрируемости волновых функций дискретного спектра, представляет собой в простейшем случае - задачу на собственные значения трехдиагональной матрицы $n + 1 \times n + 1$, где n - степень соответствующего полинома (подробнее см. ниже). Среди недавних работ следует отметить [63],[154],[156],[140]. Что касается "почти точно решаемых" уравнений Шредингера с магнитным полем, то насколько известно автору, таких примеров до сих пор не было.

Нам понадобятся некоторые свойства упомянутых выше функций $HeunV$ и $HeunC$, особенно упомянутые выше условия полиномиальности этих функций. Эти свойства хорошо известны, опубликованы в ряде работ [126],[14],[33],[34] но, для удобства читателя, мы приведем их в конце этого подраздела.

В предыдущем подразделе содержится классификация двумерных уравнений Шредингера, обладающих дополнительным интегралом, квадратичным или линейным по операторам импульса. Не вдаваясь в подробности, можно получить новые примеры таких уравнений, начиная с некоторого решения квазиштеккелевой системы (в переменных Ковалевской) и преобразовать его в уравнение Шредингера (в декартовых координатах). Важно еще раз отметить, что одна из функций квазиштеккелевой системы, а именно $S(x)$, должна быть полиномом второй степени.

Однако чрезвычайно трудной задачей является выделение тех решений, которые интересны с физической точки зрения, а именно двумерные уравнения

Шредингера с электромагнитным полем, поскольку изначально имеется большое число параметров в классификационной схеме. Эта работа для ближайшего будущего, однако едва ли можно надеяться на быстрые результаты, поскольку вычисления с полным набором параметров требуют большой вычислительной мощности.

Кроме того, зачастую в полученных примерах либо нет магнитного поля (калибровочным преобразованием можно аннулировать векторный потенциал), либо они неинтегрируемы, несмотря на наличие дополнительного интеграла, даже если есть разделение переменных (подробнее см. ниже).

Здесь и далее будут рассмотрены системы, обладающие дискретным спектром. Задачей будет являться только нахождение дискретного спектра и соответствующих волновых функций.

В данном подразделе мы рассмотрим только два новых случая интегрируемого ("почти точно решаемого") двумерного уравнения Шредингера, с электромагнитным полем и с редуцированным набором параметров, по сравнению с полной классификацией квазиштеккелевых систем с двумя степенями свободы и соответствующим полиномом $S(x)$.

Рассмотрим оператор Шредингера в обычной форме

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + u(r, \phi), \quad \hat{H}\psi = E\psi, \quad (2.21)$$

где векторный потенциал A и потенциал u для этих случаев будут выписаны ниже. Следует отметить, что они будут зависеть от трех параметров: параметра размерности длины a , безразмерных параметров ϵ и k , причем, как будет показано, параметр k должен быть целым числом, если рассматривать дискретный спектр, а именно такие решения уравнения Шредингера нам представляются особо интересными.

2.2.1 Пример 1. Отталкивающий потенциал

Рассмотрим пример с векторным потенциалом и потенциалом, которые определяются следующими формулами:

$$A_\phi = \frac{c\hbar}{2ea^2} r \left(\epsilon + 3\frac{r^2}{a^2} \right), \quad A_r = 0, \quad u = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(2\frac{r^6}{a^6} + \epsilon\frac{r^4}{a^4} + 2k\frac{r^2}{a^2} \right), \quad (2.22)$$

энергия в этом случае параметризуется так:

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\lambda. \quad (2.23)$$

Вычислим магнитное поле

$$B = \frac{c\hbar}{ea^2}\left(\epsilon + 6\frac{r^2}{a^2}\right).$$

На первый взгляд, ситуация выглядит устрашающе, поскольку потенциал в формуле (2.22) сильно отталкивающий, однако, оказывается, что вклад от векторного потенциала устранил это отталкивание, и эффективно возникает задача с притяжением и возможностью обладать дискретным спектром.

Оказывается, что в этом примере есть два подслучая:

1. Подставим в (2.21) волновую функцию вида

$$\psi = e^{-\frac{r^4}{8a^4}} e^{-\epsilon\frac{r^2}{4a^2}} r^l e^{il\phi} w(r), \quad (2.24)$$

где $l \geq 0$. Уравнение на функцию $w(r)$ решается через биконфлюэнтную функцию Гойна

$$w(r) = \text{HeunB}(l, \epsilon, 3l + 2k, -\epsilon l - \lambda, \frac{r^2}{2a^2}) \quad (2.25)$$

с параметрами $\alpha = l$, $\beta = \epsilon$, $\gamma = 3l + 2k$, $\delta = -\epsilon l - \lambda$ (см. 2.2.3), в то время как второе линейно независимое решение нерегулярно в точке $r = 0$. Свойство регулярности HeunB функции (2.25) во всей области определения требует ее полиномиальности (см. [126] и ссылки этой работы). Условия полиномиальности даны в 2.2.3.

Условие (2.43) в этом случае - это $l + k = n + 1$. Таким образом, $k \leq n + 1$. Заметим, что в этом примере $\det(A_{n+1})$ - полином от λ степени $n + 1$, условие $\det(A_{n+1}) = 0$ определяет $n + 1$ значений λ^i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$) и, таким образом, $n + 1$ уровней энергии E^i по формуле (2.23).

Для того, чтобы получить соответствующую волновую функцию, подставляем $\lambda = \lambda_i$ в матрицу A_{n+1} , вычисляем $n + 1$ собственных вектора $\vec{p}^i = (p_0^i, p_1^i, \dots, p_n^i)$ этой матрицы и получаем полиномы $w^i(r) = P_n^i(\frac{r^2}{2a^2})$, где $P_n^i = \sum_{j=0}^n p_j^i z^j$. Наконец, подставляем функции $w^i(r)$ в формулу (2.24) и получаем $n + 1$ волновых функций ψ^i .

На данный момент описаны квантовые состояния при фиксированном значении n (или фиксированном значении $l = n + 1 - k$). Для того, чтобы

описать полную картину, необходимо зафиксировать параметр гамильтониана k , рассмотреть все неотрицательные целые l , или $n = k - 1, k, k + 1, k + 2, \dots$ и получить бесконечный набор "блоков," каждый из которых содержит $n + 1$ уровней энергии и волновых функций для каждого допустимого значения $n \geq k - 1$. Отметим, что i - это "внутренний индекс" для каждого n .

Очень важно, что только вещественные корни λ уравнения (2.44) в этом примере относятся к дискретному спектру, так же как и соответствующие уровни энергии E и волновые функции ψ . Однако, трехдиагональную матрицу можно привести к симметричной при условии $b_j c_j > 0$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, и в первом, и во втором подслучае (см. ниже) эти соотношения выполняются в силу определения последовательности b_j, c_j и условий, связывающих целые числа n и k , поэтому, при поставленных условиях все корни λ - вещественные.

Таким образом, получилась довольно сложная структура квантовых состояний, что нетипично для известных примеров квантовой механики. Отметим, что подобная структура будет получена во всех рассматриваемых случаях этого раздела.

Все волновые функции (2.24) в рассматриваемом случае сильно локализованы на масштабе длины a с квадратичным по r магнитным полем.

Подчеркнем, что диагонали матрицы A_{n+1} (2.42) в этом случае определяются следующими последовательностями:

$$a_j = \lambda - \epsilon(2j + 1), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.26)$$

$$b_j = 2(j(j + n - k + 3) + n - k + 2), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$c_j = 4(n - j), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

2. Другой возможный выбор волновой функции в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\psi = e^{-\frac{r^4}{8a^4}} e^{-\epsilon \frac{r^2}{4a^2}} r^l e^{-il\phi} w(r), \quad (2.27)$$

где $l \geq 0$, как и ранее. Такой выбор приводит к следующей регулярной части решения функции $W(r)$:

$$w(r) = \text{HeunB}(l, \epsilon, -3l + 2k, \epsilon l - \lambda, \frac{r^2}{2a^2}). \quad (2.28)$$

Таким образом, $\alpha = l$, $\beta = \epsilon$, $\gamma = -3l + 2k$, $\delta = -\epsilon l - \lambda$. Условие (2.43) в этом случае имеет вид $-2l + k = n + 1$. Тогда $k \geq n + 1$, параметр гамильтониана k должен быть натуральным числом, выражение $k - n - 1$ должно быть неотрицательным четным числом.

Аналогично первому случаю выглядит квантовая структура и в этом случае, за исключением допустимых параметров $n : n \geq 0, n = k-1, k-3, k-5, \dots$. Рассматриваются только вещественные λ , как и в предыдущем случае.

Диагонали матрицы A_{n+1} (2.42) в этом случае определяются следующими последовательностями:

$$a_j = \lambda - \epsilon(k - n + 2j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.29)$$

$$b_j = j(2j - n + k + 3) - n + k + 1, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$c_j = 4(n - j), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

2.2.2 Пример 2. Нерациональный случай

Этот пример определяется следующими векторными потенциалами и потенциалами:

$$A_\phi = -\frac{c\hbar}{e} k \frac{a}{r\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad A_r = 0, \quad u = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \left(\frac{3a^4}{(r^2 + a^2)^2} - \epsilon \frac{a^2}{r^2 + a^2} \right). \quad (2.30)$$

Энергия параметризуется следующим образом

$$E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \chi^2. \quad (2.31)$$

Магнитное поле выражается формулой

$$B = k \frac{c\hbar}{e} \frac{a}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интересно, что поток магнитного поля через всю плоскость равен $\Phi = k \frac{2\pi\hbar c}{e}$, т.е. четному числу квантов потока.

Используя замену переменных

$$t = \frac{1}{2a} (a + \sqrt{r^2 + a^2}), \quad (2.32)$$

решаем уравнение (2.21) с потенциалами (2.30), получая при этом два линейно независимых решений, которые могут быть регулярными, но не одновременно, из-за того, что условие (2.50) различно в этих двух случаях. Рассмотрим эти решения отдельно.

В первом случае мы получаем следующую волновую функцию:

$$\begin{aligned} \psi = e^{il\phi} (2t-1)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-l}{2}} (t-1)^{\frac{k+l}{2}} e^{2\chi t} \times \\ \times \text{HeunC}(4\chi, -l+k, k+l, 0, \frac{1}{2}(k^2-l^2) + \frac{1}{4}(\epsilon+1) - \chi^2, t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Отметим, что число $k+l$ должно быть неотрицательным целым, поскольку решение должно быть регулярно в точке $t=1$ ($r=0$). Условие (2.50) в этом случае имеет вид $n+k+1=0$. Это означает, что параметр гамильтониана k должен быть отрицательным целым числом. Подставим параметры функции HeunC , а также необходимое условие $n=-k-1$ в формулу (2.49), получаем диагонали матрицы A_{n+1} :

$$\begin{aligned} a_j = \chi(\chi+2(2j-n-l))+l^2-n^2-n-j(j-2n-1)-\frac{1}{4}(1+\epsilon), \quad j=0, 1, \dots, n, \quad (2.34) \\ b_j = (j+1)(j-n-l), \quad j=0, 1, \dots, n-1, \\ c_j = 4(n-j)\chi, \quad j=0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Величины $\det(A_{n+1})$ - это полиномы от χ степени $2(n+1)$, тогда условие $\det(A_{n+1})=0$ определяет $2(n+1)$ корня χ . Нужно выбирать только отрицательные корни, для того чтобы волновая функция была бы квадратично интегрируема (экспоненциально спадала с расстоянием). Таким образом, только квантовые состояния с отрицательными значениями χ относятся к дискретному спектру.

В этом случае получаем бесконечный набор матриц A_{n+1} одинакового размера $n+1=-k$ со следующими допустимыми величинами l :

$$l = -k, 1-k, 2-k, \dots$$

Процедура получения энергетических уровней и соответствующих волновых функций аналогична предыдущему примеру за исключением параметризации энергии, которые в этом случае определяются формулой (2.31).

Масштаб изменения волновой функции равен $\frac{a}{|\chi|}$ и может быть произвольным a priori.

Во втором случае получаем волновую функцию в виде:

$$\begin{aligned} \psi = e^{il\phi} (2t-1)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{l-k}{2}} (t-1)^{\frac{k+l}{2}} e^{2\chi t} \times \\ \times \text{HeunC}(4\chi, l-k, k+l, 0, \frac{1}{2}(k^2-l^2) + \frac{1}{4}(\epsilon+1) - \chi^2, t). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Отметим, что число $k + l$ должно быть неотрицательным целым числом, поскольку волновая функция должна быть регулярной в точке $t = 1$ ($r = 0$), как и в предыдущем случае. Условие (2.50) в этом случае имеет вид $n + l + 1 = 0$. Это означает, что число l должно быть отрицательным целым, а значит, параметр гамильтониана k должен быть натуральным числом. Подставим параметры функции HeunC и необходимое условие $l = -n - 1$ в (2.49), получаем диагонали матрицы A_{n+1} :

$$a_j = \chi(\chi + 2(2j - k - n)) - j(j - 2n - 1) + n + \frac{1}{4}(3 - \epsilon), \quad b_j = (j + 1)(j - n - k), \quad (2.36)$$

$$c_j = 4(n - j)\chi.$$

В этом случае мы получаем конечный набор матриц A_{n+1} с допустимыми значениями n :

$$n \geq 0, \quad n = k - 1, k - 2, \dots, 0.$$

Энергия в этом случае определяется формулой (2.31), а все остальное - как в предыдущем случае.

И в этом случае выбираются только отрицательные корни χ , соответствующие дискретному случаю.

Еще раз подчеркнем, что энергетические уровни и волновые функции могут быть получены только численно.

Однако можно попытаться получить дискретный спектр в квазиклассическом приближении (см. [56] и цитирования там). Это является предметом отдельного исследования.

2.2.3 Некоторые свойства функций HeunB и HeunC

Функция HeunB

удовлетворяет следующему уравнению:

$$y''(z) + \left(-2z - \beta + \frac{1 + \alpha}{z}\right) y'(z) + \left(\gamma - \alpha - 2 - \frac{1}{2z}((1 + \alpha)\beta + \delta)\right) y(z) = 0. \quad (2.37)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(z) = C_1 \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z) + C_2 \text{HeunB}(-\alpha, \beta, \gamma, \delta, z)z^{-\alpha}. \quad (2.38)$$

Получим необходимые и достаточные условия полиномиальности функций $\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z)$. Для того, чтобы сделать это в наиболее удобной форме, обозначим

$$\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z) = P_n(z) = \sum_{j=0}^n p_j z^j, \quad (2.39)$$

подставляя (2.39) в (2.37) получим следующие рекуррентные соотношения на коэффициенты p_j :

$$RB(j) = c_{j-1}p_{j-1} + a_j p_j + b_j p_{j+1} = 0, \quad (2.40)$$

где

$$a_j = -(\delta + \beta(2j + \alpha + 1)), \quad b_j = 2(j(j + \alpha + 2) + \alpha + 1), \quad c_j = 2(\gamma - \alpha - 2j - 2). \quad (2.41)$$

Вычисляем коэффициенты p_j с начальными условиями $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$. Тогда условие $b_{n+1} = 0$ эквивалентно тому, что детерминант следующей трехдиагональной матрицы

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_0 & a_1 & b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

равен нулю.

Второе необходимое условие можно получить следующим образом. Подставим выражение $y(z) = z^n$ в уравнение (2.37), вычислим числитель (полином) полученного выражения. Старший член этого полинома обнуляется при условии $\gamma - \alpha = 2(n + 1)$. В этом случае, если матрица A_{n+1} вырождена, тогда $b_{n+1} = 0$, $b_{n+2} = 0$

Теперь можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 2.2. *Функция $\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z)$ является полиномом $P_n(z)$ степени n тогда и только тогда, если выполняются следующие условия:*

$$\gamma - \alpha = 2(n + 1), \quad (2.43)$$

$$\det(A_{n+1}) = 0. \quad (2.44)$$

Функция HeunC

удовлетворяет следующему уравнению

$$y''(z) + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma + 1}{z - 1} \right) y'(z) + \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z - 1} \right) y(z) = 0, \quad (2.45)$$

где $\mu = \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta - \gamma\beta) - \eta$, $\nu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \gamma\alpha + \gamma\beta) + \delta + \eta$.

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(z) = C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z) + C_2 \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta, z)z^{-\beta}. \quad (2.46)$$

Пусть функция $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z) = P_n(z)$ является полиномом степени n :

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^n p_j z^j, \quad (2.47)$$

тогда (аналогично функции HeunB) получаются следующие рекуррентные соотношения на коэффициенты p_j :

$$RC(j) = c_{j-1}p_{j-1} + a_j p_j + b_j p_{j+1} = 0, \quad (2.48)$$

где

$$a_j = \mu - j(j - \alpha + \beta + \gamma + 1), \quad b_j = (j + 1)(j + \beta + 1), \quad (2.49)$$

$$c_j = (n - j)\alpha.$$

Дальнейшая процедура (аналогичная получению условию полиномиальности функции HeunB) приводит к следующему утверждению

Утверждение 2.3. *Функция $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z)$ является полиномом $P_n(z)$ степени n тогда и только тогда, если выполняются следующие условия:*

$$\delta = -(n + 1 + \frac{1}{2}(\beta + \gamma))\alpha, \quad (2.50)$$

$$\det(A_{n+1}) = 0. \quad (2.51)$$

2.2.4 Обсуждение

В этом Разделе были рассмотрены два абсолютно разных "почти точно решаемых" примера двумерного уравнения Шредингера с электромагнитным полем.

Оба примера обладают богатой и достаточно сложной структурой квантовых состояний дискретного спектра. Эти примеры были проинтегрированы в терминах функций HeunВ и HeunС.

Следует отметить, что в работе Берубе и Винтерница [16] были проклассифицированы двумерные уравнения Шредингера с магнитным полем, обладающие свойством суперинтегрируемости. Эти примеры, вообще говоря, не являются ни точно решаемыми ни "почти точно решаемыми" а priori, однако, один из случаев, который не интегрируется при полном наборе констант, при обнулении члена, зависящего от полярного угла, переходит в рассмотренный ранее Пример 1.

По-видимому, функции Гойна и четыре их редукции (например, HeunВ и HeunС) будут основными специальными функциями XXI века, в терминах которых будут проинтегрированы как многие задачи квантовой механики, так и задачи в других важнейших приложениях.

Как уже пояснялось, из-за свойств этих функций большинство новых результатов могут быть получены только численно.

Это обстоятельство может быть связано с тем фактом, что в квантовом случае отсутствует (в общем случае) интегрируемость по Лиувиллю, т.е. наличие дополнительного интеграла в двумерном случае недостаточно для того, чтобы проинтегрировать получающиеся дифференциальные уравнения. Более того, даже разделение переменных не позволяет сделать это в общем случае.

Приведем простой, но в тоже время показательный пример, который является обобщением примеров, рассмотренных в этом Разделе:

Рассмотрим двумерное уравнение Шредингера с магнитным полем и потенциалом

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + u(\rho, \phi), \quad \hat{H}\psi = E\psi. \quad (2.52)$$

Рассмотрим это уравнение в полярных координатах $(x, y) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ при следующих условиях:

$$A_r = 0, \quad A_\phi(\rho, \phi) = a(\rho), \quad u(\rho, \phi) = b(\rho).$$

Тогда магнитное поле равно

$$B(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi).$$

Рассмотрим операторы

$$\hat{K} = \hat{K}_1 = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \text{or} \quad \hat{K} = \hat{K}_1^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},$$

тогда

$$[\hat{H}, \hat{K}] = 0$$

для любых (!) функций $a(\rho), b(\rho)$.

Подставляя волновую функцию в виде $\psi(\rho, \phi) = e^{i\phi}w(\rho)$ в уравнение (2.21), получим ОДУ второго порядка на функцию $w(\rho)$, которое является интегрируемым только для некоторых функций $a(\rho), b(\rho)$.

В этой Главе были рассмотрены квантовые квазиштеккелевы гамильтонианы. Канонический вид этих гамильтонианов был выбран в эрмитовой форме, что соответствует физическим требованиям. Были получены два необходимых и достаточных условия коммутирования пар таких гамильтонианов, второе из которых содержит квантовые поправки. Конечно при переходе к классическому пределу соответствующие условия переходят в те, что были получены в классическом случае.

Была проведена полная классификация пар квантовых квазиштеккелевых гамильтонианов для случая, когда один из первоначальных гамильтонианов в переменных q_1, q_2 является оператором Шредингера. Найдены два случая, которые при редукции параметров были проинтегрированы в терминах функций Гойна.

Глава 3

Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов

В работе рассматриваются квантовые аналоги волчков на алгебрах Ли $so(4)$ и $e(3)$ в представлении дифференциальными операторами.

3.1 Введение

В случае двух независимых переменных возможны обобщения в разных направлениях. Вообще говоря, задача о паре коммутирующих операторов $[\hat{H}, \hat{K}] = 0$ поставлена недостаточно жёстко, и возникает вопрос о выборе дополнительных ограничений. Кроме условий, диктуемых внутренней логикой задачи (например, коммутативность тройки операторов), имеет смысл выделять классы операторов, важных для приложений. Здесь мы рассмотрим один такой класс, связанный с квантовыми волчками на $so(4)$ и $e(3)$. Соответствующий оператор \hat{H} имеет весьма специальный вид

$$\hat{H} = a(x)D_x^2 + 2f(x, y)D_xD_y + b(y)D_y^2 + \dots, \quad (3.1)$$

где a, b многочлены четвёртой степени, $f(x, y)$ биквадратичный многочлен, многоточие обозначает младшие члены также со специальными коэффициентами. Такой вид следует из того, что в генераторах алгебры Ли гамильтониан квадратичен, например, на $so(4)$ имеем

$$\hat{H} = (\hat{U}, A\hat{U}) + (\hat{V}, B\hat{V}) + 2(\hat{U}, F\hat{V}) + (\vec{c}, \hat{U}) + (\vec{d}, \hat{V}),$$

и при переходе к дифференциальному представлению генераторы U, V заменяются дифференциальными операторами первого порядка с квадратичными коэффициентами (см. формулы (3.7), (3.9) ниже). В известных примерах порядок оператора \hat{K} не превосходит 4, причём степень коэффициентов, соответственно, не превосходит 8. В исходном классическом варианте задачи вместо коммутирующих дифференциальных операторов рассматриваются гамильтонианы в инволюции относительно скобки Пуассона–Дарбу, полиномиальные по импульсам. При этом условия «коммутирования в главном» [47], то есть сокращения старших членов в коммутаторе, совпадают в классическом и квантовом случаях. Подробнее, эта связь поясняется схемой

$$\begin{array}{ccc} \{H, K\} = 0 & \xrightarrow{\text{квантование на алгебре Ли}} & [\hat{H}, \hat{K}] = 0 \\ R^* \downarrow & & \downarrow \hat{R}^* \\ \{H_D, K_D\} = 0 & \xrightarrow{\text{квантование в переменных Дарбу}} & [\hat{H}_D, \hat{K}_D] = 0 \end{array}$$

Здесь R обозначает представление скобки Ли–Пуассона в переменных Дарбу, H_D образ гамильтониана H при двойственном отображении, то есть $H_D = R^*(H) = H \circ R$. Аналогично, \hat{R} обозначает представление алгебры Ли дифференциальными операторами, и $\hat{H}_D = \hat{R}^*(\hat{H}) = \hat{H} \circ \hat{R}$. Горизонтальные стрелки заключаются в переходе от скобки Ли–Пуассона к коммутатору на алгебре Ли и в переходе от скобки Пуассона–Дарбу к алгебре Гейзенберга

$$\{p_i, x_j\} = \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad [D_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}.$$

На обоих уровнях этот переход осуществляется при помощи подходящего упорядочения в мономах гамильтонианов H, K , что равносильно добавлению младших членов (“квантовых поправок”).

Напомним, что описание классических волчков, допускающих дополнительный интеграл, до сих пор остаётся открытой задачей. Для случая $so(4)$ Веселов получил в [158] (уточнённый результат см. в статье [124]) необходимые условия, выделяющие некоторые многообразия в пространстве параметров. Однако в известных примерах число параметров по крайней мере на единицу меньше размерности этих многообразий. Некоторые классификационные результаты приводятся в статье [145]. Можно ли продвинуться в этой задаче, точнее, в её квантовой версии, используя перевод на язык дифференциальных операторов? В качестве первого шага, в данной Главе мы строим дифференциальные операторы, отвечающие некоторым наиболее важным примерам. В частности, они

подсказывают, что, по-видимому, простейшим необходимым условием интегрируемости служит факторизуемость дискриминанта главной части \hat{H} :

$$f(x, y)^2 - a(x)b(y) = w(x, y)\tilde{w}(x, y), \quad (3.2)$$

с некоторыми многочленами w, \tilde{w} . В конце Главы мы докажем это свойство с помощью теста Пенлеве.

С вычислительной точки зрения, переход к дифференциальному представлению имеет то преимущество, что снимает вопросы о выборе упорядочения в операторной алгебре и учёте операторов Казимира. Отметим, что представление \hat{K} определено на фиксированной поверхности уровня операторов Казимира, значения которых входят в \hat{H}_D, \hat{K}_D как независимые параметры (их число равно рангу алгебры Ли, то есть 2 в случае $so(4)$ и $e(3)$). Расщепление коммутационного соотношения по этим параметрам облегчает анализ.

Опишем коротко содержание Главы. В разделе 3.2 рассматривается случай $so(4)$: волчки Шоттки–Манакова [132, 83], Стеклова [149], Адлера–ван Мёрбеке [1, 124] и Соколова [144]. Квантование волчка Шоттки–Манакова рассматривалось в работе [72]. Случаи Адлера–ван Мёрбеке и Соколова более сложны (оператор \hat{K} четвёртого порядка) и, по-видимому, квантование для них получено впервые.

В разделе 3.3 рассматриваются волчки на $e(3)$: волчки Клебша [30], Ковалевской [74] (квантование восходит к работе Лапорта [79]), гиростат Ковалевской и случай Горячёва–Чаплыгина. Для моделей на $e(3)$ квантование достаточно хорошо изучено в работах Комарова и др. [68, 69, 71, 70, 123].

Разумеется, перечисленные волчки не исчерпывают все известные случаи. Изложение имеющихся здесь результатов и подробная библиография могут быть найдены в книгах Борисова и Мамаева [23], [24]. Имеется также множество работ, в которых развиваются другие направления в задаче о коммутирующих дифференциальных операторах, упомянем лишь статьи [57, 119].

Обозначения. Для удобства будем обозначать $x = x_1, y = x_2$. При определении скобок Пуассона и коммутаторов нулевые скобки не приводятся. Индексы i, j, k всегда обозначают произвольную перестановку 1, 2, 3. Мнимая единица также обозначается i . Используются обозначения

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad (\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Для компактной записи гамильтонианов в переменных Дарбу часто используются следующие многочлены:

$$\begin{aligned} W(a, b, c; x, y) &= a(x^2 - 1)(y^2 - 1) - b(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4cxy, \\ R(a, b, c; x) &= W(a, b, c, x, x) = (a - b)(x^4 + 1) + 2(2c - a - b)x^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что оператор $W(a, b, c; x, y)D_xD_y$ сохраняет свою форму при инверсии $x \rightarrow 1/x$, $y \rightarrow 1/y$.

3.2 Волчки на $so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$

3.2.1 Координаты Дарбу и операторное представление

Скобка Ли–Пуассона на $so(3)$ и её функция Казимира определяются соотношениями

$$\{U_i, U_j\} = i\varepsilon_{ijk}U_k, \quad (U, U) = s_1^2, \quad (3.4)$$

где U обозначает вектор (U_1, U_2, U_3) . Представление в координатах Дарбу задаётся формулами

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1)p_1 + s_1x, & U_2 &= -\frac{i}{2}(x^2 + 1)p_1 + is_1x, \\ U_3 &= -xp_1 + s_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При квантовании мы переходим к операторной алгебре

$$[\hat{U}_i, \hat{U}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{U}_k, \quad (\hat{U}, \hat{U}) = j_1(j_1 + 1), \quad (3.6)$$

допускающей представление дифференциальными операторами

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1)D_x + j_1x, & \hat{U}_2 &= -\frac{i}{2}(x^2 + 1)D_x + ij_1x, \\ \hat{U}_3 &= -xD_x + j_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Алгебра Ли $so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$ реализуется как прямая сумма с дублем, в котором сделаны переобозначения

$$U \rightarrow V, \quad x \rightarrow y, \quad p_1 \rightarrow p_2, \quad s_1 \rightarrow s_2, \quad \hat{U} \rightarrow \hat{V}, \quad D_x \rightarrow D_y, \quad j_1 \rightarrow j_2.$$

Волчки на $so(4)$ определяются гамильтонианом общего вида

$$\hat{H} = (U, AU) + (V, BV) + (U, FV) + (\vec{c}, U) + (\vec{d}, V). \quad (3.8)$$

Матрицы A и B можно считать диагональными без потери общности. При переходе к представлению (3.7) возникает дифференциальный оператор специального вида

$$\begin{aligned}\hat{H}_D &= a(x)D_x^2 + f(x, y)D_xD_y + b(y)D_y^2 \\ &\quad - \left(\frac{2j_1 - 1}{2}a'(x) + 2c(x) + j_2f_y(x, y) \right) D_x \\ &\quad - \left(\frac{2j_2 - 1}{2}b'(y) + 2d(y) + j_1f_x(x, y) \right) D_y \\ &\quad + \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6}a''(x) + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6}b''(y) \\ &\quad + 2j_1c'(x) + 2j_2d'(y) + j_1j_2f_{xy}(x, y) + \kappa,\end{aligned}\tag{3.9}$$

где κ произвольная постоянная и

$$\begin{aligned}a(x) &= a_0(x^4 + 1) + a_2x^2, & b(y) &= b_0(y^4 + 1) + b_2y^2, \\ c(x) &= c_2x^2 + c_1x + c_0, & d(y) &= d_2y^2 + d_1y + d_0, \\ f(x, y) &= f_{22}x^2y^2 + \dots + f_{00}.\end{aligned}$$

Формулы пересчёта из (3.9) в (3.8) имеют вид

$$\begin{aligned}A &= \text{diag}(2a_0, -2a_0, a_2) + \alpha I, & B &= \text{diag}(2b_0, -2b_0, b_2) + \beta I, \\ \vec{c} &= 2(c_2 - c_0, -i(c_2 + c_0), c_1), & \vec{d} &= 2(d_2 - d_0, -i(d_2 + d_0), d_1), \\ F &= \begin{pmatrix} f_{00} - f_{02} - f_{20} + f_{22} & i(f_{00} + f_{02} - f_{20} - f_{22}) & f_{21} - f_{01} \\ i(f_{00} - f_{02} + f_{20} - f_{22}) & -f_{00} - f_{02} - f_{20} - f_{22} & -i(f_{21} + f_{01}) \\ f_{12} - f_{10} & -i(f_{12} + f_{10}) & f_{11} \end{pmatrix}, \\ 3\kappa &= (3\alpha + a_2)j_1(j_1 + 1) + (3\beta + b_2)j_2(j_2 + 1)\end{aligned}$$

с произвольными постоянными α, β .

В качестве замечания, полезного при вычислении спектров, поясним связь дифференциального представления (3.7) и известного матричного представления [78, стр. 113]

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 \pm i\hat{U}_2 &= \hat{U}_\pm, & \hat{U}_3|m, j\rangle &= m|m, j\rangle, \\ \hat{U}_+|m, j\rangle &= \sqrt{(j - m)(j + m + 1)}|m + 1, j\rangle, \\ \hat{U}_-|m, j\rangle &= \sqrt{(j + m)(j - m + 1)}|m - 1, j\rangle.\end{aligned}\tag{3.10}$$

В физическом случае рассматривается орбита $j = \text{const}$, причём j, m целые или полуцелые одновременно и m принимает значения от $-j$ до j , что отвечает

матрицам конечного размера $(2j+1) \times (2j+1)$. Формально, от этих ограничений можно отказаться и рассматривать бесконечные трёхдиагональные матрицы, которые интерпретируются как разностные операторы

$$a(m)T_m + b(m) + c(m)T_m^{-1},$$

где $T_m : m \mapsto m + 1$ оператор сдвига (поддиагональная матрица из единиц). От корней можно избавиться сопряжением $\hat{A} \rightarrow f^{-1}\hat{A}f$, что даёт представление $so(3)$ в операторах сдвига

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= -\frac{1}{4}(m-j)(m+j+1)T_m + T_m^{-1}, \\ \hat{U}_2 &= -i \left(\frac{1}{4}(m-j)(m+j+1)T_m + T_m^{-1} \right), \\ \hat{U}_3 &= m.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Другое разностное представление можно получить напрямую из (3.7), делая замену (“преобразование Фурье”)

$$D_x \rightarrow mT_m, \quad x \rightarrow T_m^{-1},$$

что не меняет алгебру Гейзенберга:

$$[D_x, x] = 1, \quad [mT_m, T_m^{-1}] = 1$$

и даёт операторы

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= \frac{m}{2}T_m + \left(j + 1 - \frac{m}{2}\right)T_m^{-1}, \\ \hat{U}_2 &= -i\frac{m}{2}T_m + i\left(j + 1 - \frac{m}{2}\right)T_m^{-1}, \\ \hat{U}_3 &= j - m + 1.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Можно проверить, что представления (3.11) и (3.12) эквивалентны, с точностью до некоторого линейного преобразования из $SO(3)$ и сопряжения оператором $g(m)T^{-j-1}$ с функцией g , удовлетворяющей соотношению $g(m+2)/g(m+1) = 2j - m$.

3.2.2 Волчок Шоттки–Манакова

Коммутирующие операторы имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\alpha_1^2 \hat{U}_1^2 - \alpha_2^2 \hat{U}_2^2 - \alpha_3^2 \hat{U}_3^2 - \alpha_1^2 \hat{V}_1^2 - \alpha_2^2 \hat{V}_2^2 - \alpha_3^2 \hat{V}_3^2 \\ & + 2\alpha_2\alpha_3 \hat{U}_1 \hat{V}_1 + 2\alpha_3\alpha_1 \hat{U}_2 \hat{V}_2 + 2\alpha_1\alpha_2 \hat{U}_3 \hat{V}_3, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\hat{K} = \alpha_1 \hat{U}_1 \hat{V}_1 + \alpha_2 \hat{U}_2 \hat{V}_2 + \alpha_3 \hat{U}_3 \hat{V}_3. \quad (3.14)$$

Они получаются из классических гамильтонианов в инволюции при простой замене $U \rightarrow \hat{U}$, $V \rightarrow \hat{V}$, поскольку в данном примере нет проблемы нормального упорядочения (каждый моном содержит только коммутирующие переменные). В отличие от некоторых других примеров (волчки Стеклова, Ковалевской) добавка линейных членов к гамильтонианам здесь невозможна, как в классическом, так и в квантовом случае, что можно проверить прямым вычислением с неопределёнными коэффициентами. Применяя отображение (3.7), получаем следующую пару коммутирующих дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} 4\hat{H}_D = & r(x)D_x^2 + 2zD_xD_y + r(y)D_y^2 \\ & - \left(\frac{2j_1 - 1}{2}r'(x) + 2j_2z_y \right) D_x - \left(\frac{2j_2 - 1}{2}r'(y) + 2j_1z_x \right) D_y \\ & + 2j_1j_2z_{xy} + \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6}r''(x) + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6}r''(y) \\ & - \frac{4}{3}(j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1))(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$4\hat{K}_D = wD_xD_y - j_2w_yD_x - j_1w_xD_y + j_1j_2w_{xy}, \quad (3.16)$$

где, с использованием обозначений (3.3),

$$\begin{aligned} r(x) &= -R(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2; x), \\ z &= z(x, y) = W(\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2; x, y), \\ w &= w(x, y) = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; x, y). \end{aligned}$$

Постоянная в последней строчке (3.15) (κ в формуле (3.9)) не влияет на коммутативность и определяет сдвиг энергии основного состояния системы.

Операторы (3.15), (3.16) можно получить и другим способом, при другом обходе диаграммы из Введения. Для этого следует сначала перейти к переменным Дарбу в классических гамильтонианах H, K , согласно формулам (3.5), что

даёт

$$\begin{aligned}
4H_D &= r(x)p_1^2 + 2zp_1p_2 + r(y)p_2^2 \\
&\quad - (s_1r'(x) + 2s_2z_y)p_1 - (s_2r'(y) + 2s_1z_x)p_2 \\
&\quad + 2s_1s_2z_{xy} + \frac{s_1^2}{3}r''(x) + \frac{s_2^2}{3}r''(y) - \frac{4}{3}(s_1^2 + s_2^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$4K_D = wp_1p_2 - s_2w_y p_1 - s_1w_x p_2 + s_1s_2w_{xy}, \tag{3.18}$$

где r, z, w заданы теми же формулами, что и раньше. Далее, делается замена p_i на D_{x_i} в квадратичных членах, а младшие члены берутся с неопределёнными коэффициентами (с сохранением степени по x, y). Таким образом, коммутирующие дифференциальные операторы ищутся в виде

$$\begin{aligned}
\hat{H}_D &= r(x)D_x^2 + 2z(x, y)D_xD_y + r(y)D_y^2 + a(\overset{3}{x}, \overset{1}{y})D_x + b(\overset{1}{x}, \overset{3}{y})D_y + c(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}), \\
\hat{K}_D &= w(x, y)D_xD_y + f(\overset{2}{x}, \overset{1}{y})D_x + g(\overset{1}{x}, \overset{2}{y})D_y + h(\overset{1}{x}, \overset{1}{y}),
\end{aligned}$$

где r, z, w заданы, a, b, c, f, g, h многочлены с неопределёнными коэффициентами, числа над аргументами указывают степень. В результате возникает довольно громоздкая система уравнений, но при помощи компьютерной алгебры она легко решается, и вновь получается ответ (3.15), (3.16). Таким образом, оба способа квантования оказываются эквивалентными, как и следовало ожидать. С вычислительной точки зрения, в ситуации, когда требуется найти \hat{K} по заданному \hat{H} , каждый способ имеет свои преимущества и недостатки. Использование генераторов алгебры Ли приводит к более простой системе уравнений на коэффициенты, но сложнее реализуется, из-за необходимости работать с некоммутативными переменными. Дифференциальное представление даёт более гибкий и универсальный язык, но приводит к несколько более громоздким уравнениям на коэффициенты операторов.

3.2.3 Волчок Стеклова

Классические гамильтонианы имеют вид ($\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$)

$$\begin{aligned}
H &= -\alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha_1^2}U_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2}U_2^2 + \frac{1}{\alpha_3^2}U_3^2 \right) + 2\alpha(\alpha_1U_1V_1 + \alpha_2U_2V_2 + \alpha_3U_3V_3), \\
K &= 2\alpha \left(\frac{1}{\alpha_1}U_1V_1 + \frac{1}{\alpha_2}U_2V_2 + \frac{1}{\alpha_3}U_3V_3 \right) - \alpha_1^2V_1^2 - \alpha_2^2V_2^2 - \alpha_3^2V_3^2.
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем примере, проблемы упорядочения нет, и коммутирующие квантовые гамильтонианы получаются просто добавлением крышек к U, V . Нетрудно проверить, что и в классическом, и в квантовом случае к гамильтонианам можно добавить следующие линейные члены:

$$\begin{aligned} H &\rightarrow H - \beta_1\alpha_2\alpha_3U_1 - \beta_2\alpha_1\alpha_3U_2 - \beta_3\alpha_1\alpha_2U_3, \\ K &\rightarrow K + \beta_1V_1 + \beta_2V_2 + \beta_3V_3, \end{aligned}$$

с произвольными β_i . Однако далее для простоты будем считать $\beta_i = 0$.

Переходя к дифференциальным операторам, получаем

$$\begin{aligned} 4\hat{H}_D &= r_1D_x^2 + 2zD_xD_y - \left(\frac{2j_1-1}{2}r'_1 + 2j_2z_y\right)D_x - 2j_1z_xD_y \\ &\quad + 2j_1j_2z_{xy} + \frac{j_1(2j_1-1)}{6}r''_1 - \frac{4}{3}j_1(j_1+1)(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2), \\ 4\hat{K}_D &= 2wD_xD_y + r_2D_y^2 - 2j_2w_yD_x - \left(\frac{2j_2-1}{2}r'_2 + 2j_1w_x\right)D_y \\ &\quad + 2j_1j_2w_{xy} + \frac{j_2(2j_2-1)}{6}r''_2 - \frac{4}{3}j_2(j_2+1)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(x) = -R(\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_3^2\alpha_1^2, \alpha_1^2\alpha_2^2; x), \\ r_2 &= r_2(y) = -R(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2; y), \\ z &= z(x, y) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; x, y), \\ w &= w(x, y) = W(\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2; x, y). \end{aligned}$$

Эти же операторы получаются при квантовании в переменных Дарбу, для гамильтонианов

$$\begin{aligned} 4H_D &= r_1p_1^2 + 2zp_1p_2 - (s_1r'_1 + 2s_2z_y)p_1 - 2s_1z_xp_2 \\ &\quad + 2s_1s_2z_{xy} + \frac{s_1^2}{3}r''_1 - \frac{4}{3}s_1^2(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2), \\ 4K_D &= 2wp_1p_2 + r_2p_2^2 - 2s_2w_y p_1 - (s_2r'_2 + 2s_1w_x)p_2 \\ &\quad + 2s_1s_2w_{xy} + \frac{s_2^2}{3}r''_2 - \frac{4}{3}s_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2). \end{aligned}$$

3.2.4 Волчок М. Адлера–ван Мёрбеке

Классические гамильтонианы имеют следующий вид (параметры связаны соотношением $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$):

$$H = \sum_{i=1}^3 \left(-9\lambda_j^2 \lambda_k^2 U_i^2 + 6\lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_i) U_i V_i + \lambda_j \lambda_k (4\lambda_i^2 - \lambda_j \lambda_k) V_i^2 \right), \quad (3.19)$$

$$K = 3 \sum_{i,j} \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) U_i V_i V_j^2 + \sum_i (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k) U_i V_i^3 - 9 \sum_l U_l^2 \sum_i \lambda_j \lambda_k U_i V_i + \frac{3}{2} \sum_l U_l^2 \sum_i (3\lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \lambda_k^2) V_i^2. \quad (3.20)$$

Квантовый гамильтониан \hat{H} получается из H добавлением крышек. Однако в \hat{K} имеются мономы с некоммутирующими генераторами и возникает проблема нормального упорядочения. В результате прямых вычислений с неопределёнными коэффициентами для \hat{K} получается выражение

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \sum_{i,j} \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) (\hat{U}_i \hat{V}_i \hat{V}_j^2 + \hat{U}_i \hat{V}_j \hat{V}_i \hat{V}_j + \hat{U}_i \hat{V}_j^2 \hat{V}_i) \\ &+ \sum_i (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k) \hat{U}_i \hat{V}_i^3 - 9 \left(\sum_l \hat{U}_l^2 + \frac{1}{3} \right) \sum_i \lambda_j \lambda_k \hat{U}_i \hat{V}_i \\ &+ \frac{3}{2} \sum_l \hat{U}_l^2 \sum_i (3\lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \lambda_k^2) \hat{V}_i^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом, квантовый гамильтониан отличается от классического упорядочением в первой сумме и квантовой поправкой в третьей сумме (напомним, что $\sum_l \hat{U}_l^2$ является функцией Казимира).

Переходя к дифференциальным операторам, для \hat{H}_D получаем следующее выражение по общей формуле (3.9):

$$\begin{aligned} 4\hat{H}_D &= r_1(x) D_x^2 + 2z D_x D_y + r_2(y) D_y^2 \\ &- \left(\frac{2j_1 - 1}{2} r_1'(x) + 2j_2 z_y \right) D_x - \left(\frac{2j_2 - 1}{2} r_2'(y) + 2j_1 z_x \right) D_y \\ &+ \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6} r_1''(x) + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6} r_2''(y) + 2j_1 j_2 z_{xy} \\ &- \frac{4}{3} (9j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1)) (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)^2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} r_1(x) &= -9R(\lambda_2^2\lambda_3^2, \lambda_3^2\lambda_1^2, \lambda_1^2\lambda_2^2, x), \\ r_2(x) &= \frac{1}{9}r_1(x) + 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x), \\ z = z(x, y) &= 3W(\mu_1, \mu_2, \mu_3, x, y), \quad \mu_i = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2). \end{aligned}$$

Оператор \hat{K}_D имеет достаточно простую структуру

$$\begin{aligned} 4\hat{K}_D &= g^2D_xD_y^3 + c_1gg_yD_xD_y^2 + c_2gg_xD_y^3 \\ &\quad + (c_3gg_{yy} + c_4g_y^2)D_xD_y + (c_5g_yg_x + c_6gg_{xy})D_y^2 \\ &\quad + (c_7gg_{yyy} + c_8g_yg_{yy})D_x + (c_9g_{yy}g_x + c_{10}g_yg_{xy} + c_{11}gg_{xyy})D_y \\ &\quad + c_{12}g_{yyy}g_x + c_{13}g_{yy}g_{xy} + c_{14}g_yg_{xyy} + c_{15}gg_{xyyy}, \end{aligned}$$

хотя и с громоздкими коэффициентами. Здесь g обозначает многочлен

$$g = (\lambda_1 - \lambda_2)(xy^3 + 1) + 3\lambda_3(x + y)y,$$

связанный с коэффициентами \hat{H}_D соотношением

$$z^2 - r_1(x)r_2(y) = 36\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)g\tilde{g},$$

где $\tilde{g} = (\lambda_1 - \lambda_2)x(x + y) - \lambda_3(x^3y + 1)$. Коэффициенты c_i , в свою очередь являются многочленами от параметров j_1, j_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= -2(j_2 - 1), \quad c_2 = -2j_1, \\ c_3 &= \frac{1}{2}(3j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 - 3) + 2), \quad c_4 = -j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 - 1), \\ c_5 &= 2j_1(j_1 + j_2), \quad c_6 = -2j_1(j_1 - j_2 + 2), \\ c_7 &= -\frac{j_2}{6}(9j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 3) + 4), \quad c_8 = \frac{j_2}{2}(j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 - 1)), \\ c_9 &= -\frac{j_1}{2}(3j_1^2 + 4j_1j_2 + j_2^2 + j_1 + j_2), \quad c_{10} = 2j_1(j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 - 1)), \\ c_{11} &= -\frac{j_1}{2}(3j_1^2 - 4j_1j_2 + j_2^2 + 5j_1 - 7j_2 + 4), \\ c_{12} &= \frac{j_1j_2}{6}(9j_1^2 + 3j_1j_2 - j_2^2 + 6j_1 + 1), \\ c_{13} &= \frac{j_1j_2}{6}(-3j_1^2 + 5j_1j_2 + 3j_2^2 - 4j_1 + 2j_2 - 1), \\ c_{14} &= \frac{j_1j_2}{6}(-3j_1^2 - 5j_1j_2 + 3j_2^2 - 2j_1 - 8j_2 + 1), \\ c_{15} &= \frac{j_1j_2}{6}(9j_1^2 - 3j_1j_2 - j_2^2 + 12j_1 - 6j_2 + 7). \end{aligned}$$

3.2.5 Волчок Соколова

В этом примере удобно использовать обозначения

$$m_i = U_i + V_i, \quad n_i = U_i - V_i.$$

Волчок Соколова на $so(4)$ определяется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}m_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2 + m_3^2 + m_3(\alpha n_1 + \beta n_2) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)n_3^2, \quad (3.23)$$

и дополнительный интеграл четвёртой степени имеет вид

$$K = m_3^2(2H - m_3^2 + (\beta m_1 - \alpha m_2)^2 + (\alpha n_1 + \beta n_2)^2) + 2m_3(\alpha m_1 + \beta m_2 - (\alpha^2 + \beta^2)n_3)(m_1 n_1 + m_2 n_2). \quad (3.24)$$

Квантовый гамильтониан получается при симметризации некоммутирующих мономов:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{m}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 + [\hat{m}_3, \alpha\hat{n}_1 + \beta\hat{n}_2]^+ - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\hat{n}_3^2, \quad (3.25)$$

где

$$[a, b]^+ = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Оператор \hat{K} также получается при симметризации со специально подобранными весовыми коэффициентами. Следует отметить, что в алгебре $so(4)$ имеются однородные многочлены, тождественно равные нулю по модулю коммутационных соотношений, поэтому запись оператора \hat{K} не единственна и её можно пытаться упростить путём добавления таких выражений. Мы приведём один из возможных вариантов. Введём обозначения

$$\begin{aligned} A_{a,b,c}(m, f) &= amf^2m + b[m^2, f^2]^+ + c[f, mfm]^+ \\ &\quad + (1 - a - b - c)fm^2f, \\ B(m, f, g) &= mfg + gfm, \end{aligned}$$

тогда оператор

$$\begin{aligned} \hat{K} &= A_{\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}}(\hat{m}_3, \hat{m}_1) + A_{\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}}(\hat{m}_3, \hat{m}_2) - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{m}_3^2\hat{n}_3^2 \\ &\quad + A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1}(\hat{m}_3, \beta\hat{m}_1 - \alpha\hat{m}_2) + A_{-\frac{3}{4}, -1, \frac{7}{2}}(\hat{m}_3, \hat{m}_3 + \alpha\hat{n}_1 + \beta\hat{n}_2) \\ &\quad + B(\hat{m}_3, \alpha\hat{m}_1 + \beta\hat{m}_2 - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{n}_3, \hat{m}_1\hat{n}_1 + \hat{m}_2\hat{n}_2), \\ &\quad - \frac{1}{2}[\hat{m}_3\hat{n}_3, [\hat{m}_3, \alpha\hat{m}_1 + \beta\hat{m}_2]] \end{aligned} \quad (3.26)$$

коммутирует с \hat{H} и совпадает с K при переходе к коммутирующим переменным.

Представление $so(4)$ дифференциальными операторами в этом примере удобно слегка изменить, сделав дополнительно замену $y \rightarrow -y$, $D_y \rightarrow -D_y$, после чего ответ становится симметричным относительно x, y . Введём обозначения (параметры α, β , вообще говоря, комплексные)

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \alpha + i\beta, & \xi_2 &= -\alpha + i\beta, & r(x) &= x(\xi_1 x + 1)(x + \xi_2), \\ z &= z(x, y) = \xi_1 xy(x + y) + (x + y)^2 + 2(1 - \xi_1 \xi_2)xy + \xi_2(x + y),\end{aligned}$$

тогда \hat{H} записывается в виде (3.9):

$$\begin{aligned}2\hat{H}_D &= r(x)D_x^2 + zD_xD_y + r(y)D_y^2 \\ &\quad - \left(\frac{2j_1 - 1}{2}r'(x) + j_2z_y\right)D_x - \left(\frac{2j_2 - 1}{2}r'(y) + j_1z_x\right)D_y \\ &\quad + \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6}r''(x) + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6}r''(y) + j_1j_2z_{xy} \\ &\quad + \frac{1}{3}(j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1))(\xi_1\xi_2 + 4)\end{aligned}$$

(обратим внимание, что степень многочлена r равна 3 из-за того, что в переменных U, V гамильтониан (3.23) принимает вид (3.8) с недиагональными матрицами A, B). Второй оператор имеет слишком громоздкий вид и мы выпишем явно только старшие члены:

$$\begin{aligned}\hat{K}_D &= w^2(xD_x + yD_y)^2D_xD_y - 2j_2x^2ww_yD_x^3 - 2j_1y^2ww_xD_y^3 \\ &\quad - 2xw((j_1 - 1)xw_x + (j_1 + j_2 - 1)w + (2j_2 - 1)yw_y)D_x^2D_y \\ &\quad - 2yw((2j_1 - 1)xw_x + (j_1 + j_2 - 1)w + (j_2 - 1)yw_y)D_x^2D_y + \dots,\end{aligned}$$

где $w = \xi_1 xy + x + y + \xi_2$.

3.2.6 Классический предел

Постоянная Планка вводится простым растяжением генераторов, в результате коммутационные соотношения (3.6) заменяются на

$$[\hat{U}_i, \hat{U}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{U}_k, \quad (\hat{U}, \hat{U}) = \hbar^2j_1(j_1 + 1),$$

а представление (3.7) заменяется на

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= \hbar\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 1)D_x + j_1x\right), & \hat{U}_2 &= \hbar\left(-\frac{i}{2}(x^2 + 1)D_x + ij_1x\right), \\ \hat{U}_3 &= \hbar(-xD_x + j_1).\end{aligned}$$

Формулы для переменных V меняются аналогично. Переход к классическому пределу для любого квантового оператора \hat{A} определяется формулой

$$A = \lim_{\hbar \rightarrow 0} e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1x+p_2y)} \left(\hat{A} e^{\frac{i}{\hbar}(p_1x+p_2y)} \right) \Big|_{j_i = \frac{s_i}{\hbar}},$$

причём коммутатор и функция Казимира для каждой копии $so(3)$ переходят в скобку Ли–Пуассона (3.4), а формулы для самих генераторов переходят в представление (3.5) через переменные Дарбу.

Если применить описанную процедуру к \hat{H}_D, \hat{K}_D , то она даст те же выражения для H_D, K_D , что и непосредственный переход к переменным Дарбу в классических гамильтонианах H, K . Это гарантируется “принципом соответствия”, который является инвариантным, то есть не зависит явно от выбора представления алгебры $so(4)$. Проверка принципа соответствия для волчков Шоттки–Манакова и Стеклова тривиальна, так как эти системы не содержат квантовых поправок. В случае Адлера–ван Мёрбеке для корректного перехода к классическому пределу надо подправить \hat{K} , заменив одно из слагаемых в формуле (3.21):

$$\left(\sum_l \hat{U}_l^2 + \frac{1}{3} \right) \sum_i \lambda_j \lambda_k \hat{U}_i \hat{V}_i \quad \rightarrow \quad \left(\sum_l \hat{U}_l^2 + \frac{\hbar^2}{3} \right) \sum_i \lambda_j \lambda_k \hat{U}_i \hat{V}_i,$$

в результате все члены станут однородны по \hbar , а в пределе $\hbar \rightarrow 0$ получится классический гамильтониан (3.20).

Следует отметить, что функции Казимира $\hbar^2 j_i(j_i + 1)$ имеют квантовую природу, поскольку j_i принимают целые/полуцелые значения. При переходе к пределу $\hbar \rightarrow 0$ вводятся классические (конечные) величины $s_i = \hbar j_i$. С другой стороны, если мы имеем дело со спинами, то величины j_i конечны, а значит $s_i \rightarrow 0$, что согласуется с тезисом о том, что спин — чисто квантовое понятие.

3.3 Волчки на $e(3)$

3.3.1 Координаты Дарбу и операторные представления

Скобка Ли–Пуассона на $e(3)$ имеет вид

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$$

и обладает функциями Казимира

$$(M, \gamma) = l, \quad (\gamma, \gamma) = a^2,$$

где $M = (M_1, M_2, M_3,)$ $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Мы будем использовать следующее представление в координатах Дарбу:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{i}{2}(x^2 - 1)p_1 - \frac{i}{2}(y^2 - 1)p_2 + \frac{l}{2a}(x - y), \\ M_2 &= -\frac{1}{2}(x^2 + 1)p_1 - \frac{1}{2}(y^2 + 1)p_2 - i\frac{l}{2a}(x - y), \\ M_3 &= i(xp_1 + yp_2), \\ \gamma_1 &= a\frac{1 - xy}{x - y}, \quad \gamma_2 = ia\frac{1 + xy}{x - y}, \quad \gamma_3 = a\frac{x + y}{x - y}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Отметим ещё представление с вещественными координатами Дарбу (1.45):

$$\begin{aligned} M_1 &= -p_1q_1q_2 + \frac{1}{2}p_2(q_1^2 - q_2^2 - 1) + \frac{lq_1(q_1^2 + q_2^2 + 1)}{2a(q_1^2 + q_2^2)}, \\ M_2 &= p_2q_1q_2 + \frac{1}{2}p_1(q_1^2 - q_2^2 + 1) + \frac{lq_2(q_1^2 + q_2^2 + 1)}{2a(q_1^2 + q_2^2)}, \\ M_3 &= p_1q_2 - p_2q_1, \\ \gamma_1 &= \frac{2aq_1}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}, \quad \gamma_2 = \frac{2aq_2}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}, \quad \gamma_3 = \frac{a(q_1^2 + q_2^2 - 1)}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

При квантовании скобка Ли–Пуассона заменяется на коммутационные соотношения алгебры $e(3)$

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k, \quad [\hat{M}_i, \hat{\gamma}_j] = i\varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad [\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_j] = 0, \quad (3.29)$$

с операторами Казимира

$$(\hat{\gamma}, \hat{M}) = l, \quad (\hat{\gamma}, \hat{\gamma}) = a^2. \quad (3.30)$$

Для этой операторной алгебры имеется следующее представление:

$$\begin{aligned} \hat{M}_1 &= \frac{1}{2}(1 - x^2)D_x + \frac{1}{2}(1 - y^2)D_y + \frac{l}{2a}(x - y), \\ \hat{M}_2 &= \frac{i}{2}(1 + x^2)D_x + \frac{i}{2}(1 + y^2)D_y - i\frac{l}{2a}(x - y), \\ \hat{M}_3 &= xD_x + yD_y, \\ \hat{\gamma}_1 &= a\frac{1 - xy}{x - y}, \quad \hat{\gamma}_2 = ia\frac{1 + xy}{x - y}, \quad \hat{\gamma}_3 = a\frac{x + y}{x - y}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Отметим, что все операторы инвариантны относительно замены

$$x \leftrightarrow y, \quad a \rightarrow -a.$$

Матричное представление можно получить, вводя базисную волновую функцию $|\psi\rangle = |m, n\rangle = (x + y)^m (x - y)^n$. Такой выбор обусловлен знаменателем генераторов γ_i в представлении (3.31) и соображением симметрии. Простые вычисления дают ($M_{\pm} = M_1 \pm iM_2$, $\gamma_{\pm} = \gamma_1 \pm i\gamma_2$)

$$\begin{aligned} \hat{M}_3 |m, n\rangle &= (m + n) |m, n\rangle, & \hat{M}_- |m, n\rangle &= 2m |m + 1, n - 1\rangle, \\ \hat{M}_+ |m, n\rangle &= -\left(n + \frac{m}{2}\right) |m + 1, n\rangle - \frac{m}{2} |m - 1, n + 2\rangle + \frac{l}{a} |m, n + 1\rangle, \\ \hat{\gamma}_3 |m, n\rangle &= a |m + 1, n - 1\rangle, & \hat{\gamma}_- |m, n\rangle &= 2a |m, n - 1\rangle, \\ \hat{\gamma}_+ |m, n\rangle &= \frac{a}{2} |m, n + 1\rangle - \frac{a}{2} |m + 2, n - 1\rangle. \end{aligned}$$

При переходе к классическому пределу постоянная Планка вводится следующим образом:

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} M_k, \quad [\hat{M}_i, \hat{\gamma}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad [\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_j] = 0,$$

причём операторное представление заменяется на

$$\begin{aligned} \hat{M}_1 &= \hbar \left(\frac{1}{2} (1 - x^2) D_x + \frac{1}{2} (1 - y^2) D_y \right) + \frac{l}{2a} (x - y), \\ \hat{M}_2 &= \hbar \left(\frac{i}{2} (1 + x^2) D_x + \frac{i}{2} (1 + y^2) D_y \right) - i \frac{l}{2a} (x - y), \\ \hat{M}_3 &= \hbar (x D_x + y D_y), \\ \hat{\gamma}_1 &= a \frac{1 - xy}{x - y}, \quad \hat{\gamma}_2 = ia \frac{1 + xy}{x - y}, \quad \hat{\gamma}_3 = a \frac{x + y}{x - y}. \end{aligned}$$

Переход к классическому пределу аналогичен случаю $so(4)$:

$$A = \lim_{\hbar \rightarrow 0} e^{-\frac{i}{\hbar} (p_1 x + p_2 y)} \left(\hat{A} e^{\frac{i}{\hbar} (p_1 x + p_2 y)} \right),$$

следует отметить только, что операторы Казимира (3.30) являются чисто классическими. Применение этой процедуры к генераторам M_i приводит к скобке (3.27). В случае волчка Ковалевской эта процедура приводит к изменению коэффициента в операторе \hat{K} (3.36) (ср. с [79]):

$$\hat{K} = \frac{1}{2} (\hat{k}_+ \hat{k}_- + \hat{k}_- \hat{k}_+) + 4\hbar^2 (\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2)$$

3.3.2 Волчок Клебша

В этом примере проблемы упорядочения нет, квантовый волчок определяется гамильтонианами

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\hat{M}_i^2 + \lambda_i \hat{\gamma}_i^2 \right), \quad (3.32)$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i \hat{M}_i^2 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \hat{\gamma}_i^2 \right), \quad \lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (3.33)$$

Переходя к представлению (3.31), получаем следующие коммутирующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} 2\hat{H}_D &= -(x-y)^2 D_x D_y + \frac{l}{a}(x-y)(D_x + D_y) \\ &\quad + \frac{a^2 z}{(x-y)^2} + a^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ 8\hat{K}_D &= r(x)D_x^2 + 2zD_x D_y + r(y)D_y^2 \\ &\quad + \left(\frac{a-l}{2a}r'(x) + \frac{l}{a}z_y \right) D_x + \left(\frac{a+l}{2a}r'(y) - \frac{l}{a}z_x \right) D_y \\ &\quad + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{l^2}{a^2}(x-y)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{l}{a}(x^2 - y^2) + a^2 \frac{r(x)r(y) - z^2}{(x-y)^4}, \end{aligned}$$

где

$$r(x) = R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; x), \quad z = z(x, y) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; x, y).$$

Отметим, что тождество (3.2) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} z^2 - r(x)r(y) &= 4(x-y)^4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) \\ &\quad + 4(x-y)^2 W(\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2; x, y), \end{aligned}$$

поэтому в последнем слагаемом \hat{K}_D происходит частичное сокращение. Классические гамильтонианы в переменных Дарбу имеют аналогичный вид, но коэффициенты немного меняются:

$$\begin{aligned} 2H_D &= -(x-y)^2 p_1 p_2 + \frac{2l}{a}(x-y)(p_1 + p_2) \\ &\quad + \frac{a^2 z}{(x-y)^2} + a^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ 8K_D &= r(x)p_1^2 + 2z p_1 p_2 + r(y)p_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{l}{a}(r'(x) - 2z_y)p_1 + \frac{l}{a}(r'(y) - 2z_x)p_2 \\
& + 4(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{l^2}{a^2}(x - y)^2 + a^2\frac{r(x)r(y) - z^2}{(x - y)^4}.
\end{aligned}$$

3.3.3 Волчок Ковалевской

Классический волчок определяется гамильтонианами

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2) - \frac{1}{2}\gamma_1, \quad K = k_+k_-, \quad (3.34)$$

где обозначено

$$k_{\pm} = (M_1 \pm iM_2)^2 + \gamma_1 \pm i\gamma_2.$$

В переменных Дарбу (3.27) имеем:

$$\begin{aligned}
2H &= x^2p_1^2 + (4xy - x^2 - y^2)p_1p_2 + y^2p_2^2 + \frac{2l}{a}(x - y)(p_1 + p_2) + a\frac{xy - 1}{x - y}, \\
K &= \left(\left(x^2p_1 + y^2p_2 - \frac{2l}{a}(x - y) \right)^2 - \frac{2axy}{x - y} \right) \left((p_1 + p_2)^2 + \frac{2a}{x - y} \right).
\end{aligned}$$

Квантовая версия волчка Ковалевской имеет вид [79, 71]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + 2\hat{M}_3^2) - \frac{1}{2}\hat{\gamma}_1, \quad (3.35)$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2}(\hat{k}_+\hat{k}_- + \hat{k}_-\hat{k}_+) + 4(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2), \quad (3.36)$$

где

$$\hat{k}_{\pm} = (\hat{M}_1 \pm i\hat{M}_2)^2 + \hat{\gamma}_1 \pm i\hat{\gamma}_2.$$

Переход к представлению (3.31) даёт следующие коммутирующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned}
2\hat{H}_D &= x^2D_x^2 + (4xy - x^2 - y^2)D_xD_y + y^2D_y^2 \\
&+ \frac{1}{a}((a + l)x - ly)D_x + \frac{1}{a}(lx + (a - l)y)D_y + a\frac{xy - 1}{x - y}, \\
\hat{K}_D &= \left[f^2 - \frac{2axy}{x - y}, g^2 + \frac{2a}{x - y} \right]^+ + 4[f, gfg]^+ - 2[fg, gf]^+ - 2[f^2, g^2]^+,
\end{aligned}$$

где $[a, b]^+ = \frac{1}{2}(ab + ba)$ и

$$f = x^2D_x + y^2D_y - \frac{l}{a}(x - y), \quad g = D_x + D_y.$$

Отметим, что гамильтонианы (3.35), (3.36) допускают следующее обобщение (гиростат Ковалевской) [70]:

$$\begin{aligned} 2\hat{H} &= \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + 2\hat{M}_3^2 - \hat{\gamma}_1 + c\hat{M}_3, \\ \hat{K} &= \frac{1}{2}(\hat{k}_+\hat{k}_- + \hat{k}_-\hat{k}_+) + 4(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2) - 2c(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2)\hat{M}_3 \\ &\quad + 2c^2\hat{M}_3^2 + c(c^2 + 1)\hat{M}_3 - 2c\hat{M}_1\hat{\gamma}_3 - c^2\hat{\gamma}_1 - ic\hat{\gamma}_2. \end{aligned}$$

3.3.4 Случай Горячёва–Чаплыгина

Квантование рассматривалось в [69]. Гамильтонианы

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + 4\hat{M}_3^2 - \hat{\gamma}_1 + c\hat{M}_3, \\ \hat{K} &= 4(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2)\hat{M}_3 + 2\hat{M}_1\hat{\gamma}_3 - 4c\hat{M}_3^2 + (1 - c^2)\hat{M}_3 + c\hat{\gamma}_1 + i\hat{\gamma}_2 \end{aligned}$$

удовлетворяют соотношению

$$[\hat{H}, \hat{K}] = 4il\hat{M}_2,$$

где $l = (\hat{\gamma}, \hat{M})$ оператор Казимира на $e(3)$. Таким образом, при $l = 0$ имеем интегрируемый случай. Переходя к операторам при помощи представления (3.31) (при $l = 0$), получаем коммутирующую пару

$$\begin{aligned} \hat{H}_D &= 3x^2D_x^2 - (x^2 - 8xy + y^2)D_xD_y + 3y^2D_y^2 \\ &\quad + (c + 3)(xD_x + yD_y) + a\frac{xy - 1}{x - y}, \\ -\hat{K}_D - 4\left(\frac{c}{3} + 1\right)\hat{H}_D &= 4x^3D_x^3 + 4(x^2 + xy + y^2)(xD_x + yD_y)D_xD_y + 4y^3D_y^3 \\ &\quad + \left(\frac{c}{3} + 3\right)(4(x - y)^2D_xD_y - (c + 3)(xD_x + yD_y)) \\ &\quad + \frac{a}{x - y}\left((x + y)((x^2 - 1)D_x + (y^2 - 1)D_y) - \left(\frac{c}{3} + 5\right)xy + \frac{c}{3} + 3\right). \end{aligned}$$

3.4 Спектры

Квантование в генераторах алгебры Ли является универсальным, но постановка граничной задачи и вычисление спектров зависят от выбора конкретного представления. В качестве приложения, рассмотрим вопрос о спектре волчка

Эйлера на $so(3)$ в представлении (3.7). Напомним, что квантование этой модели было проведено в работах Крамерса–Иттманна [75]. В случае представления (3.7) естественно определять спектр из условия полиномиальности собственных функций. Для сравнения, отметим работу Комарова–Кузнецова [71], где указан спектр для матричного представления, и недавнюю работу Гроссе–Веселова [53], где изучался спектр для представления в эллиптических координатах и установлено, что коэффициенты характеристического многочлена на данном уровне $j = s$ выражаются через так называемые эллиптические многочлены Бернулли. Для волчков на $so(4)$ задача о спектре довольно сложна и мы ограничимся выводом уравнений для собственных функций в случае Шоттки–Манакова.

3.4.1 Матричное представление $so(3)$

Введём волновую функцию $|m, j\rangle = x^{j-m}$, тогда представление (3.7) имеет в этом базисе следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 \pm i\hat{U}_2 &= \hat{U}_\pm, & \hat{U}_3|m, j\rangle &= m|m, j\rangle, \\ \hat{U}_+|m, j\rangle &= (j - m)|m + 1, j\rangle, & \hat{U}_-|m, j\rangle &= (j + m)|m - 1, j\rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

В этом случае условие, что $j - m$ целое, следует из требования однозначности базисной функции x^{j-m} . Если есть симметрия по обращению времени $m \rightarrow -m$, то и $j + m$ должно быть целым, тогда j, m целые/полуцелые одновременно. Из вида матричных элементов следует, что $m = -j, \dots, j$, при этом условие $j > 0$ следует из требования аналитичности базисной функции. Из её вида также следует, что волновая функция на орбите $j = \text{const}$ есть полином степени $2j$.

Волновую функцию и спектральную задачу на $so(3)$ можно записать следующим образом:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j C(m, j) |m, j\rangle, \quad H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

Волновая функция и спектральная задача на $so(4)$ выглядят аналогично:

$$|\psi\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C(m_1, m_2; j_1, j_2) |m_1, m_2, j_1, j_2\rangle, \quad H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

В дифференциальном представлении, базисная волновая функция на $so(4)$ выбирается в виде $|m_1, m_2, j_1, j_2\rangle = x^{j_1-m_1}y^{j_2-m_2}$. Тогда общая волновая функция — произвольный полином степени $2j_1$ по x и $2j_2$ по y .

3.4.2 Спектр волчка Эйлера на $so(3)$

Задача на собственные значения имеет вид

$$\hat{H}\psi_j^\lambda(x) = \lambda\psi_j^\lambda(x), \quad \hat{C}\psi_j^\lambda(x) = j(j+1)\psi_j^\lambda(x),$$

где

$$\hat{H} = \alpha_1\hat{U}_1^2 + \alpha_2\hat{U}_2^2 + \alpha_3\hat{U}_3^2, \quad \hat{C} = \hat{U}_1^2 + \hat{U}_2^2 + \hat{U}_3^2.$$

С точностью до несущественного сдвига спектра можно положить $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Используем представление дифференциальными операторами для алгебры $so(3)$ (3.37) и представим волновые функции в виде

$$\psi_j^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{2j} \tilde{C}_j^\lambda(k)x^k.$$

Тогда задачу на собственные значения можно переписать в форме рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(2j+1-k)(2j+2-k)C_j^\Lambda(k-2) \\ & + \left(\frac{1}{2}(j(j+1) - 3(j-k)^2)\xi - \Lambda \right) C_j^\Lambda(k) \\ & + \frac{1}{4}(k+1)(k+2)C_j^\Lambda(k+2) = 0, \end{aligned}$$

где $\xi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$, $\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha_1 - \alpha_2}$, $C_j^\Lambda = \tilde{C}_j^\lambda$, с граничными условиями на левом конце

$$C_j^\Lambda(-2) = C_j^\Lambda(-1) = 0, \quad C_j^\Lambda(0) = C_j^\Lambda(1) = 1.$$

Задача для чётных и нечётных полиномов разделяется.

Если j целое, то граничное условие на правом конце имеет вид $C_j^\Lambda(2j+2) = 0$ для чётных полиномов и $C_j^\Lambda(2j+1) = 0$ для нечётных.

Если j полуцелое, то наоборот, на правом конце имеем $C_j^\Lambda(2j+1) = 0$ для чётных полиномов и $C_j^\Lambda(2j+2) = 0$ для нечётных.

В итоге получаем, что собственные значения гамильтониана \hat{H} являются корнями следующего полинома:

$$P_j(\Lambda) = C_j^\Lambda(2j+1)C_j^\Lambda(2j+2), \quad \deg P_j(\Lambda) = 2j+1.$$

Выпишем явно несколько полиномов $P_j(\Lambda)$, нормированных так, чтобы коэффициент при старшей степени Λ^{2j+1} был равен 1:

$$\begin{aligned} P_0(\Lambda) &= \Lambda, \\ P_{1/2}(\Lambda) &= \Lambda^2, \\ P_1(\Lambda) &= \frac{1}{4}(\Lambda - \xi)(2\Lambda + \xi + 1)(2\Lambda + \xi - 1), \\ P_{3/2}(\Lambda) &= \frac{1}{16}(4\Lambda - 9\xi^2 - 3)^2, \\ P_2(\Lambda) &= \frac{1}{4}(\Lambda + 3\xi)(2\Lambda - 3\xi + 3)(2\Lambda - 3\xi - 3)(\Lambda - 9\xi^2 - 3)^2 \\ P_{5/2}(\Lambda) &= (\Lambda^3 - 7\Lambda(3\xi^2 + 1) + 20\xi(\xi^2 - 1))^2. \end{aligned}$$

В силу теоремы Крамерса [78, стр. 269] о двукратном вырождении систем с общим полуцелым спином, все полиномы $P_j(\lambda)$ с полуцелыми j являются полными квадратами.

3.4.3 Матричное представление для волчка

Шоттки–Манакова

В случае Шоттки–Манакова мы имеем две совместные задачи на собственные значения $\hat{H}\psi = \lambda\psi$, $\hat{K}\psi = \mu\psi$. Волновая функция имеет вид

$$\psi_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(x, y) = \sum_{k=0}^{2j_1} \sum_{l=0}^{2j_2} C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) x^k y^l.$$

В решеточном представлении возникает пятиточечное уравнение для собственных значений μ :

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \alpha_2)(2j_1 + 1 - k)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k - 1, l - 1) \\ &+ (\alpha_1 - \alpha_2)(k + 1)(l + 1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k + 1, l + 1) \\ &+ 2(2(j_1 - k)(j_2 - l)\alpha_3 - \mu)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) \\ &+ (\alpha_1 + \alpha_2)(2j_1 + 1 - k)(l + 1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k - 1, l + 1) \\ &+ (\alpha_1 + \alpha_2)(k + 1)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k + 1, l - 1) = 0 \end{aligned}$$

и девятиточечное для собственных значений λ :

$$\begin{aligned}
& (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(k+1)(k+2)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k+2, l) \\
& + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(l+1)(l+2)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l+2) \\
& + 2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)(k+1)(l+1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k+1, l+1) \\
& + 2\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_1)(k+1)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k+1, l-1) \\
& + \left((\alpha_1 - \alpha_2)^2((2j_1 + 1 - k)^2 + (2j_2 + 1 - l)^2 \right. \\
& \quad - 2(j_1 + j_2 + 1 - k)(j_1 + j_2 + 1 - l) \\
& \quad - (j_1 - j_2)^2 - j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)) \\
& \quad \left. - 4\alpha_3^2((j_1 - k)^2 + (j_2 - l)^2) \right. \\
& \quad \left. + (\alpha_2 + \alpha_1)^2((j_1 + j_2 - k - l)^2 - j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)) \right) C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) \\
& + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(2j_1 + 1 - k)(2j_1 + 2 - k)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k-2, l) \\
& + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(2j_2 + 1 - l)(2j_2 + 2 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l-2) \\
& + 2\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_1)(2j_1 + 1 - k)(l+1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k-1, l+1) \\
& + 2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)(2j_1 + 1 - k)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k-1, l-1) = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия: $C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) = 0$, если пара (k, l) лежит вне прямоугольника с вершинами $(0, 0)$, $(j_1, 0)$, (j_1, j_2) , $(0, j_2)$.

Решения $C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l)$ распадаются на решения на двух подрешётках: будем называть решение “чётным”, если оно равно нулю при нечётном $k+l$, и “нечётным”, если оно равно нулю при чётном $k+l$.

На самом деле, нет необходимости разрешать 9-точечное соотношение: достаточно определить волновые функции из 5-точечного соотношения, подставить в 9-точечное и определить зависимость λ_i от μ_i . Есть основания считать, что пары (λ_i, μ_i) должны лежать на одной алгебраической кривой.

Для примера рассмотрим случай $j_1 = j$, $j_2 = \frac{1}{2}$. Волновая функция разделяется на чётную и нечётную. Чётная функция имеет вид

$$\psi = C_0 + C_1xy + C_2x^2 + C_3x^3y + \dots,$$

коэффициенты удовлетворяют граничным условиям $C_{-2} = C_{-1} = C_{2j+1} = 0$ и рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\alpha_1 + (-1)^k \alpha_2)(2j+1-k)C_{k-1} + (\alpha_3(j-k)(-1)^k - \mu)C_k \\
& + \frac{1}{2}(\alpha_1 - (-1)^k \alpha_2)(k+1)C_{k+1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

С точностью до постоянных множителей, находим

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \mu - j\alpha_3, \quad C_2 = \mu^2 - \alpha_3\mu - \alpha_3^2 j(j-1) - \frac{1}{2}j(\alpha_1 - \alpha_2)^2, \quad \dots$$

Нечётная функция имеет вид

$$\psi = B_0 y + B_1 x + B_2 x^2 y + B_3 x^3 + \dots,$$

коэффициенты удовлетворяют граничным условиям $B_{-2} = B_{-1} = B_{2j+1} = 0$ и рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - (-1)^k \alpha_2)(2j + 1 - k)B_{k-1} + 2(\alpha_3(k - j)(-1)^k - \mu)B_k \\ + (\alpha_1 + (-1)^k \alpha_2)(k + 1)B_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

С точностью до постоянных множителей,

$$B_0 = 0, \quad B_1 = \mu + j\alpha_3, \quad B_2 = \mu^2 + \alpha_3\mu - \alpha_3^2 j(j-1) - \frac{1}{2}j(\alpha_1 - \alpha_2)^2, \quad \dots$$

Уравнение на собственное значение имеет вид

$$P_{j,1/2}(\mu) = C(2j + 1)B(2j + 1) = 0, \quad \deg P_{j,1/2}(\mu) = 2(2j + 1).$$

Полином $P_{j,1/2}(\mu)$ является полным квадратом при целых j в силу теоремы Крамера, так как в этом случае $j + \frac{1}{2}$ полуцелое.

3.5 Тест Пенлеве и свойство факторизуемости (3.2)

Рассмотрим классический гамильтониан с квадратичной главной частью

$$H = a(x)p_1^2 + 2f(x, y)p_1 p_2 + b(y)p_2^2 + \dots \quad (3.39)$$

и соответствующую гамильтонову динамику

$$x_t = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad y_t = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad p_{1,t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p_{2,t} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (3.40)$$

Анализируя возможные особенности решения (тест Пенлеве), получаем, что лорановское разложение вблизи особенности для этих переменных имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1(t - t_0) + x_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ y &= y_0 + y_1(t - t_0) + y_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ p_1 &= \frac{P_1^-}{t - t_0} + P_1^0 + P_1^1(t - t_0) + \dots, \\ p_2 &= \frac{P_2^-}{t - t_0} + P_2^0 + P_2^1(t - t_0) + \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Gamma(x, y) &= f(x, y)^2 - a(x)b(y), \\ \Gamma_1(x, y) &= \partial_y \Gamma(x, y) + 2a(x)\partial_x f(x, y) - a'(x)f(x, y), \\ \Gamma_2(x, y) &= \partial_x \Gamma(x, y) + 2b(y)\partial_y f(x, y) - b'(y)f(x, y).\end{aligned}$$

При подстановке рядов (3.41) в уравнения Гамильтона (3.40) возникают следующие условия:

$$\Gamma(x_0, y_0) = 0, \quad \Gamma_1(x_0, y_0)\Gamma_2(x_0, y_0) = 0.$$

При этом

$$P_1^- = -\frac{f(x_0, y_0)}{\partial_{y_0} \Gamma(x_0, y_0)}, \quad P_2^- = \frac{a(x_0)}{\partial_{y_0} \Gamma(x_0, y_0)}$$

или

$$P_1^- = \frac{b(y_0)}{\partial_{x_0} \Gamma(x_0, y_0)}, \quad P_2^- = -\frac{f(x_0, y_0)}{\partial_{x_0} \Gamma(x_0, y_0)}.$$

Таким образом, $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap \Gamma_1 \neq \Gamma$ или $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap \Gamma_2 \neq \Gamma$. Если алгебраические кривые Γ и Γ_i имеют конечное число точек пересечения (x_0, y_0) , то тест Пенлеве не выполняется, так как в этом случае в решении (3.41) не хватает параметров (начальные условия для координат не произвольны). Другая возможность заключается в том, что хотя бы одно из пересечений $\Gamma \cap \Gamma_1$ или $\Gamma \cap \Gamma_2$ является, в свою очередь, алгебраической кривой, описываемой некоторым уравнением $w(x, y) = 0$. В этом случае полином $w(x, y)$ является делителем полинома $\Gamma(x, y)$, что и доказывает формулу (3.2).

Таким образом, свойство факторизуемости (3.2) доказывается, в классическом случае, при помощи теста Пенлеве. Для дифференциального оператора (3.1) это рассуждение непосредственно не применимо, но, поскольку коэффициенты главной части при переходе к классическому пределу не меняются, то свойство факторизуемости можно считать доказанным и для квантового случая.

Следует отметить, что, за исключением волчка Стеклова, для которого $b = 0$, в остальных рассмотренных примерах гамильтонианы имеют вид (3.39) с $a \neq 0$, $b \neq 0$. В этих примерах фактически выполняется свойство $\Gamma \cap \Gamma_1 = \Gamma \cap \Gamma_2$, более сильное чем (3.2).

В этой главе мы рассмотрели коммутирующие дифференциальные операторы специального типа, связанные с квантовыми аналогами интегрируемых волчков. Для волчков М.Адлера–ван Мёрбеке, Соколова, а также для других волчков получены их квантовые аналоги.

Глава 4

Канонические преобразования Беклунда

В этой главе будет использован метод получения преобразований Беклунда (ПБ) лагранжевых систем. Мы предполагаем, что существует функционал действия $\mathcal{S} = \int dt \mathcal{L}[q]$, где квадратные скобки означают, что функция Лагранжа \mathcal{L} может зависеть от величины $q(x, t)$ и ее производных (мы в основном будем рассматривать одномерные системы).

Также в этой Главе будет подробно обсуждаться случай интегрируемых обобщений нелинейного уравнения Шредингера, а также возможность обобщения метода на случай высших размерностей. В качестве критерия интегрируемости используется факт наличия преобразований Беклунда определенного вида у рассматриваемых систем, что приводит к "фиксированию калибровки" - число физически различных интегрируемых систем сильно уменьшается.

В теории интегрируемых систем хорошо известно нелинейное уравнение Шредингера (НШ), а также ряд обобщающих его систем, которых известно несколько десятков. Наиболее полный список таких систем был получен в знаменитой работе Михайлова, Шабата и Ямилова [108], который был получен с помощью симметричного метода. Существует много критериев интегрируемости таких систем, которые, по-видимому, связаны друг с другом, поэтому естественно выбрать такой критерий, который, с одной стороны, позволит выделять только действительно различные системы, с другой стороны этот критерий не должен затенять физическую причину интегрируемости этих систем.

В этой главе мы будем обозначать символами \mathcal{H} , \mathcal{L} , \mathcal{F} - гамильтониан, лагранжиан и производящую функцию канонического преобразования соответственно, а символами H , L , F - плотности соответствующих величин. В тех местах текста, где это не может привести к недоразумению, мы будем использовать выражение "гамильтониан" вместо "плотность гамильтониана" и т.п.

Кроме того, мы будем записывать $\hat{H} = H$, если $\hat{H} - H \in \mathfrak{S}D_x$, и, аналогично для других плотностей.

В данной Главе используется следующий критерий: существует каноническое преобразование, не меняющее вариацию гамильтониана системы, тем самым вариация действия $\delta S = \delta \int dt dx (pq_t - H)$ инвариантна, а значит полученное преобразование является преобразованием Беклунда (ПБ) (о связи ПБ и метода обратной задачи см. [110]) для данной системы, т.е. переводит одно решение в другое.

Целью этой Главы является не столько построение полной классификации интегрируемых систем (хотя она будет получена для одномерных систем типа НШ в простом и сжатом виде), сколько выявление их дискретных симметрий в физически ясной форме, играющих в теории интегрируемых систем почти такую же роль, как и непрерывные симметрии в калибровочных теориях.

В конце Главы мы рассмотрим возможность обобщения метода на двумерие, в частности приведем вид гамильтониана и ПБ для системы Дэви-Стюартсона и построим октаэдрическую решетку ПБ этой системы.

4.1 "u-v" системы типа нелинейного уравнения Шредингера

Для дальнейшей формулировки метода построения ПБ для различных случаев, рассмотрим совместные системы вида:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + F(u_x, v_x, u, v) \\ -v_t &= v_{xx} + G(u_x, v_x, u, v) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Нетрудно увидеть, что при подстановке

$$F = uv^2, \quad G = u^2v, \quad u = \psi, \quad v = \psi^*$$

система (4.1) переходит в обычное нелинейное уравнение Шредингера. Приведем еще один интересный пример - при подстановке [108]

$$n_- = 2/(u - v), \quad n_+ = -2uv/(u - v), \quad n_z = (u + v)/(u - v)$$

— известная модель Гейзенберга (или модель n -поля - $\vec{n}_t = \vec{n}_{xx} \times \vec{n}$) переходит в $u - v$ систему, если $F = -2u_x^2/(u - v)$, $G = 2v_x^2/(u - v)$. Обычный путь доказательства интегрируемости - применение симметричного метода.

Мы, однако, перейдем сразу к выводу преобразований Беклунда, используя гамильтонов формализм. Будем считать, что первое уравнение Гамильтона, а именно: $q_t = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p}$, сразу совпадает с одним из уравнений $u - v$ системы (4.1), (например, на v). Уже это требование сильно ограничивает вид гамильтониана:

$$H = p_x q_x + h(q_x, q, p), \quad (4.2)$$

здесь $q = v$, импульс p необходимо выразить через u и v , но важно, что функция h не зависит от p_x .

Очевидно, что существует и дуальное представление к (4.2), а именно:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\tilde{p}_x \hat{q}_x + \hat{h}(\hat{q}_x, \hat{q}, \tilde{p}), \\ \hat{q} &= u, \quad \tilde{p} = \tilde{p}(u, v), \end{aligned} \quad (4.3)$$

которое при варьировании по \tilde{p} дает уравнение на u системы (4.1).

Чтобы еще больше конкретизировать вид гамильтониана, а также связать гамильтонианы H и \hat{H} , построим ПБ:

1. Существуют преобразования Беклунда (ПБ) $B(p, q) = (\hat{p}, \hat{q})$, сохраняющие вариацию гамильтониана и скобки Пуассона инвариантными (в случае систем типа НШ скобки Пуассона можно всегда выбрать каноническими, но технически более удобно не следить за скобками, а потребовать инвариантность временной части действия, в данном случае - pq_t).
2. Преобразования B можно представить в виде композиции двух преобразований B_p и B_q , таких что:

$$\begin{aligned} B_q(p, q) &= (\tilde{p}, \hat{q}) : \quad p = \frac{\delta S[q, \hat{q}]}{\delta q}, \quad \tilde{p} = -\frac{\delta S[q, \hat{q}]}{\delta \hat{q}} \\ B_p(\tilde{p}, \hat{q}) &= (\hat{p}, \hat{q}) : \quad \hat{p} = \tilde{p} + \frac{\delta T[\hat{q}]}{\delta \hat{q}} \\ B &= B_p B_q. \end{aligned} \quad (4.4)$$

3. Дуальность. Гамильтониан под действием B_p и B_q преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{H}(p, q) \rightarrow \hat{\mathcal{H}}(\tilde{p}, \hat{q}) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{p}, \hat{q}). \quad (4.5)$$

Замечание 4.1. Простейшее ПБ определяется условием $\tilde{p} = p$. В этом случае вид преобразования B_q сильно упрощается:

$$B_q(p, q) = (p, \hat{q}) : \quad q = \hat{q} + \frac{\delta \tilde{T}[\hat{p}]}{\delta \hat{p}}. \quad (4.6)$$

Дуальность в этом случае означает не только перемену знака перед старшим членом в гамильтониане, но и схожий вид преобразований B_p и B_q .

Далее мы рассмотрим этот простейший вид ПБ для определения гамильтониана, а затем обобщим ПБ.

4.1.1 Преобразования Беклунда и гамильтонианы $u - v$ систем

Из-за вида B_p , гамильтониан является полиномом второй степени по p :

$$H = p_x q_x + a(q_x, q) p^2 + b(q_x, q) p + c(q_x, q). \quad (4.7)$$

Можно разделить все гамильтонианы (4.7) на два класса:

1. Системы с трансляционной инвариантностью

В этом случае коэффициенты a, b и c не зависят от q , а только от q_x . Эти системы обладают законами сохранения типа "плотность-ток", ПБ особенно просты:

$$B_p : \frac{\delta T}{\delta q} = \frac{q_{xx}}{a(q_x)}. \quad (4.8)$$

Дуальность в этом случае имеет вид $p \rightarrow q_x$. Итак, приведем самый общий вид интегрируемых гамильтонианов с трансляционной инвариантностью :

$$H = p_x q_x + p^2 a(q_x) + p b(q_x) + c(q_x). \quad (4.9)$$

Из-за дуальности функции a, b, c — полиномы второй степени по q_x , а именно

$$a(x) = -(\epsilon_0 x^2 + \epsilon_2 x + \epsilon_3), \quad b(x) = -\epsilon_1 x^2, \quad c(x) = -\epsilon_5 x^2. \quad (4.10)$$

Такой выбор обусловлен согласованием гамильтонианов этого и следующего Раздела. С другой стороны, мы опустили плотности $p q_x, p, q_x$, поскольку соответствующие им интегралы коммутируют с гамильтонианом (4.7). Вид преобразования B_q мы определим позднее.

2. Системы без трансляционной инвариантностью представляют собой более сложные примеры интегрируемых $u - v$ систем. Можно показать, что в этом случае величины b и c зависят лишь от q , но не от q_x . Что касается

величины a , то она равна: $a = q_x^2 + r(q)$. Гамильтониан в этом случае имеет вид:

$$H = p_x q_x - p^2 q_x^2 - p^2 r(q) - p \frac{r'(q)}{2} - \frac{r''(q)}{12}. \quad (4.11)$$

ПБ и в этом случае довольно просты:

$$p = \hat{p} + \frac{\hat{q}_{xx} + \frac{1}{2}r'(\hat{q})}{\hat{q}_x^2 + r(\hat{q})}, \quad q = \hat{q} - \frac{1}{p}.$$

Мы получили важный результат: на гамильтоновом языке существует только две интегрируемые системы типа НШ квадратичные по p и q_x , а именно (4.9) с законом сохранения импульса и (4.11) без такового. Для того чтобы понять, какие $u-v$ системы являются интегрируемыми, необходимо построить соответствие $(p, q) \rightarrow (u, v)$. В следующих разделах мы обсудим возможные варианты, а также укажем соответствующие $u-v$ системы.

4.1.2 Переход к $u-v$ системам

Этот переход возможен двумя различными путями - рассматривать случай $p = \hat{p}$, либо рассматривать общий случай. Конечно, первый путь более прост, $p = h(u-v)$, и мы сразу приведем ответы для случаев с законом сохранения импульса:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2a(u_x)h(u-v) + b(u_x) \\ -v_t &= v_{xx} + 2a(v_x)h(u-v) + b(v_x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $h' = \epsilon_0 h^2 + \epsilon_1 h + \epsilon_5$, и модель Ландау-Лифшица [108]:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 2 \frac{u_x^2 + r(u)}{u-v} + \frac{r'(u)}{2} \\ -v_t &= v_{xx} + 2 \frac{v_x^2 + r(v)}{u-v} + \frac{r'(v)}{2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где r — полином четвертой степени. В следующем разделе мы рассмотрим самое нетривиальное обобщение НШ - случай без закона сохранения импульса и с его нетривиальной зависимостью от u и v — обобщенную модель Ландау - Лифшица, а в этом Разделе выведем эту зависимость для p и \tilde{p} и построим ”магнитные” $u-v$ системы с трансляционной инвариантностью. Можно показать, что в общем случае производящая функция $\tilde{T}[q, \hat{q}]$ линейно зависит от q_x (или от \hat{q}_x). Тогда импульсы p и \tilde{p} имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= f(u-v)u_x + g(u-v) \\ \tilde{p} &= f(u-v)v_x + g(u-v). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Преобразование B_q приводит к соотношению:

$$\delta\mathcal{H}(p, q) = \delta\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}, \hat{q}), \quad (4.15)$$

что приводит к соотношениям на функции f и g :

$$f' = -\epsilon_2 f^2 + \epsilon_1 f + 2\epsilon_0 f g, \quad g' = \epsilon_0 g^2 + \epsilon_1 g - \epsilon_3 f^2 + \epsilon_5. \quad (4.16)$$

Уравнения " $u - v$ " системы в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2a(u_x)(f(u-v)v_x + g(u-v)) + b(u_x) \\ -v_t &= v_{xx} + 2a(v_x)(f(u-v)u_x + g(u-v)) + b(v_x). \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.1.3 Гамильтониан и преобразования обобщенной модели ЛЛ

Рассмотрим обобщенную модель Ландау-Лифшица (ОЛЛ) (см. например [108]) в виде $u - v$ системы:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{1}{\hbar}(2v_x - \mathbf{h}_u)(u_x^2 + r(u)) + \frac{r'(u)}{2} \\ -v_t &= v_{xx} - \frac{1}{\hbar}(2u_x + \mathbf{h}_v)(v_x^2 + r(v)) + \frac{r'(v)}{2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь $\mathbf{h}(u, v)$ — симметрический полином степени 2 по каждой из переменных, $r(u) = 1/4(2\mathbf{h}_{vv}\mathbf{h} - \mathbf{h}_v^2)$.

Покажем, что система (4.18) является следствием двух пар уравнений Гамильтона. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} q &= v, & p &= -\frac{1}{\hbar}(\hat{q}_x + \frac{\mathbf{h}_q}{2}) \\ \hat{q} &= u, & \hat{p} &= -\frac{1}{\hbar}(q_x - \frac{\mathbf{h}_q}{2}) \\ \mathbf{h} &= \mathbf{h}(\hat{q}, q), \end{aligned} \quad (4.19)$$

Построим теперь два гамильтониана:

$$\begin{aligned} H &= p_x q_x - p^2(q_x^2 + r(q)) - p \frac{r'(q)}{2} - \frac{r''(q)}{12} \\ \hat{H} &= -\hat{p}_x \hat{q}_x - \hat{p}^2(\hat{q}_x^2 + r(\hat{q})) + \hat{p} \frac{r'(\hat{q})}{2} - \frac{r''(\hat{q})}{12}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Нетрудно убедиться, что варьирование H по p дает уравнение на v системы (4.18), аналогично, варьирование \hat{H} по \hat{p} дает уравнение на u , но самое главное, оказывается, что с точностью до полных производных гамильтонианы H и \hat{H} совпадают:

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}, \hat{q}) = \mathcal{H}(p, q), \quad (4.21)$$

более того, совпадают и лагранжианы: $\hat{L} = L$.

Очевидно, что нужно сделать необходимые пояснения: казалось бы, что естественно выбрать один из гамильтонианов, например \mathcal{H} , проварьировать его по p и q , получив при этом сразу систему (4.18). На этом пути возникают определенные трудности: уравнение на v получается сразу, а вместо уравнения на u мы получили бы его ковариантное следствие (т.е. уравнение вида $(\partial_x - f)(u_t - u_x x - F(u_x, v_x, u, v)) = 0$ -см. (4.1)). Сравнивая теперь (4.11) и (4.20), мы видим, что на гамильтоновом языке системы (4.13) и (4.18) совпадают.

Преобразования Беклунда:

$$\hat{p}(U, V) - p(u, v) = \frac{v_{xx} + r'(v)/2}{v_x^2 + r(v)}, \quad U = v \quad (4.22)$$

переводят решение (u, v) системы (4.18) в решение (U, V) .

4.1.4 Возможные обобщения

Мы использовали инвариантность действия относительно преобразований Беклунда для построения интегрируемых систем и их ПБ. Поскольку эти преобразования предполагались каноническими, инвариантность вариации действия эквивалентна инвариантности вариации гамильтониана, кроме того, такой выбор ПБ сильно уменьшил (с точностью до замен) список интегрируемых систем путем фиксирования калибровки. Метод легко может быть применен к таким одномерным интегрируемым системам как КдФ, Sine-Gordon, и.т.д, а кроме того, виден путь обобщения метода на двумерие. Надо отметить, что в двумерном случае уже не хватает только пары переменных p и q — необходимо вводить нелокальные переменные (ср. с [139]). Приведем конкретный пример: хорошо известная двумерная $u - v$ система Дэви-Стюартсона

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2(uV)_x, \\ v_t &= -v_{xx} + (V^2)_y + 2u_x, \quad V_y = v_x \end{aligned} \quad (4.23)$$

имеет простое гамильтоново представление:

$$H = p_x q_x + p q_x^2 + p P_x, \quad (4.24)$$

при этом $P_y = p$, $v = q_y$, $u = p$, которое вполне укладывается в схему, описанную выше, если заметить, что величины a, b, c в (4.7) могут быть не

только функциями, но и самосопряженными операторами - в данном случае $a = \partial_x \partial_y^{-1}$.

Полученные преобразования Беклунда позволяют размножать решения рассматриваемых систем, что указывает на их интегрируемость, кроме того с ПБ тесно связаны преобразования Миуры [111], позволяющие получать согласованные пары скобок Пуассона и проводить стандартную схему Ленарда - Магри [84] построения первых интегралов.

По-видимому, метод может быть применен, например, к классификации возможных типов взаимодействия в действии некоторой теории поля. Рассмотрим, к примеру, функционал Гинзбурга-Ландау (ГЛ) с зависимостью от времени. Выбор квадратичных членов в этом функционале единственный - как и в обычном НШ, чего нельзя сказать о высших членах. Конечно, развитая теория не имеет прямого обобщения на случай высоких размерностей в симметричном (по производным) случае, однако можно предположить, что вид вакуумных решений ГЛ вдали от точки перехода, где и важны высшие члены, может быть оценен из одномерного решения. Пример, где такое продолжение работает, есть - в неупорядоченном металле, вдали от края подвижности, основной вклад в плотность состояния происходит от симметричного инстантона. Хорошо известно, что асимптотика и вклад в действие для такого инстантона, с точностью до числа, одинаково для любой размерности и определяется симметрией члена четвертого порядка, таким образом, проанализировав симметрию таких членов, опираясь на развитый выше метод, можно попытаться продолжить теорию ГЛ с временной зависимостью на область вдали от точки перехода.

4.2 Гамильтонова теория преобразований Беклунда

4.2.1 Канонические преобразования

В этом Разделе мы рассмотрим преобразования Беклунда в канонической форме. Будут рассмотрены лагранжианы для соответствующих систем. Будут построены производящие функции канонических преобразованиях Беклунда. Будет представлено новое преобразование Беклунда для уравнения Цицейки.

Большая часть примеров связана с уравнениями из известного списка

[108] систем вида

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u})\mathbf{u}_{xx} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x), \quad \det A \neq 0, \quad \mathbf{u} = (u^1, u^2), \quad (4.25)$$

обладающих высшими законами сохранения. В частности, этот класс содержит НШ и уравнение Буссинеска

$$q_{tt} + q_{xxxx} + q_x q_{xx} = 0. \quad (4.26)$$

В этих примерах производная q_t входит в лагранжиан квадратично.

Остальные примеры связаны с уравнениями типа КдФ, в которых производная q_t входит в лагранжиан линейно.

Отметим, что первоначально знаменитая одевающая цепочка [159]

$$f_{j,x} + f_{j+1,x} = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \alpha_j \quad (4.27)$$

возникла именно при рассмотрении преобразований Беклунда для уравнения КдФ.

Как цепочки, так и непрерывные уравнения, обладают лагранжевой структурой. Грубо говоря, нас интересует вопрос, как связаны эти две структуры. Грубо же, можно ответить так: во всех случаях сдвиг в цепочке является каноническим преобразованием, сохраняющим гамильтонову структуру уравнения. С некоторыми оговорками можно сказать и наоборот: уравнение в частных производных задает вариационную симметрию цепочки.

Сначала обсудим общую схему на примере гамильтоновых систем (4.25). Эта теория является достаточно общей и охватывает широкий класс вариационных задач вида

$$\delta \int dt dx \Phi(q_t, q_{xx}, q_x, q) = 0.$$

В частности, лагранжианы с плотностями Φ

$$\Phi = (q_t + q_{xx})^2 + q_x^3, \quad \frac{1}{2}(q_t + q_{xx} - q_x^2)^2, \quad \frac{(q_t + q_{xx} - \frac{1}{2}R'(q))^2}{4(q_x^2 - R(q))} + \frac{1}{12}R''(q) \quad (4.28)$$

отвечают, соответственно, уравнению Буссинеска, нелинейному уравнению Шредингера и анизотропной модели Ландау-Лифшица.

Плотность $H[p, q] = H(p, q_{xx}, q_x, q)$ гамильтониана связана с плотностью лагранжиана Φ стандартными формулами

$$H = q_t \Phi_{q_t} - \Phi, \quad \Phi = p H_p - H, \quad (p = \Phi_{q_t}).$$

Отметим, что подстановка

$$p \rightarrow p + \alpha q_{xx} \quad (4.29)$$

хотя и меняет вид гамильтониана, не отражается на исходном q -уравнении.

В излагаемой теории роль цепочки преобразований Дарбу играет цепочка преобразований Беклунда

$$\dots (p_{n-1}, q_{n-1}) \rightarrow (p_n, q_n) \rightarrow (p_{n+1}, q_{n+1}) \dots, \quad (4.30)$$

переводящих решение гамильтоновской динамической системы

$$q_t = \frac{\delta H[p, q]}{\delta p}, \quad p_t = -\frac{\delta H[p, q]}{\delta q} \quad (4.31)$$

снова в решение. Для удобства мы используем обозначения $\hat{q} = q_{n+1}$, $q = q_n$, $\check{q} = q_{n-1}$.

Аналог элементарных преобразований Дарбу (см. предыдущий раздел) определяется как преобразование $(p, q) \rightarrow (\hat{p}, \hat{q})$ с помощью производящей функции $\mathcal{F}[q, \hat{q}]$:

$$p = \frac{\delta \mathcal{F}[q, \hat{q}]}{\delta q}, \quad \hat{p} = -\frac{\delta \mathcal{F}[q, \hat{q}]}{\delta \hat{q}}, \quad (4.32)$$

Определение 4.2. Функция $\mathcal{F}[q, \hat{q}] = \mathcal{F}(q, q_x, \hat{q}, \hat{q}_x)$ называется производящей функцией *канонического преобразования Беклунда* для динамической системы (4.31), если существует функция $\sigma[q, \hat{q}]$ такая, что

$$\hat{H}[\hat{p}, \hat{q}] - H[p, q] = \frac{d}{dx} \sigma[q, \hat{q}], \quad (4.33)$$

где p, \hat{p} определены формулами (4.32), либо в общем случае выполнено соотношение

$$\delta(\hat{\mathcal{H}}[\hat{p}, \hat{q}] - \mathcal{H}[p, q]) = 0. \quad (4.34)$$

В силу этого определения и формул

$$p_n = \frac{\delta F[q_n, q_{n+1}]}{\delta q_n} = -\frac{\delta F[q_{n-1}, q_n]}{\delta q_n} \Rightarrow \frac{\delta F[q_n, q_{n+1}]}{\delta q_n} + \frac{\delta F[q_{n-1}, q_n]}{\delta q_n} = 0$$

производящая функция приводит нас к лагранжевой форме цепочки и задает плотность $F[q_n, q_{n+1}]$ лагранжиана:

$$\delta \int dx \sum_n F[q_n, q_{n+1}] = 0. \quad (4.35)$$

В работе [4] была получена аналогичная формула, но плотность F не связывалась с плотностью канонического преобразования.

Пример 4.3. Система с гамильтонианом

$$H = -pq_{xx} + pq_x^2 + p^2 \quad (4.36)$$

имеет следующую производящую функцию канонического преобразования Беклунда

$$F = -\frac{1}{2}\hat{q}_x^2 + \alpha q_x e^{\hat{q}-q} + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{2(\hat{q}-q)} + \beta e^{\hat{q}-q}.$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ получаем лагранжиан цепочки Тоды (4.35), в общем случае - лагранжиан релятивистской цепочки Тоды.

Отметим, что система (4.36) изоморфна нелинейному уравнению Шредингера: при замене $q = -\log \psi$, $p = \psi^* \psi$ гамильтониан имеет вид

$$H = -\psi_x^* \psi_x + (\psi^* \psi)^2.$$

Скобки Пуассона - канонические - $\{\psi^*(x), \psi(x')\} = \delta(x - x')$.

Пример 4.4. Система Леви с гамильтонианом

$$H = -pq_{xx} + pq_x^2 + p^2 q_x$$

имеет следующую производящую функцию канонического преобразования Беклунда

$$F = \hat{q}_x \log(\hat{q}_x) - q_x \log(\alpha e^{\hat{q}-q} + \beta) + \delta e^{\hat{q}-q}.$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\delta = 1$ получаем лагранжиан цепочки Вольтерры (4.35), в общем случае - лагранжиан релятивистской цепочки Вольтерры.

Подставляя выражения (4.32) для импульсов в (4.33), мы получим определяющее уравнение для производящей функции F и гамильтониана H , к разрешению которого сводится задача классификации. Разумеется, в полном объеме эта задача является весьма сложной и здесь мы ограничимся лишь некоторыми подклассами уравнений. Например, в качестве дополнительного условия, сильно облегчающего задачу, можно считать, что гамильтониан не зависит явно от q (что отвечает инвариантности уравнений относительно сдвигов $q \rightarrow q + \text{const}$). Другим дополнительным условием может служить предположение о квадратичности гамильтониана по p :

$$H = G(q_x, q)p^2 + (A(q_x, q) - q_{xx})p + B(q_x, q). \quad (4.37)$$

Соответствующие динамические системы являются лагранжевыми

$$\mathcal{L} = \int dx \left(\frac{1}{2G} (A - q_{xx} - q_t)^2 - 2B \right)$$

и описывают ньютоновскую динамику одномерного объекта (струны) с плотностью $\rho = G^{-1}$ и дисперсией $\omega = \pm k^2$. В данном случае, определяющее уравнение сводится в главном к системе

$$F_{aa}(GF_{aa}+1) = \hat{G}F_{ab}^2, \quad GF_{ab}^2 = F_{bb}(\hat{G}F_{bb}-1), \quad (GF_{aa}-\hat{G}F_{bb}+1)F_{ab} = 0, \quad (4.38)$$

где использовано обозначение $q_x = a$, $\hat{q}_x = b$.

4.2.2 Уравнения типа НШ и цепочки типа Тоды

Уравнения (4.38) приводят к существенно различным типам систем (4.37) при $F_{ab} = 0$ и $F_{ab} \neq 0$. В случае $F_{ab} = 0$ получаем обобщенные цепочки Тоды (см. [8, 138, 160]), при этом производящая функция имеет вид

$$\begin{aligned} F &= f(a, q) + a\alpha(q, \hat{q}) + b\beta(q, \hat{q}) + \gamma(q, \hat{q}), \\ \sigma &= r(a, q) + abh(q, \hat{q}) + \gamma_q a - \gamma_{\hat{q}} b + \rho(q, \hat{q}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

причем $Gf_{aa} = -1$, $r_a = f_q - af_{aq} - Af_{aa}$, $h = \beta_q - \alpha_{\hat{q}}$.

Подставляя (4.39) в (4.33), имеем

$$\begin{aligned} a^2bh_q + ab^2h_{\hat{q}} + a(r_q + \gamma_{qq}a + \rho_q) + b(\rho_{\hat{q}} - \gamma_{\hat{q}\hat{q}}b) &= \\ = (f_{aq}a - f_q - \gamma_q - bh)[G(f_{aq}a - f_q - \gamma_q - bh) - A] + & \\ + B - \hat{B} - (ah - \gamma_{\hat{q}})[\hat{G}(ah - \gamma_{\hat{q}}) + \hat{A}]. & \end{aligned} \quad (4.40)$$

Из (4.40) легко следует, что $G_{aaa} = \hat{G}_{bbb} = 0$.

Пример 4.5. В качестве несложного упражнения разберем подробно случай без явной зависимости от q . В этом случае

$$H = pq_{xx} + \varepsilon_0 p^2 q_x^2 + \varepsilon_1 p q_x^2 + \varepsilon_2 p^2 q_x + \varepsilon_3 p^2 + \varepsilon_4 p q_x + \varepsilon_5 q_x^2 + \varepsilon_6 p, \quad (4.41)$$

производящая функция не зависит от \hat{z} и уравнение (4.33) дает

$$F(z, y) = W(z) + zV(y) + U(y), \quad y = \hat{q} - q, \quad z \equiv q_x.$$

Импульсы задаются формулами

$$p = -cq_{xx} - a\hat{q}_x - b, \quad \hat{p} = -aq_x - b,$$

где $a = V'$, $b = U'$, $c = W''$. Условие $\hat{H} - H \in \mathfrak{S}D_x$ эквивалентно следующим уравнениям на эти функции:

$$1/c = \varepsilon_0 q_x^2 + \varepsilon_2 q_x + \varepsilon_3, \quad a' = \varepsilon_2 a^2 - 2\varepsilon_0 ab + \varepsilon_1 a, \quad b' = \varepsilon_3 a^2 - \varepsilon_0 b^2 + \varepsilon_1 b - \varepsilon_5.$$

Система на a и b допускает первый интеграл:

$$-\varepsilon_5 + \varepsilon_1 b - \varepsilon_0 b^2 + \varepsilon_2 ab - \varepsilon_3 a^2 = a\mu$$

и решается в элементарных функциях. В результате получается известный список цепочек типа Тоды (случай $a = 0$) и релятивистской цепочки Тоды ($a \neq 0$). Постоянная интегрирования μ не входит в уравнения в частных производных (которые определяются только параметрами ε), и при итерации ПБ ее можно выбирать независимо на каждом шаге, как и спектральный параметр в преобразовании Дарбу.

Утверждение 4.6. В общем случае $F_{ab} = 0$

$$F(q_{n,x}, q_{n+1}, q_n) = W(q_{n,x}, q_n) + q_{n,x}V(q_{n+1}, q_n) + U(q_{n+1}, q_n). \quad (4.42)$$

В частности, для модели Ландау-Лифшица (см. (4.28)) кинетическая энергия $W = W(z, q)$ определяется слагаемым

$$W = \frac{1}{2\sqrt{R}}[(\sqrt{R} + z) \log(\sqrt{R} + z) + (\sqrt{R} - z) \log(\sqrt{R} - z)], \quad W_{zz} = \frac{1}{R(q) - z^2},$$

а функции U и V задаются формулами

$$V = 0, \quad U = -\log(q_1 - q), \quad (4.43)$$

$$V_{q_1} = -\frac{1}{2r(q_1, q)}, \quad U = \frac{1}{2} \log r(q_1, q), \quad (4.44)$$

где в обоих случаях $R(u)$ есть многочлен не выше четвертой степени, $r(u, v)$ — симметрический полином степени не выше 2 по каждой переменной, причем R является его дискриминантом

$$R(u) = r_v^2 - 2rr_{vv}, \quad r(u, v) = r(v, u), \quad r_{uuu} = 0. \quad (4.45)$$

4.2.3 Уравнения типа Буссинеска

В случае $F_{ab} \neq 0$ уравнения (4.38) эквивалентны переопределенной системе

$$F_{aa}F_{bb} = F_{ab}^2, \quad G(a)F_{aa} - \hat{G}(b)F_{bb} + 1 = 0. \quad (4.46)$$

Обозначим $y = F_{aa}$, тогда $F_{bb} = (Gy + 1)/\hat{G}$, $F_{ab}^2 = y(Gy + 1)/\hat{G}$. Из условий совместности $F_{bba} = F_{abb}$, $F_{aba} = F_{aab}$ нетрудно получить выражения для y_a, y_b (определитель линейной системы не равен нулю). Условие совместности $y_{ab} = y_{ba}$ оказывается эквивалентным равенству $\hat{G}_{bb} = G_{aa}$, то есть функции \hat{G} и G квадратичны, как и в предыдущем случае. Далее, уравнения на функцию y удается сильно упростить в результате подстановки:

$$u = \hat{G}G + \frac{\hat{G}}{4y(Gy + 1)} = \hat{G}G + \frac{1}{4F_{ab}^2}, \quad u_a^2 = \hat{G}_b^2 u, \quad u_b^2 = G_a^2 u.$$

Если $u \neq 0$, то замена $v = \sqrt{u}$ дает $2v_a = \hat{G}_b$, $2v_b = G_a$, и мы получаем решение в виде

$$\begin{aligned} G &= g_2 a^2 + 2g_1 a + g_0, & \hat{G} &= g_2 b^2 + 2\hat{g}_1 b + \hat{g}_0, \\ v &= g_2 ab + \hat{g}_1 a + g_1 b + c, & w &= v^2 - \hat{G}G \\ F_{aa} &= -\frac{1}{2G} \left(\frac{v}{\sqrt{w}} + 1 \right), & F_{bb} &= -\frac{1}{2\hat{G}} \left(\frac{v}{\sqrt{w}} - 1 \right), & F_{ab} &= \frac{1}{2\sqrt{w}}, \end{aligned}$$

откуда F находится интегрированием. Постоянную интегрирования c следует выбирать так, чтобы $w \neq 0$.

В случае $u = 0$ имеем $2F_{aa} = 1/G$, $2F_{bb} = 1/\hat{G}$, $4F_{ab}^2 = -1/\hat{G}G$, откуда следует, что G и \hat{G} постоянны, а F квадратична.

Пример 4.7. В простейшем случае $G = \hat{G} = 1$ мы приходим к производящей функции

$$F[q, \hat{q}] = (1+c)q_x^2 + 4q_x \hat{q}_x + (1-c)\hat{q}_x^2 + 3(q_x + \hat{q}_x)(q - \hat{q})^2 + (q - \hat{q})^4 + 4\mu(q - \hat{q}), \quad (4.47)$$

и гамильтониану

$$H = p^2 + 4cq_{xx}p + 4(c^2 + 3)q_{xx}^2 - 48q_x^3, \quad (4.48)$$

где произвол в выборе постоянной c соответствует преобразованию (4.29):

$$\begin{aligned} p &= -2(1+c)q_{xx} - 4\hat{q}_{xx} + 12(q - \hat{q})\hat{q}_x + 4(q - \hat{q})^3 + 4\mu, \\ \hat{p} &= +2(1-c)\hat{q}_{xx} + 4q_{xx} + 12(q - \hat{q})q_x + 4(q - \hat{q})^3 + 4\mu. \end{aligned}$$

Легко видеть, что уравнение (4.31) эквивалентно, с точностью до растяжений, уравнению Буссинеска (4.26).

Пример 4.8. Вводя новые переменные $Q = \alpha q + \beta \hat{q}$, $\hat{Q} = \beta q + \alpha \hat{q}$ можно получить систему Михайлова-Шабата

$$\begin{aligned} Q_t &= -\gamma Q_{xx} + \mu \hat{Q}_x(Q - \hat{Q}) + \nu(Q - \hat{Q})^3, \\ \hat{Q}_t &= +\gamma \hat{Q}_{xx} + \mu Q_x(Q - \hat{Q}) + \nu(Q - \hat{Q})^3, \end{aligned} \quad (4.49)$$

причем $\beta = \alpha\rho$, $\rho^2 - \rho + 1 = 0$, $\gamma = 3(\rho - \frac{1}{\rho})$, $\mu = -\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha-\beta}$, $\nu = -\frac{2}{27}\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3}$.

Пример 4.9. В заключение приведем еще один пример канонического преобразования, показывающий, что предположение квадратичности по p не является обязательным ($\omega^3 = 1$):

$$\begin{aligned} H = p_x q_x + p^3 + q_x^3 &\rightarrow \hat{H} = -\hat{p}_x \hat{q}_x + \hat{p}^3 + \hat{q}_x^3, \\ F = \omega \hat{q}_x q + f(q, \hat{q}), \quad p = \omega \hat{q}_x + f_q, \quad \hat{p} = \omega q_x - f_{\hat{q}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Используя выражения для гамильтонианов и импульсов из (4.50) и требование $\delta(\hat{H} - H) = 0$, получаем уравнения на f :

$$f_{\hat{q}\hat{q}} - 3\omega^2 f_q = 0, \quad f_{qq} + 3\omega^2 f_{\hat{q}} = 0, \quad (f_{\hat{q}}^2)_{\hat{q}} + (f_q^2)_q = 0, \quad f_q^3 + f_{\hat{q}}^3 = \text{const}. \quad (4.51)$$

Решая систему (4.51), получаем лагранжиан цепочки ПБ системы (4.50):

$$L = \sum_n [\omega_n q_{n+1,x} q_n + C_n \exp(\frac{3}{\omega_n}(\Omega_n q_n - \Omega_n^* q_{n+1}))], \quad \omega_n^3 = \Omega_n^3 = 1. \quad (4.52)$$

4.2.4 Уравнения типа КдФ, sinh-Гордон и другие

$$\mathcal{L} = \int dx (q_t g(q_x) - H(q, q_x, \dots)) \quad (4.53)$$

Мы рассматриваем только случай, когда функция g зависит только от q_x , поскольку зависимость от старших производных привела бы к сильно нелокальным уравнениям Эйлера - Дарбу. Что касается явной зависимости g от q , то в ряде случаев эту зависимость можно устранить точечным преобразованием, например,

$$q_t q_x^\alpha g(q) = Q_t Q_x^\alpha, \quad dQ = g(q)^{\frac{1}{\alpha+1}} dq.$$

Сдвиг $g \rightarrow g + s(q)$ не влияет на уравнения движения, поскольку величина $s(q) q_t$ является полной производной. В более сложных случаях допустимые g с явной зависимостью от q неизвестны.

Условие $\hat{L} - L \in \text{Im}D_t + \text{Im}D_x$ разбивается на два:

$$\hat{q}_t g(\hat{q}_x) - q_t g(q_x) \in \text{Im}D_t + \text{Im}D_x, \quad \hat{H} - H \in \text{Im}D_x \quad (4.54)$$

Перепишем первое из условий (4.54) в явном виде:

$$\hat{q}_t g(\hat{q}_x) - q_t g(q_x) = \partial_t(q_x v(q, \hat{q}) + u(q, \hat{q})) - \partial_x(q_t v(q, \hat{q})).$$

Приравнивая коэффициенты при q_t и \hat{q}_t , получаем систему уравнений

$$g(\hat{q}_x) = q_x v_{\hat{q}} + u_{\hat{q}}, \quad g(q_x) = \hat{q}_x v_{\hat{q}} - u_{\hat{q}}. \quad (4.55)$$

Обозначим

$$s(w) = \frac{g(w) + u_q}{v_{\hat{q}}}, \quad \tilde{s}(w) = \frac{g(w) - u_{\hat{q}}}{v_{\hat{q}}}. \quad (4.56)$$

Функции $s(w)$, $\tilde{s}(w)$ зависят также от q , \hat{q} и, может быть, от спектрального параметра, но для краткости мы не выписываем эту зависимость, $g(w)$ зависит только от w .

Преобразования Беклунда можно записать в виде

$$q \rightarrow \hat{q} \rightarrow q, \quad \hat{q}_x = s(q_x), \quad q_x = \tilde{s}(\hat{q}_x) \Rightarrow s(\tilde{s}(w)) = w, \quad \tilde{s}(s(w)) = w.$$

Очевидно, что $\partial_\lambda(s(\tilde{s}(w))) = 0$, $\partial_\lambda(\tilde{s}(s(w))) = 0$, где λ – спектральный параметр, или q , или \hat{q} .

Имеем

$$\partial_\lambda(s(\tilde{s}(w))) = \left(\frac{1}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda g(\tilde{s}(w)) + \left(\frac{u_q}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda + s'(\tilde{s}(w)) \left[\left(\frac{1}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda g(w) - \left(\frac{u_{\hat{q}}}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda \right].$$

Обозначая $\xi = \tilde{s}(w)$ и используя (4.56), получаем $s'(\xi) = \frac{1}{v_{\hat{q}}} g'(\xi)$. Подставляя $g(w)$, выразив ее из второго уравнения (4.56), окончательно имеем

$$g'(\xi)(\epsilon_1 \xi + \epsilon_2) + (\epsilon_1 g(\xi) + \epsilon_3) = 0 \Rightarrow g(\xi) = \frac{-\epsilon_3 \xi + \epsilon_4}{\epsilon_1 \xi + \epsilon_2},$$

где

$$\epsilon_1 = \frac{1}{v_{\hat{q}}}, \quad \epsilon_2 = -\frac{u_{\hat{q},\lambda}}{v_{\hat{q}}^2}, \quad \epsilon_3 = \left(\frac{u_q}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda.$$

В случае $\epsilon_1 = 0$ функция $g(\xi)$ линейна по ξ . Применяя преобразования сдвига и растяжения (которые не влияют на уравнения движения), можно выбрать $g(\xi) = \xi$. В случае $\epsilon_1 \neq 0$, используя преобразования сдвига и растяжения,

можно получить $g(\xi) = \frac{1}{\xi - \xi_0}$. На данный момент нет примеров, соответствующих случаю $\xi_0 \neq 0$. Таким образом, остается два случая: либо $g(\xi) = \xi$, либо $g(\xi) = \frac{1}{\xi}$.

Итак, показано, что в локальном случае и когда временной член не зависит от q , лагранжиан уравнений типа КдФ можно выбрать в виде:

$$\mathcal{L} = \iint dx dt \left(\frac{1}{2} q_t q_x^\alpha + H(q, q_x, \dots) \right), \quad \alpha = \pm 1,$$

уравнение Эйлера для которых имеет вид

$$J_{q_t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q}, \quad J = \begin{cases} D_x & \text{при } \alpha = 1, \\ q_x^{-2} D_x + D_x q_x^{-2} & \text{при } \alpha = -1. \end{cases} \quad (4.57)$$

Случаю $\alpha = 1$ ($g(\xi) = \xi$) соответствует требование

$$\int \int dt dx (\hat{q}_x \hat{q}_t - q_x q_t) = \int \int dt dx (\hat{q}_x + q_x)(\hat{q}_t - q_t),$$

а значит, преобразование Беклунда имеет вид

$$\hat{q}_x + q_x = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta(\hat{q} - q)}, \quad (4.58)$$

где $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\hat{q} - q, \hat{q}_x - q_x, \hat{q}_{xx} - q_{xx}, \dots)$.

В простейших случаях F зависит только от $\hat{q} - q$.

Пример 4.10. Уравнение КдФ:

$$q_t = q_{xxx} - 6q_x^2 \quad \Rightarrow \quad D_x(q_t) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q}, \quad \mathcal{H} = \int dx \left(\frac{1}{2} q_{xx}^2 + 2q_x^3 \right).$$

Учитывая то, что $\hat{h} - h$ должна быть полной производной в силу (4.58), получаем

$$F(\hat{q} - q) = \frac{1}{3}(\hat{q} - q)^3 + \beta(\hat{q} - q).$$

Подставляя в (4.58), получаем окончательно преобразование Беклунда в виде

$$\hat{q}_x + q_x = (\hat{q} - q)^2 + \beta.$$

Параметр β можно выбирать разным на каждом шаге. Обозначая $\mathbf{f} = \hat{q} - q$, получим одевающую цепочку [159].

Этот пример допускает обобщение на 2+1 мерный случай.

Пример 4.11. Лагранжиан и уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП) имеют вид:

$$\mathcal{L} = \int \int dx dy [q_x q_t - q_{xx}^2 - 2q_x^3 - 3\alpha^2 q_y^2], \quad q_x = u, \quad \partial_x(u_t + u_{xxx} - 6uu_x) = 3\alpha^2 u_{yy}.$$

Преобразование Беклунда может быть получено аналогично уравнению КдФ, причем спектральный параметр заменяется на нелокальный член

$$q_x + \hat{q}_x = \frac{1}{2}(\hat{q} - q)^2 + Z, \quad Z = \gamma \partial_x^{-1} \partial_y (\hat{q} - q), \quad \gamma = i\alpha. \quad (4.59)$$

Лагранжиан цепочки, соответствующей (4.59), имеет вид:

$$l = \sum_n [q_{n+1,x} q_n + \frac{1}{6}(q_{n+1} - q_n)^3 + \frac{\gamma}{2}(q_{n+1} - q_n) \partial_x^{-1} \partial_y (q_{n+1} - q_n)].$$

Пример 4.12. Уравнение sinh-Гордон:

$$q_{xt} = \sinh q, \quad h = -2 \cosh q.$$

Выражение

$$\cosh(\hat{q}) - \cosh(q) = 2 \sinh\left(\frac{\hat{q} + q}{2}\right) \sinh\left(\frac{\hat{q} - q}{2}\right)$$

является полной производной, если преобразование Беклунда уравнения sinh-Гордона имеет вид

$$\hat{q}_x + q_x = \beta \sinh\left(\frac{\hat{q} - q}{2}\right).$$

В этом уравнении x и t эквивалентны, получаем t - преобразование Беклунда

$$\hat{q}_t - q_t = \frac{4}{\beta} \sinh\left(\frac{\hat{q} + q}{2}\right).$$

Как уже упоминалось во Введении, аналогичный подход к выводу ПБ для уравнений КдФ и sin-Gordon был применен в работе [66], мы приводим эти ПБ только как примеры применения метода к системам данного класса ($\alpha = 1$), который развит для более сложных систем, рассмотренных в этом Разделе.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = -1$ ($g(\xi) = \frac{1}{\xi}$). Анализ уравнений (4.55) приводит к следующей форме ПБ:

$$\hat{q}_x q_x = \frac{1}{v_{\hat{q}}}.$$

Этой форме ПБ соответствует следующий пример:

Пример 4.13. Лагранжиан для уравнения Кричевера - Новикова (КН)

$$q_t = q_{xxx} - \frac{3}{2q_x}(q_{xx}^2 - r(q)) + cq_x$$

равен

$$L = \int dx \left[\frac{qt}{q_x} + \frac{r(q) - q_{xx}^2}{q_x^2} \right], \quad r^{(V)}(q) = 0.$$

Вид преобразования Беклунда в этом случае (см. выше):

$$q_x \hat{q}_x = \mathbf{h}(q, \hat{q}) = (v_{\hat{q}}(q, \hat{q}))^{-1}.$$

Сохранение гамильтониана приводит к тому, что $\mathbf{h}(q, \hat{q})$ - полином второй степени по q и \hat{q} такой, что $r(q) = 2\mathbf{h}\mathbf{h}_{\hat{q}\hat{q}} - \mathbf{h}_{\hat{q}}^2$. Преобразование Беклунда уравнения Кричевера - Новикова получено в [3]. Лагранжиан цепочки ПБ имеет вид

$$L = \sum_n v(q_{n-1}, q_n) q_{n,x}, \quad v(q, \hat{q}) = \frac{2}{\sqrt{r(q)}} \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{h}_{\hat{q}}(q, \hat{q})}{\sqrt{r(q)}}.$$

4.3 Преобразование Беклунда уравнения Цицейки

Уравнение Цицейки [155] было получено также в статье [167] как интегрируемый случай гиперболических уравнений типа \sinh -Гордон. Уравнение Цицейки лагранжево

$$\phi_{x,t} = e^{-2\phi} - e^{\phi} \iff \delta S = 0, \quad S = \int dx dt [\phi_x \phi_t - H(\phi)], \quad H(\phi) = 2e^{\phi} + e^{-2\phi}.$$

Преобразование Беклунда каноническое (4.58) $b = \frac{\delta \mathcal{F}[A]}{\delta A}$,

где $A = \hat{\phi} - \phi$, $B = \hat{\phi} + \phi$, $a = \hat{\phi}_x - \phi_x$, $b = \hat{\phi}_x + \phi_x$.

Ищем преобразование Беклунда в наиболее простой форме, возможной в данном случае

$$F = \int dx f(a, A) \iff b = f_A - a_x f_{aa} - a f_{aA}. \quad (4.60)$$

Каноническое преобразование (4.60) является ПБ в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned} h(\hat{\phi}) - h(\phi) &= 2e^{B/2} g'(A) - e^{-B} g'(A) g(A) = \partial_x W(a, A, B), \\ g(A) &= e^{A/2} + e^{-A/2}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Можно удовлетворить (4.61) и найти производящую функцию $F(a, A)$ при условиях, что:

$$\partial_x [e^{B/2} Z(a, A)] = -e^{B/2} g'(A), \quad \partial_x [e^{-B} R(a, A)] = -e^{-B} g'(A) g(A).$$

Первое условие дает

$$f_a = 2 \log Z, \quad f_A = -2 \frac{g'(A)}{Z} \Rightarrow g'(A) Z_a - Z_A Z = 0 \iff g(A) + aZ = s(Z).$$

Второе определяет неизвестную функцию $s(Z)$:

$$s(Z) = \nu Z^3, \quad R = -\frac{g(A)^2}{\nu Z^2}.$$

Итак, находим $Z(a, A)$ из кубического уравнения $\nu Z^3 = g(A) + aZ$, интегрируем уравнение $f_a = 2 \log Z$ и находим плотность производящей функции ПБ $f(a, A)$.

Или:

$$-\frac{b}{2} Z = Z_x + g'(A), \quad Z_x = aZ_A + a_x Z_a, \quad Z(a, A) : \nu Z^3 = aZ + g(A).$$

Преобразование Беклунда уравнения Цицейки в довольно громоздкой форме было получено в работе [131]. По-видимому, это преобразование не приводится к ПБ, полученным выше. Кроме того, автору недавно стало известно от В.В. Соколова, что получена еще одна форма ПБ для уравнения Цицейки [107]. А.В. Михайлову удалось найти преобразование, связывающие упомянутую форму ПБ с той, что получена в данной Главе. Было бы интересно сравнить все возможные формы ПБ. Полученная в данной Главе форма ПБ для уравнения Цицейки является новым примером в форме (4.58).

В заключение отметим, что на основе полученных преобразований Беклунда можно развить теорию преобразований, например, на основе одевающей цепочки [159]

$$v_{i,x} + v_{i+1,x} = (v_i - v_{i+1})^2 - \beta_i, \quad f_j = v_j - v_{j+1}.$$

Такой подход развивался, например, в [82], [4].

Было бы интересно развить построенную теорию на случай $g(q_x, q)$ (4.53).

4.4 Решетки преобразований Беклунда

В этом Разделе предлагается метод построения решеток ПБ, исходя из наличия у некоторых динамических систем двух различных параметризаций канонических переменных, и, как следствие, двух независимых Беклундовских потоков. В этом Разделе построены решетки ПБ, соответствующие обобщениям нелинейного уравнения Шредингера. Подробно обсуждаются модели Тоды, Вольтерры и Гейзенберга. Построено представление Лакса для решеточной версии модели Ландау-Лифшица. Обсуждается связь с представлением Хироты, что дает возможность алгебраического построения солитонных решений.

4.4.1 Гамильтонов метод построения решеток

В развитии теории решеток интегрируемых систем четко прослеживаются две тенденции: первая связана с полностью дискретными уравнениями Хироты [59]. Хорошо известные интегрируемые модели, такие как уравнение КдВ, уравнение \sin -Gordon, цепочка Тоды и т.д. получаются из уравнений Хироты предельным переходом от одной или более дискретной переменной к непрерывным и наложением связей.

Понятно, что при таком подходе, полученная система не эквивалентна первоначальной, в частности, известное решение уравнений Хироты не преобразуется чисто алгебраически в решение редуцированной системы.

Второй подход, основанный на наличии нескольких неэквивалентных преобразованиях Беклунда приводит к полной эквивалентности динамической системы и ее решеточной версии.

Как известно, цепочка Тоды является преобразованием Беклунда для динамической системы, точно-эквивалентной нелинейному уравнению Шредингера (замена проста : $\psi = e^{q_n}$, $\psi^* = e^{-q_{n+1}}$). В работе Тоды [153] было указано преобразование Беклунда для самой цепочки Тоды, не эквивалентное сдвигу.

Сопоставляя преобразованию Беклунда, соответствующий сдвиг на решетке, получим интегрируемую модель на решетке, полностью эквивалентную первоначальной динамической системе (подробнее ниже). Метод получения решеток, основанный на инвариантности относительно преобразований Лежандра был предложен в работе [8]. В работе [150] некоторые решетки были получены,

исходя из дискретных лагранжианов.

Целью данного Раздела является построение решеток ПБ, соответствующих обобщениям нелинейного уравнения Шредингера, используя гамильтоново представление этих динамических систем. Будут получены также преобразования Миуры, связывающие различные решетки. Предъявлена решеточная версия модели Ландау-Лифшица, а также представления Лакса для нее.

В конце этого Раздела обсуждается возможность построения солитонных решений, основанная на билинейном представлении решеточных моделей.

4.4.2 Решетки общего типа

Рассмотрим гамильтониан системы типа НШ общего вида:

$$H = p_x q_x + \epsilon p^2 q_x^2 + \alpha p q_x^2 + \beta q_x^2 + \gamma p^2 q_x + \delta p^2, \quad (4.62)$$

соответствующий так называемым дивергентным системам, в которых гамильтониан зависит явно только от q_x , но не от q . Модель Ландау-Лифшица, не относящаяся к этому классу будет рассмотрена позднее. Первое преобразование Беклунда для систем (4.62) имеет вид:

$$\hat{q}_x = q_x + \frac{p_x}{\epsilon p^2 + \alpha p + \beta}, \quad \hat{p} = p + \frac{\hat{q}_{xx}}{\epsilon \hat{q}_x^2 + \gamma \hat{q}_x + \delta}. \quad (4.63)$$

Буквы со шляпками означают преобразованные переменные, пользуясь (4.63), выразим импульс через координаты:

$$p = h(\hat{q} - q), \quad h' = \epsilon h^2 + \alpha h + \beta. \quad (4.64)$$

Данная параметризация соответствует обычным цепочкам типа цепочки Тоды. Сопряженным цепочкам, т.е. второму преобразованию Беклунда соответствует параметризация в форме двух импульсов, зависящих от производных:

$$\begin{aligned} p_1 &= f(\hat{q} - q)\hat{q}_x + g(\hat{q} - q), & p_2 &= f(\hat{q} - q)q_x + g(\hat{q} - q) \\ f' &= -\gamma f^2 + 2\epsilon fg + \alpha f, & g' &= \epsilon g^2 + \alpha g + \beta - \delta f^2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Уравнения на функции f и g в (4.65) получаются, если положить $h(p_1, q) = \tilde{h}(p_2, \hat{q})$, $\tilde{h} = h(p_x \rightarrow -p_x)$.

Нетрудно видеть, что преобразования (4.63) и (4.65) сохраняют гамильтониан (4.62) и являются каноническими, т.е. сохраняют действие, а значит

переводят решение в решение и, по определению, являются преобразованиями Беклунда. Определим решетку:

$$q_{nm} = q = v, \quad q_{n+1,m} = \hat{q} = u, \quad q_{n,m+1} = q', \quad q_{n+1,m+1} = \hat{q}' = u', \quad (4.66)$$

переменные со шляпкой получаются под действием преобразования (4.63), в то время как, переменные со штрихом получается применением преобразования (4.65). Тогда условие согласованной динамики на всей решетке приводит к уравнениям:

$$p(u, v) = p_1(v', v), \quad p(u', v') = p_2(u', u). \quad (4.67)$$

Можно получить уравнения непосредственно на производные:

$$u_x = \frac{h(u' - v') - g(u' - u)}{f(u' - u)}, \quad v'_x = \frac{h(u - v) - g(v' - v)}{f(v' - v)}. \quad (4.68)$$

Заметим, что если отразить магнитную цепочку относительно прямой, перпендикулярной обычной цепочки Тоды и потребовать, чтобы отраженная цепочка была "магнитной", нетрудно получить следующие соотношения:

$$h(x + y)(f(x) - f(y)) = f(x)g(y) - f(y)g(x), \quad (4.69)$$

которое выполняется для моделей Тоды, Вольтерры, Гейзенберга. Геометрически, такая симметрия означает, что решетка становится треугольной - диагонали $v - v'$ и $v' - u$ (см.(4.66)) теперь эквивалентны, в том смысле, что цепочки, связанные с ними, соответствуют второму преобразованию Беклунда.

4.4.3 Гамильтониан и преобразования Миуры для симметричных моделей

Для того чтобы непосредственно перейти к построению конкретных решеток, имеющих треугольную симметрию, приведем вид гамильтонианов, соответствующих им, а также найдем преобразования Миуры, связывающие эти системы. Заметим, что величина $I = pq_x$ является канонической плотностью для всех дивергентных систем (4.62). Потребуем выполнения следующего условия:

$$\tilde{p}\tilde{q}_x = H(p, q_x), \quad (4.70)$$

связывающего две разные системы, выражая из (4.70) одну каноническую пару через другую, получим искомое преобразование Миуры [111], поскольку динамика этих систем является согласованной. Более того, уравнение (4.70) устанавливает бигамильтонову структуру, что позволяет рекуррентно строить первые интегралы [84].

Итак, установим соответствие:

$$(p, q_x) \rightarrow^1 (\mathcal{P}, \mathcal{Q}_x) \rightarrow^2 (P, Q_x). \quad (4.71)$$

Обычно модель Гейзенберга вводится как уравнение динамики единичного вектора \vec{S} :

$$\vec{S}_t = [\vec{S}_{xx} \times \vec{S}]. \quad (4.72)$$

Одна из параметризаций вектора \vec{S}

$$(S_x, S_y, S_z) = (p(q^2 - 1) + q, i(p(q^2 + 1) + q), 2pq + 1) \quad (4.73)$$

приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} H_G &= p_x q_x - p^2 q_x^2 \\ q_t &= -q_{xx} - 2pq_x^2, \quad p_t = p_{xx} - 2\partial_x(p^2 q_x) \\ \hat{q} &= q + 1/p \quad \hat{p} = p + \partial_x(1/\hat{q}_x). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Обозначим

$$\mathcal{P} = -pq_x + \frac{p_x}{p}, \quad \mathcal{Q}_x = -pq_x, \quad (4.75)$$

тогда, вычисляя \mathcal{P}_t и \mathcal{Q}_t , используя уравнения (4.74), нетрудно убедиться, что пара $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ удовлетворяет следующей системе уравнений.

Модель Вольтерры $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$:

$$\begin{aligned} H_V &= \mathcal{P}_x \mathcal{Q}_x + \mathcal{P}^2 \mathcal{Q}_x + \mathcal{P} \mathcal{Q}_x^2 \\ \mathcal{Q}_t &= -\mathcal{Q}_{xx} + 2\mathcal{P} \mathcal{Q}_x + \mathcal{Q}_x^2, \quad \mathcal{P}_t = \partial_x(\mathcal{P}_x + 2\mathcal{P} \mathcal{Q}_x + \mathcal{P}^2) \\ \hat{\mathcal{Q}} &= \mathcal{Q} + \log \mathcal{P}, \quad \hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} + \partial_x \log \mathcal{Q}_x. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Наконец, обозначая

$$P = \mathcal{P}_x + \mathcal{P} \mathcal{Q}_x, \quad Q_x = \mathcal{P} + \mathcal{Q}_x, \quad (4.77)$$

убедимся, что пара (P, Q) в свою очередь удовлетворяет системе.

Модель Тоды (P, Q) :

$$\begin{aligned} H_T &= P_x Q_x + P^2 + P Q_x^2 \\ Q_t &= -Q_{xx} + 2P + Q_x^2, \quad P_t = \partial_x(P_x + 2P Q_x) \\ \hat{Q} &= Q + \log(P), \quad \hat{P} = P + \hat{Q}_{xx}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

4.4.4 Уравнения для решетки Тоды

Построим второе преобразование Беклунда (4.65) для гамильтониана (4.78), условие (4.67) в этом случае эквивалентно уравнению для решетки Тоды, которое выглядят следующим образом:

$$U_x = e^{U'-U} + e^{U-V'} + \gamma, \quad V'_x = e^{U-V'} + e^{V'-V} + \gamma. \quad (4.79)$$

Действительно, из (4.79) следует:

$$U_{xx} = e^{\hat{U}-U} - e^{U-V} \quad (4.80)$$

— обычная цепочка Тоды.

Определим расположение переменных на решетке:

$$V = Q_{n,m}, \quad U = Q_{n+1,m}, \quad V' = Q_{n,m+1}, \quad U' = Q_{n+1,m+1},$$

получая всю решетку Тоды.

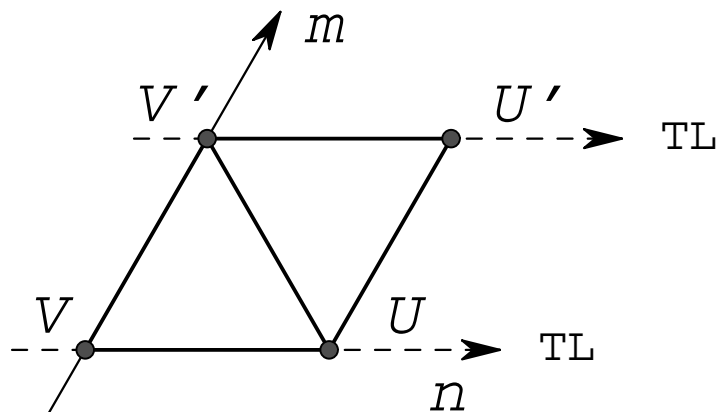


Рис. 4.1: Расположение функций на решетке Тоды

4.4.5 Уравнения для решетки Вольтерры

Уравнения для решетки Вольтерры выглядят следующим образом:

$$\mathcal{U}_x = (e^{\mathcal{U}' - \mathcal{U}} - \gamma)(e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}'} - 1), \quad \mathcal{V}'_x = (e^{\mathcal{V}' - \mathcal{V}} - \gamma)(e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}'} - 1). \quad (4.81)$$

Действительно, из (4.81) следует:

$$\mathcal{U}_{xx} = \mathcal{U}_x(e^{\hat{\mathcal{U}} - \mathcal{U}} - e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}}), \quad \hat{\mathcal{U}} = q_{n,m+2}. \quad (4.82)$$

Решетка Вольтерры преобразуется в решетку Тоды по формулам:

$$e^{\mathcal{V}' - \mathcal{V}} = e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}} - e^{\mathcal{V}' - \mathcal{V}}, \quad e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}'} = e^{\mathcal{U}' - \mathcal{V}'} - \gamma e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}'}, \quad (4.83)$$

если заглавными буквами обозначить переменные решетки Тоды, а готическими - переменные решетки Вольтерры.

Определим расположение переменных на решетке:

$$\mathcal{V} = \mathcal{Q}_{n,m}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{Q}_{n+1,m}, \quad \mathcal{V}' = \mathcal{Q}_{n,m+1}, \quad \mathcal{U}' = \mathcal{Q}_{n+1,m+1},$$

получая всю решетку Вольтерры.

4.4.6 Уравнения для решетки Гейзенберга

Уравнения для решетки Гейзенберга выглядят следующим образом:

$$\frac{1}{u_x} = \frac{1}{u' - u} + \frac{1}{u - v'}, \quad \frac{1}{v'_x} = \frac{1}{v' - v} + \frac{1}{u - v'}. \quad (4.84)$$

Действительно, из (4.84) следует:

$$\partial_x \left(\frac{1}{u_x} \right) = \frac{1}{\hat{u} - u} - \frac{1}{u - v}, \quad \hat{u} = q_{n,m+2}. \quad (4.85)$$

Решетка Гейзенберга преобразуется в решетку Вольтерры по формулам:

$$e^{\mathcal{V}' - \mathcal{V}} = \frac{v' - u}{u - v}, \quad e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}'} = \frac{u' - u}{u' - v'}, \quad (4.86)$$

если прописными буквами обозначены переменные решетки Гейзенберга. Определим расположение переменных на решетке:

$$v = q_{n,m}, \quad u = q_{n+1,m}, \quad v' = q_{n,m+1}, \quad u' = q_{n+1,m+1},$$

получая всю решетку Гейзенберга.

4.4.7 Представление Лакса для решетки Тоды

Хорошо известно (см. например [9]), что представление Лакса для цепочки Тоды имеет вид:

$$\begin{aligned} (\partial_x + \hat{b})\psi_u &= \psi_v, & \partial_x \psi_v + c\psi_u &= 0, \\ b &= v_x + \lambda, & \hat{b} &= u_x + \lambda, & c &= e^{u-v}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Мы ввели естественные обозначения для вспомогательных функций, связав их с узлами решетки.

Представляется разумным искать представление Лакса для всей решетки Тоды, поскольку это позволит использовать схему Дарбу (в том числе и метод одевания) для построения конкретных решений. Итак, ищем операторы, связывающие волновые функции на соседних узлах решетки в виде:

$$\psi_{v'} = (\alpha \partial_x + \beta) \psi_v \quad \psi_{u'} = (\hat{\alpha} \partial_x + \hat{\beta}) \psi_u. \quad (4.88)$$

Очевидно, что уравнения на α и β можно получить из схемы Дарбу, либо преобразуя оператор $L = \partial_x^2 + b\partial_x + c$, либо преобразуя "ковариантные" производные $\partial_x + b$ и $c^- \partial_x$. Используя любую из этих схем и исключая переменные со шляпками, получим систему:

$$\begin{aligned} [\partial_x^2 + (b' - 2b)\partial_x + (c' + \check{c} - 2c + b(b - b'))]\alpha &= [-2\partial_x + b - b']\beta \\ [\partial_x^2 + b'\partial_x + (c' - c)]\beta &= [2c\partial_x + c_x + c(b' - b)]\alpha. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Эта довольно громоздкая система имеет два тривиальных решения - $\alpha = 0$, $\beta = 1$ - тождественное преобразование, а также $\alpha = c^-$, $\beta = 0$ - сдвиг по цепочке. Однако имеется еще и нетривиальное решение:

$$\psi_{v'} = [e^{v-v'} \partial_x + 1] \psi_v, \quad (4.90)$$

которое и устанавливает искомое представление Лакса на всей решетке.

Заметим, что

$$\psi_u = \gamma^- [e^{v'-u} \partial_x + 1] \psi_{v'} = -e^{v-u} \partial_x \psi_v, \quad (4.91)$$

т.е. комбинация преобразований (4.90) и (4.91) - это обычный сдвиг (ср. с (4.87)).

Мы не будем выписывать представление Лакса для решетки Вольтерры, поскольку в терминах волновых функций эта система совпадает с решеткой Тоды с точностью до "тривиального" калибровочного преобразования: $\psi_{Volterra} =$

$e^q \psi_{Toda}$. Что касается представления Лакса для решетки Гейзенберга, то оно является естественным вырождением векторного представления для решетки Ландау-Лифшица, которую мы подробно рассмотрим в следующем разделе.

4.4.8 Модель Ландау-Лифшица

Перепишем гамильтониан модели Ландау-Лифшица:

$$h = 1/4(\vec{S}_x)^2 + (\vec{S}J\vec{S}) \quad (4.92)$$

в канонических переменных (p, q) . Поскольку гамильтониан должен быть квадратичным по p , \vec{S} должен быть линеен по p . Если выбрать \vec{S} в виде:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{A}p + 1/2\vec{A}_q, \\ [\vec{A} \times \vec{A}_q] &= \vec{A}, \quad (\vec{A}, \vec{A}) = 0, \quad (\vec{A}_q, \vec{A}_q) = 4, \end{aligned} \quad (4.93)$$

то скобки Пуассона имеют обычный для "спина" вид:

$$\{S_i, S_j\} = e_{ijk}S_k, \quad \vec{S}^2 = 1,$$

а гамильтониан (4.92) можно записать в виде:

$$h = -p_x q_x + p^2(q_x^2 + r(q)) + p \frac{r'(q)}{2} + \frac{r''(q)}{12}, \quad (4.94)$$

где $r(q) = (\vec{A}J\vec{A})$, $r^V = 0$. Вектор \vec{A} может быть найден в явном виде:

$$\begin{aligned} \vec{A}(q) &= q^k \vec{e}_k, \quad k = 0, 1, 2 \\ \vec{e}_0 &= (-1, i, 0), \quad \vec{e}_1 = (0, 0, 2), \quad \vec{e}_2 = (1, i, 0), \end{aligned} \quad (4.95)$$

что соответствует параметризации (4.73). Укажем также параметризацию вектора \vec{S} , в зависимости только от координат:

$$\vec{S}(\hat{q}, q) = (S_x, S_y, S_z) = \left(\frac{q\hat{q} - 1}{\hat{q} - q}, i \frac{q\hat{q} + 1}{\hat{q} - q}, \frac{\hat{q} + q}{\hat{q} - q} \right). \quad (4.96)$$

4.4.9 Решетка ПБ для модели Ландау - Лифшица

Введем обозначения: пусть $h(u, v)$ – симметрический полином степени 2 по каждой из переменных,

$$\mathbf{h}(u, v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v), \quad r(u) = 1/4(2\mathbf{h}_{vv}\mathbf{h} - \mathbf{h}_v^2).$$

Нам понадобится \mathbf{h} как функция трех переменных:

$$\mathbf{h}(uu', v) = a(v)uu' + 1/2b(v)(u + u') + c(v). \quad (4.97)$$

Рассмотрим систему функций q_{nm} , заданную на треугольной решетке.

Введем обозначения:

$$q_{nm} = v, \quad q_{n+1,m} = u, \quad q_{n,m+1} = w, \quad q_{n+1,m-1} = \tilde{w}. \quad (4.98)$$

Тогда модель Ландау-Лифшица выглядит следующим образом:

$$w_x = \frac{\mathbf{h}(uv, w)}{v - u} \quad \tilde{w}_x = \frac{\mathbf{h}(uv, \tilde{w})}{v - u}. \quad (4.99)$$

Действительно, из (4.99) следует:

$$-\frac{v_{xx} + 1/2r'(v)}{v_x^2 + r(q)} = \frac{1}{u - v} - \frac{1}{v - v^-}, \quad v^- = q_{n-1,m}. \quad (4.100)$$

Перейдем теперь к векторному описанию. Сначала преобразуем тензор h :

$$\mathbf{h}(u, v) = h_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta = (\vec{A}(u)\hat{h}\vec{A}(v)), \quad \hat{h} = \vec{e}_\alpha h^{\alpha\beta} \vec{e}_\beta. \quad (4.101)$$

Тогда, учитывая (4.96), систему (4.99) можно переписать в виде:

$$w_x = (\vec{S}(uv)\hat{h}\vec{A}(w)) \quad \tilde{w}_x = (\vec{S}(uv)\hat{h}\vec{A}(\tilde{w})). \quad (4.102)$$

Окончательно решеточную модель Ландау-Лифшица запишем в векторном виде с явной зависимостью от координат:

$$\begin{aligned} \vec{W}_x &= [\vec{W} \times \hat{h}\vec{S}], \quad \vec{W}_t = [\vec{W} \times (\hat{h}[\vec{S} \times \vec{S}_x] + \det(\hat{h})\hat{h}^{-1}\vec{S})] \\ \vec{S} &= \vec{S}(q_{n+1,m}, q_{nm}), \quad \vec{W} = \vec{S}(q_{n,m+1}, q_{n+1,m-1}). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Диагонализуем тензор \hat{h} :

$$\hat{h} = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$$

и введем диагональный тензор

$$\hat{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3).$$

Поскольку мы выписали уравнение на динамику по x и t , то систему (4.103) можно рассматривать как пару Лакса для модели Ландау-Лифшица; условие согласования этой пары дает обычное уравнение Ландау-Лифшица:

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times (\vec{S}_{xx} + \hat{J}\vec{S})], \quad (4.104)$$

при условии $h_i^2 - h_j^2 = J_j - J_i$.

4.4.10 Представление Хироты для решеток

Следует отметить, что запись решеток ПБ в виде (4.79), (4.81) и (4.84) не единственна. С помощью гамильтонового метода, изложенного выше можно получать интегрируемые системы с калибровкой, фиксирующей полиномиальный вид гамильтониана. При этом никакая система, относящаяся к заданному классу не потеряна, а различные калибровки, т.е. эквивалентные способы представления можно легко восстановить. Для некоторых приложений бывает удобно использовать билинейное представление Хироты, поэтому приведем их для некоторых из полученных решеток. Для цепочки Тоды билинейные соотношения имеют вид:

$$W_{xx}W - W_x^2 - \hat{W}\check{W} = \alpha W^2. \quad (4.105)$$

Для решетки Тоды аналогичные соотношения уже первого порядка по x :

$$\begin{aligned} \hat{W}_x Z - \hat{W} Z_x - W \hat{Z} &= \mu \hat{W} Z \\ Z_x W - Z W_x - \hat{W} \check{Z} &= \delta Z W. \end{aligned} \quad (4.106)$$

При этом из (4.106) следует уравнение первого порядка "внутри" цепочки:

$$\hat{W}_x W - \hat{W} W_x = \frac{\hat{Z} W^2 + \check{Z} \hat{W}^2}{Z} + (\mu + \delta) \hat{W} W. \quad (4.107)$$

Заметим, что рассматривая третий ряд в решетке (T), можно получить уравнения вообще без производных:

$$TZ - \hat{T}\check{Z} = \epsilon W^2. \quad (4.108)$$

Определим расположение функций на решетке:

$$W = \tau_{n,m}^T, \quad \hat{W} = \tau_{n+1,m}^T, \quad T = \tau_{n-1,m+1}^T, \quad \hat{T} = \tau_{n,m+1}^T, \quad \check{Z} = \tau_{n-1,m-1}^T, \quad Z = \tau_{n,m-1}^T,$$

где τ -функция решетки Тоды определяется соотношением:

$$e^{Q_{n,m}} = \frac{\tau_{n,m}^T}{\tau_{n-1,m}^T}.$$

Для цепочки Вольтерры соотношения типа Хироты имеют вид:

$$\frac{w_{xx}w - w_x^2}{w_x} = \frac{\hat{w}\check{w} - w^2}{\check{w}}. \quad (4.109)$$

Билинейные соотношения для решетки Вольтерры :

$$\begin{aligned} wz_x &= (w + z)(\hat{w} - z) \\ z\hat{w}_x &= (\hat{w} + \hat{z})(\hat{w} - z) \\ \check{z}w_x &= (w + z)(w - \check{z}). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Заметим, что рассматривая третий ряд в решетке (t), можно получить уравнения вообще без производных:

$$\frac{1}{t}(t + w)(\hat{t} - w) = \frac{1}{\check{z}}(w + z)(w - \check{z}). \quad (4.111)$$

Определим расположение функций на решетке:

$$w = \tau_{n,m}^V, \quad \hat{w} = \tau_{n+1,m}^V, \quad t = \tau_{n-1,m+1}^V, \quad \hat{t} = \tau_{n,m+1}^V, \quad \check{z} = \tau_{n-1,m-1}^V, \quad z = \tau_{n,m-1}^V,$$

где τ -функция решетки Вольтерры определяется соотношением:

$$\tau_{n,m}^V = e^{\mathcal{Q}_{n,m}}.$$

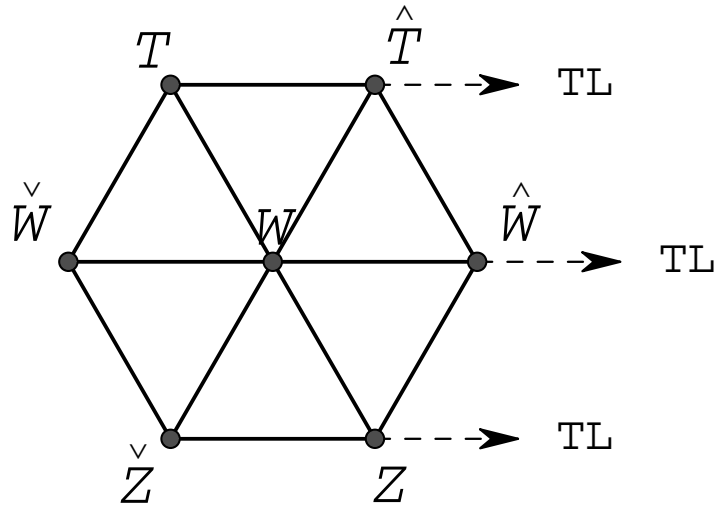


Рис. 4.2: Расположение функций Хироты на решетке

4.4.11 Обсуждение

Для построения интегрируемых дискретных систем (решеток) был предложен гамильтонов метод, при котором координатам q соответствуют узлы решетки,

а импульсам p - ее ребра. Требование инвариантности гамильтониана относительно канонических преобразований заданного вида (4.63,4.65) фиксирует калибровку, что позволяет, как и в случае динамических систем, эффективно выделять действительно различные решетки интегрируемых систем. Калибровка может быть восстановлена в конце, что позволяет, например, записывать уравнения для решетки в форме Хироты.

В тех случаях, когда это возможно, нетрудно построить преобразования Миуры, связывающие различные интегрируемые системы, благодаря универсальности первых интегралов вплоть до первой степени по p и q_x , при этом становится прозрачным смысл этих преобразований, как необратимых при некоторых значениях спектральных параметров - констант в данных моделях.

Заметим, что спектральные параметры в данной теории появляются естественно, как константы интегрирования уравнений (4.65). При этом, в уравнениях (4.79),(4.81),(4.84) мы не выписывали явно зависимость от параметров, связанных с трансляцией вдоль цепочек, а также от параметров, исключаемых растяжением по x .

Мы почти не касались построения конкретных решений, однако можно предположить, что представление в дискретной форме полезно для алгебраического построения частных решений (по этому поводу см. также [163] и др.), поскольку порядок уравнений по непрерывным переменным понижается. Заметим, однако, что представление интегрируемых систем в чисто дискретном виде не позволяет однозначно выделить требуемый класс решений, в то время как уравнения первого порядка по непрерывной переменной дают конструктивный способ построения многосолитонных решений.

Интересно также исследовать различные граничные условия для построения конечнозонных решений.

4.5 Трехмерная решетка преобразований Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви-Стюартсона

В этом Разделе будет построена трехмерная октаэдрическая решетка преобразований Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви-Стюартсона. В узлах решетки расположены функции, через которые, с одной стороны, определены динамические переменные системы Дэви-Стюартсона, а с другой стороны, эти

функции связаны билинейными соотношениями типа Хироты. Одним из уравнений решетки является чисто дискретное шеститочечное уравнение, совпадающее со знаменитым уравнением Хироты.

Система Дэви–Стюартсона (ДС) была получена для описания распространения волнового пакета на поверхности жидкости [32]. Известные интегрируемые представители этого семейства ДС-1 и ДС-2 были исследованы многими авторами с использованием всего арсенала теории интегрируемых систем, в том числе метода обратной задачи [12], преобразования Беклунда [81], (см. также [60],[80],[162]) и билинейного представления [58],[50].

Для поиска явных решений уравнений ДС-1, ДС-2 было проведено много аналитических и численных исследований, среди которых необходимо отметить работу [21], в которой были найдены решения, экспоненциально убывающие в обоих направлениях (дромионы), которые позднее были обобщены [45]. В работе [58] приводится обобщение этих решений в виде двойных вронскианов в билинейном виде (см. также работы [152],[166] и цитированную в них литературу).

4.5.1 Система ДС

Мы выберем следующее представление для интегрируемой системы ДС. Рассмотрим пару коммутирующих в силу канонической скобки Пуассона

$$\{p(x, y), q(x', y')\} = \delta(x-x')\delta(y-y'), \quad \{p(x, y), p(x', y')\} = 0, \quad \{q(x, y), q(x', y')\} = 0$$

гамильтонианов $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = 0$ и их плотности:

$$\begin{aligned} H_1 &= p_x q_x + p q_x^2 + p \hat{O} p, & \hat{O} &= \partial_y^{-1} \partial_x \\ H_2 &= p_y q_y + p q_y^2 + p \hat{O}^{-1} p, & \hat{O}^{-1} &= \partial_x^{-1} \partial_y, \end{aligned} \quad (4.112)$$

где $\mathcal{H}_i = \int \int dx dy H_i$.

Классический вид системы ДС получается при замене $q = \log(u)$, $p = -\frac{\chi}{4}uv$. Рассмотрим сумму потоков, порождаемую гамильтонианами H_1 и H_2 $\partial_\tau = \partial_{t_1} + \partial_{t_2}$:

$$\begin{aligned} -v_\tau + v_{xx} + v_{yy} - \frac{\chi}{2}v(\hat{O} + \hat{O}^{-1})uv &= 0, \\ u_\tau + u_{xx} + u_{yy} - \frac{\chi}{2}u(\hat{O} + \hat{O}^{-1})uv &= 0, \end{aligned} \quad (4.113)$$

где $\hat{O} = \partial_y^{-1} \partial_x$, $\hat{O}^{-1} = \partial_x^{-1} \partial_y$.

При замене переменных $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$, $2\partial_\tau = i\partial_t$, получаем систему ДС-1:

$$\begin{aligned} -i v_t + v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2\chi v(uv) + v\phi_\xi &= 0, \\ i u_t + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2\chi u(uv) + u\phi_\xi &= 0, \\ (\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2)\phi &= -4\chi\partial_\xi(uv). \end{aligned} \quad (4.114)$$

При замене переменных $x = \xi + i\eta$, $y = \xi - i\eta$, $2\partial_\tau = i\partial_t$, получаем систему ДС-2:

$$\begin{aligned} -i v_t + v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 2\chi v(uv) + v\phi_\xi &= 0, \\ i u_t + u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2\chi u(uv) + u\phi_\xi &= 0, \\ (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)\phi &= -4\chi\partial_\xi(uv). \end{aligned} \quad (4.115)$$

Отметим, что можно рассмотреть обобщение системы ДС:

$$\begin{aligned} -i v_t + v_{\xi\xi} + c_0 v_{\eta\eta} + c_1 v(uv) + c_2 v\phi_\xi &= 0, \\ i u_t + u_{\xi\xi} + c_0 u_{\eta\eta} + c_1 u(uv) + c_2 u\phi_\xi &= 0, \\ (\partial_\xi^2 + c_3 \partial_\eta^2)\phi &= c_4 \partial_\xi(uv). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Однако при произвольных параметрах c_i система (4.116) не является интегрируемой. При выборе коэффициентов $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 2\chi, 1, -1, -4\chi)$ получается система ДС-1, а при выборе $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = (-1, 2\chi, 1, 1, -4\chi)$ получаем систему ДС-2.

Заметим, что конкретная форма интегрируемой версии системы ДС не важна – все они могут быть получены из гамильтоновой пары (4.112) с помощью точечной и, иногда контактной замены переменных, см. например (4.117), (4.118), преобразования Беклунда в гамильтоновых переменных не меняются.

Важно отметить, что обычно системами ДС-1 и ДС-2 называют системы (4.114), (4.115), на которые наложена связь $v = u^*$. Мы изучаем преобразования Беклунда в общем случае, не накладывая эту связь.

Укажем еще одну форму записи интегрируемой системы ДС (Шабат, Ямилов [139]) – поток, соответствующий гамильтониану \mathcal{H}_1 имеет вид

$$\begin{aligned} u_{t_1} &= u_{xx} + 2(uV)_x, \\ v_{t_1} &= -v_{xx} + (V^2)_y + 2u_x, \quad V_y = v_x, \end{aligned} \quad (4.117)$$

если $v = q_y$, $u = p$,

а поток, соответствующий гамильтониану \mathcal{H}_2 :

$$\begin{aligned} u_{t_2} &= u_{yy} + 2(uv)_y, \\ v_{t_2} &= -v_{yy} + (v^2 + 2U)_y, \quad U_x = u_y, \end{aligned} \quad (4.118)$$

если $v = q_y$, $u = p$.

4.5.2 Преобразования Беклунда

Для поиска преобразований Беклунда (ПБ) мы будем использовать метод, предложенным в Разделе 4.2. Единственная сложность получения ПБ в любом случае заключается в правильном выборе производящей функции канонического преобразования. Этот вид диктуется структурой гамильтониана рассматриваемой задачи. Например, в одномерном случае для систем с плотностью гамильтониана $H = -pq_{xx} + A(p, q_x)$, плотность канонического преобразования имеет вид $F = c\hat{q}_x^2 + q_x f(\hat{q} - q) + g(\hat{q} - q)$. В этом случае функции f, g и константа c находятся при подстановке импульсов, найденных из канонического преобразования, в гамильтониан и требованием $\delta(\mathcal{H}[p, q] - \mathcal{H}[\hat{p}, \hat{q}]) = 0$ определения 4.2 канонического преобразования Беклунда. В случае системы ДС применяется аналогичная процедура.

Рассмотрим производящую функцию канонического преобразования

$$\mathcal{F}[q, \hat{q}] : p = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}, \quad \hat{p} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \hat{q}}.$$

1. Двумерная цепочка Тоды

Пусть производящая функция канонического преобразования $F[q, \hat{q}]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\hat{q}_x\hat{q}_y - f, \quad f = e^{\hat{q}-q} \Rightarrow \\ p &= f, \quad \hat{p} = \hat{q}_{xy} + f \Rightarrow \delta(\mathcal{H}_i[p, q] - \mathcal{H}_i[\hat{p}, \hat{q}]) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Квадратные скобки у аргументов функций означают, что функция может зависеть не только от q или \hat{q} , но и от их производных.

В силу последнего равенства в (4.119) и определения 4.2 Раздела 4.2 данное каноническое преобразование является преобразованием Беклунда для систем с гамильтонианом $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$,

Исключая импульсы из (4.119), получаем двумерную цепочку Тоды

$$q_{xy} = e^{\hat{q}-q} - e^{q-\hat{q}}. \quad (4.120)$$

2. Двумерная релятивистская цепочка Тоды 1

Пусть производящая функция канонического преобразования $F[q, q^{(1)}]$ имеет вид:

$$F[q, q^{(1)}] = \frac{1}{2}q_x^{(1)}q_y^{(1)} - f_1q_y^{(1)} - \frac{1}{2}g_1, \quad f_1 = e^{q^{(1)}-q}, \quad g_1 = -e^{q^{(1)}-q}\hat{O}^{-1}e^{q^{(1)}-q}, \quad (4.121)$$

тогда $p = f_1 q_y^{(1)} + g_1$, $p^{(1)} = q_{xy}^{(1)} + f_1 q_y + g_1$, и условие $\delta(\mathcal{H}_i[p, q] - \mathcal{H}_i[p^{(1)}, q^{(1)}]) = 0$, $i = 1, 2$ выполняется, а значит, преобразование (4.121) определяет преобразование Беклунда $(p, q) \rightarrow (p^{(1)}, q^{(1)})$. для $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

Исключая импульсы из (4.121), получаем двумерную релятивистскую цепочку Тоды 1:

$$q_{xy} = q_y^{(1)} e^{q^{(1)}-q} - e^{q^{(1)}-q} \hat{O}^{-1} e^{q^{(1)}-q} - q_y e^{q-q^{(-1)}} + e^{q-q^{(-1)}} \hat{O}^{-1} e^{q-q^{(-1)}}, \quad (4.122)$$

где индекс (-1) обозначает преобразование, обратное к рассмотренному выше преобразованию Беклунда.

3. Двумерная релятивистская цепочка Тоды 2

Пусть производящая функция канонического преобразования $F[q, q^{(2)}]$ имеет вид:

$$F[q, q^{(2)}] = \frac{1}{2} q_x^{(2)} q_y^{(2)} - f_2 q_x^{(2)} - \frac{1}{2} g_2, \quad f_2 = e^{q^{(2)}-q}, \quad g_2 = -e^{q^{(2)}-q} \hat{O} e^{q^{(2)}-q}, \quad (4.123)$$

тогда $p = f_2 q_x^{(2)} + g_2$, $p^{(2)} = q_{xy}^{(2)} + f_2 q_x + g_2$, и условие $\delta(\mathcal{H}_i[p, q] - \mathcal{H}_i[p^{(2)}, q^{(2)}]) = 0$, $i = 1, 2$ выполняется, а значит, преобразование (4.123) определяет ПБ $(p, q) \rightarrow (p^{(2)}, q^{(2)})$. для $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

Здесь индекс (1) и ниже индекс (2) нумеруют импульсы и координаты после применения соответствующего преобразования Беклунда.

Исключая импульсы из (4.123), получаем двумерную релятивистскую цепочку Тоды 2:

$$q_{xy} = q_x^{(2)} e^{q^{(2)}-q} - e^{q^{(2)}-q} \hat{O} e^{q^{(2)}-q} - q_x e^{q-q^{(-2)}} + e^{q-q^{(-2)}} \hat{O} e^{q-q^{(-2)}}, \quad (4.124)$$

где индекс (-2) обозначает преобразование, обратное к рассмотренному выше преобразованию Беклунда $(p, q) \rightarrow (p^{(2)}, q^{(2)})$.

Релятивистские двумерные цепочки Тоды являются обобщением одномерных релятивистских цепочек Тоды [128], (см. также [9] и цитированную там литературу). Термин "релятивистская" по отношению к цепочке Тоды, возможно, является не слишком удачным, но повсеместно используется в литературе.

В следующем Разделе мы получим параметризацию динамических переменных p и q , а также других переменных в терминах функций, входящих в билинейные уравнения, а затем покажем, что полученные в данном Разделе преобразования Беклунда вытекают из этих билинейных уравнений.

4.5.3 Конструкция решетки ПБ системы ДС

Для того чтобы параметризовать динамические переменные рассматриваемой задачи, используем простой тест Пенлеве, для вычисления степени полюса и его вычета. Например, параметризация $q = \log \frac{W}{\check{W}} \Rightarrow q_x = \frac{W_x}{W} - \frac{\check{W}_x}{\check{W}}$ означает, что функция q_x есть сумма полюсов в точках, совпадающих с нулями полинома W и единичными вычетами, и полюсов в точках, совпадающих с нулями полинома \check{W} и вычетами -1 , при условии, что все нули полиномов попарно различны. Отметим, что после вывода всех билинейных уравнений, полиномиальность функций, входящими в эти уравнения не является необходимой (она использовалась чисто технически для вывода параметризации динамических переменных). Однако во многих интересных случаях, таких как солитонные или алгебро-геометрические решения, функции в билинейных уравнениях являются целыми.

Для записи полученных уравнений используем производную Хироты, которая определяется стандартно:

$$D_x^k D_y^l D_t^m a \cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^l \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m a(x, y, t) b(x' y' t') \Big|_{x=x', y=y', t=t'}. \quad (4.125)$$

Конечно, первая производная Хироты это просто вронскиан.

Рассмотрим двумерную цепочку Тоды

$$q_{xy} = e^{\hat{q}-q} - e^{q-\check{q}}, \quad q_x = z, \quad p = e^{\hat{q}-q} \iff z_y = p - \check{p}, \quad p_x = p(\hat{z} - z), \quad (4.126)$$

либо $x \leftrightarrow y$.

Параметризуя p и q , получаем хорошо известное уравнение Хироты для двумерной цепочки Тоды:

$$q = \log \frac{W}{\check{W}}, \quad p = \frac{\hat{W}\check{W}}{W^2} \Rightarrow D_x D_y W \cdot W = 2(\hat{W}\check{W} - \lambda W^2). \quad (4.127)$$

Для получения новых билинейных уравнений мы будем использовать преобразование Миуры из работы [139]:

$$\begin{aligned} \text{Двумерная цепочка Тоды} &\rightarrow \text{Двумерная цепочка Вольтерры} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Двумерная цепочка Гейзенберга.} \end{aligned}$$

Первая из выше перечисленных преобразований Миуры [139] приводит к двумерной цепочке Вольтерры [139]:

$$z = B + \partial_x \partial_y^{-1} A, \quad p = A\hat{B} \Rightarrow A_x = A(\hat{B} - B), \quad B_y = B(A - \check{A}) \quad (4.128)$$

Уравнения Хироты для данной цепочки имеют вид

$$A = \partial_y \log \frac{W}{V}, \quad B = \partial_x \log \frac{V}{\check{W}} \Rightarrow D_y W \cdot V = \check{W} \hat{V}, \quad D_x V \cdot \check{W} = \check{V} W, \quad (4.129)$$

заметим, что из (4.129) следует, что $A = \frac{\hat{V} \check{W}}{V W}$, $B = \frac{\check{V} W}{V \check{W}}$.

Следующее преобразование Миуры [139] приводит к двумерной цепочке Гейзенберга

$$B = -\frac{Q_x}{\hat{Q} - Q}, \quad A = -\frac{\hat{Q}_y}{\hat{Q} - Q} \Rightarrow \frac{Q_{xy}}{Q_x Q_y} = \frac{1}{Q - \check{Q}} - \frac{1}{\hat{Q} - Q}. \quad (4.130)$$

Уравнения Хироты для этой цепочки имеет вид

$$Q = \frac{\check{U}}{\check{W}}, \quad \hat{Q} = \frac{U}{W} \Rightarrow D_y U \cdot V = \check{U} \hat{V}, \quad D_x V \cdot \check{U} = \check{V} U. \quad (4.131)$$

Заметим, что уравнения Хироты (4.131) совпадают с уравнениями (4.129) при замене $U \rightarrow W$.

Условия совместности для двумерной цепочки Тоды

$$(\partial_x + \hat{z}) \hat{\psi} = \psi, \quad \psi_y + p \hat{\psi} = 0 \quad (4.132)$$

выполняются, если выбрать $\psi = \frac{V}{W}$.

Если сделать замену $W \rightarrow U$ в выражениях для координат и импульсов, то условия (4.132) выполняются, естественно при $\psi = \frac{V}{U}$.

Покажем, что преобразования Беклунда, полученные в предыдущем Разделе, являются следствием билинейных уравнений, полученных в данном Разделе.

Для двумерной цепочки Тоды нетрудно показать, что из уравнений (4.127) следуют ПБ (4.119), соответствующих сдвигу $W \rightarrow \hat{W}$.

Что касается релятивистских цепочек, рассмотрим, например, первую из них. Используем параметризацию $e^q = \frac{V}{W}$, $e^{q^{(1)}} = \frac{W}{\check{W}}$, рассмотрим первое уравнение из (4.121), тогда, вследствие уравнений (4.129):

$$e^{\hat{q}-q} = p = e^{q^{(1)}-q} q_y^{(1)} - e^{q^{(1)}-q} \hat{O}^{-1} e^{q^{(1)}-q} \Rightarrow e^{\hat{q}-q^{(1)}} - q_y^{(1)} + \hat{O}^{-1} e^{q^{(1)}-q} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{W_y}{W} - \frac{V_y}{V} \right) - \left(\frac{W_y}{W} - \frac{\check{W}_y}{\check{W}} \right) + \hat{O}^{-1} \left(\frac{V_x}{V} - \frac{\check{W}_x}{\check{W}} \right) = 0.$$

аналогично показывается, что и второе уравнение из (4.121) является тождеством в силу билинейных уравнений (4.129).

Таким образом, преобразование Беклунда релятивистской цепочки 1 соответствует сдвигу $V \rightarrow W$.

Нетрудно проверить, что релятивистская цепочка Тоды 2 соответствует параметризации $e^q = \frac{W}{\hat{W}}$, $e^{q^{(2)}} = \frac{\hat{V}}{V}$, (уравнения (4.123) выполняются тождественно в силу билинейных уравнений (4.129), а значит, преобразование Беклунда этой цепочки соответствует сдвигу $W \rightarrow \hat{V}$.

Используя симметрию $W \leftrightarrow U$, получим еще два сдвига $V \rightarrow U$ и $U \rightarrow \hat{V}$.

Таким образом, каждому преобразованию Беклунда систем (4.112) соответствует сдвиг на решетке функций. Комбинация этих сдвигов приводит к бесконечной трехмерной решетке, в каждом узле которой расположена функция, которую мы и называем "решеткой преобразований Беклунда системы ДС". Конечно, мы имеем ввиду интегрируемые случаи (4.112).

Представить себе эту решетку можно следующим образом.

Рассмотрим плоскость (VW) , проходящую через две параллельные прямые, соответствующие цепочкам Тоды $.. \check{V}, V, \hat{V} ..$ и $.. \check{W}, W, \hat{W} ..$. Размножим число этих прямых, используя сдвиги, соответствующие преобразованиям Беклунда $V \rightarrow W$ и обратным к ним. Получим бесконечное число параллельных прямых, лежащих в одной плоскости.

Аналогично, используя сдвиги, соответствующие релятивистским цепочкам Тоды, получим еще два бесконечных набора параллельных прямых, лежащих в той же плоскости. В итоге получаем треугольную решетку преобразований Беклунда (4.112).

Пользуясь симметрией $W \leftrightarrow U$, аналогично получаем плоскость (W, U) , пересекающую плоскость (W, V) под некоторым углом. Используя процедуру размножения плоскостей, аналогичную процедуре размножения прямых (см. выше), получаем трехмерную решетку. Далее мы выясним вид этой решетки и расположение функций на ней.

Вся решетка порождается уравнениями (4.127),(4.129)(4.131). Мы получим и другие уравнения, следующие из этих. Заметим, что уравнения, соответствующие гамильтонианам H_1, H_2 (4.112), приводят к следующим временным уравнениям Хироты:

$$D_{t_1} W \cdot \check{W} = D_x^2 W \cdot \check{W}, \quad D_{t_2} W \cdot \check{W} = D_y^2 W \cdot \check{W}. \quad (4.133)$$

Комбинируя уравнения (4.129) и (4.131), получим еще три важных соот-

ношения

$$D_x U \cdot W = V\hat{R}, \quad D_y U \cdot W = \hat{V}R, \quad W\check{U} - U\check{W} = VR, \quad (4.134)$$

последнее из которых сводится к чисто дискретному трехмерному уравнению Хироты, причем функции, входящее в это уравнение естественно располагаются в вершинах октаэдра (см. например [163] где данное уравнение представлено в дискретных переменных).

Введем тау-функции, которые располагаются в вершинах решетки - $\tau_{k,l,m}$, тогда из уравнения Хироты следует, что

$$R = \tau_{0,0,1}, \quad W = \tau_{1,0,0}, \quad \check{W} = \tau_{0,-1,0}, \quad U = \tau_{0,1,0}, \quad \check{U} = \tau_{-1,0,0}, \quad V = \tau_{0,0,-1}. \quad (4.135)$$

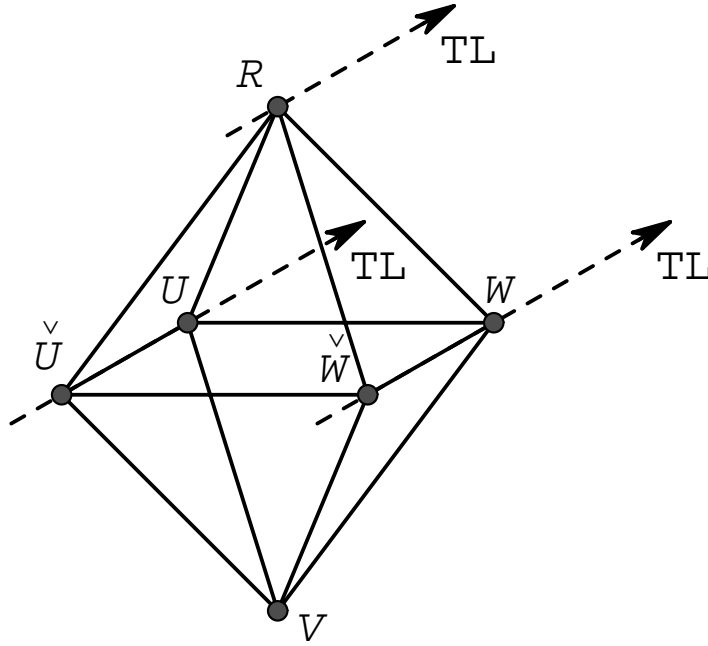


Рис. 4.3: Расположение функций в узлах октаэдра

Важно отметить, что все полученные преобразования Беклунда являются четными сдвигами, т.е. если представить преобразование Беклунда в виде вектора $(\Delta k, \Delta l, \Delta m)$, то число $\Delta k + \Delta l + \Delta m$ должно быть четным, например, сдвиг $(1, 1, 0)$ соответствует сдвигу вдоль цепочки Тоды. Применяя этот сдвиг к функции \check{W} , мы должны получить функцию W , т.е. координата функции \check{W} плюс вектор сдвига равна координате функции W . Действительно, $(0, -1, 0) + (1, 1, 0) = (1, 0, 0)$. Таким образом, узлы построенной ранее решетки

имеют декартовы координаты с целыми значениями, причем, поскольку сумма координат любой точки октаэдра (4.135) нечетна, а сдвиги только четны, то любая точка решетки имеет нечетную сумму координат. Тогда $\tau_{k,l,m}$ принадлежит решетке в том и только в том случае, если $k + l + m$ - нечетно, т.е. получившаяся решетка является октаэдрической подрешеткой кубической решетки. Вторая подрешетка (если число $k + l + m$ - четно) никак не связана с изучаемой решеткой.

Полученные билинейные уравнения в новых переменных имеют вид:

$$D_x D_y \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k+1,l,m} = 2(\tau_{k,l-1,m} \tau_{k+2,l+1,m} - \lambda \tau_{k+1,l,m} \tau_{k+1,l,m}) \quad (4.136)$$

$$\begin{aligned} D_x \tau_{k,l,m-1} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= \tau_{k-1,l-1,m-1} \tau_{k+1,l,m}, \\ D_x \tau_{k,l,m-1} \cdot \tau_{k-1,l,m} &= \tau_{k-1,l-1,m-1} \tau_{k,l+1,m}, \\ D_x \tau_{k-1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= \tau_{k-1,l-1,m-1} \tau_{k,l,m+1}, \\ D_y \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l,m-1} &= \tau_{k,l-1,m} \tau_{k+1,l+1,m-1}, \\ D_y \tau_{k,l+1,m} \cdot \tau_{k,l,m-1} &= \tau_{k-1,l,m} \tau_{k+1,l+1,m-1}, \\ D_y \tau_{k,l+1,m} \cdot \tau_{k+1,l,m} &= \tau_{k,l,m+1} \tau_{k+1,l+1,m-1}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Дискретное уравнение Хироты

$$\tau_{k+1,l,m} \tau_{k-1,l,m} - \tau_{k,l+1,m} \tau_{k,l-1,m} = \tau_{k,l,m+1} \tau_{k,l,m-1}. \quad (4.138)$$

Временные уравнения Хироты

$$\begin{aligned} D_{t_1} \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= D_x^2 \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m}, \\ D_{t_2} \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= D_y^2 \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m}. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Итак, построена октаэдрическая трехмерная решетка преобразований Беклунда для интегрируемых версий системы ДС, определяемая билинейными уравнениями (4.136)–(4.139). Уравнения (4.137), в особенности то, как они вложены в решетку, а также релятивистские двумерные цепочки Тоды (4.122), (4.124) являются новыми. В работах [51], [157] построены похожие билинейные уравнения для аналогичных систем, которые, однако, не совпадают с (4.137). Мы не занимались построением решений, для чего необходимо сделать некоторые редукции и установить соответствующие граничные условия. Кроме того, для солитонных (дромионных) решений достаточно исследовать цепочки ПБ. Однако решетка необходима для построения решений двумерной цепочки Вольтерры и двумерной цепочки Гейзенберга.

Важно, что в систему уравнений, определяющих решетку, входит чисто дискретное трехмерное уравнение Хироты (4.138), которое является одним из ключевых в иерархии интегрируемых систем, поскольку путем перехода к различным пределам, заменой переменных и т.п. может быть сведено практически ко всем известным солитонным уравнениям [163].

В этой Главе был развит метод получения преобразований Беклунда, состоящий в том, что вариация действия сохраняется при применении этих преобразований. В качестве примеров рассмотрены модели типа нелинейного уравнения Шредингера, системы типа КдФ и другие системы. Построены производящие функции канонического ПБ. Показано, что цепочки преобразований являются лагранжевыми, причем лагранжиан однозначно определяется вышеупомянутыми производящими функциями. Ряд полученных ПБ являются новыми. Особенно нетривиальным результатом является получение нового ПБ для уравнения Цицейки.

Для одномерных систем таких, как система Тоды, система Леви, система Гейзенберга и уравнения Ландау–Лифшица получены как обычные, так и релятивистские (“магнитные”) цепочки преобразований Беклунда. Комбинация обычных и “магнитных” ПБ приводит к построению треугольной решетки ПБ.

Для интегрируемых вариантов системы Деви–Стюартсона были построены аналогичные ПБ, а также октаэдрическая решетка преобразований Беклунда.

Глава 5

Метод одевания с разделенными переменными

Разделение переменных очень удобно для получения решений некоторых линейных дифференциальных уравнений явно. Мы используем метод одевания для того, чтобы расширить класс таких уравнений. В качестве примера мы применяем метод одевания к линейному двумерному дифференциальному оператору, в том числе к оператору с постоянными коэффициентами.

Метод одевания, использующий преобразования Дарбу [31], эффективен для построения решений интегрируемых, в том числе нелинейных уравнений. В двумерном случае эти преобразования рассматривались, например, в [137] в применении к гиперболической системе.

Обычно процедура одевания выглядит следующим образом. Пусть H – некоторый оператор, а ψ – его собственная функция: $H\psi = \lambda\psi$. Применяя одевающий оператор S к функции ψ , получаем собственную функцию $\hat{\psi} = S\psi$ одетого оператора $\hat{H}\hat{\psi} = \lambda\hat{\psi}$, который удовлетворяет следующему уравнению

$$\hat{H}S = SH. \quad (5.1)$$

В одномерном случае оператор Дарбу выглядит следующим образом:

$$S = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\psi_x(\mu, x)}{\psi(\mu, x)},$$

где $\psi(\mu, x)$ – собственная функция оператора H с некоторым собственным значением μ : $H\psi(\mu, x) = \mu\psi(\mu, x)$.

Что касается двумерного случая, то выбор оператора Дарбу здесь неоднозначен. Например, в работе [43] в качестве преобразования Дарбу выбирается преобразование Лапласа. В работе [151] в этом качестве применяется преобразование Мутара.

В этой Главе мы рассмотрим случай, когда одевающий оператор S является двумерным линейным дифференциальным оператором

$$S = A(x, y)\partial_x + B(x, y)\partial_y + C(x, y),$$

а H, \hat{H} – дифференциальные операторы второго порядка.

Такой выбор обусловлен следующим обстоятельством: в работе [142] было показано, что частным решением уравнения

$$\hat{H}\hat{\Psi}(x, y) = 0, \quad \hat{H} = \frac{(x - y)^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1 - x^2}{(x - y)^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y^2 - 1}{(x - y)^2} \frac{\partial}{\partial y} \right] + \gamma^2(x - y)$$

является волновая функция $\hat{\Psi}(x, y) = (\partial_x - \partial_y)a(x)b(y)$, где a и b некоторые функции (подробнее см. ниже). Мы покажем, как этот результат может быть получен в рамках нашего подхода, а также рассмотрим общий случай.

Для краткости мы будем использовать обозначения $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_x F = F_x$, $\partial_y F = F_y$.

Здесь мы рассмотрим случай, когда оператор H можно представить в форме, в которой переменные разделяются

$$H = H^x + H^y, \quad H^x = f_1(x)\partial_x^2 + g_1(x)\partial_x + h_1(x), \quad H^y = f_2(y)\partial_y^2 + g_2(y)\partial_y + h_2(y),$$

тогда частный случай собственной функции оператора H имеет вид $\psi(x, y) = a(x)b(y)$, где $a(x)$ и $b(y)$ – собственные функции операторов H^x и H^y соответственно. Отметим, что функции $g_1(x)$, $g_2(y)$ могут быть занулены с помощью соответствующего преобразования оператора H , однако мы этого не делаем для того, чтобы выбрать более простой вид оператора S .

В частном случае нулевого собственного значения $\lambda = 0$ можно выбрать оператор H в более общей форме $H = e^{\phi(x, y)}(H^x + H^y)$.

Из уравнения (5.1) получаем

$$\hat{H} = e^{\phi(x, y)}(H_1\partial_x^2 + H_2\partial_y^2 + H_3\partial_x + H_4\partial_y + H_5),$$

где

$$\begin{aligned}
H_1 &= f_1(x), \quad H_2 = f_2(y), \\
H_3 &= g_1(x) + f_1'(x) + \phi_x(x, y)f_1(x) + \phi_y(x, y)f_1(x) \frac{B(x, y)}{A(x, y)} - 2f_1(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)} \\
H_4 &= g_2(y) + f_2'(y) + \phi_y(x, y)f_2(y) + \phi_x(x, y)f_2(y) \frac{A(x, y)}{B(x, y)} - 2f_2(y) \frac{B_y(x, y)}{B(x, y)} \\
H_5 &= h_1(x) + h_2(y) + g_1'(x) + \phi_x(x, y)g_1(x) - 2f_1(x) \frac{C_x(x, y)}{A(x, y)} - f_1'(x) \frac{C(x, y)}{A(x, y)} \\
&+ 2f_1(x) \frac{A_x(x, y)C(x, y)}{A^2(x, y)} - \phi_x(x, y)f_1(x) \frac{C(x, y)}{A(x, y)} - \phi_y(x, y)f_1(x) \frac{B(x, y)C(x, y)}{A^2(x, y)} \\
&+ \phi_y(x, y)g_1(x) \frac{B(x, y)}{A(x, y)} - g_1(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)} - g_2(y) \frac{A_y(x, y)}{A(x, y)} - f_1'(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)} \\
&- \phi_y(x, y)f_1(x) \frac{A_x(x, y)B(x, y)}{A^2(x, y)} - f_1(x) \frac{A_{xx}(x, y)}{A(x, y)} - \phi_x(x, y)f_1(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)} + \\
&+ 2f_1(x) \frac{A_x^2(x, y)}{A^2(x, y)} + 2f_2(y) \frac{A_y(x, y)B_y(x, y)}{A(x, y)B(x, y)} - f_2(y) \frac{A_{yy}(x, y)}{A(x, y)} - \phi_x(x, y)f_2(y) \\
&+ \frac{A_y(x, y)}{B(x, y)} - \phi_y(x, y)f_2(y) \frac{A_y(x, y)}{A(x, y)} - f_2'(y) \frac{A_y(x, y)}{A(x, y)}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Мы получаем также три уравнения на функции

$$A(x, y), B(x, y), C(x, y), \phi(x, y),$$

но не выписываем эти уравнения ввиду их громоздкости.

В следующем Разделе мы рассмотрим случай с оператором $S = \partial_x - \partial_y$, важным для физических приложений.

5.1 Случай $S = \partial_x - \partial_y$

В этом случае три упомянутых уравнения можно проинтегрировать, получая следующие функциональные уравнения

$$e^{\phi(x, y)} = \frac{F_1(x + y)}{f_1(x) + f_2(y)} = \frac{F_2(x + y)}{g_1(x) + g_2(y)} = \frac{F_3(x + y)}{h_1(x) + h_2(y)}. \tag{5.3}$$

Для решения этих функциональных уравнений рассмотрим, например, второе равенство в (5.3), получая

$$g_1(x) + g_2(y) = F(x + y)(f_1(x) + f_2(y)).$$

Продифференцируем это уравнение по x и по y , получая

$$F''(x+y)(f_1(x) + f_2(y)) + 2F'(x+y)(f_1'(x) + f_2'(y)) = 0$$

или

$$s(x+y)(f_1(x) + f_2(y)) + 2(f_1'(x) + f_2'(y)) = 0, \quad s(t) = \frac{F''(t)}{F'(t)}.$$

Дифференцируя это уравнение по x и y , получаем

$$s''(x+y)(f_1(x) + f_2(y)) + 2s'(x+y)(f_1'(x) + f_2'(y)) = 0,$$

следовательно, $s'' = s's \Rightarrow s' = \frac{1}{2}(s^2 + \beta^2) \Rightarrow s(t) = \beta \frac{1+C \exp(\beta t)}{1-C \exp(\beta t)}$.

Получаем два случая:

1. $\beta \neq 0$. В этом случае решение функционального уравнения (5.3) имеет вид

$$\begin{aligned} f_1(t) &= a_1 \exp(\beta t) + d_1, & f_2(t) &= a_2 \exp(-\beta t) - d_1, \\ g_1(t) &= b_1 \exp(\beta t) + e_1, & g_2(t) &= b_2 \exp(-\beta t) - e_1, \\ h_1(t) &= c_1 \exp(\beta t) + k_1, & h_2(t) &= c_2 \exp(-\beta t) - k_1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

2. $\beta = 0$.

В этом случае решение функционального уравнения (5.3) имеет вид

$$\begin{aligned} f_1(t) = -f_2(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & g_1(t) = -g_2(t) &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \\ h_1(t) = -h_2(t) &= a_3 t^2 + b_3 t + c_3. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Выбрав $f_1(t) = \frac{1}{2}(1 - t^2)$, $g_1(t) = 0$, $h_1(t) = \gamma^2 t$, получаем гамильтониан из работы [142]. Используя метод этой Главы, легко получить волновую функцию основного состояния [142]: $\Psi_0 = (\partial_x - \partial_y)a(x)b(y)$, где a и b решения уравнений

$$(1 - x^2)a''(x) + 2\gamma^2 a(x)(x + \nu) = 0, \quad (1 - y^2)b''(y) + 2\gamma^2 b(y)(y + \nu) = 0.$$

В работе [142] $\nu = 1$, при этом решения могут быть выражены через функции Бесселя:

$$a(x) = C_1(x-1)^{1/2}I(1, 2^{1/2}2\gamma(x-1)^{1/2}) + C_2(x-1)^{1/2}K(1, 2^{1/2}2\gamma(x-1)^{1/2}).$$

Аналогичная формула имеет место и для $b(y)$.

5.2 Уравнение Эйлера-Дарбу

В качестве примера рассмотрим уравнение Эйлера-Дарбу [109], которое уже появлялось в Главе 1 и в Главе 2:

$$u_{xy} + \frac{\alpha u_x - \beta u_y}{x - y} = 0. \quad (5.6)$$

Рассмотрим следующую параметризацию квантового спинового оператора:

$$\begin{aligned} S^1 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1)\partial_x - \frac{1}{2}(y^2 - 1)\partial_y + \frac{1}{2}(\beta x + \alpha y), \\ S^2 &= -\frac{i}{2}(x^2 + 1)\partial_x - \frac{i}{2}(y^2 + 1)\partial_y + \frac{i}{2}(\beta x + \alpha y), \\ S^3 &= -x\partial_x - y\partial_y + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad \Rightarrow \quad [S^i, S^j] = i e^{ijk} S^k \end{aligned}$$

и оператор Эйлера Дарбу

$$L = \partial_x \partial_y + \frac{\alpha}{x - y} \partial_x - \frac{\beta}{x - y} \partial_y,$$

тогда

$$[S^1, L] = (x + y)L, \quad [S^2, L] = i(x + y)L, \quad [S^3, L] = 2L$$

и

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + (x - y)^2 L = s(s + 1),$$

где $s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Тогда операторы S^i являются операторами Дарбу уравнения Эйлера - Дарбу, т.е. если u - решение уравнения (5.6) тогда $u^i = S^i u$ - также решения уравнения (5.6).

Рассмотрим операторы $S^\pm = S^1 \pm iS^2$. Начиная с решения уравнения (5.6) $u_0 = (x - y)^{\alpha + \beta + 1}$ мы размножаем решения этого уравнения $u_n = (-S^-)^n u_0$, тогда $u_n = P_n(x, y)u_0$, где

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad P_1 = (\alpha + 1)x + (\beta + 1)y, \quad P_2 = (\alpha + 1)(\alpha + 2)x^2 + \\ &\quad + 2xy(\alpha + 1)(\beta + 1) + (\beta + 1)(\beta + 2)y^2, \\ P_3 &= (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)x^3 + 3(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\beta + 1)x^2y + \\ &\quad + 3(\alpha + 1)(\beta + 1)(\beta + 2)xy^2 + (\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)y^3 \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим элементарное решение уравнения ЭД $u_\mu = \sqrt{x - \mu} \sqrt{y - \mu}$, тогда

$$S^+ u_\mu = -\frac{\partial}{\partial \mu} u_\mu, \quad S^- u_\mu = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} u_\mu - 2\mu s u_\mu, \quad S^3 u_\mu = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} u_\mu - s u_\mu.$$

Отметим, что в данном случае переменные в гамильтониане не разделены, но они разделены в начальном частном решении и роль операторов Дарбу играют операторы S^\pm .

5.3 Возможные схемы решения в общем случае

В данном Разделе предлагается метод построения решений некоторых линейных уравнений с частными производными второго порядка, используя одевание уравнений, которые разделены по переменным.

Наиболее просто метод может быть применен при заданном одевающем операторе S . Приведем пример: пусть $S = y\partial_x - x\partial_y$, тогда

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{a}{x^2} + b, \quad g_1(x) = g_2(x) = -\frac{a}{x^3} + \frac{c}{x}, \quad h_1(x) = h_2(x) = dx^2 + e.$$

Интересно, что в этом случае переменные в одетом гамильтониане также разделены:

$$H_1(x, y) = H_2(y, x) = \frac{a}{x^2} + b, \quad H_3(x, y) = 0, \quad H_4(x, y) = H_5(y, x) = -\frac{3a}{x^3} + \frac{c}{a},$$

$$H_6(x, y) = w(x) + w(y), \quad w(x) = 3\frac{a}{x^4} - \frac{c}{x^2} + e + dx^2.$$

Решение для произвольных операторов S, H, \hat{H} является непростой классификационной задачей. Однако для конкретных применений более естественной и более простой постановкой задачи является следующая: пусть дан оператор \hat{H} , тогда задача состоит в том, чтобы восстановить операторы H, S , если это возможно, с помощью формул (5.2). Например, первое условие, которое нужно проверить $\frac{H_2}{H_1} = \frac{f_2(y)}{f_1(x)}$, при этом восстанавливаются функции $f_1(x), f_2(y)$. Процедура может быть продолжена, определяя при этом функции $H_i(x, y), A(x, y), B(x, y), C(x, y)$, т.е. операторы H, S .

5.4 Двумерные уравнения типа уравнения Шредингера

В этом Разделе мы применим схему одевания уравнений с разделенными переменными для построения новых решений двумерных уравнений типа Шредингера в магнитном поле. В случае неединичной метрики будет проинтегрирован класс решений с разделяющимися переменными до одевания. Показано,

в частности, что отношение коэффициентов перед операторами дифференцирования в случае единичной метрики удовлетворяет уравнению Хопфа. Установлена связь между решениями двумерного уравнения эйконала с единичной правой частью и решениями уравнения Хопфа.

Задача о построении новых решений двумерного уравнения Шредингера важна для приложений и непосредственно связана с теорией интегрируемых систем. Такая задача, использующая преобразование Лапласа (одного из вариантов метода одевания), рассматривалась в работе [116] (см. также [43]).

Метод одевания, использующий преобразования Дарбу [31], эффективен для построения решений интегрируемых, в том числе нелинейных уравнений. В двумерном случае эти преобразования рассматривались, например в [137], в применении к гиперболической системе. О другом варианте метода одевания - преобразовании Мутара см. [151].

Мы начинаем с гамильтониана H , в котором переменные разделены:

$$H = t(x, y)(\partial_x^2 + \partial_y^2 + u_1(x) + u_2(y)). \quad (5.7)$$

Мы не выписываем линейные по производным члены, поскольку они должны были бы также зависеть от одной соответствующей переменной и могут быть устранены калибровочным преобразованием.

Оператор S мы выбираем в виде

$$S = \frac{1}{T(x, y)}(\partial_x + \phi(x, y)\partial_y + f(x, y)). \quad (5.8)$$

Здесь $T(x, y)$, $\phi(x, y)$, $f(x, y)$ – произвольные функции, причем $T(x, y)$ – чисто калибровочная функция и выбирается из соображения удобства. Оператор S является наиболее общим двумерным линейным оператором, в чем и состоит основное отличие от цитируемых выше работ [116], [137], где оператор одевания соответствует случаю $\phi = \pm i$. Поэтому для того чтобы сохранить вещественность преобразований, мы вынуждены выбрать одеваемый и одетый гамильтониан в виде, где оператор импульса заменяется на обычную производную $-i\nabla \rightarrow \nabla$, а значит, мы будем говорить не об уравнении Шредингера, а об одевании оператора типа Шредингера.

Мы действуем уравнением (5.1) на вспомогательную функцию и зануляем все члены по производным. Зануление коэффициентов при ψ_{xxx} , ψ_{xxy} , ψ_{xyy} , ψ_{yyy} приводят к следующему виду одетого гамильтониана:

$$\hat{H} = t(x, y)((\partial_x - A_1(x, y))^2 + (\partial_y - A_2(x, y))^2 + U(x, y)). \quad (5.9)$$

Коэффициенты при ψ_{xx}, ψ_{yy} определяют векторные потенциалы A_1, A_2 соответственно, а коэффициент при ψ_{xy} приводит к интересному соотношению

$$t_x + \phi t_y - 2 \frac{\phi_y - \phi \phi_x}{\phi^2 + 1} t = 0. \quad (5.10)$$

Подстановка

$$t = \frac{w(Z)}{Z_x^2 + Z_y^2}, \quad \phi = -\frac{Z_x}{Z_y}$$

(где Z - произвольная функция от x и y , а w - произвольная функция от Z) полностью интегрирует соотношение (5.10). Зануление коэффициента, например, при ψ_y определяет одетый потенциал U , дальнейшее вычисление коэффициента при ψ_x приводит к уравнению на функцию f , которое можно записать в следующем виде:

$$\tilde{f} = f Z_y$$

$$\begin{aligned} Z_x \tilde{f}_x + Z_y \tilde{f}_y + \frac{Z_x^2 - Z_y^2}{Z_x^2 + Z_y^2} (Z_{yy} - Z_{xx} - 4Z_x Z_y Z_{xy}) \tilde{f} + Z_{xy} (Z_y^2 - Z_x^2) \\ + \frac{1}{2} (-Z_y Z_{xxx} + Z_x Z_{xxy} - Z_y Z_{xyy} + Z_x Z_{yyy}) + (Z_{xx} - Z_{yy}) Z_x Z_y = 0. \end{aligned}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\tilde{f} = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_y}{Z_x} Z_{xx} - \frac{Z_x}{Z_y} Z_{yy} \right) + \tilde{f}_0,$$

тогда уравнение для f_0 не имеет локальных по Z решений (т.е. зависящих только от Z и его производных), поэтому полагаем $f_0 = 0$, получая при этом следующее уравнение:

$$\partial_x \partial_y \log \phi = 0,$$

$$Z = L \left(\int dx F(x) - \int dy G(y) \right),$$

уравнение при ψ имеет вид $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$

$$\begin{aligned} u(x, y) - \frac{1}{2} \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{3}{4} \frac{F'^2(x)}{F^2(x)} \\ - \frac{1}{2} \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{3}{4} \frac{G'^2(y)}{G^2(y)} + \\ + (F^2(x) + G^2(y)) R' \left(\int dx F(x) - \int dy G(y) \right) = 0. \end{aligned}$$

При $R' = \mu^2 = \text{const}$ переменные разделены

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \frac{F''(x)}{F(x)} - \frac{3}{4} \frac{F'^2(x)}{F^2(x)} - \mu^2 F(x)^2, \quad u_2(y) = \frac{1}{2} \frac{G''(y)}{G(y)} - \frac{3}{4} \frac{G'^2(y)}{G^2(y)} - \mu^2 G(y)^2.$$

Волновая функция $\psi(x, y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$ (нулевое собственное значение)

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{F(x)}} (a_1 e^{\mu \int dx F(x)} + a_2 e^{-\mu \int dx F(x)}),$$

$$\psi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{G(y)}} (b_1 e^{\mu \int dy G(y)} + b_2 e^{-\mu \int dy G(y)}).$$

Одетая волновая функция $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi} = S\psi = \frac{2\mu}{\sqrt{F(x)}\sqrt{G(y)}} (a_1 b_1 e^{\mu(\int dx F(x) + \int dy G(y))} - a_2 b_2 e^{-\mu(\int dx F(x) + \int dy G(y))}).$$

Магнитное поле

$$B = \frac{F(x)G(y)}{(F(x)^2 + G(y)^2)^2} (G'^2(y) - F'^2(x)) + \frac{1}{2} \frac{1}{F^2(x) + G^2(y)} (G(y)F''(x) - F(x)G''(y)).$$

Потенциал

$$U(x, y) = u(x, y) - \frac{G^2(y)}{F(x)} \frac{F''(x)}{F^2(x) + G^2(y)} - \frac{F^2(x)}{G(y)} \frac{G''(y)}{F^2(x) + G^2(y)} +$$

$$\frac{G^2(y)}{F^2(x)} \frac{G^2(y) + 3F^2(x)}{(F^2(x) + G^2(y))^2} F'^2(x) + \frac{F^2(x)}{G^2(y)} \frac{F^2(x) + 3G^2(y)}{(F^2(x) + G^2(y))^2} G'^2(y).$$

Таким образом, функции $F(x), G(y)$ полностью определяют потенциал и магнитное поле после одевания и потенциал до одевания (магнитное поле до одевания равно нулю). Было бы интересно получить гамильтониан после одевания с заданными свойствами, например, $U = 0, B \neq 0$. Решение такого уравнения в общем случае неизвестно, однако есть один нетривиальный пример, задающий функцию G неявно:

$$F(x) = 1, \quad \int^{G(y)} da \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \frac{1}{\sqrt{(a^2 - 1)a(4\mu^2 a + c_1)}} = y + c_2.$$

5.5 Случай $t = 1$. Одевание оператора типа Шредингера

В случае $t = 1$ может быть проведено одевание оператора типа Шредингера (с единичной метрикой) с ненулевым начальным магнитным полем, при этом

гамильтонианы до и после одевания имеют вид:

$$\begin{aligned} H_0 &= (\partial_x - a_1(x, y))^2 + (\partial_y - a_2(x, y))^2 + u(x, y), \\ H &= (\partial_x - A_1(x, y))^2 + (\partial_y - A_2(x, y))^2 + U(x, y), \end{aligned} \quad (5.11)$$

причем одевающий оператор S должен иметь калибровочно-инвариантную форму:

$$S = (\partial_x - a_1(x, y)) + \phi(x, y)(\partial_y - a_2(x, y)) + f(x, y). \quad (5.12)$$

Отметим важное обстоятельство - из (5.10) при $t = 1$ получаем, что функция Z удовлетворяет двумерному уравнению эйконала

$$Z_x^2 + Z_y^2 = w(Z), \quad \phi = -\frac{Z_x}{Z_y}, \quad (5.13)$$

а функция ϕ удовлетворяет уравнению Хопфа

$$\phi_y = \phi\phi_x.$$

Конечно, по заданному решению уравнения Хопфа также можно построить решение двумерного уравнения эйконала (5.13), а именно:

выбираем общее решение уравнения Хопфа в виде

$$z(\phi) = x + y\phi \Rightarrow \phi_{xx} = -z''(\phi)\phi_x^3, \quad \phi_{xxx} = -z'''(\phi)\phi_x^4 + 3(z''(\phi))^2\phi_x^5. \quad (5.14)$$

Для дальнейших вычислений удобно сделать замену переменных

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow (\phi(x, y), \phi_x(x, y)) = (\phi, \eta) \\ x &= z(\phi) - \phi(z'(\phi) - \frac{1}{\eta}), \quad y = z'(\phi) - \frac{1}{\eta}, \\ \partial_x &= \eta\partial_\phi - \eta^3 z''(\phi)\partial_\eta, \quad \partial_y = \eta\phi\partial_\phi + \eta^2(1 - \eta\phi z''(\phi))\partial_\eta. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Введем величину $\xi = \frac{\sqrt{1+\phi^2}}{\eta} - \int d\phi z''(\phi)\sqrt{1+\phi^2}$, тогда оказывается, что она является решением уравнения эйконала с единичной правой частью $(\partial_x \xi)^2 + (\partial_y \xi)^2 = 1$. Оказывается, что общим решением уравнения $\partial_x F + \phi\partial_y F = 0$ является функция $F(\xi)$. Выберем функцию F такую, что $F'^2(Z) = w(Z)$, тогда эта функция и функция $z(\phi)$ задают решение уравнения эйконала (5.13).

Вычислим магнитное поле в одетом гамильтониане H в зависимости от поля в гамильтониане H_0 :

$$B = \partial_x A_2 - \partial_y A_1 = B_0 + \partial_x \partial_y \log(\phi) = B_0 + \partial_x^2 \phi, \quad B_0 = \partial_x a_2 - \partial_y a_1.$$

Потенциалы

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1+\phi^2}[-f^2 + (\partial_x + \phi\partial_y - \eta\phi)f - \frac{1}{4}\eta^2 + G(\xi)], \\ U &= \frac{1}{1+\phi^2}[-f^2 - (\partial_x + \phi\partial_y - \eta\phi)f - \frac{1}{4}\eta^2 + G(\xi)], \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $G(\xi)$ произвольная функция. Магнитные поля

$$B_0 = -\frac{1}{2}\partial_x^2\phi - \frac{1}{1+\phi^2}(\partial_y - \phi\partial_x - \phi_x)f, \quad B = \frac{1}{2}\partial_x^2\phi - \frac{1}{1+\phi^2}(\partial_y - \phi\partial_x - \phi_x)f. \quad (5.17)$$

Аналог одевающей цепочки можно построить, используя уравнения (5.16), (5.17):

$$u(\hat{f}, \hat{z}, \hat{\partial}_x, \hat{\partial}_y, G(\hat{\xi})) = U(f, z, \partial_x, \partial_y, G(\xi)), \quad B_0(\hat{f}, \hat{z}, \hat{\partial}_x, \hat{\partial}_y) = B(f, z, \partial_x, \partial_y) \quad (5.18)$$

Необходимо подчеркнуть, что в этом Разделе мы считаем, что все функции зависят от ϕ, η (эти переменные не преобразуются при одевании), поэтому операторы ∂_x, ∂_y определяются формулой (5.15), при одевании эти операторы преобразуются по правилу:

$$z(\phi) \rightarrow \hat{z}(\phi) \Rightarrow \partial_x \rightarrow \hat{\partial}_x, \quad \partial_y \rightarrow \hat{\partial}_y$$

Приведем пример с постоянным одетым потенциалом

$$z(\phi) = \mu\sqrt{1+\phi^2}, \quad s(\phi, \eta) = 2\mu\frac{\eta^2}{\sqrt{1+\phi^2}} - \frac{1}{16\mu}\sqrt{1+\phi^2} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{\eta}{16\mu}\frac{1}{(1+\phi^2)^{1/2}} - \frac{3}{2}\mu\frac{\eta^3}{(1+\phi^2)^{3/2}}, \quad B = -\frac{\eta}{16\mu}\frac{1}{(1+\phi^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\mu\frac{\eta^3}{(1+\phi^2)^{3/2}} \\ u &= -\frac{1}{256\mu^2} + 8\mu^2\frac{\eta^2}{(1+\phi^2)^{3/2}}, \quad U = -\frac{1}{256\mu^2}. \end{aligned}$$

Случай $\phi = \text{const} \neq \pm i$

В этом случае получаем

$$u(x, y) = \frac{1}{\phi^2 + 1}(D_+f - f^2), \quad U(x, y) = -\frac{1}{\phi^2 + 1}(D_+f + f^2), \quad D_+ = \partial_x + \phi\partial_y,$$

т.е. одевающую цепочку, причем

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= a_1(x, y), \quad A_2(x, y) = a_2(x, y), \\ b(x, y) &= \partial_x a_2 - \partial_y a_1 = \frac{D_-f}{\phi^2 + 1}, \quad D_- = \partial_x - \phi\partial_y. \end{aligned}$$

В этом Разделе рассматривалось одевание операторов типа Шредингера в магнитном поле. В данном варианте метода одевания магнитное поле изменяется в процессе одевания. Были рассмотрены операторы типа Шредингера, как с неединичной метрикой ($t \neq 1$), так и с единичной метрикой ($t = 1$).

В первом случае при некоторых естественных ограничениях и с нулевым начальным магнитным полем класс решений по существу свелся к системам с разделенными переменными. Все ответы в этом случае строятся в простой и явной форме, хотя одетый гамильтониан содержит потенциал и магнитное поле с не разделяющимися переменными. Важно установить, можно ли снять наложенные ограничения или полученный ответ является достаточно общим.

Во втором случае все вычисления выполнены с ненулевыми начальными и конечными магнитными полями и потенциалами.

Было бы интересно провести классификацию возможных решений в этих двух случаях, например, представляет определенный интерес случай, когда потенциал одетого гамильтониана равен 0, а магнитное поле нет.

Соотношение (5.10) интересно тем, что при $t = 1$ позволяет получить решение двумерного уравнения эйконала вида (5.13) по заданному решению уравнения Хопфа и, наоборот, решение уравнения эйконала вида (5.13) задает явное решение уравнения Хопфа. Представляет определенный интерес классификация получаемых таким образом решений.

5.6 Случай анизотропных масс

Рассмотрим гамильтонианы с анизотропными массами:

$$H = t(x, y)(a(x)\partial_x^2 + b(y)\partial_y^2 + u(x, y)), \quad (5.20)$$

$$\hat{H} = t(x, y)(a(x)(\partial_x - A_1(x, y))^2 + b(y)(\partial_y - A_2(x, y))^2 + U(x, y)).$$

Дальнейшие вычисления полностью аналогичны изотропному случаю $a = 1, b = 1$, рассмотренному ранее, поэтому приведем только окончательные формулы.

Получаем

$$S = \frac{1}{F(x)}\partial_x + \frac{1}{G(y)}\partial_y + \frac{1}{2} \frac{F'(x)}{F^2(x)} + \frac{1}{2} \frac{G'(y)}{G^2(y)},$$

$$t = \frac{1}{L^2(\int dx F(x) - \int dy G(y))(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))}.$$

Векторный потенциал

$$A_1 = \frac{1}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} \times \\ \times \left[F(x)G'(y)b(y) + \frac{1}{2}F(x)G(y)b'(y) - \left(\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{1}{2} \frac{a'(x)}{a(x)} \right) G^2(y)b(y) \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} \times \\ \times \left[G(y)F'(x)a(x) + \frac{1}{2}F(x)G(y)a'(x) - \left(\frac{G'(y)}{G(y)} + \frac{1}{2} \frac{b'(y)}{b(y)} \right) F^2(x)a(x) \right].$$

Магнитное поле

$$B = \frac{a(x)G(y)F''(x) - b(y)F(x)G''(y)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} - 2F(x)G(y) \frac{a^2(x)F'^2(x) - b^2(y)G'^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\ - \frac{1}{2} \frac{a'(x)G(y)F'(x)(a(x)F^2(x) - 3b(y)G^2(y))^2}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\ - \frac{1}{2} \frac{b'(y)G'(y)F(x)(3a(x)F^2(x) - b(y)G^2(y))^2}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\ + \frac{1}{2} \frac{F(x)G(y)(a''(x) - b''(y))}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} - \frac{1}{2} \frac{F(x)G(y)(a'^2(x)F^2(x) - b'^2(y)G^2(y))}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2}.$$

Потенциал до одевания

$$u(x, y) = a(x) \frac{1}{2} \frac{F''(x)}{F(x)} + b(y) \frac{1}{2} \frac{G''(y)}{G(y)} - a(x) \frac{3}{4} \frac{F'^2(x)}{F^2(x)} - b(y) \frac{3}{4} \frac{G'^2(y)}{G^2(y)} + \\ (a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))R \left(\int dx F(x) - \int dy G(y) \right).$$

Потенциал после одевания

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & u(x, y) - \frac{a(x)b(y)}{F(x)} \frac{G^2(y)F''(x)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} - \\
& - \frac{a(x)b(y)}{G(y)} \frac{F^2(x)G''(y)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} + \\
& + a(x)b(y)F'^2(x) \frac{G^2(y)}{F^2(x)} \frac{3a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
& + a(x)b(y)G'^2(y) \frac{F^2(x)}{G^2(y)} \frac{a(x)F^2(x) + 3b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
& + \frac{1}{2}a'(x)b(y)F'(x) \frac{G^2(y)}{F(x)} \frac{3a(x)F^2(x) - b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\
& - \frac{1}{2}a(x)b'(y)G'(y) \frac{F^2(x)}{G(y)} \frac{a(x)F^2(x) - 3b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
& + \frac{1}{4}a'^2(x) \frac{b(y)G^2(y)}{a(x)} \frac{3a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
& + \frac{1}{4}b'^2(y) \frac{a(x)F^2(x)}{b(y)} \frac{a(x)F^2(x) + 3b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{a(x)b''(y)F^2(x) + a''(x)b(y)G^2(y)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)}.
\end{aligned}$$

Отметим, что пример, приведенный в работе [142], относится к данному классу одевания с разделяющимися переменными, при этом

$$\begin{aligned}
a(x) &= x^2 - 1, \quad b(y) = 1 - y^2, \quad F(x) = 1, \quad G(y) = -1, \\
R(x) &= \frac{1}{x}, \quad u(x, y) = y - x, \quad L(x) = 2\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

В этой Главе метод одевания применялся к системам с разделенными переменными. Пример, где применяется этот метод, явно продемонстрировал его эффективность. Метод был использован для построения интегрируемых систем типа уравнения Шредингера в магнитном поле. Как побочный результат, было установлено, что по любому решению уравнения эйконала с единичной правой частью можно однозначно построить решение уравнения Хопфа и наоборот, т.е. эти уравнения изоморфны.

Глава 6

Представление кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве

6.1 Введение

В данной Главе будет построена многочастичная система, описывающая динамику полюсов рациональных решений системы Леви - динамической системы типа НШ. Оказывается, что динамика частиц с зарядом одного знака (т.е. динамика полюсов с вычетами одного знака) эквивалентна системе Мозера. Похожая система была ранее получена (см. например [27]) как динамика полюсов уравнения Бенджамина-Оно. Отметим, однако, что в случае системы Бенджамина-Оно полюса рациональных решений с противоположными по знаку вычетами должны находиться в комплексно-сопряженных точках, а в случае системы Леви это ограничение отсутствует.

В этой Главе будут также построены преобразования Беклунда рассматриваемой многочастичной системы. Цепочку таких преобразований Беклунда можно рассматривать как чисто дискретную версию системы Мозера. С помощью автомодельной редукции системы Леви получены рациональные решения четвертого уравнения Пенлеве в виде разложения по полюсам, которые далее интерпретируются как система электрических зарядов (заряд равен вычету) с кулоновским взаимодействием в плоскости. Мы рассмотрим представление кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве $P_{II} - P_{IV}$. Будут выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений $P_V - P_{VI}$. Для всех уравнений Пенлеве построено представление динамики магнитного момента во внешнем поле.

6.2 Динамика полюсов рациональных решений системы Леви

Динамическая система Леви имеет вид

$$a_t = \partial_x(a_x + a^2 + 2ab + \nu a), \quad b_t = \partial_x(-b_x + 2ab + b^2 + \nu b). \quad (6.1)$$

Используя анализ особенностей и асимптотик решений системы (6.1), нетрудно показать, что общее рациональное решение этой системы имеет вид

$$a = \alpha x + \beta + \sum_w \frac{1}{x-w} - \sum_v \frac{1}{x-v}, \quad b = \alpha' x + \beta' + \sum_v \frac{1}{x-v} - \sum_{\check{w}} \frac{1}{x-\check{w}}, \quad (6.2)$$

причем зависимость от времени величин α , α' , β , β' определяется следующими уравнениями:

$$\alpha_t = 2\alpha(\alpha + 2\alpha'), \quad \alpha'_t = 2\alpha'(\alpha' + 2\alpha), \quad (6.3)$$

$$\beta_t = \beta(\alpha + 2\alpha') + \alpha(\beta + 2\beta' + \nu), \quad \beta'_t = \beta'(\alpha' + 2\alpha) + \alpha'(\beta' + 2\beta + \nu).$$

Пусть элемент a принадлежит набору $\{a\}$ (т.е. $a \in \{a\}$), причем число элементов набора не фиксируется. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\sum f(x-a) = \sum_{a \in \{a\}} f(x-a), \quad \sum f(a-a') = \sum_{a' \in \{a\}, a' \neq a} f(a-a'). \quad (6.4)$$

Подставляя (6.2) в (6.1), получим систему, описывающую динамику полюсов рациональных решений системы Леви (6.1)

$$-\frac{1}{2}w_t = (\alpha + \alpha')w + \beta + \beta' + \frac{\nu}{2} + \sum \frac{1}{w-w'} - \sum \frac{1}{w-\check{w}}, \quad (6.5)$$

$$-\frac{1}{2}\check{w}_t = (\alpha + \alpha')\check{w} + \beta + \beta' + \frac{\nu}{2} + \sum \frac{1}{\check{w}-w} - \sum \frac{1}{\check{w}-w'} \quad (6.6)$$

и соотношения на w и v (подробнее см. в следующем разделе).

Введем новые переменные

$$w = f\mathbf{w} + g, \quad v = f\mathbf{v} + g, \quad \check{w} = f\check{\mathbf{w}} + g, \quad (6.7)$$

причем

$$f_t = -2(\alpha + \alpha')f, \quad g_t = -2(\alpha + \alpha') - 2(\beta + \beta') - \nu, \quad d\xi = -2\frac{dt}{f^2}.$$

Подставляя (6.7) в (6.5), имеем

$$\mathbf{w}_\xi = \sum \frac{1}{\mathbf{w} - \mathbf{w}'} - \sum \frac{1}{\mathbf{w} - \check{\mathbf{w}}}, \quad \check{\mathbf{w}}_\xi = \sum \frac{1}{\check{\mathbf{w}} - \mathbf{w}} - \sum \frac{1}{\check{\mathbf{w}} - \check{\mathbf{w}}'} \quad (6.8)$$

и аналогичные уравнения для \mathbf{v} .

Можно переписать систему (6.8) следующим образом:

$$x_{i,\xi} = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{x_i - x_j}, \quad q_i^2 = 1, \quad (6.9)$$

при этом $x_i \in \{\mathbf{w}\}$, если $q_i = 1$, и $x_i \in \{\check{\mathbf{w}}\}$, если $q_i = -1$. Система (6.9) описывает движение электрических зарядов в плоскости, причем скорость зарядов пропорциональна действующей на них силе (динамика ланжевеновского типа).

Интересно, что можно получить уравнения, описывающие динамику только положительных или только отрицательных зарядов. Действительно, дифференцируя первое уравнение в (6.8) и исключая $\check{\mathbf{w}}$ с помощью (6.8), получим систему Калоджеро-Мозера (см. также [27])

$$\mathbf{w}_{\xi\xi} = -2 \sum \frac{1}{(\mathbf{w} - \mathbf{w}')^3}, \quad \mathbf{v}_{\xi\xi} = -2 \sum \frac{1}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^3}. \quad (6.10)$$

Автомодельная редукция системы Леви приводит к уравнению Пенлеве *IV* непосредственно (без использования преобразования Миуры) с помощью автомодельной подстановки $x_i = \eta_i(2\gamma t)^{1/2}$ в (6.9). Решения системы Леви переходят в решения уравнения Пенлеве *IV*, что позволяет легко получить представление кулоновского газа для рациональных решений уравнения Пенлеве *IV*

$$\gamma \eta_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{\eta_i - \eta_j}, \quad q_i^2 = 1. \quad (6.11)$$

Позднее мы получим представление кулоновского газа для уравнений *PII* – *PVI*, используя анализ поведения решений вблизи особых точек.

6.2.1 Преобразования Беклунда для рациональных решений системы Леви

Применяя композицию преобразований Беклунда, можно получить чисто дискретную интегрируемую систему, эквивалентную данной динамической системе в том смысле, что любое решение динамической системы можно размножить,

применяя преобразования Беклунда, получая тем самым решение для дискретной системы.

Цепочка (композиция) преобразований Беклунда для системы Леви есть цепочка Вольтерры. Действительно, используя преобразование

$$a_x = a(\hat{b} - b), \quad \hat{b}_x = \hat{b}(\hat{a} - a), \quad (6.12)$$

можно получить новое решение (\hat{a}, \hat{b}) системы Леви (6.1) из решения (a, b) .

Пусть $a = a_n$, $\hat{a} = a_{n+1}$ (здесь и далее $x = x_n$, $\hat{x} = x_{n+1}$, $\check{x} = x_{n-1}$), тогда $a_{n,x} = a_n(b_{n+1} - b_n)$, $b_{n,x} = b_n(a_n - a_{n-1})$. С другой стороны, обозначая $b = c_{m-1}$, $a = c_m$, $\hat{b} = c_{m+1}$, $\hat{a} = c_{m+2}$, нетрудно получить цепочку Вольтерры в ее обычной записи

$$c_{m,x} = c_n(c_{m+1} - c_{m-1}). \quad (6.13)$$

Подставляя общее рациональное решение (6.2) в (6.12), имеем

$$\hat{\alpha} = \alpha, \quad \hat{\beta} = \beta, \quad \hat{\alpha}' = \alpha', \quad \hat{\beta}' = \beta', \quad N_{\hat{a}} = N_a + 1, \quad N_{\hat{b}} = N_b + 1, \quad (6.14)$$

где N_f — сумма вычетов функции f .

Преобразования Беклунда для рациональных решений (6.1) определяются соотношениями (следуют из уравнения на a из (6.1)):

$$\alpha w + \beta = \sum \frac{1}{w - \hat{v}} - 2 \sum \frac{1}{w - w'} + \sum \frac{1}{w - \check{w}}, \quad (6.15)$$

$$\alpha v + \beta = - \sum \frac{1}{v - \hat{v}} + 2 \sum \frac{1}{v - v'} - \sum \frac{1}{v - \check{v}},$$

$$\alpha v + \beta = \sum \frac{1}{v - \check{v}} - \sum \frac{1}{v - \check{w}}, \quad \alpha w + \beta = \sum \frac{1}{w - \hat{v}} - \sum \frac{1}{w - \hat{w}}. \quad (6.16)$$

Уравнение на b из (6.1) дает:

$$\alpha' w + \beta' = - \sum \frac{1}{w - \hat{w}} + 2 \sum \frac{1}{w - w'} - \sum \frac{1}{w - v}, \quad (6.17)$$

$$\alpha' v + \beta' = \sum \frac{1}{v - w} - 2 \sum \frac{1}{v - v'} + \sum \frac{1}{v - \check{v}},$$

$$\alpha' v + \beta' = \sum \frac{1}{v - w} - \sum \frac{1}{v - \hat{v}}, \quad \alpha' w + \beta' = \sum \frac{1}{w - \check{w}} - \sum \frac{1}{w - v}. \quad (6.18)$$

Уравнения (6.16) и (6.18) можно записать в виде уравнений на полиномы:

$$W'_{n+1} W_n - W'_n W_{n+1} + (\alpha_n x + \beta_n) W_n W_{n+1} = \alpha_n W_{n+2} W_{n-1}, \quad (6.19)$$

$$W_{2n}(x) = \prod_w (x - w_n), \quad W_{2n-1}(x) = \prod_v (x - v_n),$$

$$\alpha_{2n} = \alpha, \quad \alpha_{2n-1} = \alpha', \quad \beta_{2n} = \beta, \quad \beta_{2n-1} = \beta'.$$

Из уравнений (6.15)-(6.18) легко получить дискретное уравнение Калоджеро-Мозера (определяющее преобразования Беклунда системы Калоджеро-Мозера):

$$-\sum \frac{1}{w - \hat{w}} + 2 \sum \frac{1}{w - w'} - \sum \frac{1}{w - \check{w}} = 0,$$

$$-\sum \frac{1}{v - \hat{v}} + 2 \sum \frac{1}{v - v'} - \sum \frac{1}{v - \check{v}} = 0. \quad (6.20)$$

В Разделе 4.4 рассматривалась двумерная решетка преобразований Беклунда системы Леви (решетка Вольтерры). Рассмотрим совместную с (6.12) систему

$$a_m^n + b_m^n + \nu^n = a_{m-1}^{n+1} + b_m^{n+1} + \nu^{n+1}, \quad a_m^n b_{m+1}^n = a_m^{n+1} b_m^{n+1}, \quad (6.21)$$

где индекс m определяет сдвиг вдоль цепочки Вольтерры (6.13), а индекс n — сдвиг вдоль релятивистской цепочки Вольтерры.

Подстановка общего рационального решения (6.2) в (6.21) приводит к следующим соотношениям

$$w_m^n = v_m^{n+1}, \quad \alpha^n + \alpha'^n = \alpha^{n+1} + \alpha'^{n+1}, \quad \alpha^n \alpha'^n = \alpha^{n+1} \alpha'^{n+1}, \quad (6.22)$$

$$\beta^n + \beta'^n + \nu^n = \beta^{n+1} + \beta'^{n+1} + \nu^{n+1},$$

$$\alpha^n \beta'^n + \alpha'^n \beta^n = \alpha^{n+1} \beta'^{n+1} + \alpha'^{n+1} \beta^{n+1},$$

$$\beta^n \beta'^n + \alpha^n N_{b^n} + 1 + \alpha'^n N_{a^n} = \beta^{n+1} \beta'^{n+1} + \alpha^{n+1} N_{b^{n+1}} + \alpha'^{n+1} N_{a^{n+1}}.$$

Можно выписать также уравнение, аналогичное (6.19) на двумерной решетке:

$$W_{m,x}^{n+1} W_m^n - W_m^{n+1} W_{m,x}^n + (\alpha_{n+m} x + \beta_{n+m}) W_m^{n+1} W_m^n = \alpha_{n+m} W_{m+1}^n W_{m-1}^{n+1}, \quad (6.23)$$

$$W_{m,x}^n W_{m+1}^n - W_m^n W_{m+1,x}^n + (\alpha^{n+m} x + \beta^{n+m}) W_m^n W_{m+1}^n = \alpha^{n+m} W_m^{n+1} W_{m+1}^{n-1}, \quad (6.24)$$

где $W = W_m^{n+1}$, $V = W_m^n$, $\check{W} = w_{m+1}^n$, $\check{V} = W_{m+1}^{n-1}$.

Помимо обычных симметрий, системы типа НШ обладают и мастер-симметриями (см. [10], где мастер-симметрии выписаны в наиболее удобной форме). Например, для системы Леви мастер-симметрия имеет вид

$$a_\tau = x a_t + a^2 + 3ab + (\nu + 2)a_x, \quad b_\tau = x b_t + b^2 + 3ab + (\nu - 2)b_x, \quad \mu = \nu + 2. \quad (6.25)$$

Подставляя анзац (6.2) в (6.25), имеем

$$w_\tau = ww_t - (\nu + 1), \quad v_\tau = vv_t - \nu, \quad \hat{\nu} = \nu + 2. \quad (6.26)$$

Интересно, что динамика полюсов по времени τ , соответствующего мастер-симметрии (6.26), определяется уравнением Хопфа с правой частью, причем решение, например для v , может быть записано в неявном виде

$$g(v - \nu\tau) = t + \tau v - \nu \frac{\tau^2}{2}, \quad (6.27)$$

где g — произвольная функция.

6.2.2 Степени полиномов. Возможные замыкания

До сих пор мы выписывали уравнения на динамику полюсов рациональных решений системы Леви, а также преобразования Беклунда для них, не указывая явно допустимое число полюсов в каждом из этих решений. Нетрудно получить уравнения на степень полиномов в (6.23) и (6.24). Ответ зависит от α и α' , которые не меняются вдоль цепочки Вольтерры. Выпишем ответ для разных случаев и укажем возможное замыкание решетки:

$\alpha \neq 0, \alpha' \neq 0$. Уравнения

$$N_k^n + N_k^{n+1} + 1 = N_{k-1}^{n+1} + N_{k+1}^n, \quad N_k^n + N_{k-1}^{n+1} + 1 = N_{k-1}^n + N_k^{n+1}. \quad (6.28)$$

Общее решение

$$N_k^n = \left(k + \frac{n+l}{2}\right)^2 + L_n, \quad l \in Z, \quad L_n + \left(\frac{n+l}{2}\right)^2 \in Z. \quad (6.29)$$

Замыкание

$$N_{k+k_0}^{n+n_0} = N_k^n, \quad n_0 = -2k_0, \quad L_n = L_{n+2k_0}. \quad (6.30)$$

$\alpha \neq 0, \alpha' = 0$. Уравнения

$$N_k^n + N_k^{n+1} + 1 = N_{k-1}^{n+1} + N_{k+1}^n, \quad N_k^n + N_{k-1}^{n+1} = N_{k-1}^n + N_k^{n+1}. \quad (6.31)$$

Общее решение

$$N_k^n = \frac{1}{2}k(k-1) + kl + L_n, \quad l \in Z, \quad L_n \in Z. \quad (6.32)$$

Замыкание

$$N_{k+k_0}^{n+n_0} = N_k^n, \quad k_0 = 0, \quad L_n = L_{n+n_0}. \quad (6.33)$$

6.2.3 Система Тоды

Применяя преобразование Миуры

$$B = a + b, \quad A = \hat{a}b = ab + a_x, \quad (6.34)$$

получим динамическую систему Тоды

$$A_t = \partial_x \frac{\delta H}{\delta B}, \quad B_t = \partial_x \frac{\delta H}{\delta A}, \quad H = A_x B + A B^2 + A^2, \quad (6.35)$$

дуальное преобразование Миуры имеет вид

$$\tilde{B} = a + \hat{b} = a + b + \frac{a_x}{a}, \quad \tilde{A} = ab, \quad (6.36)$$

дуальная к (6.35) система имеет вид

$$\tilde{A}_t = \partial_x \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \tilde{B}}, \quad \tilde{B}_t = \partial_x \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \tilde{A}}, \quad \tilde{H} = -\tilde{A}_x \tilde{B} + \tilde{A} \tilde{B}^2 + \tilde{A}^2. \quad (6.37)$$

Отметим, что пара (\tilde{A}, \tilde{B}) удовлетворяет системе (6.35). Рациональные решения систем (6.35) и (6.37) можно записать в виде

$$B(x, t) = (\alpha + \alpha')x + \beta + \beta' + \sum \frac{1}{x - w} - \sum \frac{1}{x - \check{w}}, \quad (6.38)$$

$$\tilde{B}(x, t) = (\alpha + \alpha')x + \beta + \beta' + \sum \frac{1}{x - \hat{v}} - \sum \frac{1}{x - v},$$

учитывая уравнения (6.15), (6.16), (6.17), (6.18) и (6.20), получим

$$A = (\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta') + \alpha(N_b + 1) + \alpha' N_a - \sum \frac{1}{(x - w)^2}, \quad (6.39)$$

$$\tilde{A} = (\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta') + \alpha N_b + \alpha' N_a - \sum \frac{1}{(x - v)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что величины $p = \tilde{A}$, $z = \nu + \tilde{B}$ удовлетворяют p - z версии цепочки Тоды:

$$p_x = p(\hat{z} - z), \quad z_x = p - \check{p}. \quad (6.40)$$

Перейдем теперь к двумерному случаю. Рассмотрим одну из систем Дэви-Стюартсона

$$u_t = u_{xx} + 2(uV)_x, \quad v_t = -v_{xx} + (V^2)_y + 2u_x, \quad V_y = v_x. \quad (6.41)$$

Эта система является гамильтоновой, причем

$$v = q_y, \quad u = p, \quad H = p_x q_x + p q_x^2 + p \partial_y^{-1} \partial_x p. \quad (6.42)$$

Отметим, что редукция гамильтониана (6.42) к одномерному случаю $\partial_y^{-1} \partial_x \rightarrow 1$ приводит к гамильтониану системы Тоды (6.35), если $A = p$, $B = q_x$. Пользуясь (6.38), ищем рациональные решения (6.41) в виде

$$q = \log \frac{W_n}{W_{n-1}}, \quad p = \frac{W_{n-1} W_{n+1}}{W_n^2}, \quad W_n = Q_{2n}. \quad (6.43)$$

Тогда полюса $w_n(y, t)$ удовлетворяют системе Калоджеро-Мозера (6.10) по t , аналогично одномерному случаю. Отметим, что в случае уравнений КП и КдВ ситуация несколько сложнее, поскольку из работы Мозера и теоремы Кричевера (см. например [164]) следует, что динамика полюсов по t в этом случае определяется гамильтонианом H_3 , а не более простым H_2 как в случае системы Леви и Дэви-Стюартсона.

Что же касается динамики по y , то имеет место соотношение

$$w_{n,y} = \frac{W_{n-1}(w_n) W_{n+1}(w_n)}{W_n'^2(w_n)}, \quad W_n(w_n) = 0. \quad (6.44)$$

6.2.4 Автомодельное решение системы Леви

Рассмотрим автомодельные решения дивергентных систем типа нелинейного уравнения Шредингера. Такие системы в качестве примеров уже рассматривались в подразделе 4.2.1. Действия для таких систем можно записать в виде

$$S = \int \int (p q_t - p_x q_x - V(p, q_x)) dt dx. \quad (6.45)$$

Для того чтобы получить автомодельные решения, надо потребовать одинаковую зависимость от времени t каждого члена в действии (6.45). Сравнение первых двух членов приводит к следующей автомодельной подстановке:

$$q_x = b(t)y(\xi), \quad p = c(t)z(\xi), \quad \xi = a(t)x, \quad a' = 2a^3, \quad b = a^\nu, \quad c = a^\lambda. \quad (6.46)$$

Интегрируя величину q_x по x и дифференцируя по t , получаем

$$q = \frac{b}{a} Y(\xi) + c_1 t, \quad Y'(\xi) = y(\xi).$$

Заметим, что можно добавить любую функцию от t в формулу для q , но из соображений однородности добавляем линейную по t . Кроме того, необходимо потребовать однородность функции V

$$V(p, q_x) = V(cz, by) = abcV(z, y). \quad (6.47)$$

Для системы Леви $V(p, q_x) = p^2q_x + pq_x^2$. В этом случае получаем

$$\nu = 1, \lambda = 1 \iff a = b = c,$$

кроме того, к действию можно добавить член вида $c_2 \int a(t)^2 dt \int q_x dx$, который не дает вклад в вариацию действия в координатах x, t , но, это не так в координатах ξ, t , кроме того, этот член имеет правильную однородность по времени.

Подставляя выражение для q_x, q_t, p в автомодельном виде в действие (6.45), получаем:

$$S = \int a(t)^2 dt \int d\xi (-z'y + 2\xi yz - z^2y - zy^2 + c_1z + c_2y). \quad (6.48)$$

Варьируя по z действие (6.48) находим z из получившегося уравнения. Подставляя найденное z в (6.48) и вводя обозначения

$$w(x, a, b) = y(-\xi, c_1, c_2), \quad x = -\xi, \quad a = \frac{1}{2}c_1 - c_2 + 1, \quad b = -\frac{1}{2}c_1^2,$$

получим Лагранжиан трансцендента Пенлеве IV (6.53).

6.3 Представление кулоновского газа и преобразования Беклунда уравнений Пенлеве

В современной литературе принято рассматривать следующие шесть уравнений Пенлеве (a, b, c, d — числа):

$$PI : w_{xx} = 6w^2 + x,$$

$$PII : w_{xx} = 2w^3 + xw + a,$$

$$PIII : w_{xx} = \frac{w_x^2}{w} - \frac{w_x}{x} + \frac{aw^2 + b}{x} + cw^3 + \frac{d}{w},$$

$$PIV : w_{xx} = \frac{w_x^2}{2w} + \frac{3w^3}{2} + 4xw^2 + 2(x^2 - a)w + \frac{b}{w},$$

$$PV : w_{xx} = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)w_x^2 - \frac{w_x}{x} + \frac{2}{x^2}(w-1)^2\left(aw + \frac{b}{w}\right) + \frac{cw}{x} + \frac{dw(w+1)}{w-1},$$

$$PVI : w_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-x}\right)w_x^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{w-x}\right)w_x +$$

$$+\frac{w(w-1)(w-x)}{x^2(x-1)^2} \left[a + \frac{bx}{w^2} + \frac{c}{(w-1)^2}(x-1) + \frac{dx(x-1)}{(w-x)^2} \right].$$

Все уравнения Пенлеве, кроме первого (т.е. $PII - PVI$), могут иметь подвижные особые точки в виде простых полюсов, причем решение вблизи этих особых точек ведет себя следующим образом

$$w(x) = \frac{q}{x-z} + g(z) + o(z)(x-z), \quad x \rightarrow z, \quad (6.49)$$

заряд q (вычет) не зависит от положения полюса для уравнений PII , $PIII$ и PIV , причем $q = \pm const$, ($q^2 = 1$ для уравнений PII и PIV). Функция $g(z)$ для уравнений PII , $PIII$ и PIV не зависит от заряда q (для уравнений PV и PVI это не так), и применима следующая процедура для построения уравнений кулоновского газа: общее рациональное решение уравнений Пенлеве имеет вид

$$w(x) = \alpha x + \beta + \sum_i \frac{q_i}{x-x_i}, \quad (6.50)$$

используя (6.49), имеем

$$g(x_i) - \alpha x_i - \beta = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i. \quad (6.51)$$

Поясним смысл термина "кулоновский газ" - определим потенциал

$$u(x) = -G(x) + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x, \quad G'(x) = g(x)$$

тогда, варьируя функционал энергии заряженных частиц по положению зарядов x_i

$$E = \sum_i q_i u(x_i) + \sum_{i>j} q_i q_j \log(x_i - x_j), \quad (6.52)$$

взаимодействующих по двумерному закону Кулона и находящихся в потенциале, получаем систему уравнений (6.51). Мы приведем конкретные примеры позднее.

Все уравнения Пенлеве являются лагранжевыми, нетрудно получить сле-

дующие плотности лагранжианов:

$$\begin{aligned}
LI : L &= \frac{w_x^2}{2} + 2w^3 + xw, \\
LII : L &= w_x^2 + w^4 + xw^2 + 2aw, \\
LIII : L &= \frac{w_x^2}{2w^2}x + aw - \frac{b}{w} + \frac{x}{2}(cw^2 - \frac{d}{w^2}), \\
LIV : L &= \frac{w_x^2}{w} + w^3 + 4w^2x + 4w(x^2 - a) - \frac{2b}{w}, \\
LV : L &= \frac{w_x^2}{w(w-1)^2}x + \frac{4}{x}(aw - \frac{b}{w}) - \frac{2c}{w-1} - \frac{2dw}{(w-1)^2}x, \\
LVI : L &= \frac{w_x^2}{2} \frac{x(x-1)}{w(w-1)(w-x)} + \\
&+ \frac{aw}{x(x-1)} - \frac{b}{w(x-1)} - \frac{c}{x(w-1)} - \frac{d}{w-x}.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Все плотности лагранжианов уравнений Пенлеве можно привести к виду

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}(w, x) - \frac{1}{4\mathcal{A}(w, x)}(w_x + \mathcal{B}(w, x))^2, \tag{6.54}$$

поэтому удобно ввести гамильтоновское описание этих систем

$$\mathcal{L} = pw_x + \mathcal{A}(w, x)p^2 + \mathcal{B}(w, x)p + \mathcal{C}(w, x), \tag{6.55}$$

действительно, исключая p из (6.55), получим (6.54). Гамильтонова форма описания уравнений Пенлеве была введена в работе [118], (см. также [146]). Это описание очень удобно для получения преобразований Беклунда для уравнений Пенлеве (кроме первого) в универсальной форме

$$-\frac{1}{2\mathcal{A}(w, x)}(w_x + \mathcal{B}(w, x)) = p = \frac{D}{\hat{w} - w}, \tag{6.56}$$

причем коэффициенты гамильтониана имеют вид

$$\mathcal{A} = a_3w^3 + a_2w^2 + a_1w + a_0, \quad \mathcal{B} = b_2w^2 + b_1w + b_0, \quad \mathcal{C} = c_1w, \tag{6.57}$$

преобразования Беклунда действуют на них следующим образом

$$\hat{a}_i = a_i, \quad \hat{b}_2 = b^2 - 3a_3D, \quad \hat{b}_1 = b_1 - 2a_2D, \quad \hat{b}_0 = b_0 - a_1D, \tag{6.58}$$

$$c_1 = b_2D - a_3D^2, \quad \hat{c}_1 = 2a_3D^2 - b_2D.$$

Преобразования Беклунда (или Шлезингера) активно изучались многими авторами, однако, следует отметить пионерскую работу Громака [52], а также статью Абловица и Фокаса [44]. Заметим, что ПБ уравнений Пенлеве в этом Разделе будут играть вспомогательную роль - они необходимы, чтобы определить гамильтоновские параметры A, B, C, D , закон их преобразования и определение параметров уравнений Пенлеве через эти параметры.

Используя (6.55) и (6.56), можно получить динамические спиновые системы, эквивалентные уравнениям Пенлеве P_J ($P_{II} - P_{VI}$):

$$\frac{i}{2}\nu_J(x)\vec{S}_x = [\vec{S} \times \frac{\delta H_J}{\delta \vec{S}}], \quad H_J = (\vec{S}\hat{I}_J\vec{S}) + (\vec{h}_J\vec{S}), \quad \vec{S}^2 = D^2, \quad (6.59)$$

где

$$\nu_{II} = \nu_{IV} = 1, \quad \nu_{III} = \nu_V = x, \quad \nu_{VI} = x(x-1), \quad (6.60)$$

а вектор спина \vec{S} и гамильтонова пара (p, w) связаны следующим соотношением:

$$\vec{S} = \vec{M}(w)p + \frac{D}{2} \frac{\partial \vec{M}(w)}{\partial w}, \quad \vec{M}(w) = (w^2 - 1, iw^2 + i, 2w). \quad (6.61)$$

Нетрудно найти и тензор анизотропии \hat{I}_J и магнитное поле \vec{h}_J , входящие в гамильтониан H_J в скалярной форме

$$r(w, x) = (\vec{M}(w)\hat{I}(x)\vec{M}(w)) = \nu(x)\mathcal{A}(w, x), \quad (6.62)$$

$$h(w, x) = (\vec{M}(w)\vec{h}(x)) = \nu(x)[\mathcal{B}(w, x) - \frac{D}{2}\mathcal{A}_w(w, x)].$$

Интересно отметить, что гамильтониан H_J описывает динамику спина длины D в поле анизотропии I и в магнитном поле \vec{h} , причем произвольную систему вида (6.55) можно привести к виду (6.59) в том случае, если

$$\mathcal{C}_w = \frac{D}{2}[\mathcal{B}_{ww} - \frac{D}{3}\mathcal{A}_{www}], \quad (6.63)$$

т.е. должно быть выполнено условие интегрируемости (6.58).

Рассмотрим теперь представление кулоновского газа и спиновой динамики для каждого из уравнений Пенлеве ($P_{II} - P_{VI}$) отдельно.

6.3.1 Уравнение Пенлеве II

Лагранжиан уравнения Пенлеве II в гамильтоновых переменных имеет вид:

$$\mathcal{L}_2 = pw_x + p^2 + p(w^2 + \frac{x}{2}) - \frac{w}{4}(2a + 1). \quad (6.64)$$

Преобразования Беклунда для уравнения Пенлеве II

$$\hat{w} = w + \frac{2a+1}{4p}, \quad p = -\frac{1}{2}(w_x + w^2 + \frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}(-\hat{w}_x + \hat{w}^2 + \frac{x}{2}), \quad \hat{a} = a+1. \quad (6.65)$$

Рациональные решения уравнения Пенлеве II

Поведение вблизи особенностей:

$$w \sim \frac{q}{x-x_0} - \frac{qx_0}{6}(x-x_0), \quad q^2 = 1, \quad x \rightarrow x_0, \quad w \sim -\frac{a}{x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.66)$$

Общее рациональное решение $a \in \mathcal{Z}$ и представление кулоновского газа для уравнения Пенлеве II :

$$w = \sum_i \frac{q_i}{x-x_i}, \quad q_i = \pm 1, \quad \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{x_i-x_j} = 0, \quad \forall i, \quad \sum_i q_i = -a. \quad (6.67)$$

Примеры рациональных решений ($w = w(x, a)$) :

$$w(x, 0) = 0, \quad w(x, \pm 1) = \mp \frac{1}{x}, \quad w(x, \pm 2) = \mp \frac{2}{x} \cdot \frac{x^3 - 2}{x^3 + 4}. \quad (6.68)$$

Например, решение

$$w(x, 2) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_3}, \quad x_k^3 = -4, \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.69)$$

соответствует конфигурации зарядов, когда один положительный заряд помещен в начало координат $x = 0$, а три отрицательных - в вершины равностороннего треугольника с координатами $x = x_k$, причем внешний потенциал отсутствует.

Поле анизотропии и магнитное поле для спинового представления (6.59), (6.62) уравнения Пенлеве II имеют вид:

$$r = 1, \quad h = w^2 + \frac{x}{2}, \quad D = -\frac{2a+1}{4}. \quad (6.70)$$

6.3.2 Уравнение Пенлеве III

Лагранжиан уравнения Пенлеве III в гамильтоновых переменных имеет вид:

$$\mathcal{L}_3 = pw_x + \frac{1}{x}p^2w^2 + p(Aw^2 + \frac{B}{x}w + C) + ADw, \quad (6.71)$$

причем

$$a = A(B - 2D - 1), \quad b = -C(B + 1), \quad c = A^2, \quad d = -C^2.$$

Преобразования Беклунда для уравнения Пенлеве III

$$\hat{w} = w + \frac{D}{p}, \quad p = -\frac{x}{2w^2}(w_x + Aw^2 + \frac{B}{x}w + C). \quad (6.72)$$

Преобразование калибровочных параметров

$$\hat{A} = A, \quad \hat{B} = -B - 2, \quad \hat{C} = -C, \quad \hat{D} = D + B + 1. \quad (6.73)$$

Рациональные решения уравнения Пенлеве III

Поведение вблизи особенностей:

$$w \sim \frac{q}{x - x_0} - \frac{q + a/c}{2x_0}, \quad x \rightarrow x_0, \quad q^2 = \frac{1}{c}, \quad w \sim \beta, \quad x \rightarrow \infty, \quad \beta^4 = -\frac{d}{c}. \quad (6.74)$$

Общее рациональное решение и представление кулоновского газа для уравнения Пенлеве III :

$$w = \beta + \sum_i \frac{q_i}{x - x_i}, \quad q_i^2 = \frac{1}{c}, \quad \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{x_i - x_j} = -\beta - \frac{q_i + a/c}{2x_i}, \quad \forall i, \quad (6.75)$$

$$\sum_i q_i = -\frac{1}{4c}(a + \frac{b}{\beta^2}).$$

Поле анизотропии и магнитное поле для спинового представления (6.59), (6.62) уравнения Пенлеве III имеют вид:

$$r = w^2, \quad h = Axw^2 + (B - D)w + Cx. \quad (6.76)$$

6.3.3 Уравнение Пенлеве IV

Лагранжиан уравнения Пенлеве IV в гамильтоновых переменных имеет вид:

$$\mathcal{L}_4 = pw_x + p^2w + p(w^2 + 2wx + A) + Bw, \quad a = 1 + B - \frac{1}{2}A, \quad b = -\frac{1}{2}A^2. \quad (6.77)$$

Преобразования Беклунда для уравнения Пенлеве IV

$$\hat{w} = w + \frac{B}{p}, \quad p = -\frac{1}{2w}(w_x + w^2 + 2wx + A), \quad \hat{A} = A - B, \quad \hat{B} = -B. \quad (6.78)$$

Калибровочное преобразование параметров

$$\hat{p} = p + \frac{A}{w}, \quad \hat{A} = -A, \quad \hat{B} = B - A, \quad (6.79)$$

либо

$$\mathcal{L}_4 = pw_x + p^2w - p(w^2 + 2wx + \tilde{A}) + \tilde{B}w, \quad a = -1 + \tilde{B} - \frac{1}{2}\tilde{A}, \quad b = -\frac{1}{2}\tilde{A}^2. \quad (6.80)$$

Преобразования Беклунда для уравнения Пенлеве *IV* (2)

$$\hat{w} = w - \frac{\tilde{B}}{p}, \quad p = \frac{1}{2w}(-w_x + w^2 + 2wx + \tilde{A}), \quad \hat{A} = \tilde{A} - \tilde{B}, \quad \hat{B} = -\tilde{B}. \quad (6.81)$$

Калибровочное преобразование параметров

$$\hat{p} = p - \frac{\tilde{A}}{w}, \quad \hat{A} = -\tilde{A}, \quad \hat{B} = \tilde{B} - \tilde{A}. \quad (6.82)$$

Уравнение Пенлеве *IV* имеет дополнительную симметрию третьего порядка [5]. Действительно, лагранжиан \mathcal{L}_4 (6.53) может быть представлен в одной из трех эквивалентных форм ($u + v + s = -2x$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= uv' - uvs + c_1u + c_2v = su' - uvs - c_2s + (c_1 - c_2 - 2)u \\ &= vs' - uvs + (c_2 - c_1 + 2)v - c_1s. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Исключая последовательно u , v и s из (6.83) и обозначая произвольное решение уравнение Пенлеве *IV* как $w(x; a, b)$, имеем

$$v = w(x; 1 + c_2 - \frac{1}{2}c_1, -\frac{1}{2}c_1^2), \quad u = w(x; -1 + c_1 - \frac{1}{2}c_2, -\frac{1}{2}c_2^2) \quad (6.84)$$

$$s = w(x; -\frac{1}{2}(c_1 + c_2), -\frac{1}{2}(2 + c_2 - c_1)^2).$$

Преобразования Беклунда имеют следующий вид:

- $T_1^\pm : \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{v}$

$$\hat{w} = -\frac{1}{2w}(w' + w^2 + 2xw \pm \sqrt{-2b}), \quad (6.85)$$

$$(a, b) \rightarrow (\hat{a}, \hat{b}) = (-\frac{1}{2}(a + 1) \pm \frac{3}{4}\sqrt{-2b}, -\frac{1}{2}(a - 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2b})^2)$$

- $T_2^\pm : \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{s}$

$$\hat{w} = -\frac{1}{2w}(-w' + w^2 + 2xw \pm \sqrt{-2b}), \quad (6.86)$$

$$(a, b) \rightarrow (\hat{a}, \hat{b}) = (-\frac{1}{2}(a - 1) \pm \frac{3}{4}\sqrt{-2b}, -\frac{1}{2}(a + 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2b})^2).$$

Комбинируя преобразования (6.85), (6.86), можно построить решетку для решений *PIV*.

6.3.4 Решетка для PIV

Решетка для решений PIV состоит из набора q_{ijk} , причем

$$(i, j, k) = (i + 1, j + 1, k + 1), \quad (i, j, k) \neq (2l, 2m, 2n), \quad (6.87)$$

т.е. является правильной треугольной решеткой, из которой исключена подрешетка с удвоенной элементарной ячейкой. При этом имеют место соотношения.

1. Каждая прямая является цепочкой Вольтерры:

$$q'_n = -q_n(q_{n+1} - q_{n-1}), \quad (6.88)$$

где $q_n = q_{njk}$ или $q_n = q_{ink}$ или $q_n = q_{ijn}$.

2. На любом маленьком треугольнике

$$\sum q_{tr} = -2x. \quad (6.89)$$

Рациональные решения уравнения Пенлеве IV

Поведение вблизи особенностей:

$$\begin{aligned} w &\sim \frac{q}{x - x_0} - x_0, \quad q^2 = 1, \quad x \rightarrow x_0, \\ w &\sim \alpha x, \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha(\alpha + 2)(\alpha + \frac{2}{3}) = 0. \\ w &\sim \frac{q}{x} - \frac{2}{3}(2 - aq)x, \quad x \rightarrow 0, \quad q^3 = q. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Общее рациональное решение и представление кулоновского газа для уравнения Пенлеве IV :

$$w = \alpha x + \sum_i \frac{q_i}{x - x_i}, \quad q_i = \pm 1, \quad \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{x_i - x_j} = -(1 + \alpha)x_i, \quad \forall i. \quad (6.91)$$

$$\sum_i q_i = -a, \quad \alpha = -2, \quad \sum_i q_i = 0, \quad \alpha = 0, \quad \sum_i q_i = a, \quad \alpha = -\frac{2}{3}.$$

Поле анизотропии и магнитное поле для спинового представления (6.59), (6.62) уравнения Пенлеве IV имеют вид

$$r = w, \quad h = w^2 + 2wx + A - \frac{D}{2}. \quad (6.92)$$

6.3.5 Уравнение Пенлеве V

Лагранжиан уравнения Пенлеве V в гамильтоновых переменных имеет вид:

$$\mathcal{L}_5 = pw_x + \frac{1}{x}p^2w(w-1)^2 + p\left(\frac{1}{x}((A+2D)w+B)(w-1) + Cw\right) + \frac{1}{x}wD(A+D), \quad (6.93)$$

причем

$$A^2 = 4a, \quad B^2 = -4b, \quad C^2 = -2d, \quad -2c = 2C(A + B + 2D + 1). \quad (6.94)$$

Преобразования Беклунда для уравнения Пенлеве V

$$p = \frac{D}{\hat{w} - w}, \quad \hat{A} = A + D, \quad \hat{B} = B + D, \quad \hat{C} = C, \quad \hat{D} = -D. \quad (6.95)$$

Калибровочное преобразование параметров

1. $\hat{A} = -A, \quad \hat{D} = A + D;$
2. $\hat{B} = -B, \quad \hat{D} = B + D;$
3. $\hat{C} = -C, \quad \hat{D} = -(A + B + D + 1).$

(6.96)

Рациональные решения уравнения Пенлеве V

Поведение вблизи полюса $x \rightarrow z$:

$$w \sim \frac{qz}{x-z} + g + h(x-z), \quad q^2 = \frac{1}{4a}, \quad (6.97)$$

$$1 + 4b + 2zc + 8q + 12a + 2z^2d + 24g^2a - 12zhq - 12gq - 32ga = 0.$$

Асимптотика $x \rightarrow \infty$:

$$w \sim \alpha x, \quad \alpha(d + 2a\alpha^2) = 0, \text{ или } w \sim \frac{D}{x}, \quad D^2 = 2\frac{b}{d} \text{ или } w \sim -1. \quad (6.98)$$

Поведение при $x \rightarrow 0$:

$$w \sim \beta + \gamma x, \quad \beta^2 + \frac{b}{a} = 0, \quad \gamma = \frac{\beta c}{1 + 2b + 8a\beta - 4a}, \text{ или } w \sim 1 + cx, \quad \beta = 1. \quad (6.99)$$

Для уравнения Пенлеве V нельзя получить представление кулоновского газа (6.51), т.к. функция g зависит от заряда q .

Однако можно получить систему уравнений:

$$\prod_j (x_i - y_j) = q_i x_i \prod_{j \neq i} (x_i - x_j), \quad q_i^2 = \frac{1}{2a}, \quad (6.100)$$

$$\prod_j (y_i - x_j) = Q_i y_i \prod_{j \neq i} (y_i - y_j), \quad Q_i^2 = -\frac{1}{2b}, \quad \forall i,$$

где x_i и y_i соответственно полюса и нули функции w .

Поле анизотропии и магнитное поле для спинового представления (6.59), (6.62) уравнения Пенлеве V имеют вид

$$r = w(w-1)^2, \quad h = (w-1)\left(\left(A + \frac{D}{2}\right)w + B + \frac{D}{2}\right) + Cwx. \quad (6.101)$$

6.3.6 Уравнение Пенлеве VI

Точечные преобразования лагранжиана (6.53):

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{w}, \frac{1}{x}; a, b, c, d\right) &= L(w, x; -b, -a, c, d), \\ L(1-w, 1-x; a, b, c, d) &= L(w, x; a, -c, -b, d), \end{aligned} \quad (6.102)$$

а также

$$L\left(\frac{w}{x}, \frac{1}{x}; a, b, c, d\right) = L(w, x; a, b, \frac{1}{2} - d, \frac{1}{2} - c). \quad (6.103)$$

Лагранжиан уравнения Пенлеве VI в гамильтоновых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 = w_x p - \frac{1}{x(x-1)} [p^2 w(w-1)(w-x) + p(A(w-1)(w-x) + B w(w-x) \\ + (C+1)w(w-1)) + D(A+B+C+1-D)w], \end{aligned} \quad (6.104)$$

причем

$$a = \frac{1}{2}(A+B+C+1-2D)^2, \quad b = -\frac{1}{2}A^2, \quad c = \frac{1}{2}B^2, \quad d = \frac{1}{2}(1-C^2). \quad (6.105)$$

Калибровочные преобразования

$$G_a : \quad L(w, p; A, B, C, D) = L(w, \hat{p}; -A, B, C, D - A), \quad \hat{p} = p + \frac{A}{w}, \quad (6.106)$$

$$G_b : \quad L(w, p; A, B, C, D) = L(w, \hat{p}; A, -B, C, D - B), \quad \hat{p} = p + \frac{B}{w-1}, \quad (6.107)$$

$$G_c : \quad L(w, p; A, B, C, D) = L(w, \hat{p}; A, B, -C, D - C), \quad \hat{p} = p + \frac{C+1}{w-x}. \quad (6.108)$$

Чистая калибровка

$$G : \quad L(w, p; A, B, C, D) = L(w, p; A, B, C, A+B+C+1-D). \quad (6.109)$$

Преобразование Беклунда

$$\hat{w} - w = \frac{D}{p}, \quad S : L(w, p; A, B, C, D) = L(\hat{w}, p; A - D, B - D, C - D, -D). \quad (6.110)$$

При этом

$$p = \frac{x(x-1)w_x}{2w(w-1)(w-x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{A}{w} + \frac{B}{w-1} + \frac{C+1}{w-x} \right). \quad (6.111)$$

Генераторы группы преобразований (6.104) обладают свойствами:

$$\begin{aligned} G_i^2 = G^2 = S^2 = 1, \quad G_i G_j = G_j G_i, \quad G_i G = G G_i, \\ (S G_i)^3 = (S G)^3 = 1, \quad (S G G_i)^4 = 1. \end{aligned} \quad (6.112)$$

$$(S G G_a G_b G_c)^2 [A, B, C, D] = [A + 1, B + 1, C + 1, D + 2], \quad (6.113)$$

$$(G_c S G G_a G_b S G G_a G_b S) [A, B, C, D] = [A, B, C + 2, D + 1]. \quad (6.114)$$

Рациональные решения уравнения Пенлеве VI

Поведение решения вблизи полюса $x \rightarrow z$:

$$w \sim z(z-1) \frac{q}{x-z} + g + h(x-z), \quad x \rightarrow z, \quad q^2 = \frac{1}{2a}, \quad (6.115)$$

$$\begin{aligned} 12g^2 a - 8gaz + 12gaq - 24gaqz - 8ga + 2dz^2 - 12qhz^2 a + 2az^2 + \\ 6z^2 + 12qz^2 a - 6z + 2bz + 2cz - 2dz + 1 + 12qhz a + 2az + 2a - 4qa - 2 = 0. \end{aligned}$$

Поведение на бесконечности $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} w \sim \alpha x, \quad \alpha^2 \left((\alpha - 1)^2 + \frac{2d-1}{2a} \right) = 0 \\ \text{или } w \sim \beta, \quad \left(\beta - \frac{b}{b+c} \right)^2 + \frac{bc}{(b+c)^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Для уравнения Пенлеве VI также, как и для уравнение PV, нельзя получить представление кулоновского газа (6.51), т.к. функция g зависит от заряда q .

Выпишем систему уравнений:

$$\prod_j (x_i - y_j) = q_i x_i (x_i - 1) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j), \quad q_i^2 = \frac{1}{2a}, \quad (6.117)$$

$$\prod_j (y_i - x_j) = Q_i y_i (y_i - 1) \prod_{j \neq i} (y_i - y_j), \quad Q_i^2 = \frac{-1}{2b}, \quad \forall i,$$

где x_i и y_i соответственно полюса и нули w .

Преобразование (6.110) действуют на особенности следующим образом:

$$\hat{q}_+ = \frac{1}{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 1 - 2\hat{D}}, \quad \hat{q}_- = 0, \quad q_{\pm} = \pm \frac{1}{A + B + C + 1 - 2D}. \quad (6.118)$$

Примеры Пусть $w = w(a, b, c, d; x)$. Вот примеры частных (рациональных) решений уравнения PVI :

$$w(a, b, c, \frac{1}{2}; x) = x, \quad w(a, b, 0, d) = 1, \quad (6.119)$$

$$w(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}q^2, \frac{1}{2}q^2, \frac{1}{2} - 2q^2; x) = \frac{x}{2x - 1}, \quad (6.120)$$

$$w(2q^2, -\frac{1}{2}(1+q)^2, \frac{1}{2}(1+q)^2, 0, x) = \frac{x}{q} \cdot \frac{x(1+2q) - (1+q)}{2x - 1}.$$

Поле анизотропии и магнитное поле для спинового представления (6.59), (6.62) уравнения Пенлеве VI имеют вид:

$$\begin{aligned} r &= w(w - 1)(w - x), \\ h &= (A - \frac{D}{2})(w - 1)(w - x) + (B - \frac{D}{2})w(w - x) + \\ & (C + 1 - \frac{D}{2})w(w - 1). \end{aligned} \quad (6.121)$$

Рассмотрим подробнее уравнения спиновой динамики на примере уравнения PVI . Лагранжиан (6.104) описывает динамику спина, длина которого $(\vec{S}, \vec{S}) = \mu^2$ в кристаллическом поле \hat{J} и переменном магнитном поле \vec{h} :

$$\frac{i}{2}x(x - 1)\vec{S}_x = [\vec{S} \times \frac{\delta H}{\delta \vec{S}}], \quad H = \frac{1}{4}(\vec{S}\hat{J}\vec{S}) + (\vec{h}\vec{S}), \quad (6.122)$$

причем симметричная матрица \hat{J} имеет вид:

$$\begin{aligned} -J_{33} &= 1 + x, \quad J_{23} = J_{32} = \frac{1}{2i}(1 + x), \\ J_{13} &= J_{31} = \frac{1}{2}(1 - x), \quad J_{11} = J_{22} = J_{12} = J_{21} = 0, \end{aligned} \quad (6.123)$$

магнитное поле H :

$$h_1 + i h_2 = (A + B + C + 1 - \frac{3}{2}\mu), \quad -h_1 + i h_2 = x(A - \frac{1}{2}\mu), \quad (6.124)$$

$$h_3 = \frac{1}{2}[(x + 1)(\frac{\mu}{2} - A) + x(\frac{\mu}{2} - B) + (\frac{\mu}{2} - C - 1)]. \quad (6.125)$$

Лагранжиан (6.104) в новых переменных имеет вид ($\mu = D$ или $\mu = A + B + C + 1 - D$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 &= w_x p - \frac{1}{x(x-1)} \left[\frac{1}{4} (\vec{S} \hat{J} \vec{S}) + (\vec{h} \vec{S}) \right], \quad \vec{S} = \vec{M} p + \frac{\mu}{2} \vec{M}_w, \\ \vec{M} &= (w^2 - 1, i(w^2 + 1), 2w). \end{aligned} \quad (6.126)$$

Определим новую параметризацию вектора

$$\vec{M} = \left(\frac{w^2 - x}{\sqrt{x}}, \frac{w^2 - 2w + x}{\sqrt{1-x}}, \frac{w^2 - 2wx + x}{\sqrt{x(x-1)}} \right)$$

- поворот в спиновом пространстве (зависит от x , но не от w).

При этом вид лагранжиана (6.126) не меняется, а анизотропия и магнитное поле имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \text{diag}(0, -1, -x), \\ \vec{h} &= \frac{1}{2} ((B + C + 1 - \mu)\sqrt{x}, (A + C + 1 - \mu)\sqrt{1-x}, (A + B - \mu)\sqrt{x(x-1)}). \end{aligned} \quad (6.127)$$

Для того чтобы получить уравнение типа (6.122) отметим, что надо учесть явную зависимость \vec{S} от x .

$$\frac{i}{2} x(x-1) \frac{\partial \vec{S}(pwx)}{\partial x} = [\vec{S} \times \vec{h}^x], \quad \vec{h}^x = \pm \frac{1}{4} (\sqrt{x}, \sqrt{1-x}, \sqrt{x(x-1)}). \quad (6.128)$$

Тогда уравнение спиновой динамики будет иметь вид (6.122), причем анизотропия берется из формулы (6.127), а магнитное поле сдвигается:

$$\vec{h} \rightarrow \vec{h} + \vec{h}^x.$$

В данном Разделе было получено представление кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве. Для уравнения Пенлеве *IV* можно использовать автомодельную редукцию многочастичной динамической системы (типа Калоджеро-Мозера), описывающей динамику полюсов рациональных решений системы Леви. Однако такой подход не всегда удобен, поскольку динамические системы, которые редуцируются к уравнениям Пенлеве либо очень сложны, либо переходят в уравнения Пенлеве с неполным набором параметров. Одной из альтернатив является рассмотрение различных замыканий дискретной решетки преобразований Беклунда системы Леви [5], из которых получаются все уравнения Пенлеве. Однако наиболее удобным способом получения

уравнений на полюса является анализ поведения решений вблизи особых точек.

В данном Разделе было показано, что любое рациональное решение уравнения Пенлеве определяет какую-либо стационарную конфигурацию электрических зарядов. Обратное, вообще говоря, не верно. Автор благодарен А.П. Веселову, указавшему на это обстоятельство.

Одной из нерешенных проблем является следующая - решения уравнений кулоновского газа являются комплексными числами, физическая конфигурация должна допускать поворот в плоскости. С потенциалом взаимодействия проблем нет, однако, например, для уравнения Пенлеве *IV*, потенциал имеет вид $V = V_0 z^2$, а не $V = V_0 \bar{z}z$, что приводит к тому, что все полюса рациональных решений уравнения *PIV* лежат либо на вещественной, либо на мнимой оси. Было бы интересно найти комплексное обобщение уравнения *PIV* с симметричным параболическим потенциалом (заметим, что в случае уравнения *PII* проблем нет, так как внешний потенциал вообще отсутствует).

Представление уравнений Пенлеве в гамильтоновом виде удобно для получения спиновых моделей и для построения всех преобразований Беклунда, однако вопрос о построении полной решетки преобразований Беклунда до сих пор открыт. Трудность заключается в том, что наличие дополнительных точечных преобразований, относительно которых инвариантно соответствующее уравнение Пенлеве, затрудняет вопрос о ближайших соседях в решетке. В данном Разделе ответ был дан для уравнения Пенлеве *IV*.

В этой Главе изучалась динамика полюсов рациональных решений системы Леви. Показано, что автомодельные решения этой системы являются решениями уравнения Пенлеве *PIV*. Рассмотрено представление кулоновского газа для полюсов рациональных решений ряда трансцендент Пенлеве, а именно - *PII* – *PIV*. Введено описание уравнений Пенлеве как уравнение прецессии некоторого спина в поле анизотропии и в магнитном поле, причем попытка получить данное представление, обобщая лагранжианы трансцендент Пенлеве, приводит к уравнению для коэффициентов лагранжиана, которое выполняется только для уравнений Пенлеве.

Глава 7

Примеры других подходов в теории интегрируемых систем

7.1 Интегрируемые системы с квадратичной нелинейности в Фурье пространстве

В этом Разделе будет получен список интегрируемых скалярных эволюционных систем с квадратичной нелинейностью, построенных с помощью представления Лакса в Фурье - пространстве. Такие хорошо известные системы, как КдФ, уравнение промежуточной воды (ILW), системы Камасса-Холма и система Дегаспериса, представлены в этом списке. Будут получены также новые системы. Обсуждается обобщение на двумерный случай, а также на дискретный случай.

Важным классом интегрируемых эволюционных уравнений являются системы с квадратичной нелинейностью. Обычно эволюционные интегрируемые системы классифицируются по закону дисперсии. В этом Разделе не предполагается, что уравнение имеет какой-то определенный закон дисперсии, более того, также рассматриваются и бездисперсионные системы.

Будут исследоваться следующие системы:

$$\frac{d}{dt}u_q(t) = \omega(q)u_q(t) + \sum_{p_1+p_2=q} w(p_1, p_2)u_{p_1}(t)u_{p_2}(t). \quad (7.1)$$

Суммирование в (7.1) имеет символический смысл. Можно рассмотреть конечный набор значений "импульсов" - этот случай соответствует конечномерным системам, а случай $p \in \mathfrak{R}$ - одномерным эволюционным системам.

Можно применить обратное преобразование Фурье (7.1) и получить систему в координатном пространстве. Для простоты мы будем опускать мнимую

единицу во всех формулах, что не влияет на результаты. Конечно, зависимость от мнимой единицы может быть в конце восстановлена.

Например, можно подставить $\omega(k) = k^3$, $w(p, q) = p + q$ в уравнение (7.1), применить обратное преобразование Фурье и получить уравнение КдВ. Другой пример - уравнение "промежуточной воды" (ILW) соответствует выбору $\omega(k) = k^2 \frac{1+e^{hk}}{1-e^{hk}}$, $w(p, q) = p + q$ в уравнении (7.1).

Одним из наиболее эффективных методов в теории интегрируемых систем является представление Лакса. Это представление для уравнения (7.1) выглядит следующим образом:

$$L_t = [A, L], \quad L = \alpha + \sum_p U^p u_p, \quad A = \beta + \sum_p V^p u_p, \quad [\alpha, \beta] = 0, \quad (7.2)$$

где α , β , U^p , V^p - некоторые не зависящие от времени операторы. Прямые вычисления показывают, что выражения (7.2) являются парой Лакса для уравнения (7.1) в том и только в том случае, если

$$[V^p, U^q] + [V^q, U^p] = 2w(p, q)U^{p+q}, \quad [\beta, U^p] + [V^p, \alpha] = \omega(p)U^p. \quad (7.3)$$

Можно использовать следующее матричное представление для операторов в пространстве Фурье

$$\alpha_{kk'} = \alpha(k)\delta_{k,k'}, \quad \beta_{kk'} = \beta(k)\delta_{k,k'}, \quad U_{kk'}^p = l(k, p)\delta_{k,k'+p}, \quad V_{kk'}^p = a(k, p)\delta_{k,k'+p}. \quad (7.4)$$

Подставим определения (7.4) в представления Лакса (7.3) и получим:

$$\begin{aligned} a(k, q)l(k - q, p) + a(k, p)l(k - p, q) - a(k - q, p)l(k, q) - \\ - a(k - p, q)l(k, p) = 2w(p, q)l(k, p + q), \end{aligned} \quad (7.5)$$

а также

$$[\alpha(k) - \alpha(k - p)]a(k, p) = [\beta(k) - \beta(k - p) - \omega(p)]l(k, p). \quad (7.6)$$

Можно проверить, что следующее частное решение уравнений (7.6):

$$\alpha(k) = l(k, 0), \quad \beta(k) = a(k, 0), \quad \omega(k) = 2w(k, 0). \quad (7.7)$$

Это решение совместно с уравнениями (7.5), но является тривиальным, поскольку оно соответствует сдвигу $u_p(t) \rightarrow u_p(t) + \delta_{p,0}$ в уравнении (7.1).

Рассмотрим теперь случай $l(k, p) = \frac{1}{\rho(k)}$, тогда уравнение (7.5) преобразуется в

$$a(k, q) \frac{\rho(k)}{\rho(k-q)} + a(k, p) \frac{\rho(k)}{\rho(k-p)} - a(k-q, p) - a(k-p, q) = 2w(p, q). \quad (7.8)$$

Необходимо продифференцировать уравнение (7.8) по p и q и получить систему

$$\begin{aligned} a(k, p) &= kA(p) + b(p) + c(k), \quad 2w(p, q) = pA(q) + qA(p) + B(p) + B(q), \\ b(-p) &= b(p) + pA(p) + B(p), \end{aligned} \quad (7.9)$$

где $A(p) = A(-p)$, $B(p) = -B(-p)$, $\omega(p) = -\omega(-p)$.

Подставив систему (7.9) в (7.8), получаем следующее функциональное уравнение:

$$U(x, y) = U(y, x), \quad U(x, y) = \rho(x)[xA(x-y) + b(x-y) + c(x)], \quad (7.10)$$

которое определяет широкий класс бездисперсионных интегрируемых уравнений ($\omega_p = 0$) систем с квадратичной нелинейностью, поскольку можно выбрать условия $\alpha = 0$, $\beta = 0$ в этом случае.

Можно переписать уравнение (7.6) и получить второе функциональное уравнение:

$$\beta(x) - \beta(y) - \omega(x-y) = (\alpha(x) - \alpha(y))U(x, y), \quad (7.11)$$

где $U(x, y)$ - некоторое решение уравнения (7.10).

Общее решение уравнения (7.11) определяет класс интегрируемых уравнений (7.1) с ненулевой дисперсией ($\omega_p \neq 0$). Очевидно, что не все такие решения существуют для всех решений для функций $U(x, y)$ уравнения (7.10). Однако любому решению уравнения (7.11) обязательно соответствует какое-нибудь решение $U(x, y)$ "бездисперсионного" уравнения (7.10).

7.1.1 Классификация бездисперсионных уравнений

Оказывается, можно получить общее решение уравнения (7.10), т.е. определить вышеупомянутый класс бездисперсионных эволюционных уравнений с квадратичной нелинейностью. Для этого надо проделать ряд шагов:

Шаг 1 Подействуем операторами $D = \partial_x + \partial_y$, D^2 D^3 на уравнение (7.10) и получим еще три уравнения, при этом важно то, что выполняется условие

$D f(x - y) \equiv 0$. Следовательно, уравнение (7.10) преобразуется к системе уравнений

$$W_D(x\rho(x) - y\rho(y), \rho(x), \rho(y), \rho(x)c(x) - \rho(y)c(y)) = 0, \quad (7.12)$$

где D – вронскиан определяется формулами:

$$\begin{aligned} W_D(f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_N(x, y)) &= \det(W_i^j), \\ W_i^j &= D^{j-1} f_i(x, y), \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Шаг 2 Возьмем предел $y \rightarrow x$ в уравнении (7.12) и получим необходимое условие существования общего решения уравнения (7.10):

$$\begin{aligned} c(x) &= \mu_1 \frac{R(x)}{\rho(x)} + \mu_2 x + \mu_3, \\ \lambda_1 \rho''(x) + \lambda_2 x \rho'(x) + \lambda_3 \rho'(x) + \lambda_4 \rho(x) &= 0, \quad R'(x) = \rho(x). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Получается, что нужно рассмотреть два случая - случай $\lambda_2 = 0$, - ”тривиальный” любое решение системы (7.14) соответствует решению уравнения(7.12), а именно:

$\rho(x) = c_1 e^{h_1 x} + c_2 e^{h_2 x}$ или $\rho(x) = (x - a)e^{hx}$ или $\rho(x) = e^{hx}$ или $\rho(x) = x$ или $\rho(x) = 1$.

В случае $\lambda_2 \neq 0$ подставляем $x\rho(x) = -\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1 \rho'(x) + (\lambda_3 - \lambda_2)\rho(x) + \lambda_4 R(x))$ в уравнение (7.12), также берем предел $y \rightarrow x$ и получаем второе необходимое условие:

$$\nu_4 \rho^{IV}(x) + \nu_2 \rho''(x) + \nu_1 \rho'(x) + \nu_0 = 0. \quad (7.15)$$

В этом случае есть только три решения, отличных от решений случая $\lambda_2 = 0$, а именно: $\rho(x) = (x - a)(x - a - b)(x - a + b)$ от $\rho(x) = (x - a)(x - b)$ - уравнение Дегаспериса [36],[35] и уравнение Камасса - Холма [29] соответственно, а также случай $\rho(x) = 1/x$.

Итак, получена следующая классификация бездисперсионных эволюционных уравнений с квадратичной нелинейностью:

1. $\rho(k) = 1$

В этом случае получается система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} u_t &= m u_x, \quad m_p = A(p) u_p, \\ L_{kk'} &= u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = \frac{1}{2}(k + k') A(k - k') u_{k-k'}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

2. $\rho(k) \neq 1$, $A(k) = 0$

- Система из этого класса в случае $\rho(x) = e^{hx}$ имеет общий вид

$$\begin{aligned} u_t &= m u, \quad m_p = B(p)u_p, \quad L_{kk'} = e^{-hk}u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = b(k-k')u_{k-k'}, \\ B(p) &= b(p)(e^{hp} - 1). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Интересно, что, выбирая $b(x) = \frac{1}{1+e^{hx}}$, получаем уравнения Гильберта - Хопфа $m_t = L(\partial_x)m^2$, $L(k) = th\frac{kh}{2}$, где $(u_k = m_k(e^{hk} + 1))$.

- Случай $\rho(x) = (x - a)e^{hx}$ соответствует уравнению

$$\begin{aligned} u_t &= m u, \quad m_p = B(p)u_p, \\ L_{kk'} &= (k - a)^{-1}e^{-hx}u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = \left(\frac{1}{k - a} + \frac{e^{h(k'-k)} - 1}{k - k'}\right)u_{k-k'}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где $B(p) = \frac{1}{2p}(2 - e^{hp} - e^{-hp})$.

- Случай с двумя экспонентами $\rho(x) = e^{h_1x} + e^{h_2x}$ соответствует уравнению

$$\begin{aligned} u_t &= m u, \quad m_p = B(p)u_p, \quad B(p) = b(-p) - b(p), \\ b(x) &= \frac{b_1(1 - e^{h_1x}) - b_2(1 - e^{h_2x})}{e^{h_1x} - e^{h_2x}}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned} L_{kk'} &= (a_1e^{h_1k} + a_2e^{h_2k})^{-1}u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = (b(k - k') + c(k))u_{k-k'}, \\ c(k) &= \frac{b_1a_1e^{h_1k} + b_2a_2e^{h_2k}}{a_1e^{h_1k} + a_2e^{h_2k}}. \end{aligned}$$

Уравнение (7.19) является новым.

Отметим, что уравнения (7.18) и (7.19) имеют второе представление Лакса (7.17).

3. $\rho(k) \neq 1$, $A(k) \neq 0$

- Первый пример этого класса $\rho(x) = x^2 - 1/4$ Пара Лакса имеет вид

$$L_{kk'} = \frac{1}{k^2 - 1/4}u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = \frac{1}{2}\left(\frac{k - 3k'}{1 - (k - k')^2} + \frac{k}{k^2 - 1/4}\right)u_{k-k'}$$

и соответствует уравнению Камасса-Холма [29]

$$u_t = 2f_xu + fu_x, \quad u = \frac{1}{2}(f_{xx} - f). \quad (7.20)$$

- Второй пример - это уравнение с $\rho(x) = x(x^2 - 1)$ Пара Лакса в этом случае имеет вид

$$L_{kk'} = \frac{1}{k(k^2 - 1)}u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = \left(\frac{k - 2k'}{1 - (k - k')^2} + \frac{k}{k^2 - 1} \right)u_{k-k'}$$

и соответствует уравнению Дегаспериса [36],[35]

$$u_t = 3f_x u + f u_x, \quad u = \frac{1}{2}(f_{xx} - f). \quad (7.21)$$

Перечислим другие возможные случаи:

- Уравнение с $\rho(x) = x$ и $A_{kk'} = k'A(k - k')$ имеет вид

$$u_t = \partial_x(mu), \quad m_p = A(p)u_p; \quad (7.22)$$

- Уравнение с $\rho(x) = \frac{1}{x}$ и $A_{kk'} = kA(k - k')$ имеет вид

$$u_t = mu_x - m_x u, \quad m_p = A(p)u_p. \quad (7.23)$$

7.1.2 Системы с дисперсией

Для того чтобы получить уравнения с дисперсией (7.11), необходимо отталкиваться от общего решения уравнения (7.10), соответствующего системам без дисперсии. Можно проверить, что не существует решений уравнения (7.11) для уравнений (7.20) и (7.21). Это означает невозможность обобщить уравнения Камасса-Холма (7.20) и уравнения Дегаспериса (7.21) на случай уравнений с дисперсией. Данное утверждение также верно для систем (7.18) и (7.19).

Остается рассмотреть системы с функциями $\rho(x) = 1$, $\rho(x) = e^{hx}$ или $\rho(x) = x$.

1. В случае $\rho(x) = 1$ легко получить, что функция от двух переменных $U(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)A(x-y) + d(x-y)$, где $A(x)$, $d(x)$ - четные функции. Необходимо подставить данную функцию $U(x, y)$ в уравнение (7.11), применить оператор D к получившемуся уравнению и получить необходимое условие возможности уравнения с дисперсией:

$$W_D(\alpha(x) - \alpha(y), (x + y)(\alpha(x) - \alpha(y)), \beta(x) - \beta(y), 1) = 0. \quad (7.24)$$

Метод решения уравнения (7.24) аналогичен методу решения уравнения (7.12): предел $x \rightarrow y$ выдает условие $\beta'(x) = cx\alpha'(x)$. Подстановка полученного $\beta(x)$ в уравнение (7.24) и взятие предела $x \rightarrow y$ определяет необходимое условие: $\alpha''(x) + c_1x\alpha'(x) + c_2\alpha'(x) + c_3 = 0$. Единственная возможность удовлетворить уравнению (7.24) - выбрать $\alpha(x) = x^2, \beta(x) = 4x^3$ (можно положить $c = 6$).

Нетрудно получить в этом случае $\omega(x) = x^3$, что соответствует уравнению КдВ $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ со стандартным представлением Лакса (применяя обратное преобразование Фурье)

$$L_{kk'} = k^2\delta_{kk'} + u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = 4k^3\delta_{kk'} + 3(k+k')u_{k-k'}. \quad (7.25)$$

2. В случае $\rho(x) = e^{hx}$ имеем $U(x, y) = e^{\frac{1}{2}(x+y)}d(x-y)$, где $d(x)$ - четная функция.

Необходимое условие в этом случае:

$$W_D((\alpha(x) - \alpha(y))e^{\frac{1}{2}(x+y)}, \beta(x) - \beta(y), 1) = 0. \quad (7.26)$$

Получаем, что $\beta'(x) = c_1\alpha'(x)e^{hx} + c_2$. Единственным нетривиальным решением уравнения (7.26) в этом случае является $\alpha(x) = xe^{-hx}, \beta(x) = x^2$, что соответствует уравнению "промежуточной" воды (ILW)

$$u_t = \Gamma(u_{xx}) - 2uu_x, \quad \Gamma(p) = \coth\left(\frac{ph}{2}\right) \quad (7.27)$$

с парой Лакса

$$L_{kk'} = ke^{-hk}\delta_{kk'} + e^{-hk}u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = k^2\delta_{kk'} + 2\frac{k-k'}{1-e^{h(k-k')}}u_{k-k'}. \quad (7.28)$$

3. В случае $\rho(x) = x$ получается только альтернативная пара Лакса для уравнения КдВ:

$$\begin{aligned} L &= \delta_{kk'}\left(\frac{k}{2} + \frac{\mu}{k}\right) + \frac{1}{k}u_{k-k'}, & A &= \delta_{kk'}\left(\frac{k^3}{6} - \mu k\right) + k'u_{k-k'}, \\ \iff u_{p,t} &= \frac{p^3}{6}u_p + p \sum_q u_q u_{p-q}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

7.1.3 Обобщения

Возможно обобщить предложенный метод на случай многокомпонентных систем и неодномерных систем. Рассмотрим двумерную скалярную систему с квадратичной нелинейностью. В отличие от одномерного случая, "волновые" параметры k, p и q в функциональных уравнениях (7.5) и (7.6) являются двумерными векторами. Для того чтобы получить функциональные уравнения в этом случае, можно использовать следующий трюк. Можно определить вектор $\vec{k} = (k_x, k_y) = (k, \lambda)$, где k - аргумент функционального уравнения, а λ - параметр. Например, можно переписать функциональное уравнение (7.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(x, \lambda)[xA(x - y, \lambda - \mu) + \lambda A_2(x - y, \lambda - \mu) + b(x - y, \lambda - \mu) + c(x, \lambda)] = \\ \rho(y, \mu)[yA(y - x, \mu - \lambda) + \mu A_2(y - x, \mu - \lambda) + b(y - x, \mu - \lambda) + c(y, \mu)]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Метод решения уравнения (7.30) аналогичен одномерному случаю (уравнению (7.30)). Используем обозначения

$$\rho(x) = \rho(x, \lambda), \quad c(x) = c(x, \lambda), \quad \tilde{\rho}(y) = \rho(y, \mu), \quad \tilde{c}(y) = c(y, \mu)$$

и получаем уравнение

$$W_D(x\rho(x) - y\tilde{\rho}(y), \rho(x), \tilde{\rho}(y), \rho(x)c(x) - \tilde{\rho}(y)\tilde{c}(y)) = 0 \quad (7.31)$$

в этом случае (ср. с уравнением (7.12)).

На следующем шаге берем предел $\mu \rightarrow \lambda$ в уравнении (7.31), получая при этом в точности уравнение (7.12)! Отметим, что, вообще говоря, нельзя брать этот предел непосредственно в уравнении (7.30) из-за возможных расхождений в функциях A, A_2, b .

Таким образом, единственным способом (в рамках данного метода) получить двумерные системы с квадратичной нелинейностью является обобщение некоторых решений уравнения (7.10) на (7.30).

На данный момент нет классификации двумерных систем в рамках этого метода, и мы приведем только пару примеров:

Первый пример - это знаменитое уравнение Кадомцева - Петвиашвили (КР)

$$u_t = u_{xxx} + 3\theta^{-1}(u_y) + 6uu_x, \quad \theta^{-1} = \partial_y \partial_x^{-1},$$

которое имеет следующую пару Лакса в пространстве Фурье

$$l_{kk'} = (k_y + k_x^2)\delta_{kk'} + u_{k-k'}, \quad a_{kk'} = 4k_x^3\delta_{kk'} + 3(k_x + k'_x - \frac{k_y - k'_y}{k_x - k'_x})u_{k-k'}, \quad (7.32)$$

что согласуется с общей формой пар Лакса (7.9) в рамках предложенного метода.

Второй пример - хорошо известное уравнение Веселова - Новикова (VN):

$$u_t = u_{xxx} + u_{yyy} + u\theta(u_x) + u_x\theta(u) + u\theta^{-1}(u_y) + u_y\theta^{-1}(u), \quad \theta = \partial_x\partial_y^{-1}. \quad (7.33)$$

Можно рассмотреть это уравнение (7.33) как сумму двух симметрий $u_t = u_{t+} + u_{t-}$, где $u_{t+} = u_{xxx} + u\theta(u_x) + u_x\theta(u)$ и $u_{t-} = u_{yyy} + u\theta^{-1}(u_y) + u_y\theta^{-1}(u)$.

Пара Лакса для "+" симметрии имеет вид:

$$L_{kk'} = 3k_y\delta_{kk'} + \frac{1}{k_x}u_{k-k'}, \quad A_{kk'} = k_x^3\delta_{kk'} + k'_x\frac{k_x - k'_x}{k_y - k'_y}u_{k-k'}. \quad (7.34)$$

Введем новые операторы:

$$L_1 = L, \quad L_2 = L[x \leftrightarrow y], \quad A_1 = A, \quad A_2 = A[x \leftrightarrow y], \quad L_{i,t_i} = [L_i, A_i], \quad (7.35)$$

$$\mathbf{L} = L_1 + L_2, \quad \mathbf{A} = A_1 + A_2,$$

нетрудно получить знаменитую триаду Манакова для уравнения Веселова - Новикова (7.33)

$$\mathbf{L}_t = [\mathbf{A}, \mathbf{L}] + B\mathbf{L}, \quad B = A_1^{(1)} + A_2^{(2)} - A_1 - A_2, \quad (7.36)$$

где

$$A_{1,kk'}^{(1)} = k_x A_{1,kk'} \frac{1}{k'_x}, \quad A_{2,kk'}^{(2)} = k_y A_{2,kk'} \frac{1}{k'_y} \Rightarrow B_{kk'} = \frac{(k_x - k'_x)^2}{k_y - k'_y} + \frac{(k_y - k'_y)^2}{k_x - k'_x}.$$

Случай многокомпонентных систем соответствует выбору $k \rightarrow (k, n)$ где $k \in \mathfrak{K}$ and $n = 1, 2, \dots, N$. Классификации этих систем на данный момент нет, и мы приведем два интересных примера.

Первый пример - это так называемые системы типа Тоды

$$z_{q,t} = -\omega(q)z_q + \gamma(q)p_q + \sum_s \Gamma^{(1)}(s, q-s)z_s z_{q-s}, \quad p_{q,t} = \omega(q)p_q + \sum_s \Gamma^{(2)}(s, q-s)z_s p_{q-s}$$

с парой Лакса

$$L = \alpha + \sum_q U^q z_q + \sum_q W^q p_q, \quad A = \beta + \sum_q V^q z_q, \quad [\alpha, \beta] = 0. \quad (7.37)$$

В координатном пространстве система Тоды имеет следующую пару Лакса

$$\begin{aligned} L_t = [A, L], \quad L = \partial + z - \lambda + p\partial^{-1}, \quad A = \partial^2 + 2\partial z \\ \iff z_t = \partial[-z' + z^2 + 2p], \quad p_t = \partial[p' + 2pz]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Эта динамическая система может быть приведена с помощью точечного преобразования к нелинейному уравнению Шредингера: ($p = \psi^*\psi$, $z = -\partial_x \log(\psi)$), а цепочка преобразований Беклунда для этой системы имеет вид цепочки Тоды. Нетрудно видеть, что преобразование Фурье системы (7.38) соответствует виду (7.37).

Другой пример - это система трех волн

$$\begin{aligned} i a_{p,t} = \omega(p)a_p + \sum_q W^{(1)}(p, q)a_{p+q}a_q^* + \sum_q W^{(2)}(p, q)a_q a_{p-q} \\ -i a_{p,t}^* = \omega(p)a_p^* + \sum_q \bar{W}^{(1)}(p, q)a_{p+q}^* a_q + \sum_q \bar{W}^{(2)}(p, q)a_q^* a_{p-q}^*. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Проблема состоит в том, чтобы найти все возможные функции $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и величину ω в случае, когда система (7.39) является интегрируемой. Этот вопрос обсуждался в [165] с использованием пертурбативного подхода.

Пара Лакса в этом случае имеет вид:

$$L = \alpha + \sum_{p>0} U^p a_p + \sum_{p>0} (U^p)^+ a_p^*, \quad A = \beta + \sum_{p>0} V^p a_p + \sum_{p>0} (V^p)^+ a_p^*, \quad [\alpha, \beta] = 0. \quad (7.40)$$

Можно вывести систему функциональных уравнений, как в скалярном случае, но общее решение пока неизвестно. Интересно, что система (7.39) эквивалентна скалярной системе (7.1) в "вещественном" случае:

$$\begin{aligned} u_p = \theta(p)a_p + \theta(-p)a_{-p}^*, \quad u_p^* = u_{-p}, \\ W^{(1)}(p, q) = w(q, p - q), \quad W^{(2)}(p, q) = w(p + q, -q). \end{aligned}$$

Мы использовали представление Лакса в Фурье пространстве для классификации скалярных интегрируемых систем с квадратичной нелинейностью.

Этот метод приводит к тому, что все необходимые условия интегрируемости формулируются в виде функциональных уравнений. Неожиданным является то обстоятельство, что в некоторых случаях легче решить функциональное, а не дифференциальное уравнение.

7.2 Динамика электронных уровней в присутствии примеси и одно из "gold-fish" уравнений Калоджеро

В этом разделе будет показано, что уравнения динамики уровней энергии конечной системы при добавлении примеси, эквивалентны одной из так называемых "gold-fish" уравнений Калоджеро [28]. Эту систему называют также "рациональной системой Руйзенарса-Шнайдера", хотя их статья появилась на несколько лет позже публикации Калоджеро. Будет вычислено действие, которое одновременно является производящей функцией канонического преобразования Беклунда для этой системы. Обсуждаются различные варианты статистического усреднения распределения уровней энергии.

Задаче о динамике уровней электронной системы под воздействием дополнительного возмущения посвящен целый ряд работ (см. например [141],[114]). Роль времени в такой динамике играет амплитуда возмущения. В этих работах в основном изучаются статистические свойства спектров, т.е. при вычислении отклика системы на дополнительное возмущение производится усреднение, например, по ансамблю случайных матриц. Интересна и другая постановка задачи: вывести уравнения динамики уровней энергии системы при произвольном начальном спектре, а затем произвести усреднение, причем в этом случае процедура усреднения может отличаться, например, от используемой в теории случайных матриц. Задача о динамике спектра системы при произвольном виде возмущения была решена в работе [120]. Полученная в этой работе система содержит в качестве неизвестных функций как собственные значения, так и матричные элементы возмущения, поэтому она сложна для анализа. С физической точки зрения можно рассматривать в качестве возмущения примесный потенциал, что сильно упрощает задачу, более того, многопримесная задача может быть сведена к задаче с одной примесью (см. ниже).

Рассмотрим конечную квантовую систему с N — собственными состояниями и гамильтонианом \hat{H}_0 (матрица $N \times N$). При добавлении примеси в систему, уровни энергии будут сдвигаться (в таком виде задача рассматривалась, например, в [11] и [104]); проблема состоит в том, чтобы найти уравнения динамики уровней энергии, причем роль времени играет величина потенциала примеси.

Гамильтониан системы с примесью имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + t |0\rangle\langle 0|, \quad (7.41)$$

где $|0\rangle$ - квантовое состояние, локализованное на примеси.

Для простоты будем обозначать x и y собственные значения, а $|x\rangle$ и $|y\rangle$ - собственные функции невозмущенной и возмущенной системы соответственно, т.е.

$$\hat{H}_0|x\rangle = x|x\rangle, \quad \hat{H}|y\rangle = y|y\rangle, \quad (7.42)$$

тогда, вычисляя матричный элемент $\langle x|\hat{H}|y\rangle = \langle x|\hat{H}_0 + \hat{V}|y\rangle$, получаем условие

$$y\langle x|y\rangle = x\langle x|y\rangle + t\langle x|0\rangle\langle 0|y\rangle,$$

из которого следует уравнение на собственные значения возмущенной системы $t \sum_x \frac{|\langle x|0\rangle|^2}{y-x} = 1$, или в явном виде

$$t \sum_j^N \frac{|\langle x_j|0\rangle|^2}{y_i - x_j} = 1, \quad i = 1, 2..N. \quad (7.43)$$

Обозначив $y_i = x_i(t)$, $x_i = x_i(0)$, можно переписать уравнение (7.43) в полиномиальном виде

$$P(x_j(t), t) = 0, \quad P(\xi, t) = \prod_j (\xi - x_j(t)) = P(\xi) - tQ(\xi), \quad (7.44)$$

где

$$P(\xi) = P(\xi, 0) = \prod_i (\xi - x_i(0)), \quad Q(\xi) = P(\xi) \sum_i \frac{\dot{x}_i(0)}{\xi - x_i(0)}, \quad (7.45)$$

причем $\dot{x}_i(0) = |\langle x|0\rangle|^2$.

Отметим, что случай $Q(\xi) = \frac{1}{N}P'(\xi) \iff \dot{x}_i(0) = \frac{1}{N}$ соответствует невозмущенному гамильтониану \hat{H}_0 (7.42), собственные функции которого являются плоскими волнами с равными по модулю матричными элементами, при этом $\sum_x |\langle x|0\rangle|^2 = 1$.

Из условия (7.44) следует, что $\frac{d^2}{dt^2}P(\xi, t) = 0$. Подставляя выражение для $P(\xi, t)$, получаем искомое уравнение, описывающее динамику уровней:

$$\ddot{x}_i = 2\dot{x}_i \sum_{j \neq i} \frac{\dot{x}_j}{x_i - x_j}. \quad (7.46)$$

Это уравнение, описывающее динамику многочастичной системы, является одной из известных "gold-fish" систем Калоджеро [28], см. также рациональную версию системы Руйзенарса-Шнайдера [129],[127].

Нетрудно заметить, что формулы (7.44) и (7.45) определяют точное решение задачи Коши для системы Калоджеро (7.46) - действительно, вычисляя полиномы $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ по формулам (7.45), можно найти полином $P(\xi, t)$ (7.44), корни которого являются положениями частиц $x_i(t)$. В задаче о примеси (7.43) все скорости \dot{x}_i положительны.

Тот факт, что система Калоджеро описывает динамику уровней конечной системы при добавлении примеси, является новым. В работе [120] было выведено уравнение динамики электронных уровней для произвольного возмущения V , а уравнение (7.46) не было получено.

Отметим, что, в случае конечной системы, любой примесный потенциал имеет вид $V = \sum_j^N t_j |j\rangle\langle j|$, где $|j\rangle$ - состояние, локализованное в координатном пространстве на узле с номером j . Уравнение на собственные значения возмущенной системы в этом случае имеет вид (ср. с (7.43)):

$$\det(\delta_{ij} - G_{ij}t_j) = 0, \quad G_{ij} = \sum_x \frac{\langle i|x\rangle\langle x|j\rangle}{y-x}. \quad (7.47)$$

Полином $P(\xi, t_1, t_2, \dots, t_N) = \prod_j (\xi - x_j(t_1, t_2, \dots, t_N))$ в случае нескольких примесей является линейной функцией по величине потенциала t_j каждой примеси, поэтому для любого j выполняется условие $\frac{d^2}{dt_j^2} P(\xi, t_1, t_2, \dots, t_N) = 0$, а значит, динамика по каждому "времени" t_j описывается уравнением (7.46). Действительно, рассмотрим последовательность

$$H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_{j-1} \rightarrow H_j \rightarrow \dots \rightarrow H_N, \quad H_j = H_{j-1} + t_j |j\rangle\langle j|,$$

причем набор собственных значений гамильтониана H_j определяется по формуле (7.43), где x - собственные значения H_{j-1} , y - собственные значения H_j , а $\langle x|0\rangle$ надо заменить на $\langle x|j\rangle$.

Пусть $\langle x_k^j|$ - собственные функции гамильтониана H_j . Определим моменты времени $T_0 = 0$, $T_j = T_{j-1} + t_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда эволюция уровней энергии в случае нескольких примесей может быть описана уравнением Калоджеро (7.46) с одним временем t на интервалах $t \in (T_0, T_1) \cup (T_1, T_2) \cup (T_2, T_3) \dots$, причем скорости \dot{x} меняются скачком в моменты времени $T_1, T_2, T_3 \dots$:

$$\dot{x}_k|_{t=T_j-0} = |\langle x_k^j|j-1\rangle|^2, \quad \dot{x}_k|_{t=T_j+0} = |\langle x_k^j|j\rangle|^2. \quad (7.48)$$

Как известно (см. например [26]), система Калоджеро (7.46) является

лагранжевой, а лагранжиан (7.46) имеет вид

$$L = \sum_i \dot{x}_i \log \left[\dot{x}_i \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \right]. \quad (7.49)$$

Интересно, что для системы (7.46) может быть получено точное выражения для действия на классической траектории: предположим, что в момент времени $t = 0$ координаты частиц $x_i(0) = x_i$, а в момент времени $t = T$ координаты частиц $x_i(T) = y_i$.

Тогда из (7.44) следует, что полином $Q(\xi)$ имеет вид:

$$Q(\xi) = \frac{1}{T} \left(\prod_i (\xi - x_i) - \prod_i (\xi - y_i) \right). \quad (7.50)$$

С другой стороны, дифференцируя $P(\xi, t)$ по t и подставляя $\xi = x_i(t)$, получаем

$$Q(x_i(t)) = \dot{x}_i(t) \prod_{j \neq i} (x_i(t) - x_j(t)). \quad (7.51)$$

Подставляя (7.50) и (7.51) в выражение для лагранжиана (7.49), вычислим действие

$$\begin{aligned} S &= \int L dt = \sum_i \int dt \dot{x}_i(t) \log Q(x_i(t)) = \\ &= \sum_i \int_{x_i}^{y_i} dx \log \frac{1}{T} \left[\prod_j (x - x_j) - \prod_j (x - y_j) \right], \end{aligned} \quad (7.52)$$

или

$$\begin{aligned} S &= \Delta \log \frac{\Delta}{T} + \sum_{i, \alpha} [g(y_i - z_\alpha) - g(x_i - z_\alpha)], \\ g(x) &= x \log \frac{x}{e}, \quad \Delta = \sum_i (y_i - x_i), \end{aligned} \quad (7.53)$$

где z_α — корни полинома $Q(x)$:

$$z_\alpha : \quad \prod_j (z_\alpha - x_j) = \prod_j (z_\alpha - y_j), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.54)$$

Необходимо отметить, что вычисленное действие S является одновременно производящей функцией канонического преобразования Беклунда, т.е. отображения пары импульс-координата в момент времени $t = 0$ в пару импульс-координата при $t = T$: $(\{p_i\}, \{x_i\}) \rightarrow (\{\hat{p}_i\}, \{y_i\})$ для системы (7.46):

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad \hat{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad (7.55)$$

причем канонически сопряженные переменные для системы (7.46) определяются обычным способом

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} = \log(\dot{x}_i) + 1 + \sum_{j \neq i} \log(x_i - x_j), \quad H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \sum_i \dot{x}_i, \quad (7.56)$$

а скобки Пуассона являются каноническими

$$\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x_i, x_j\} = 0.$$

Вычислим элемент объема фазового пространства в переменных $\{x_i\}, \{y_i\}$:

$$\prod_i dx_i dp_i = \prod_i dx_i dy_i J(\{x_i\}, \{y_i\}), \quad (7.57)$$

а якобиан преобразования определяется формулой

$$J(\{x_i\}, \{y_i\}) = \left| \det \left(\frac{\partial p_i}{\partial y_j} \right) \right| = \frac{\prod_{i>j} |x_i - x_j| \prod_{i>j} |y_i - y_j|}{\prod_{i,j} |x_i - y_j|}, \quad (7.58)$$

поскольку из (7.56) следует, что $\frac{\partial p_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \log \dot{x}_i}{\partial y_j}$, а из (7.50) и (7.51) можно найти скорости \dot{x}_i

$$\dot{x}_i(0) = -\frac{1}{t} \frac{\prod_{i,j} (x_i - y_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Можно рассматривать полученный якобиан $J(\{x_i\}, \{y_i\})$ как плотность вероятности совместного распределения уровней энергии $\{x_i\}$ невозмущенной и $\{y_i\}$ возмущенной системы, при этом предполагается, что начальное распределение частиц по фазовому объему равномерно, что вполне естественно при рассмотрении динамики гамильтоновых частиц. На самом деле, можно зафиксировать начальное положение частиц, тогда статистика определяется распределением импульсов. Таким образом, сделано предположение о равномерном распределении по импульсам частиц в начальном состоянии.

Конечно, функция распределения по импульсам зависит от конкретной реализации системы (7.41). Например, в работе [11] рассмотрен случай, когда гамильтониан H_0 является случайной матрицей из классического гауссовского ансамбля (ортогонального ($\beta = 1$), унитарного ($\beta = 2$) или симплектического ($\beta = 4$)). Отметим, что функция распределения (7.58) соответствует формальному пределу $\beta \rightarrow 0$ в формуле (5) из работы [11] для функции распределения в случае классических ансамблей.

В заключение отметим, что было показано, что динамика уровней энергии конечной квантовомеханической системы при добавлении примеси описывается уравнением Калоджеро. Задача о многих примесях сводится к однопримесной, т.е. также описывается уравнением Калоджеро, причем скорости испытывают скачки в процессе эволюции.

Было бы интересно явно описать переход от уравнений динамики уровней (уравнение Калоджеро) к уравнениям динамики функции распределения уровней: в работе [114] показано, что эволюция функции распределения описывается уравнением Фоккера - Планка, которое в этом случае сводится к квантовой системе Калоджеро - Мозера. С другой стороны, известно (см. например [26]), что уравнение Калоджеро - Мозера является нерелятивистским пределом уравнения Калоджеро.

В этой Главе была получена классификация скалярных динамических систем с квадратичной нелинейностью. Для получения этого результата было использовано представление Лакса в представлении Фурье. Преимуществом данного подхода является то, что для получения решения необходимо решить два функциональных уравнения, которые сводятся к линейным ОДУ. Первое из этих уравнений выделяет класс бездисперсионных уравнений. Решение второго уравнения при известном решении первого уравнения выделяет класс дисперсионных уравнений. В классе дисперсионных уравнений получены только известные уравнения, а именно, уравнение КдФ, уравнение промежуточной воды "ILW", уравнение Камасса-Холма, уравнение Дегаспериса. В классе бездисперсионных уравнений получены новые примеры. На примере уравнений Кадомцева-Петвиашвили и Веселова-Новикова рассмотрен двумерный случай. Получена известная триада Манакова.

Решение простой квантовомеханической задачи о динамике уровней энергии при добавлении одной примеси приводит к получению алгебраического решения задачи Коши одного из "gold-fish" уравнений Калоджеро при произвольных начальных данных.

Заключение

В заключение мы обсудим выводы, дальнейшее развитие тематики диссертации и возможные приложения.

В Главе 1 была сформулирована теорема о приведения пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, к канонической паре коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов. Предложена схема получения функции Гамильтона–Якоби, а также построения алгебраической кривой для таких систем. В случае волчка Ковалевской с гиростатом удалось найти такую пару квазиштеккелевых гамильтонианов, хотя дополнительный интеграл для этого волчка имеет 4-ю, а не 2-ю степень по генераторам алгебры $e(3)$. Поэтому возможно обобщение предложенного метода на случаи, в которых дополнительный интеграл не был бы квадратичным. Изначально применением предложенной теории были интегрируемые волчки, однако среди гамильтонианов, квадратичных по импульсам, есть целый ряд случаев, имеющих приложение к другим областям науки.

В конце Раздела 1.5 была сформулирована гипотеза о том, что полученная классификация коммутирующих квазиштеккелевых гамильтонианов с двумя степенями свободы является полной. На этот счет есть веские основания - дополнительные примеры могут появиться, если имеет решение крайне громоздкое уравнение на функции одной переменной S и g , содержащее более 200 членов, решение этого уравнения не найдено и вряд ли существует.

Заметим, что утверждение о получении полной классификации пар квазиштеккелевых гамильтонианов не выносится на защиту.

Переход от генераторов в случае алгебры $so(4)$ является комплексным, хотя алгебраическая кривая и функция Гамильтона–Якоби получаются вещественными, кроме того, алгебраическая кривая, полученная из пары Лакса, совпадает с кривой, полученной по схеме Раздела 1.4. Возможно, существует прямое вещественное преобразование от генераторов алгебры $so(4)$ к переменным Ковалевской или даже к переменным ξ, Y .

Неизвестно преобразование квазиштеккелевых гамильтонианов с тремя степенями свободы такое, чтобы один из получившихся гамильтонианов был бы гамильтонианом Шредингера. Вычисление этого преобразования приведет к получению нового уравнения Шредингера с магнитным полем в трехмерном случае.

В Главе 2 классификация в квантовом случае проведена для случая, соответствующего уравнению Шредингера, тем не менее были построены два новых (а вероятно и первых) примера двумерного уравнения Шредингера с магнитным полем, принадлежащих к классу "почти точно решаемых" задач. Эти примеры были проинтегрированы в терминах функций Гойна. Анализ других решений квазиштеккелевых гамильтонианов позволит получить новые примеры вышеуказанных уравнений Шредингера. Получение полной классификации является актуальной и сложной задачей хотя бы потому, что в пределе $\hbar \rightarrow 0$ была бы получена полная классификация и в классическом случае, в силу принципа соответствия, однако на данный момент получение полной классификации кажется невозможным ввиду чрезвычайной сложности задачи.

В Главе 3 рассмотрены пары коммутирующих дифференциальных операторов. Представляет интерес дальнейшее исследование таких пар дифференциальных операторов, что облегчается тем обстоятельством, что в работе получено необходимое условие интегрируемости таких пар как факторизация полинома от x, y определяемого коэффициентами при старших производных операторов. Приведены квантовые аналоги интегрируемых волчков таких, как волчки Клебша, Ковалевской, случай Горячева–Чаплыгина на алгебре $e(3)$, волчки Шоттки–Манаква, Стеклова, М. Адлера–ван Мёрбеке, Соколова на алгебре $so(4)$. Возможно развитие такого подхода к квантованию для других систем.

В Главе 4 был развит метод получения преобразования Беклунда лагранжевых систем, заключающийся в инвариантности вариации действия до и после применения преобразования Беклунда. Впервые получено преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, содержащее только полевые переменные и их производные по координатам, что свидетельствует об эффективности подхода. Возможно получение новых ПБ для известных систем с использованием данного метода и ограничением на вид ПБ - зависимостью только от производных по координатам, но не по времени.

Для дальнейшего применения этого метода построения преобразований Беклунда необходимы новые системы или целый класс лагранжевых или, по

крайней мере, гамильтоновых систем. Интересно было бы исследовать цепочки полученных ПБ, с точки зрения одевающей цепочки [159].

В Главе 5 исследуется синтез метода одевания и разделения переменных в двумерном случае, а именно: одевание гамильтониана, в котором переменные изначально разделены, приводит к интегрируемому гамильтониану, в котором разделения переменных уже нет. Анализ одного из физических примеров показал эффективность этого метода для интегрирования определенного класса задач. Метод применен также для операторов типа операторов Шредингера с магнитным полем, где получен общий ответ. В самом общем виде этот метод может применяться при интегрировании целого класса задач. Одевание систем с разделенными переменными может быть расширено на два или более шага, что, конечно, сильно усложнит вычисления. Возможны исследования замыканий в этом случае по аналогии с цепочками преобразований Беклунда.

В Главе 6 рассматриваются рациональные решения ряда динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера, в частности, системы Леви. Ключевым моментом является то, что автомодельные решения были получены непосредственно с использованием лагранжиана системы. Получены уравнения динамики полюсов и преобразования Беклунда для этих решений. Показано, что возможна редукция этих решений в рациональные решения уравнения Пенлеве P_{IV} , причем уравнения динамики полюсов переходят в стационарные уравнения для двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале. Соответствующие кулоновские системы получены для уравнений Пенлеве $P_{II} - P_{IV}$. Данные кулоновские системы были получены ранее для линейных уравнений и впервые в работе автора [95] для уравнений Пенлеве. Предложенный метод позволяет получить представление кулоновского газа для целого ряда нелинейных ОДУ.

В Главе 7 проведена классификация скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в представлении Фурье. Такой подход приводит к необходимости исследования функциональных уравнений, что позволяет получить замкнутый ответ. Применение этого метода можно значительно расширить, не предполагая заранее вид нелинейности, а также введя в рассмотрение векторные и матричные системы.

Из вышесказанного следует, что в данной диссертации получен целый ряд новых результатов, однако перспектива развития тематики диссертации, как и поиск новых приложений, безусловно, есть.

Литература

1. Adler M., van Moerbeke P. A new geodesic flow on $SO(4)$. Probability, statistical mechanics and number theory // Adv. Math. Suppl. Stud. — 1986. — Vol. 9. — Pp. 81–96.
2. Adler M., van Moerbeke P. The Kowalevski and Henon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $so(4)$ - a two dimensional family of Lax pairs // Comm. in Math. Phys. — 1988. — Vol. 113. — Pp. 659–700.
3. Adler V.E. Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation // Int. Math. Research Notes. — 1998. — no. 1. — Pp. 1–4.
4. Адлер В.Э. Дискретизации уравнения Ландау-Лифшица // Теор. Мат. Физ. — 2000. — Т. 124, № 1. — С. 48–61.
5. Adler V.E. Nonlinear chains and Painlevé equations // Physica D. — 1994. — Vol. 73. — P. 335.
6. Адлер В.Э., Марихин В.Г., Шабат А.Б. Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов // Теор. Мат. Физ. — 2012. — Т. 172, № 3. — С. 355–374.
7. Адлер В.Э., Марихин В.Г., Шабат А.Б. Лагранжевы цепочки и канонические преобразования Беклунда // Теор. Мат. Физ. — 2001. — Т. 129, № 2. — С. 163–183.
8. Адлер В.Э., Шабат А.Б. Обобщенные преобразования Лежандра // Теор. Мат. Физ. — 1997. — Т. 112, № 5. — С. 179–194.
9. Адлер В.Э., Шабат А.Б. Об одном классе цепочек Тоды // Теор. Мат. Физ. — 1997. — Т. 113, № 3. — С. 324–334.

10. Адлер В.Э., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. Симметричный подход к проблеме интегрируемости // Теор. Мат. Физ. — 2000. — Т. 125, № 3. — С. 355–424.
11. Aleiner I.L., Matveev K.A. Shifts of Random Energy Levels by a Local Perturbation // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — P. 814.
12. Arkadiev, V.A., Pogrebkov, A.K., Polivalov, M.C. Inverse scattering transform method and soliton solutions for Davey-Stewartson II equation // Physica D. — 1989. — Vol. 36. — Pp. 189–197.
13. Bäcklund A.V. Om ytor med konstant negativ krökning // Lunds Universitets Årsskrift Avd. — 1883. — Vol. 19. — P. 1.
14. Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 3.— New York, Toronto, London: Mc Grow-Hill Comp. INC, 1955.
15. Benenti. S. Intrinsic characterization of the variable separation in the Hamilton-Jacobi equation // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38. — P. 6578.
16. Berube J., Winternitz P. Integrable and superintegrable systems in a magnetic field // J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 45, no. 5. — P. 1958.
17. Blaszak M., Bi-Hamiltonian representation of Stäckel systems // Phys. Rev. E. — 2009. — Vol. 79. — P. 056607.
18. Blaszak Maciej, Domański Ziemowit, Sergyeyev Artur, Szablikowski Blazej M. Integrable quantum Stäckel systems // Phys. Lett. — 2013. — Vol. A377, no. 38. — Pp. 2564–2572.
19. Blaszak, M.; Sergyeyev, A., Generalized Stäckel systems // Phys. Lett. — 2011. — Vol. A375. — P. 2617.
20. Бобенко А.И. Уравнения Эйлера на $so(4)$ и $e(3)$. Изоморфизм интегрируемых случаев // Функц. анализ и его прил. — 1986. — Т. 20, № 1. — С.64–66.
21. Boiti M., Leon J.J.-P., Martina L., Pempinelli F. Scattering of localized solitons in the plane. // Phys. Lett. — 1988. — Vol. A132, no. 8-9. — Pp. 432-439.

22. Boiti M., Pempinelli F. Nonlinear Schrödinger equation, Bäcklund transformations and Painlevé transcendents. // *Nuovo Cimento*. — 1980. — Vol. B59. — P. 40.
23. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твёрдого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос.— Москва–Ижевск: ИКИ, 2005. — 576 с.
24. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем.— Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. — 296 с.
25. Burchnall J.L., Chaundy. T.W. Commutative ordinary differential operators. // *Proc. R. Soc. Lond.* — 1928. — Vol. A118. — Pp. 557–583.
26. Braden H.W., Ryu Sasaki Ryu. The Ruijsenaars-Schneider Model. // *Progr. Theor. Phys.* — 1997. — Vol. 97. — Pp. 1003–1017.
27. Case K.M. Benjamin-Ono-related equations and their solutions // *Proc. Nat'l. Acad. Sci.* — 1979. — Vol. 76. — Pp. 1–3.
28. Calogero F. Motion of Poles and Zeros of Special Solutions of Nonlinear and Linear Partial Differential Equations, and Related "Solvable" Many-Body Problems // *Nuovo Cimento*. — 1978. — Vol. 43B. — Pp. 177–241. (1978).
29. R. Camassa, D.D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71. — P. 1661.
30. A. Clebsch. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // *Math. Annalen*, series 3. — 1870. — Pp. 238–262.
31. Darboux G. *Theorie generale des surfaces*. — New York: Chelsea, 1972.
32. Davey A., Stewartson K. On Three-Dimensional Packets of Surface Waves // *Proc. R. Soc. Lond.* — 1974. — Vol. A338. — Pp. 10–110.
33. Decarreau A., Dumont-Lepage M.Cl., Maroni P. et al. Formes canoniques des équations confluentes de l'équation de Heun // *Ann. Soc. Bruxelles*. — 1978. — Vol. 92. — P. 53.
34. Decarreau A., Maroni P., Robert A. Sur les équations confluentes de l'équation de Heun // *Ann. Soc. Bruxelles*. — 1978. — Vol. 92. — P. 151.

35. Degasperis A., Holm D.D., Hone A.N.W. A New Integrable Equation with Peakon Solutions // *Theor. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 133. — P. 1463.
36. Degasperis A., Procesi M. in *Symmetry and Perturbation Theory*, eds. A. Degasperis, G. Gaeta. P. 23. World Scientific 1999.
37. Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Integrable Hamiltonian systems with velocity dependent potentials // *J. Math. Phys.* — 1985. — Vol. 26. — Pp. 3070–3079.
38. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. Уравнения Шредингера в периодическом магнитном поле и римановы поверхности // *ДАН СССР.* — 1976. — Т. 229. — С. 15.
39. Eisenhart L.P. Separable systems of Stäckel // *Ann. Math.* — 1934. — Vol. 35. — P. 284.
40. Fedorov Yu. N. Integrable systems, Lax representations, and confocal quadrics. *Dynamical systems in classical mechanics* // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, Amer. Math. Soc., Providence, RI. — 1995. — Vol. 168. — P. 2.
41. Ferapontov E.V., Fordy A.P. Commuting quadratic Hamiltonians with velocity-dependent potentials // *Rep. Math. Phys.* — 1999. — Vol. 44, no. 1-2. — Pp. 71–80.
42. Ferapontov E.V., Fordy A.P. Nonhomogeneous systems of hydrodynamic type related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term // *Physica D.* — 1997. — Vol. 108. — Pp. 350-364.
43. Ferapontov E.V. and Veselov A.P. Integrable Schrödinger operators with magnetic fields: factorisation method on curved surfaces // *J. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 590–607.
44. Fokas A.S. and Ablowitz M.I. On a unified approach to transformations and elementary solutions of Painlevé equations // *J. Math. Phys.* — 1982. — Vol. 23. — P. 2033.
45. Fokas, A.S., Santini, P.M. Dromions and a boundary value problem for the Davey-Stewartson I equation // *Physica.* — 1990. — Vol. D44. — Pp. 99-130.

46. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике: Учебное пособие для ВУЗов; Под. ред. Пятницкого Е.С.—3-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 264 с.
47. Габиев Р.А., Шабат А.Б. О дифференциальных операторах коммутирующих в главном // Теор. Мат. Физ. — 2012. — Т. 171, № 1. — С. 18–25.
48. Gelfand I.M., Dickii L.A. Asymptotic behaviour of resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg - De Vries equations // Russian Math. Surveys. — 1975. — Vol. 30. — P. 77.
49. Gibbons J., Tsarev S.P. Reductions of the Benney equations // Phys. Lett. — 1996. — Vol. A211. — P. 19.
50. Gilson C.R., Nimmo J.J.C. Pfaffianization of the Davey-Stewartson equations // Theor. Math. Phys. — 2001. — Vol. 128, no. 1. — Pp. 870–882.
51. Gilson Claire R., Nimmo Jonathan J.C. The Relation between a 2D Lotka-Volterra equation and a 2D Toda Lattice // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. — 2005. — Vol. 12, sup2. — Pp. 169–179.
52. V. I. Gromak, J, Об однопараметрических семействах решений уравнений Пенлеве // Differ. Uravn. — 1978. — Vol. 14, no. 12. — Pp. 2131–2135.
53. Grosset M-P., Veselov A.P. Lamé equation, quantum top and elliptic Bernoulli polynomials // Proc. Edinburgh Math. Soc., Series 2. — 2008. — Vol. 51. — Pp. 635–650.
54. Haine L., Horozov E. A Lax pair for the Kowalewski top // Physica D. — 1987. — Vol. 29. — Pp. 173–180.
55. Heun K. Zur Theorie der Riemannschen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten // Math. Ann. — 1889. — Vol. 33. — P. 161.
56. Helffer B., Kordyukov Y.A. Spectral gaps for periodic Schrodinger operators with hypersurface magnetic wells: Analysis near the bottom // Journal of Functional Analysis. — 2009. — Vol. 257, no. 10. — Pp. 3043–3081.
57. Hietarinta J. Pure quantum integrability // Phys. Lett. — 1998. — Vol. A246. — Pp. 97–104.

58. Hietarinta J., Hirota R. Multidromion solutions to the Davey-Stewartson equation // Phys.Lett. — 1990. — Vol. A145. — Pp. 237–244.
59. Hirota R. Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation // J. Phys. Soc. Japan. — 1977. — Vol. 43. — Pp. 2074–2078.
60. Hisakado Masato The Davey-Stewartson system and the Bäcklund Transformations // Phys. Soc. Jpn. — 1998. — Vol. 67. — Pp. 3038–3043.
61. Infeld L., Hull T.E. The Factorization Method // Reviews of modern physics. — 1951. — Vol. 23, no. 1. — P. 21.
62. Инс Е.Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков, 1938.
63. Ishkhanyan A.M. Exact solution of the Schrödinger equation for the inverse square root potential // Eur. Phys. Lett. — 2015. — Vol. 112. — P. 10006.
64. Kalnins E., Separation of variables for Riemannian spaces of constant curvature. — New York: Wiley, 1986.
65. Kalnins E.G., Miller W.(JR.), Winternitz P. The group $O(4)$, separation of variables and the hydrogen atom, SIAM J. Appl. Math. — 1976. — Vol. 30. — Pp. 630–664.
66. Kodama Y, Wadati M. Theory of Canonical Transformations for Nonlinear Evolution Equations. I // Progress of Theoretical Physics. — 1976. — Vol. 56, no. 6. — P.1740.
67. Kötter F., Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. I.II // J. Reine und Angew. Math. — 1892. — Vol. 109. — Pp. 51–81, 89–111.
68. Комаров И.В. Базис Ковалевской для атома водорода // Теор. Мат. Физ. — 1981. — Т. 41, № 1. — С. 67–72.
69. Комаров И.В. Волчок Горячева–Чаплыгина в квантовой механике // Теор. Мат. Физ. — 1982. — Т. 50, № 3. — С. 402–409.
70. Komarov I.V. Remarks on Kowalevski's top // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34. — Pp. 2111–1220. 2111–2120.

71. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Квазиклассическое квантование волчка Ковалевской // Теор. Мат. Физ. — 1987. — Т. 73, № 3. — С. 335–347.
72. Komarov I.V., Kuznetsov V.B. Quantum Euler–Manakov top on the three-sphere S_3 // J. Phys. A. — 1991. — Vol. 24, no. 13. — Pp. L737–7420.
73. Komarov I.V., Tsiganov A.V. On integration of the Kowalevski gyrostат and the Clebsch problems // Regular and Chaotic Dynamics. — 2004. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 169–187.
74. Kowalevski S.V. Sur le probleme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe // Acta Math. — 1889. — Vol. 12. — Pp. 177–232.
75. Kramers H.A., Ittmann G.P. Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels // Z. Physik. — 1929. — Vol. 53. — Pp. 553–565.
Kramers H.A., Ittmann G.P. Zur Quantelung der asymmetrischen Kreisels, II. // Z. Physik. — 1929. — Vol. 58. — Pp. 217–231.
76. Кричевер И.М. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ. — 1978. — Т. 12, № 3. — С. 20–31.
77. Kuznetsov V.B. and Sklyanin E.K. On Bäcklund transformations for many-body systems // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31. — Pp. 2241–2251.
78. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. — 4-е изд., исправ. — М.: Наука, 1989. — 767 с.
79. Laporte O. Note on Kowalewski’s top in quantum mechanics // Phys. Rev. — 1933. — Vol. 43. — Pp. 548–551.
80. Leble, S.B., Salle, M.A., Yurov, A.V. Darboux transforms for Davey–Stewartson equations and solitons in multidimensions // Inverse Problems. — 1992. — Vol. 4. — Pp. 207–220.
81. Levi D., Pilloni L., Santini P.M. Bäcklund transformations for nonlinear evolution equations in $2 + 1$ dimensions // Phys. Lett. — 1981. — Vol. A81. — Pp. 419–423.

82. Leznov A.N., Shabat A.B., Yamilov R.I. Canonical transformations generated by shifts in nonlinear lattices // *Phys. Lett.* — 1993. — Vol. 174. — Pp. 397–402.
83. Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // *Функц. анализ.* — 1976. — Т. 10, № 4. — С. 93–94.
84. Magri F.A. A simple model for the integrable Hamiltonian equation // *J. Math. Phys.* — 1978. — Vol. 19. — P. 1156.
85. Марихин В.Г. Гамильтонова теория интегрируемых обобщений нелинейного уравнения Шредингера // *Письма в ЖЭТФ.* — 1997. — Т. 66, № 11. — С. 673–678.
86. Марихин В.Г. Действие как инвариант преобразований Беклунда лагранжевых систем // *Теор. Мат. Физ.* — 2015. — Т. 184, № 1. — С. 71–78.
87. Марихин В.Г. Динамика электронных уровней в присутствии примеси и модель Руйзенарса-Шнайдера // *Письма в ЖЭТФ.* — 2003. — Т. 77, № 1. — С. 48–50.
88. Marikhin V.G. Integrable systems with quadratic nonlinearity in Fourier space // *Phys. Lett.* — 2003. — Vol. A310. — Pp. 60–66.
89. Марихин В.Г. Квазиштеккелевы системы и двумерные уравнения Шредингера в электромагнитном поле // *Теор. Мат. Физ.* — 2013. — Т. 177, № 1. — С. 83–92.
90. Марихин В.Г. Метод одевания и разделение переменных. Двумерный случай // *Теор. Мат. Физ.* — 2009. — Т. 161, № 3. — С. 327–331.
91. Марихин В.Г. О двумерном уравнении Шредингера в магнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом движения // *Письма в ЖЭТФ.* — 2011. — Т. 94, № 3. — С. 262–266.
92. Марихин В.Г. О классическом движении заряженной частицы в электромагнитном поле в двумерии с дополнительным квадратичным интегралом движения // *Письма в ЖЭТФ.* — 2013. — Т. 97, № 1. — С. 491–495.

93. Марихин В.Г. О некоторых решениях двумерных уравнений типа Шредингера в магнитном поле // Теор. Мат. Физ. — 2011. — Т. 168, № 2. — С. 219–226.
94. Marikhin V.G. On three-dimensional quasi-Stackel Hamiltonians // J. Phys. — 2014. — Vol. A47. — P. 175201.
95. Марихин В.Г. Представление кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве // Теор. Мат. Физ. — 2001. — Т. 127, №2. — С. 284–303.
96. Марихин В.Г. Трехмерная решетка преобразований Бэклунда интегрируемых случаев системы Дэви - Стюартсона // Теор. Мат. Физ. — 2016. — Т. 189, № 3. — С.361-369.
97. Marikhin V.G. Two new integrable cases of two-dimensional quantum mechanics with a magnetic field // Письма в ЖЭТФ. — 2016. — Т. 103, № 7. — С.552-556.
98. Марихин В.Г., Шабат А.Б. Интегрируемые решетки // Теор. Мат. Физ. — 1999. — Т. 118, № 2. — С. 217–228.
99. Марихин В.Г., Шабат А.Б., Бойти М., Пемпинелли Ф. Автомодельные решения типа нелинейного уравнения Шредингера // ЖЭТФ. — 2000. — Т. 117, № 3. — С. 634–643.
100. Марихин В.Г., Соколов В.В. О квазиштеккелевых гамильтонианах // Успехи мат. наук. — 2005. — Т.60, № 5. — С. 175-176.
101. Марихин В.Г., Соколов В.В. Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам // Теор. Мат. Физ. — 2006. — Т. 149, №2. — С. 147–160.
102. Marikhin V.G., Sokolov V.V. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve // Regul. Chaotic Dyn. — 2005. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 59–70.
103. Marikhin V.G., Sokolov V.V. Transformation of a pair of commuting Hamiltonians quadratic in momenta to a canonical form and on a partial real separation of variables for the Clebsch top // Regul. Chaotic Dyn. — 2010. — Vol. 15, no. 6. — Pp. 652–658.

104. Марихин В.Г. Теорема ортогональности в 1D - электронном газе с ограниченным спектром // Письма в ЖЭТФ. — 1996. — Т. 64, № 1. — С. 57.
105. McSween E., Winternitz P. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41. — Pp. 2957–2967.
106. Mikhailov A.V., Novikov V.S. Perturbative symmetry approach // J. of Phys. A: Math. Gen. — 2002. — Vol. 35. — P. 22.
107. А.В. Михайлов, В.В. Соколов. Устное сообщение.
108. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 4. — С. 3–53.
109. Miller.W.Jr., Symmetry and Separation of Variables. — Reading, MA:Addison-Wesley, 1977.
110. Miura R.M., ed., Backlund transformation, the Inverse Scattering Method, solitons, and their applications // Lect. Notes in Math. — 1976. — Vol. 515.
111. Miura R.M. Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation // J. Math. Phys. — 1968. — Vol. 9. — Pp. 1202–1204.
112. Мищенко А.С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 2. — С. 257–262.
113. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396–415.
114. Narayan O., Shastry B.S. Dyson's Brownian motion and universal dynamics of quantum systems // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 71. — P. 2106.
115. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза. I // Функц. анализ. — 1974. — Т. 8, №3. — С. 54–66.
116. Novikov S.P., Veselov A.P. Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations // Amer. Math. Soc. Transl (2). — 1997. — Vol. 179. — Pp. 109–132.

117. Odesskii A.V., Sokolov V.V. Non-homogeneous systems of hydrodynamic type possessing Lax representations // Commun. Math. Phys. — 2013. — Vol. 324, no. 1. — P. 47.
118. Okamoto K. Polynomial Hamiltonians Assotiated with Painleve equations // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1980. — Vol. 56, no. 6. — Pp. 264–268.
119. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Quantum integrable systems related to Lie algebras //Phys. Reports. — 1983. — Vol. 94, no. 6. — Pp. 313–404.
120. Pechukas P. Distribution of Energy Eigenvalues in the Irregular Spectrum //Phys. Rev. Lett. — 1983. — Vol. 51. — P. 943.
121. Переломов А.И. Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функц. анализ и его приложения. — 1981. — Т. 15, № 2. — С. 83–85.
122. Прасолов В.В., Соловьев Ю.П., Эллиптические функции и алгебраические уравнения. — М.: Факториал, 1997. — 288 с.
123. Ramani A., Grammaticos B., Dorizzi B. On the quantization of the Kowalevskaya top // Phys. Lett. — 1984. — Vol. A101, no. 2. — Pp. 69–71.
124. Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body // Comm. in Math. Phys. — 1986. — Vol. 105. — Pp. 461–472.
125. Рейман А.Г., Семенов-тян-Шанский М.А., Интегрируемые системы. — : Москва-Ижевск, 2003, 352 с.
126. Ronveaux A.(ed.), Heun's Differential Equations. — New York: Oxford Univ. Press, 1995.
127. Ruijsenaars S.N.M. Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities // Commun. Math. Phys. — 1987. — Vol. 110. — Pp. 191–213.
128. Ruijsenaars S.N.M. Relativistic Toda system, Preprint Stichting Centre for Mathematics and computer Sciences. — Amsterdam, 1986.

129. Ruijsenaars S.N.M. and Schneider H. A new class of integrable systems and its relation to solitons // *Ann. of Phys.* — 1986. — Vol. 170. — P. 370.
130. Sanders J., Wang J.P. On the integrability of homogeneous scalar evolution equations // *J. of Differential Equations.* — 1998. — Vol. 147. — Pp. 410–434.
131. Сафин С.С., Шарипов Р.А., Автопреобразование Бэклунда для уравнения $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$ // *Теор. Мат. Физ.* — 1993. — Т. 95, № 1. — С. 146–159.
132. Schottky F. Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen // *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin.* — 1891. — Vol. XIII. — Pp. 227–232.
133. Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions // *Proc. Roy. Irish Acad.* — 1940. — Vol. A46. — Pp. 9–16.
134. Schrödinger E. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization // *Proc. Roy. Irish Acad.* — 1941. — Vol. A46. — Pp. 183–206.
135. Schrödinger E. The factorization of hypergeometric equation // *Proc. Roy. Irish Acad.* — 1941. — Vol. A47. — Pp. 53–54.
136. Schur I. Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke // *Sitzungsber. Berliner Math. Ges.* — 1905. — Vol. 4. — Pp. 2–8.
137. Шабат А.Б. К теории преобразований Лапласа-Дарбу // *Теор. Мат. Физ.* — 1995. — Т. 103, № 1. — С. 170–175.
138. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. Симметрии нелинейных цепочек. // *Алгебра и анализ.* — 1990. — Т. 2, № 2. — С. 183–208.
139. Shabat A.B., Yamilov R.I. To a transformation theory of two-dimensional integrable systems // *Phys. Lett.* — 1997. — Vol. A227. — Pp. 15–23.
140. Shifman M.A. Supersymmetric Quantum Mechanics and Partial Algebraization of the Spectral Problem // *Int. Journal of Mod. Phys.* — 1989. — Vol. A4. — Pp. 3305–3310.
141. Simons B.D., Lee P.A., Altshuler B.L. Exact description of spectral correlators by a quantum one-dimensional model with inverse-square interaction // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 70. — P. 4122.

142. Скворцов М.А., Островский П.М. Локальные корреляции различных собственных функций в неупорядоченной проволоке, Письма в ЖЭТФ. — 2007. — Т. 85, № 1. — С. 79–83.
143. Склянин Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера // Функц. Анализ. — 1982. — Т. 16, № 4. — С. 27–34.
144. Sokolov V.V. Generalized Kowalewski top: new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // In: “Kowalevski property”, ed. V.B. Kuznetsov, CRM Proceedings and Lecture Notes. — 2002. — Vol. 32. — Pp. 307–313.
145. Соколов В.В. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ // Доклады Академии Наук. — 2004. — Т. 394, № 5. — С. 1–4.
146. Сулейманов Б.И. Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 5. — С. 791–795.
147. Stäckel P. Sur une classe de problemes de dynamique // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences et belles-lettres, S. Acad. Sci. — 1893. — Vol. 116. — P. 485.
148. Stäckel P., Über die Integration der Hamilton Jacobischen Differential Gleichung Mittelst Separation der Variablen. — Halle: Habilitationsschrift, 1891.
149. Stekloff V.A. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible en sur les variations des latitudes // Ann. de la fac. des Sci. de Toulouse Ser. 3. — 1909. — Vol. 1.
150. Suris Y.B. On some integrable systems related to the Toda lattice // J. Phys. A. — 1997. — Vol. 30. — P. 2235.
151. Тайманов И.А., Царев С.П. Двумерные рациональные солитоны, построенные с помощью преобразований Мутара, и их распад // Теор. Мат. Физ. — 2008. — Т. 157, № 2. — С. 188–207.
152. Tajuri M., Arai T. Periodic Soliton Solutions to the Davey–Stewartson Equation // Proc. Inst. Math. of NAS of Ukraine. — 2000. — Vol. 30, no. 1. — Pp. 210–217.

153. Toda M. Theory of Nonlinear Lattices. — Berlin.: Springer, 1989, 225 pp.
154. Turbiner A. Quasi-exactly-solvable problems and $sl(2)$ algebra // Comm. Math. Phys. — 1988. — Vol. 118. — Pp. 457–474.
155. Tzitzeica G. Sur une nouvelle classe de surfaces // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1907. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 180–187.
156. Ushveridze A. Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics // Sov. Journal Part. Nucl. — 1989. — Vol. 20. — Pp. 504–528.
157. V.E. Vekslerchik. Two-Dimensional Toda–Heisenberg Lattice // SIGMA. — 2013. — Vol. 9. — P. 044.
158. Веселов А.П. Об условиях интегрируемости уравнения Эйлера на $so(4)$, // ДАН СССР. — 1983. — Т. 270, № 6. — С. 1298–1300.
159. Веселов А.П., Шабат А.Б. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера // Функци. Анализ Прилож. — 1993. — Т. 27, № 2. — С. 1–21.
160. Yamilov R.I. Classification of Toda type scalar lattices // Proc. of NEEDS'92, World Scientific Publishing. — 1993. — Pp. 423–431.
161. Yehia H.M. Further Classification of 2D Integrable Mechanical Systems with Quadratic Invariants // Regular and Chaotic Dynamics. — 2009. — Vol. 14, no. 4-5. — Pp. 571–579.
162. Юров А.В. Преобразование Беклунда–Шлезингера для уравнений Дэви–Стюартсона // Теор. Мат. Физ. — 1996. — Т. 109, № 3. — С. 338–346.
163. Забродин А.В. Разностные уравнения Хироты // Теор. Мат. Физ. — 1997. — Т. 113, № 2. — С. 179–230.
164. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Л.П. Питаевский. Теория солитонов. — М.: Наука 1973. 319 стр.
165. Zakharov V.E., Schulman E.I. Integrability of Nonlinear Systems and Perturbation Theory // "What is Integrability?" (V.E. Zakharov ed.), Springer series in Nonlinear Dynamics. — 1991. — P. 185.

166. Zheng-de Dai, Shao-lin Li, Homoclinic and Heteroclinic Flows in Global Attractor for Davey-stewartson II Equation // Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series. — 2008. — Vol. 24, no. 4. — Pp. 599–612.
167. Жибер А.В., Шабат А.Б. Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 5. — С. 1103–1107.