

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук

На правах рукописи

Островский Павел Михайлович

Электронные свойства неупорядоченного графена

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка — 2019

Оглавление

Введение	5
1 Квазиклассическая теория электронного транспорта в графене	18
1.1 Модель сильной связи для графена	18
1.1.1 Чистый предел	18
1.1.2 Потенциальный беспорядок	20
1.1.3 Симметрии и беспорядок общего вида	22
1.2 Приближение самосогласованной T -матрицы	24
1.3 Слабый беспорядок	26
1.3.1 Самосогласованное борновское приближение	26
1.3.2 Логарифмические поправки и ренорм-группа	29
1.3.3 Поправки слабой локализации	33
1.4 Сильные примеси	34
1.5 Фазовая диаграмма	36
1.6 Кулоновские примеси	37
2 Электронные свойства графена со слабым беспорядком	40
2.1 Проводимость в графене с киральным беспорядком	41
2.1.1 C_z киральность	42
2.1.2 C_0 киральность	45
2.1.3 C_\perp киральность	46
2.2 Беспорядок, не смешивающий долины	47
2.3 Квантовый эффект Холла в графене	53
2.3.1 Разделенные долины	55
2.3.2 Слабое перемешивание долин	57
2.3.3 Киральный беспорядок	60
3 Полная статистика переноса заряда в графене	63
3.1 Чистый образец	64
3.1.1 Малые энергии $\epsilon L \ll 1$	67
3.1.2 Большие энергии $\epsilon L \gg 1$	68
3.2 Металлический эффект близости	72
3.3 Формализм матричных функций Грина	75
3.3.1 Обобщенная формула Кубо	76
3.3.2 Производящая функция	77

3.3.3	Функция Грина чистого графена	79
3.4	Графен со слабым беспорядком. Баллистический предел	82
3.4.1	Первый порядок	83
3.4.2	Второй порядок	84
3.4.3	Поправки к функции распределения	86
3.5	Графен со слабым беспорядком. Диффузный предел	88
3.5.1	Вывод сигма-модели с источником	89
3.5.2	Поправки к функции распределения	92
4	Электронные свойства графена с сильными примесями	97
4.1	Резонансные потенциальные примеси	98
4.1.1	Баллистический режим	99
4.1.2	Вклад одной примеси в s -канале	100
4.1.3	Вклад одной примеси в p -канале	102
4.1.4	Вириальное разложение	106
4.1.5	Диффузный режим	110
4.2	Вакансии	114
4.2.1	Цветовая классификация вакансий	115
4.2.2	Баллистический режим	118
4.2.3	Диффузный режим	122
4.3	Сильные примеси в магнитном поле	125
4.4	Анизотропное распределение примесей	130
5	Локализация в двумерных киральных металлах	139
5.1	Предварительные замечания	141
5.2	Метод фонового поля	143
5.3	Пертурбативная перенормировка	146
5.4	Непертурбативная перенормировка	147
5.4.1	Структура вихрей	148
5.4.2	Уравнения ренорм-группы	150
5.5	Локализация при наличии вихрей	152
5.6	Дуальное представление для класса АIII	154
5.6.1	Дуальное действие	154
5.6.2	Пертурбативная перенормировка	156
5.6.3	Дуальное действие с вихрями	157
5.6.4	Вклад вихрей в перенормировку	158
5.7	Топологические члены	161
5.7.1	Член Весса—Зумино в классе АIII	161
5.7.2	\mathbb{Z}_2 топологический член в классе СИ	165
5.8	Заключительные комментарии	168

6	Плотность состояний в киральном металле с вакансиями	170
6.1	Модель кирального металла	171
6.2	Квазиклассическое приближение	172
6.3	Вывод сигма-модели	175
6.4	Нульмерный предел	178
6.5	Перенормировка модели с вакансиями	181
6.6	Предел сильного дисбаланса	184
	Заключение	188
A	Двухпетлевая баллистическая перенормировка беспорядка	193
A.1	Универсальность перенормировки	193
A.2	Вычисление диаграмм	194
A.2.1	Однопетлевые диаграммы	195
A.2.2	Двухпетлевые диаграммы	197
A.3	Уравнения ренорм-группы	199
B	Алгоритмы обращения матриц	202
B.1	Резонансные потенциальные примеси	202
B.2	Вакансии	205
	Список публикаций	208
	Литература	209

Введение

Графен — двумерный материал, представляющий собой слой углерода толщиной в один атом. Он был впервые получен в изолированном виде Геймом и Новоселовым в 2004 году [1]. Последующие транспортные измерения [2—9] показали, что графен является проводником с уникальными физическими свойствами. В частности, минимальная электрическая проводимость графена близка к квантовому значению e^2/h и при этом очень слабо зависит от температуры. Кроме того, графен в сильном поперечном магнитном поле демонстрирует квантование холловской проводимости только с нечетными числами заполнения. Эти открытия вызвали сильнейший научный интерес и мотивировали огромное количество исследований. Уже в течение года после первоначального эксперимента были предложены многочисленные модели для объяснения транспортных, оптических и механических свойств графена [10—55]. Такой ажиотаж связан с тем, что графен существенно отличается от других известных материалов, в том числе тонких металлических пленок и систем с двумерным электронным газом; его физические свойства противоречат сложившимся представлениям о металлах и полупроводниках.

Графен представляет собой двумерный металл, в котором электронный спектр имеет линейную дисперсию и описывается безмассовым дираковским гамильтонианом [56]. (Обычно при обсуждении графена слово «безмассовый» опускают и говорят просто о дираковских электронах). В итоге поверхность Ферми вырождается в две изолированные точки, называемые долинами, причем вырождение спектра в этих двух точках обеспечивается симметрией шестиугольной решетки графена и остается устойчивым к большинству внешних воздействий. Тем самым по своим электронным свойствам графен находится ровно по середине между обычными металлами и полупроводниками. Фактическое отсутствие массы у электронов в графене позволяет изучать многие релятивистские эффекты методами физики конденсированных сред в хорошо контролируемых лабораторных условиях. Также одно из очевидных преимуществ графена состоит в том, что этот самый тонкий в природе двумерный материал позволяет непосредственный доступ к поверхности. Этим он сильно отличается от полупроводниковых гетероструктур, в которых двумерный электронный газ можно создать только в области интерфейса между различными слоями. Это свойство можно использовать в многочисленных приложениях, называемых общим словом «функционализация» графена. При помощи осаждения различных веществ на поверхность можно контролируемо модифицировать свойства графена. Например, на основе графена можно создавать газовые датчики, чувствительные к отдельным молекулам [57]. Другое многообещающее применение этой техники предполагает использование графена для создания элементной базы наноэлектроники

будущих поколений. Подробно ознакомиться с необыкновенной физикой графена можно по материалам нескольких обзорных статей [58–62].

Одним из первых экспериментальных наблюдений в графене стала минимальная проводимость [2]. Было показано, что, когда концентрация носителей минимальна, проводимость графена близка к значению $4e^2/h$ и практически не зависит от температуры в диапазоне от 30 мК до 300 К. Такое поведение противоречит надежно установленным фактам физики неупорядоченных металлов. Когда проводимость двумерного металла близка к квантовому значению, становятся важны эффекты интерференции электронов, приводящие к их локализации. Это, помимо прочего, выражается в экспоненциальном росте сопротивления при низких температурах. Возможное объяснение отсутствия такого эффекта в графене составляет одну из целей настоящей диссертации.

Эффекты квантовой локализации были впервые предсказаны Андерсоном [63] более 60 лет назад. За прошедшие годы было достигнуто детальное понимание квантовых явлений, связанных с беспорядком. Основной вывод теории локализации состоит в том, что по мере увеличения силы беспорядка в металле происходит фазовый переход в состояние изолятора. Свойства этого перехода существенно зависят от геометрии. В частности, в одномерных и двумерных системах состояние изолятора возникает уже при сколь угодно слабом беспорядке. Строгое обоснование этого результата для одномерных проволок было дано Моттом и Тузом [64]; затем Таулесс показал, что это свойство сохраняется и в квазиодномерных (многоканальных) системах [65]. Позже, в работе [66], была предложена общая теория, основанная на скейлинговой гипотезе, которая предсказала полную локализацию также в двумерных пленках. Эти предсказания получили впоследствии более надежное обоснование в рамках микроскопической теории слабой локализации [67], которая положила начало новому разделу науки — мезоскопической физике. Теория слабой локализации доказала, что двумерный металл со сколь угодно слабым беспорядком, не нарушающим симметрию по спину и обращению времени, неизбежно переходит в состояние изолятора на экспоненциально больших масштабах. Параметр, который определяет длину локализации, связан с обычной классической проводимостью (в единицах e^2/h). Это означает, что для графена, безразмерная проводимость которого близка к единице, характерные особенности изолятора должны наблюдаться уже на масштабах порядка длины свободного пробега. Отсутствие таких эффектов является одной из загадок графена, требующих научного объяснения.

Дальнейшее развитие теории слабой локализации показало, что возможны различные типы поведения неупорядоченных металлов в зависимости от их симметрии. В случае когда гамильтониан системы инвариантен при обращении времени, но спиновая симметрия нарушена (например, за счет спин-орбитального взаимодействия), интерференционные эффекты имеют противоположный знак и приводят к антилокализации [68]. По мере увеличения размеров образца его проводимость также растет. Однако если сила беспорядка превысит некоторое пороговое значение, по-прежнему возможен фазовый переход в состояние изолятора. На языке скейлинговой теории этот переход описывается неустойчивой фиксированной точкой. Поэтому, даже если предположить, что графен относится к классу систем с нарушенной

спиновой симметрией, это не позволяет объяснить фактическое отсутствие температурной зависимости проводимости.

Скейлинговая гипотеза [66] получила еще более строгое обоснование в рамках нелинейной сигма-модели [69], которая позволила описать поправки слабой локализации во всех порядках на языке эффективной теории поля. Кроме того, это позволило построить полную классификацию всех неупорядоченных систем на основе их симметрии [70; 71]. Было показано, что существует всего десять различных классов симметрии, которые, помимо обращения времени и спина, зависят также от наличия особой зеркальной симметрии гамильтониана, характерной для сверхпроводников. Эти десять классов тесно связаны с соответствующими симметрическими пространствами, на которых определена сигма-модель.

Среди десяти классов симметрии есть три особых класса, называемые киральными. Определяющая черта киральных классов состоит в том, что гамильтониан можно представить в блочно антидиагональном виде. Например, это случается в модели прыжков между ближайшими соседями на решетке, состоящей из двух подрешеток. Шестиугольная структура решетки графена обладает именно таким свойством. Как показали Гаде и Вегнер [72; 73], в двумерных системах с киральной симметрией поправки слабой локализации равны нулю во всех порядках. Это значит, что проводимость такого металла может принимать любое фиксированное значение и не будет меняться с температурой. Однако чтобы применить эту модель для описания графена, нужно предположить, что беспорядок обладает очень специальными свойствами и не имеет диагональных матричных элементов в пространстве подрешеток. Другой отличительной особенностью киральных систем является сингулярная зависимость плотности состояний от энергии. В то время как эффекты интерференции электронов точно сокращаются в проводимости, они приводят к расходимости плотности состояний на нулевой энергии (в центре зоны). Подобное поведение до сих пор не наблюдалось в графене.

Помимо симметрии, локализационные свойства также зависят от топологии гамильтониана. Исторически первым примером топологических эффектов в неупорядоченных металлах стал квантовый эффект Холла [74; 75]. В сильном магнитном поле холловская проводимость двумерного электронного газа принимает дискретные значения, равные целым кратным e^2/h . Квантование холловской проводимости имеет беспрецедентную точность. В современных экспериментах она достигает двенадцати порядков, поэтому квантовый эффект Холла используется в метрологии в качестве эталона электрического сопротивления. По мере изменения концентрации носителей или магнитного поля происходят скачкообразные переходы между соседними целыми значениями холловской проводимости. Эти скачки имеют все признаки квантовых фазовых переходов. Они характеризуются зависящей от температуры шириной и становятся резче по мере понижения температуры. Также в области перехода наблюдается конечная продольная проводимость, которая принимает универсальное значение, близкое к $0.5 e^2/h$. В режиме плато, то есть вдали от переходов, продольная проводимость оказывается экспоненциально малой за счет эффектов локализации.

Объяснение квантового эффекта Холла в рамках нелинейной сигма-модели было впервые предложено Праускенем [76]. Он показал, что при наличии внешнего магнитного поля в сигма-модели возникает дополнительный топологический член, который может существенно

влиять на поведение проводимости, когда она близка к квантовому значению. Модификация скейлинговой теории локализации в магнитном поле [77] включает два параметра: продольную и холловскую проводимость, и хорошо описывает критические свойства переходов между плато. В случае графена квантовый эффект Холла также имеет ряд отличительных особенностей. Уже в самых первых экспериментах [3; 4] было показано, что холловская проводимость графена принимает лишь нечетные целые значения. Причина такого поведения состоит в специфическом топологическом свойстве дираковского гамильтониана, связанном с фазой Берри электронов. Этот вопрос подробно обсуждается в диссертации.

В последние годы были также предсказаны [15; 78–81], а потом и экспериментально обнаружены [82; 83], другие топологические эффекты в неупорядоченных системах. В металле с чрезвычайно сильным спин-орбитальным взаимодействием может наблюдаться так называемый квантовый спин-Холл эффект. Это аналог квантового эффекта Холла, когда приложенное к образцу напряжение вызывает поперечный спиновый ток. Отношение этих величин, называемое спин-холловской проводимостью, принимает лишь одно универсальное значение. Еще более удивительное явление наблюдается в аналогичных трехмерных образцах. Они могут оказаться в состоянии изолятора, щель в котором целиком определяется сильным спин-орбитальным взаимодействием. При этом на поверхности этих материалов сохраняется металлическое состояние с электронами, подчиняющимися безмассовому дираковскому гамильтониану. Такие трехмерные вещества называются топологическими изоляторами [84; 85]. Их поверхностные состояния обладают рядом необычных свойств, связанных с топологией. Например, электроны на поверхности невозможно локализовать даже сильным беспорядком, при условии, что он не нарушает симметрию. Поверхностные состояния трехмерных топологических изоляторов очень похожи на графен, поскольку описываются аналогичным дираковским гамильтонианом. В некотором смысле графен можно рассматривать как бесконечно тонкий топологический изолятор, в котором две параллельные поверхности эффективно становятся двумя идентичными долинами в спектре.

Систематический учет топологических эффектов в локализации позволил построить полную классификацию возможных типов топологических изоляторов [86–88]. Она предсказывает, в каких из десяти классов симметрии неупорядоченных систем можно ожидать возникновение топологически нетривиального состояния. При этом была обнаружена циклическая зависимость топологических свойств неупорядоченных систем от их размерности с периодом восемь. Оказалось, что помимо уже известных двумерных (квантовый эффект Холла и спин-Холл эффект) и трехмерных топологических изоляторов, возможны также аналогичные одномерные системы, в которых можно создавать локализованные майорановские состояния [89; 90]. Применение общей топологической классификации неупорядоченных систем к графену также позволяет сделать глубокие выводы о его свойствах. Например, беспорядок, который не перемешивает долины, всегда приводит к топологическому состоянию графена, защищенному от локализации. Это утверждение является одним из результатов диссертации.

Причина особенных топологических свойств графена состоит в дираковском характере его электронного спектра. Известны также другие материалы с аналогичными свойствами. В частности, двумерные (слоистые) d -волновые сверхпроводники могут обладать особыми

возбуждениями, которые также описываются безмассовым дираковским гамильтонианом вблизи узловых точек спектра. Теория подобных систем, в том числе для объяснения эффектов беспорядка, развивалась еще до открытия графена [91–94]. В частности, был разработан метод самосогласованной T -матрицы для описания влияния сильных и резонансных примесей на дираковские электроны [95–103]. Также была построена частичная классификация возможных состояний с учетом симметрии и топологии [94]. Несмотря на схожесть с графеном, у d -волновых сверхпроводников есть и ряд существенных отличий. Во-первых, их спектр обычно включает четыре узловые точки, а не две долины. Во-вторых, наличие сверхпроводящего конденсата кардинально влияет на транспортные свойства. И в-третьих, возможности экспериментов с необычными сверхпроводниками гораздо беднее по сравнению с графеном, не говоря уже о том, что на данный момент не существует материалов, для которых был бы надежно установлен d -волновой характер куперовского спаривания. Тем не менее мы будем использовать некоторые результаты теории необычных сверхпроводников при описании неупорядоченного графена.

* * *

Настоящая диссертационная работа преследует следующие **цели**: 1) построить теорию электронной проводимости в графене вдали от дираковской точки, 2) определить возможные механизмы локализации в графене, 3) построить теорию полного переноса заряда в графене в баллистическом режиме с примесями, 4) изучить влияние вакансий и других сильных примесей на спектральные и транспортные свойства графена, 5) развить теорию локализации в двумерных киральных металлах.

Все задачи диссертации связаны с электронными свойствам графена и многообразными эффектами беспорядка в нем. Для достижения поставленных целей требуется развитие особых методов исследования, применимых к дираковскому спектру и выходящих за рамки теории обычных металлов.

На защиту выносятся следующие **основные результаты**:

1. Построена полная симметричная классификация возможных типов примесей в графене. На ее основе развита теория квазиклассического транспорта вдали от дираковской точки. Примеси избирательно нарушают некоторые симметрии дираковского гамильтониана, что приводит к различному поведению плотности состояний и проводимости графена в зависимости от типа примесей и концентрации носителей.
2. Изучены транспортные свойства графена в дираковской точке при наличии кирального беспорядка. Явно вычислена минимальная проводимость графена в этом случае с точным учетом всех квантовых эффектов.

3. Построена теория электронного транспорта в графене с неперемешанными долинами. Показано, что особенности дираковского гамильтониана приводят к появлению топологических членов в действии сигма-модели и меняют локализационные свойства системы. В частности, продемонстрировано возникновение сигма-модели симплектического класса с θ -членом типа \mathbb{Z}_2 в случае плавного потенциального беспорядка. Этот дополнительный член делает локализационный переход невозможным.
4. Изучены транспортные свойства графена в поперечном магнитном поле. Выведена унитарная сигма-модель для произвольного параметра перемешивания долин. Найдена необычная связь между холловской проводимостью и топологическим углом θ , которая объясняет нечетное квантование холловской проводимости. Также показано, что при наличии кирального беспорядка квантование холловской проводимости в пределах нулевого уровня Ландау не происходит.
5. Подробно исследованы свойства чистого графена при двухконтактном измерении кондактанса. Найдена полная функция распределения прозрачностей как около дираковской точки, так и на больших энергиях. Рассмотрен металлический эффект близости — изменение локальной плотности состояний в графене вблизи контакта с металлом в зависимости от энергии и расстояния.
6. Развита последовательная теория баллистических эффектов слабого беспорядка. Найдена полная функция распределения коэффициентов прозрачности при наличии разных типов примесей. Также получена зависимость этой функции от энергии вблизи дираковской точки. Построена аналогичная теория в диффузном пределе и вычислены квантовые поправки к полной статистике переноса заряда.
7. Изучены свойства графена с резонансными потенциальными примесями. Выведена точная формула, выражающая кондактанс графена как функцию положения каждой примеси. На основе этой формулы разработан чрезвычайно эффективный алгоритм численного моделирования транспортных свойств графена. Продемонстрирован переход из баллистического в диффузный режим и логарифмический рост кондактанса за счет эффектов антилокализации.
8. Построена теория электронного транспорта в графене с вакансиями. Показано, что значение кондактанса существенно зависит от распределения вакансий между шестью подрешетками. Проведено детальное сравнение аналитических результатов с численным моделированием транспортных свойств методом трансфер-матрицы. Найдены некоторые неустойчивые и устойчивые критические точки с разными значениями проводимости в зависимости от распределения вакансий. Продемонстрирован скейлинг между такими фиксированными точками.
9. Изучены транспортные свойства графена с сильными примесями во внешнем магнитном поле. Показано, что кондактанс графена может немонотонно зависеть от размеров образца вследствие различных точных или приближительных симметрий системы и

соответствующих им фиксированных точек. В пределе самых больших размеров наблюдается либо полная локализация, либо критическое поведение, характерное для перехода квантового эффекта Холла, с проводимостью $\approx 2e^2/h$.

10. Построена квазиклассическая теория транспорта в графене с сильными примесями, расположенными в каждом третьем ряду шестиугольной решетки. Показано, что в этом случае электронный транспорт имеет супердиффузный характер в направлении рядов с проводимостью, которая растет пропорционально квадратному корню из длины образца. В то же время поперечная проводимость имеет обыкновенный диффузный характер и не меняется с длиной. Результаты подтверждены масштабным численным моделированием методом рекурсивных функций Грина.
11. Рассмотрены транспортные свойства двумерного кирального металла с беспорядком. Предложен новый механизм локализации в таких системах, основанный на динамике вихрей в соответствующей сигма-модели. Выведены критические свойства локализационного перехода. Также проанализирована структура вихрей, когда сигма-модель содержит дополнительные топологические члены. Показано, что в этом случае локализация при помощи вихрей становится неэффективной.
12. Построена теория квантовых эффектов в двумерном киральном металле с вакансиями. Показано, что классические флуктуации распределения вакансий между двумя подрешетками приводят к возникновению дополнительного релевантного члена в действии сигма-модели. Этот член радикально меняет критические свойства вблизи центра зоны. В частности, корреляционная длина расходуется на малых энергиях $\propto |\ln E|^{1/2}$. Также показано, что плотность состояний имеет особенность в этой области и расходуется по закону $\propto E^{-1}|\ln E|^{-3/2}$.

Все результаты диссертационной работы получены впервые, ее выводы обоснованы надежностью применявшихся аналитических методов, согласием с теоретическими результатами, полученными в других работах, данными физических экспериментов, а также численного моделирования, выполненного другими авторами.

Развитые в диссертационной работе **методы** могут быть использованы для описания широкого круга явлений в электронном транспорте в неупорядоченных двумерных и трехмерных электронных системах.

Построенная в диссертации классификация типов беспорядка в графене дает возможность определять характер примесей в экспериментально изучаемых образцах графена на основе их спектральных и транспортных характеристик в зависимости от концентрации носителей. Это позволяет устанавливать микроскопические свойства графена в различных экспериментальных условиях, а также предсказывать физические свойства графена для возможных разнообразных приложений в современной наноэлектронике.

Выведенные в диссертации матричные функции Грина в графене дают возможность вычислять характеристики баллистических образцов с любыми типами примесей, в том числе при наличии внешнего магнитного поля. Это также позволяет определить полную функцию

распределения коэффициентов прохождения и тем самым вычислить любые транспортные параметры, включая кондактанс и мощность дробового шума.

Разработанный в диссертации метод развернутых функций Грина позволяет с беспрецедентной эффективностью рассчитывать любые транспортные характеристики неупорядоченных металлов. Этот метод может быть непосредственно обобщен для описания металлов с произвольным спектром и допускает включение любых типов примесей. Единственной характеристикой примеси, необходимой для применения метода, является ее T -матрица, которую можно в простейших случаях найти аналитически из решения стандартной задачи рассеяния. Для примесей сложной структуры и с сильными внутренними корреляциями возможно применение современных численных методов квантовой химии. Их результаты могут определить исходные параметры для применения метода развернутых функций Грина. Тем самым можно совместить аккуратный учет квантовых эффектов на микроскопическом уровне с вычислением характеристик макроскопических образцов, включающих большое количество примесей.

Построенная в диссертации теория локализации в двумерных киральных металлах на основе динамики вихрей в сигма-модели впервые объяснила наблюдаемые в таких системах переходы в состояние изолятора. Она также может быть применена для изучения локализации в двумерных образцах симплектической симметрии с достаточно сильным беспорядком. Это, в свою очередь, позволяет определить особенности критического состояния в переходе квантового спин-Холл эффекта и на поверхности трехмерных топологических изоляторов.

Развитая в диссертации теория локализации в киральных металлах с вакансиями объясняет наблюдаемые в таких системах необычные критические свойства. Она позволяет одновременно учитывать эффекты классических флуктуаций и квантовой интерференции. Подобная ситуация возникает в моделях любой пространственной размерности с киральной симметрией, а также в сверхпроводниках с нарушенной спиновой симметрией. В последнем случае мезоскопические флуктуации примесей тесно связаны с локализованными майорановскими состояниями и представляют непосредственный интерес для возможного применения таких материалов в реализации квантовых вычислений.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в четырнадцати научных статьях в ведущих международных журналах. **Список работ** приведен в конце диссертации.

По своей **структуре** диссертация состоит из введения, шести глав, двух приложений, заключения и списка литературы.

В настоящем **введении** изложено современное состояние физики графена, неупорядоченных металлов и топологических изоляторов, обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, и перечислены основные результаты, охарактеризована новизна и практическая ценность развитых методов, а также раскрыто содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена построению модели беспорядка в графене и объяснению спектральных и транспортных свойств неупорядоченных образцов вдали от дираковской точки. В основу классификации возможных типов примесей положена полная группа симметрии дираковского гамильтониана. Избирательное нарушение примесями различных симметрий

позволяет полностью перечислить все возможные типы беспорядка в графене. Эффекты беспорядка описываются в рамках двух специально разработанных методов.

Для случая слабых гауссовых примесей применяется стандартный для теории металлов метод самосогласованного борновского приближения. Однако оказывается, что в случае дираковского спектра графена этот метод обладает рядом недостатков и может использоваться лишь для качественного описания наблюдаемых явлений. Проанализированы возможные поправки, уточняющие результаты самосогласованного борновского приближения. Также построена полноценная теория слабого беспорядка на основе логарифмической перенормировки силы беспорядка. Выведены уравнения ренорм-группы с учетом всех возможных типов симметрии примесей. Получена зависимость квазиклассической плотности состояний и проводимости в зависимости от концентрации носителей.

В пределе сильных (унитарных) потенциальных примесей разработан метод самосогласованной T -матрицы. На его основе также вычислена зависимость плотности состояний и проводимости от концентрации носителей. Как оказалось, результаты вычисления в этой модели, в частности практически линейный рост проводимости с концентрацией, гораздо ближе к экспериментально наблюдаемым свойствам графена. Построена эффективная фазовая диаграмма для объяснения пределов сильного и слабого беспорядка и кроссовера между ними. Также изучены эффекты кулоновских (заряженных) примесей и показано, что они наилучшим образом описывают экспериментально измеренные характеристики вдали от дираковской точки.

Во **второй главе** изучаются транспортные свойства графена со слабым беспорядком вблизи дираковской точки. Показано, что при наличии киральной симметрии беспорядок не приводит к локализации и минимальная проводимость графена принимает универсальное значение $4e^2/\pi\hbar$. Различаются два типа киральной симметрии, условно обозначаемые C_0 и C_z . Первый из этих типов симметрии непосредственно соответствует структуре двух подрешеток шестиугольной решетки графена. Второй тип киральной симметрии C_z отличается тем, что индексы подрешеток имеют противоположный смысл в двух долинах. Получено строгое доказательство того, что минимальная проводимость графена принимает значение $4e^2/\pi\hbar$ с учетом всех возможных диаграмм в случае C_z киральности. Любые поправки к этому значению экспоненциально малы по силе беспорядка и не могут быть найдены по теории возмущений. В случае C_0 киральности показано, что беспорядок может давать пертурбативные поправки к минимальной проводимости начиная с квадратичного порядка. При этом также доказано что ряд таких поправок сходится, а значит истинное значение минимальной проводимости по-прежнему близко к $4e^2/\pi\hbar$.

В случае беспорядка, не перемешивающего долины, выведена эффективная сигма-модель и показано, что особенности дираковского гамильтониана приводят к появлению особого топологического члена. Этот член принимает значения из гомотопической группы π_2 многообразия сигма-модели. В случае нарушенной симметрии по обращению времени получается сигма-модель унитарного класса с топологическим членом типа Праускена [76] и с коэффициентом $\theta = \pi/2$. Это приводит к тому, что графен оказывается в критическом состоянии, характерном для перехода квантового эффекта Холла, без всякого магнитного

поля. Когда симметрия по обращению времени не нарушена, получается сигма-модель симплектического класса, в действии которой также присутствует топологический член типа \mathbb{Z}_2 . Вывод сигма-модели с топологическим членом такого вида проделан впервые. Также доказано, что наличие этого члена предотвращает локализацию при сколь угодно сильном беспорядке.

Особый вклад $\theta = \pi/2$ в коэффициент перед топологическим членом также сохраняется и при наличии внешнего магнитного поля. Это приводит к сдвигу на $1/2$ положений плато квантового эффекта Холла в графене с неперемешанными долинами и тем самым объясняет нечетное квантование холловской проводимости. Показано, что добавление даже слабого перемешивания долин приводит к возникновению также и четных плато, ширина которых, однако, может быть параметрически меньше, чем у четных. Кроме того показано, что в случае кирального беспорядка нулевой уровень Ландау остается вырожденным. При этом зависимость холловской проводимости от концентрации носителей имеет классический линейный характер в области заполнения этого уровня.

Третья глава посвящена изучению полной статистики переноса заряда в двухконтактном баллистическом образце графена. Получена полная функция распределения коэффициентов прохождения в чистом графене при произвольной энергии и подробно проанализированы ее асимптотики на больших и малых энергиях. Оказывается, что на нулевой энергии (в дираковской точке), эта функция распределения по форме в точности воспроизводит распределение Дорохова [104], характерное для неупорядоченных металлических проволок. Такое совпадение свойств чистого графена и грязного металла кажется случайным. Тем не менее поведение чистого графена в дираковской точке принято называть псевдодиффузным.

Также изучен металлический эффект близости — модификация плотности состояний в графене вблизи контакта с нормальным металлом. Найдено явное выражение для плотности состояний как универсальной функции параметра Ex , составленного из энергии E , отсчитанной от дираковской точки, и расстояния x до границы с металлом. На малых расстояниях плотность состояний растет обратно пропорционально x . На больших расстояниях найдены слабые фриделевские осцилляции на фоне средней плотности состояний в графене для заданной энергии E .

В явном виде получена матричная функция Грина с источниками для графена в дираковской точке. С помощью этой функции изучен баллистический транспорт в графене и найдены поправки к функции распределения прозрачностей в первом и втором порядке по силе беспорядка любой симметрии. Также продемонстрировано проявление баллистической перенормировки в функции распределения прозрачностей. Показано, весьма неожиданно, что во втором порядке слабый беспорядок приводит к относительному ослаблению дробового шума в графене. Также изучен диффузный предел и найдена полная функция распределения прозрачностей в случае слабого потенциального беспорядка. Для этого выведена нелинейная сигма-модель с источниками и вычислены квазиклассический вклад и ведущие квантовые поправки. Как и в баллистическом пределе, эффекты слабой локализации приводят к относительному подавлению дробового шума. Проведено сравнение аналитических предсказаний с численными результатами других авторов. Показано, что поведение функции распределения в диффузном пределе универсально, включая поправки слабой локализации. В то же время

в баллистическом режиме результат существенно зависит от коррелятора беспорядка, как и предсказывает построенная теория.

В **четвертой главе** при помощи выведенной ранее матричной функции Грина с источниками изучаются транспортные свойства графена с сильными примесями. Показано, что потенциальные примеси в пределах одной долины приводят к сильному эффекту в проводимости. Единственная сильная примесь может изменить кондактанс макроскопического образца графена на величину порядка e^2/h . Найдены точные формулы для кондактанса и шума в образце с одной и двумя примесями в зависимости от их расположения, а также с учетом рассеяния на примеси в s - и p -каналах. Продемонстрировано согласие аналитической формулы с результатами численного моделирования на основе дираковского гамильтониана, выполненного другими авторами. Получено вириальное разложение проводимости и фактора Фано по степеням концентрации примесей.

При большой концентрации резонансных примесей проводимость графена становится диффузной. В таком пределе система оказывается в сверхпроводящем классе симметрии DIII, для которого характерна антилокализация. На основе точной формулы, выражающей кондактанс как функцию координат всех примесей в виде следа от произведения матриц, разработан чрезвычайно эффективный алгоритм развернутых функций Грина. Этот алгоритм позволяет моделировать транспортные свойства графена в диффузном режиме, полностью учитывая эффекты квантовой интерференции. Численно продемонстрирован кроссовер из баллистического в диффузный режим и воспроизведены поправки слабой антилокализации с двухпетлевой точностью.

Изучены свойства графена с вакансиями, для чего на микроскопическом уровне выведена соответствующая T -матрица. Оказывается, что благодаря блоховским осцилляциям вакансии нужно классифицировать не по двум, а по шести подрешеткам шестиугольной решетки. Разработана соответствующая цветовая схема для вакансий. Метод развернутых функций Грина также обобщен для описания транспорта в графене с вакансиями. Как и в случае резонансных потенциальных примесей, проанализирована аналитическая формула для случая двух вакансий. Продемонстрировано согласие аналитических предсказаний с численными результатами, полученными другими авторами микроскопическим методом рекурсивных функций Грина на шестиугольной решетке. На основе метода развернутых функций Грина проведено аккуратное численное моделирование транспортных свойств в зависимости от распределения вакансий по шести подрешеткам. Показано существование неустойчивой критической точки, характеризующейся определенным значением кондактанса, в случае когда все вакансии помещены в одну подрешетку. Также изучено скейлинговое поведение вблизи этой точки по мере добавления вакансий из другой подрешетки и найден соответствующий критический индекс.

Рассмотрено поведение графена в диффузном режиме с сильными примесями при наличии внешнего магнитного поля. Выражение для матричной функции Грина с источниками обобщено для этого случая. Показано, что магнитное поле приводит к эффективной калибровке T -матриц примесей. При помощи метода развернутых функций Грина продемонстрировано возможное поведение проводимости в зависимости от силы магнитного поля, амплитуды и

концентрации примесей различного типа. В частности, изучены режимы полной локализации и критическое состояние типа перехода квантового эффекта Холла. В последнем случае показано, что, в отличие от всех изучавшихся ранее систем, проводимость приближается к своему критическому значению снизу. Также обнаружен особый режим транспорта в очень сильных магнитных полях, когда количество квантов магнитного потока в образце превышает количество примесей. В таком случае проводимость оказывается по сути баллистической, а мезоскопические флуктуации кондактанса экспоненциально подавляются.

Численно и аналитически изучены транспортные свойства графена в случае, когда точечные примеси случайно размещены только в каждом третьем ряду шестиугольной решетки. Такое расположение соответствует узлам одного цвета по классификации, построенной ранее для вакансий. Оказывается, что в этом пределе проводимость имеет резко анизотропный и супердиффузный характер. Продольная проводимость растет пропорционально квадратному корню из длины образца, в то время как поперечная проводимость демонстрирует обычное диффузное поведение и от размера не зависит. Построена квазиклассическая теория для описания такого анизотропного супердиффузного режима на основе метода самосогласованной T -матрицы. Показано, что корневой рост проводимости происходит как вблизи дираковской точки, так и при высокой концентрации носителей. Также изучены квантовые поправки к анизотропной проводимости и показано, что они не влияют на качественное поведение системы.

Пятая глава посвящена общим вопросам локализации в двумерных киральных металлах. Ее результаты имеют более широкое применение и позволяют понять не только свойства неупорядоченного графена, но и других систем с аналогичной симметрией. На основе репличной нелинейной сигма-модели изучаются возможные механизмы локализации в неупорядоченном металле с киральной симметрией. Показано, что, благодаря наличию особой $U(1)$ степени свободы, в сигма-модели возможно возникновение сингулярных возбуждений типа вихрей. В отличие от обыкновенных вихрей в абелевой $U(1)$ теории, вихри в сигма-модели характеризуются также дополнительной степенью свободы, которая живет в соответствующем проективном пространстве. Выведены уравнения ренорм-группы для такой модели, которые, помимо обычной пертурбативной перенормировки, также учитывают возможные флуктуации с образованием диполей вихрь-антивихрь по аналогии с механизмом Березинского—Костерлица—Таулесса (БКТ) [105—108]. Из-за неабелевой структуры вихрей перенормировка сигма-модели оказывается более сложной, чем в стандартной теории БКТ. Показано, что механизм распаривания вихрей может приводить к фазовому переходу в сигма-модели, который соответствует локализационному переходу металл-изолятор. Причем, в отличие от БКТ, получается обычный переход второго рода, характеризующейся неустойчивой критической точкой в трехмерном пространстве параметров модели.

Также изучено возможное влияние топологических членов, которые возникают в сигма-модели для неупорядоченного дираковского гамильтониана, на вихри. Оказывается, что в моделях с топологическими членами вихри приобретают дополнительную внутреннюю степень свободы $U(1)$ или $O(1) = \mathbb{Z}_2$ типа. Благодаря усреднению по флуктуациям этой внутренней степени свободы, вклад вихрей в статистическую сумму в точности зануляется, если в действии сигма-модели есть дополнительный топологический член. Тем самым доказано,

что нетривиальная топология исходного гамильтониана делает механизм локализации на основе распаривания вихрей неэффективным. Как следствие неупорядоченные дираковские киральные металлы не испытывают локализации даже при сильном беспорядке.

В **шестой главе** рассматривается задача о плотности состояний в двумерном киральном металле с вакансиями. Из-за классических флуктуаций вакансий между двумя подрешетками возможно возникновение локального дисбаланса, который приводит к конечной плотности нулевых мод и открывает щель в плотности состояний. Такие классические флуктуации можно учесть в рамках нелинейной сигма-модели при помощи дополнительного релевантного (без градиентов) члена в действии. Этот член придает массу $U(1)$ степени свободы и эффективно понижает симметрию модели по аналогии с квантовой аномалией. В итоге пертурбативная перенормировка модели радикальным образом изменяется, что приводит к новому типу критического поведения в центре зоны. Показано, что при наличии вакансий корреляционная длина расходится $\propto |\ln E|^{1/2}$, а плотность состояний имеет сингулярность $\propto |E|^{-1} |\ln E|^{-3/2}$. Эти предсказания подтверждаются масштабными численными экспериментами для графена с вакансиями, выполненными другими авторами.

Рассмотрен также случай среднего дисбаланса, когда вакансии распределены по подрешеткам неравномерно во всем образце. В этом случае в средней плотности состояний возникает щель, а флуктуации распределения вакансий создают экспоненциально убывающий подщелевой «хвост». Для его описания выведены уравнения на специальную седловую точку действия (инстантон), которая нарушает репличную симметрию. Несмотря на то, что аналитическое решение этих уравнений не представляется возможным, получено точное выражение для действия инстантона, справедливое при любых энергиях. На его основе предсказан закон убывания плотности состояний внутри щели. Также показано, что на самых малых энергиях плотность состояний обращается в ноль по степенному закону с показателем, который пропорционален средней силе дисбаланса.

В двух **приложениях** описаны двухпетлевая баллистическая перенормировка слабого потенциального беспорядка в графене и изложены алгоритмы обращения матриц, используемые для эффективного вычисления транспортных свойств графена с сильными примесями методом развернутых функций Грина.

В диссертации используется система единиц, в которой постоянная Планка равна единице ($\hbar = 1$); она восстанавливается в явном виде только в окончательных результатах для проводимости. Также, начиная с третьей главы, полагается единицей фермиевская скорость в графене $v_0 = 1$.

Глава 1

Квазиклассическая теория электронного транспорта в графене

Графен демонстрирует уникальные транспортные свойства благодаря особой дираковской структуре гамильтониана, описывающего динамику электронов. Дираковский гамильтониан обладает многочисленными симметриями и приводит к линейному электронному спектру. В этой главе мы построим полную классификацию возможных типов беспорядка в графене, основанную на симметричном анализе. В рамках этой классификации будет развита квазиклассическая теория электронного транспорта. Такое приближение работает при достаточно большой концентрации носителей, когда графен обладает хорошо выраженной ферми-поверхностью. При этом большинство методов теории неупорядоченных металлов оказываются непосредственно применимыми и к графену, хотя из этого правила есть исключения, связанные с линейным характером спектра. В частности, мы покажем, что, в отличие от обычных металлов, динамика электронов в графене нетривиальна уже на очень коротких баллистических масштабах (меньше длины свободного пробега) и не может быть полностью описана в рамках борновского приближения. Мы построим альтернативную теорию, основанную на методе ренорм-группы, и подробно проанализируем полученные уравнения. Кроме того, будет рассмотрен случай сильных потенциальных примесей и выведены уравнения в приближении самосогласованной T -матрицы. Это позволит нам описать транспортные свойства графена в пределе унитарного беспорядка, а также при наличии кулоновских примесей.

1.1 Модель сильной связи для графена

1.1.1 Чистый предел

Атомы углерода в графене расположены в узлах шестиугольной решетки (см. рис. 1.1a) с периодом $a = 2.46 \text{ \AA}$. Из четырех валентных электронов углерода три образуют ковалентные сигма-связи с ближайшими соседями и не участвуют в электронном транспорте. Четвертый электрон гибридизуется с ближайшими соседями с помощью пи-связи и может

свободно перемещаться по кристаллу. Электронный спектр графена хорошо описывается моделью сильной связи [56] с учетом единственного свободного электрона на каждом узле и прыжков между ближайшими соседями. Первая зона Бриллюэна для шестиугольной решетки также имеет форму шестиугольника (см. рис. 1.1b) с расстоянием¹ $K = 4\pi/3a$ между центром и вершиной. Шестиугольная решетка содержит два узла в элементарной ячейке. Это позволяет сгруппировать все атомы в две подрешетки, обозначаемые А и В. Ближайшие соседи атома из подрешетки А принадлежат к подрешетке В и наоборот. Группа симметрии шестиугольной решетки содержит элемент, переставляющий подрешетки местами. Следовательно, для каждого значения квазиимпульса \mathbf{p} в зоне Бриллюэна, существуют две зоны с энергией $\pm\epsilon(\mathbf{p})$. Эти две ветви спектра вырождены в изолированных точках импульсного пространства в углах зоны Бриллюэна: $\epsilon(K) = 0$. С одним электроном на узле система обладает в точности половинным заполнением, когда вырожденные точки спектра (дираковские точки) лежат на уровне Ферми. Среди шести вершин шестиугольной зоны Бриллюэна только две физически различны; они соответствуют двум долинам спектра и обозначаются K и K' . Электроны с импульсом, близким к одной из этих двух точек, и, следовательно, с низкой энергией, определяют физические свойства графена.

Низкоэнергетический гамильтониан является матрицей 4×4 в пространстве АВ двух подрешеток и в пространстве долин $K-K'$. Мы выберем соответствующую 4-компонентную волновую функцию в представлении

$$\Psi = \{\phi_{AK}, \phi_{BK}, \phi_{BK'}, -\phi_{AK'}\}^T. \quad (1.1)$$

При этом эффективный гамильтониан принимает вид

$$H = v_0\tau_0\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}. \quad (1.2)$$

Здесь τ_0 является единичной матрицей в $K-K'$ пространстве и $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двухкомпонентный вектор матриц Паули в пространстве АВ. Скорость Ферми в графене составляет $v_0 \simeq 10^8$ см/с.

Вид гамильтониана (1.2) универсален и не опирается исключительно на приближение сильной связи. Вырождение спектра в точках K и K' обеспечивается двумерным представлением группы симметрии шестиугольной решетки, в то время как выражение (1.2) является первым (линейным) членом разложения в ряд по маленькому отклонению импульса от этих точек. По мере увеличения p становятся важны более высокие неуниверсальные члены этого разложения. Для наших целей будет достаточно ввести обрезание Δ на высокой энергии порядка ширины зоны и предположить, что спектр линеен в области не слишком больших импульсов $|\mathbf{p}| \lesssim \Delta/v_0$. Функция Грина для гамильтониана (1.2) чистого графена имеет вид

$$G_0^{R,A}(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{\epsilon + v_0\tau_0\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{(\epsilon \pm i0)^2 - v_0^2p^2}. \quad (1.3)$$

¹Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$.

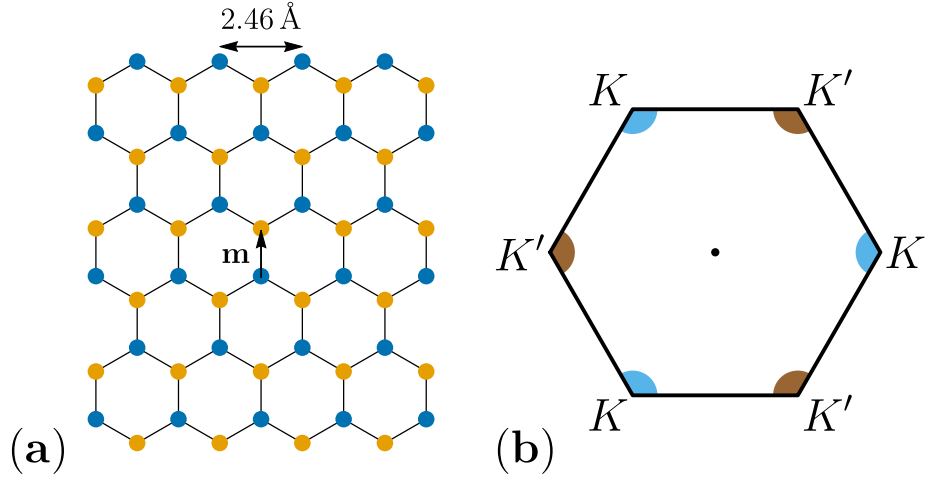


Рис. 1.1 — (а) Шестиугольная решетка атомов углерода в графене. Круги разного цвета соответствуют атомам подрешеток А и В. (б) Первая зона Бриллюэна графена. Точки вырождения спектра (дираковские точки) расположены в углах. Две неэквивалентные дираковские точки обозначены K и K' .

1.1.2 Потенциальный беспорядок

В этом разделе мы предложим упрощенную модель потенциального беспорядка. Такая модель содержит минимальное число параметров и хорошо работает для описания реально наблюдаемых свойств графена вдали от дираковской точки. В следующем разделе будет построена более полная модель, учитывающая все возможные типы беспорядка в дираковском гамильтониане. Наконец, в разделе 4.2.1 будет подробно изучен вопрос о беспорядке на микроскопическом уровне решеточной модели графена.

Рассмотрим примеси с потенциалом $U(\mathbf{r})$, действующим в ограниченных участках решетки [109]. Чтобы включить потенциал примесей в модель сильной связи, построенную в предыдущем разделе для чистой системы, введем два дискретных преобразования Фурье этой функции, соответствующие двум подрешеткам:

$$U_{\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \sum_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad U'_{\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \sum_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r} - \mathbf{m}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (1.4)$$

Здесь предполагается суммирование по всем элементарным ячейкам решетки, а вектор \mathbf{m} соединяет узлы А и В в одной и той же элементарной ячейке (см. рис. 1.1а). Величина $U_{\mathbf{q}}$ представляет амплитуду рассеяния для электронов из подрешетки, где находится примесь, в то время как $U'_{\mathbf{q}}$ — это амплитуда рассеяния для электронов из другой подрешетки.

Предположим, что $U_{\mathbf{q}}$ и $U'_{\mathbf{q}}$ являются медленными функциями импульса \mathbf{q} , и удержим только два значения этих амплитуд для внутридолинных (U_0 и U'_0) и междолинных (U_K и U'_K) переходов. Шестиугольная симметрия решетки приводит к занулению амплитуды U'_K , в то время как три другие амплитуды оказываются вещественными. Таким образом мы описали потенциал примеси тремя параметрами. Давайте составим из них матрицы в четырехмерном представлении (1.1). Если центр примеси находится в узле \mathbf{r}_i подрешетки А, она добавляет

к дираковскому гамильтониану матрицу

$$V_{\mathbf{q}}^A(\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} U_0 & 0 & 0 & -U_K e^{-2i\mathbf{K}\mathbf{r}_i} \\ 0 & U'_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U'_0 & 0 \\ -U_K e^{2i\mathbf{K}\mathbf{r}_i} & 0 & 0 & U_0 \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_i}. \quad (1.5)$$

Здесь вектор \mathbf{q} соответствует переданному импульсу при рассеянии электрона на примеси. Для примесей, расположенных в подрешетке В, соответствующая матрица имеет вид

$$V_{\mathbf{q}}^B(\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} U'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_0 & U_K e^{-2i\mathbf{K}\mathbf{r}_i} & 0 \\ 0 & U_K e^{2i\mathbf{K}\mathbf{r}_i} & U_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U'_0 \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_i}. \quad (1.6)$$

В случае слабого потенциального беспорядка можно пользоваться гауссовым приближением, в котором единственным существенным параметром является автокорреляционная функция второго порядка $\langle V_{\mathbf{q}} \otimes V_{-\mathbf{q}} \rangle$. Мы обозначим концентрацию примесей n_{imp} и после усреднения по положениям примесей получим

$$\begin{aligned} \langle V_{\mathbf{q}} \otimes V_{-\mathbf{q}} \rangle &= \frac{n_{\text{imp}}}{2} \langle V_{\mathbf{q}}^A(\mathbf{r}_i) \otimes V_{-\mathbf{q}}^A(\mathbf{r}_i) + V_{\mathbf{q}}^B(\mathbf{r}_i) \otimes V_{-\mathbf{q}}^B(\mathbf{r}_i) \rangle \\ &= 2\pi v_0^2 \left\{ \alpha_0 \sigma_0 \tau_0 \otimes \sigma_0 \tau_0 + \gamma_z \sigma_z \tau_z \otimes \sigma_z \tau_z + \frac{\beta_{\perp}}{4} [\sigma_x \tau_x \otimes \sigma_x \tau_x + \sigma_x \tau_y \otimes \sigma_x \tau_y + \sigma_y \tau_x \otimes \sigma_y \tau_x + \sigma_y \tau_y \otimes \sigma_y \tau_y] \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь мы ввели три безразмерных параметра

$$\alpha_0 = \frac{n_{\text{imp}}}{8\pi v_0^2} (U_0 + U'_0)^2, \quad \gamma_z = \frac{n_{\text{imp}}}{8\pi v_0^2} (U_0 - U'_0)^2, \quad \beta_{\perp} = \frac{n_{\text{imp}}}{4\pi v_0^2} U_K^2. \quad (1.8)$$

Обозначения в (1.8) могут показаться странными на данном этапе; они будут объяснены позже, когда мы рассмотрим беспорядок более общего вида. Для дальнейшего упрощения вычислений сосредоточимся на двух предельных случаях потенциальных примесей короткого и длинного радиуса [109].

- Примеси короткого радиуса рассеивают в основном электроны в той же подрешетке, где находятся сами². В этом пределе $U_0 = U_K = U/2$ и $U'_0 = 0$. Таким образом остается единственный параметр силы примеси U , а величины в (1.8) подчиняются соотношениям $\alpha_0 = \gamma_z = \beta_{\perp}/2$.
- Примеси длинного радиуса рассеивают электроны в обеих подрешетках одинаково, но только в пределах одной долины. Длина рассеяния велика по сравнению с периодом решетки, но по-прежнему меньше фермиевской длины волны. В этом пределе $U_0 = U'_0 = U$ и $U_K = 0$. Как и в случае примесей короткого радиуса, остается единственный параметр U , а из величин (1.8) только α_0 отлична от нуля.

²Более аккуратное описание такого типа примесей будет выведено в главе 4.

1.1.3 Симметрии и беспорядок общего вида

Теперь давайте проанализируем полный набор симметрий гамильтониана чистого графа (1.2). Во-первых, система обладает однородностью и изотропностью. Любой беспорядок, рассматриваемый в диссертации, сохраняет эти симметрии в среднем³, поэтому мы не будем уделять им особого внимания. Во-вторых, гамильтониан обладает полной группой симметрии $SU(2)$ в пространстве долин. Эта группа генерируется матрицами Паули $\tau_{x,y,z}$, которые коммутируют с гамильтонианом. Мы будем называть соответствующую степень свободы изоспином [36]. Существует и другой набор матриц Паули $\sigma_{x,y,z}$, действующих в пространстве подрешеток. Эти операторы также генерируют группу $SU(2)$, которую мы будем называть псевдоспином. Они не коммутируют с гамильтонианом (1.2), однако любой из генераторов $\sigma_{x,y,z}$ коммутируется с любым из $\tau_{x,y,z}$.

В-третьих, антиунитарное преобразование обращения времени (T_0) в представлении (1.1) имеет вид

$$T_0 : A \mapsto \sigma_y \tau_y A^* \sigma_y \tau_y. \quad (1.9)$$

Гамильтониан (1.2) инвариантен относительно этого преобразования. Комбинируя T_0 с любой из $\tau_{x,y,z}$, мы генерируем три дополнительных антиунитарных симметрии

$$T_x : A \mapsto \sigma_y \tau_z A^* \sigma_y \tau_z, \quad T_y : A \mapsto \sigma_y \tau_0 A^* \sigma_y \tau_0, \quad T_z : A \mapsto \sigma_y \tau_x A^* \sigma_y \tau_x. \quad (1.10)$$

Обратим внимание, что $T_0^2 = 1$, в то время как $T_{x,y,z}^2 = -1$. Таким образом симметрия T_0 соответствует ортогональному типу, а три другие T -инвариантности — симплектическому. Наконец, гамильтониан графа обладает особой киральной симметрией C_0 и тремя производными от нее, порожденными одновременным применением C_0 и $\tau_{x,y,z}$:

$$\begin{aligned} C_0 : A &\mapsto -\sigma_z \tau_z A \sigma_z \tau_z, & C_x : A &\mapsto -\sigma_z \tau_y A \sigma_z \tau_y, \\ C_y : A &\mapsto -\sigma_z \tau_x A \sigma_z \tau_x, & C_z : A &\mapsto -\sigma_z \tau_0 A \sigma_z \tau_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Как правило, киральная симметрия подразумевает, что гамильтониан принимает блочно антидиагональный вид в определенном базисе. Беспорядок, сохраняющий симметрию C_0 , может иметь только антидиагональные матричные элементы в пространстве подрешеток АВ. Приведем несколько примеров киральных беспорядков.

- Случайные амплитуды прыжков между ближайшими соседями из-за искривлений решетки (C_0 симметрия).
- Случайное магнитное поле (все четыре симметрии $C_{0,x,y,z}$).
- Дислокации. Они эквивалентны случайному неабелеву калибровочному полю, имеющему нетривиальную структуру в пространстве долин [27; 110–113] (C_z).

³Единственное исключение из этого правила — особый вид анизотропного беспорядка — встречается в разделе 4.4.

Таблица 1 — Симметрии различных типов беспорядка в графене. В первом столбце указана матричная структура оператора примеси. Второй столбец содержит обозначение для константы безразмерной силы беспорядка в гауссовой модели. Остальные столбцы показывают сохранение (+) или нарушение (−) соответствующей симметрии.

Оператор	Сила	τ_{\perp}	τ_z	T_0	T_{\perp}	T_z	C_0	C_{\perp}	C_z	CT_0	CT_{\perp}	CT_z
$\sigma_0\tau_0$	α_0	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−
$\sigma_{\perp}\tau_{\perp}$	β_{\perp}	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+
$\sigma_{\perp}\tau_z$	γ_{\perp}	−	+	+	−	+	+	−	+	+	−	+
$\sigma_z\tau_{\perp}$	β_z	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−
$\sigma_z\tau_z$	γ_z	−	+	+	−	+	−	+	−	−	+	−
$\sigma_0\tau_{\perp}$	β_0	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	+
$\sigma_0\tau_z$	γ_0	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+
$\sigma_{\perp}\tau_0$	α_{\perp}	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−
$\sigma_z\tau_0$	α_z	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+

- Бесконечно сильные примеси (C_0). При таком беспорядке электрон не может попасть на узлы, занятые примесью, что эквивалентно разрыву связей между этими узлами и остальной решеткой. Подробно этот вид беспорядка рассмотрен в разделе 4.2.

Любой потенциальный беспорядок, кроме последнего экстремального случая, нарушает все киральные симметрии. Они также нарушаются ненулевым химическим потенциалом, поэтому влияние киральной симметрии беспорядка будет особенно важно в дираковской точке.

Наконец, возможна еще комбинация C и T , которую мы будем обозначать CT . Такой тип симметрии всегда есть у гамильтониана Боголюбова—де Жена, поэтому ее часто называют сверхпроводящей. В графене эта симметрия также встречается в четырех вариантах:

$$\begin{aligned}
 CT_0 : A &\mapsto -\sigma_x\tau_x A^* \sigma_x\tau_x, & CT_x : A &\mapsto -\sigma_x\tau_0 A^* \sigma_x\tau_0, \\
 CT_y : A &\mapsto -\sigma_x\tau_z A^* \sigma_x\tau_z, & CT_z : A &\mapsto -\sigma_x\tau_y A^* \sigma_x\tau_y.
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Несмотря на то, что графен не обладает никакой сверхпроводимостью, определенные виды беспорядка (например, резонансные потенциальные примеси, см. раздел 4.1) могут приводить к гамильтониану сверхпроводящего класса.

В среднем изотропный беспорядок подразумевает, что симметрии τ_x и τ_y сохраняются или нарушаются одновременно. Ниже мы будем использовать для них единое обозначение τ_{\perp} и аналогично T_{\perp} , C_{\perp} и CT_{\perp} для остальных симметрий. В таблице 1 мы перечислили все возможные матричные структуры в представлении (1.1) вместе с их симметриями. С учетом изотропности существует всего девять типов беспорядка.

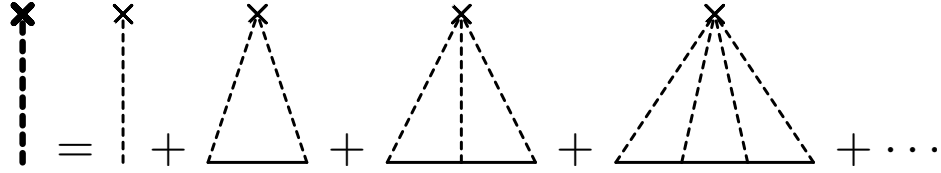


Рис. 1.2 — Диаграммное представление T -матрицы, описывающей полную амплитуду рассеяния электрона на примеси.

1.2 Приближение самосогласованной T -матрицы

В этом разделе мы выведем зависимость проводимости графена от концентрации носителей вдали от дираковской точки, предполагая, что радиус ферми-поверхностей в долинах K и K' велик по сравнению с обратной длиной свободного пробега. В таком режиме графен обладает хорошей металлической проводимостью [109], большой по сравнению с квантовым значением e^2/h . Благодаря этому можно пренебречь поправками слабой локализации (предполагая реалистичные температуру и размер образца). В качестве отправной точки мы будем использовать приближение самосогласованной T -матрицы [95–97; 99–103], учитывающее рассеяние на отдельной примеси во всех порядках. Это позволит нам в дальнейшем описать как предел слабых (борновских), так и сильных (унитарных) примесей, а также всю область кроссовера между ними.

Рассмотрим беспорядок, созданный случайно расположенными потенциальными примесями, действующими согласно уравнениям (1.5) и (1.6). Поскольку сила таких примесей может быть произвольной, их нужно описывать полной T -матрицей, которая представляет собой сумму диаграмм на рис. 1.2. Каждая штриховая линия соответствует оператору (1.5) или (1.6) в зависимости от того, в какой подрешетке находится центр примеси. Суммируя этот ряд и усредняя T -матрицу по положению примеси \mathbf{r}_i , мы получаем

$$\langle T(\epsilon) \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{2U'_0}{1 - U'_0 g} + \frac{U_0 + U_K}{1 - (U_0 + U_K)g} + \frac{U_0 - U_K}{1 - (U_0 - U_K)g} \right], \quad (1.13)$$

где g обозначает функцию Грина в совпадающих точках

$$g(\epsilon) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} G(\epsilon, \mathbf{p}). \quad (1.14)$$

Такая функция Грина имеет тривиальную матричную структуру из-за интегрирования по углам. В результате и средняя T -матрица сводится просто к числу.

Квазиклассическое приближение состоит в пренебрежении интерференцией при рассеянии на разных примесях. Поэтому мы можем напрямую связать собственную энергию электрона при наличии беспорядка со средним значением T -матрицы (1.13) и полной концентрацией примесей n_{imp} :

$$\Sigma(\epsilon) = n_{\text{imp}} \langle T(\epsilon) \rangle, \quad (1.15)$$

Подставляя эту собственную энергию обратно в функцию Грина (1.3), мы получим

$$G(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{\epsilon - \Sigma(\epsilon) + v_0 \tau_z \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{[\epsilon - \Sigma(\epsilon)]^2 - v_0^2 k^2}. \quad (1.16)$$

После вычисления интеграла по импульсу в (1.14), приходим к

$$g(\epsilon) = -\frac{\epsilon - \Sigma(\epsilon)}{4\pi v_0^2} \ln \frac{-\Delta^2}{[\epsilon - \Sigma(\epsilon)]^2}. \quad (1.17)$$

Здесь логарифмическая расходимость обрезана на максимальном значении импульса Δ/v_0 . Знак мнимой части $g(\epsilon)$, а следовательно и собственной энергии, определяется типом функции Грина (запаздывающей или опережающей).

Уравнения (1.13), (1.15) и (1.17) образуют замкнутую систему, которая определяет собственную энергию $\Sigma(\epsilon)$. В этих уравнениях учитываются все диаграммы с непересекающимися примесными линиями. Такой подход называется приближением самосогласованной T -матрицы. В двух предельных случаях короткого и длинного радиуса примесей уравнение самосогласования принимает вид

$$\Sigma(\epsilon) = \frac{n_{\text{imp}} U}{1 - U g(\epsilon)} \times \begin{cases} 1, & \text{длинные,} \\ 1/4, & \text{короткие.} \end{cases} \quad (1.18)$$

Решение этого уравнения позволяет найти квазиклассические плотность состояний и проводимость системы. Плотность состояний (на одну компоненту спина) определяется непосредственно функцией Грина в совпадающих точках:

$$\rho(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im Tr} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} G^R(\epsilon, \mathbf{p}) = -\frac{4}{\pi} \text{Im } g^R(\epsilon). \quad (1.19)$$

Проводимость на нулевой частоте можно вычислить по формуле Кубо

$$\sigma^{\alpha\beta}(\epsilon) = \frac{2}{\pi} \int d^2(r - r') \text{Tr} \langle j^\alpha \text{Im } G^R(\epsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}') j^\beta \text{Im } G^R(\epsilon; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle. \quad (1.20)$$

Из-за линейной зависимости гамильтониана от \mathbf{p} , оператор тока в формуле Кубо не зависит от импульса:

$$\mathbf{j} = e \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = e v_0 \tau_0 \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.21)$$

Поэтому диамагнитный член в выражении для проводимости не возникает.

Уравнение (1.20) включает средние вида $\langle j G^R j G^A \rangle$, а также $\langle j G^R j G^R \rangle$ и $\langle j G^A j G^A \rangle$. Первая из этих величин велика в металлическом режиме, когда энергия Ферми ϵ находится далеко от дираковской точки. Два других вклада оказываются порядка кванта проводимости e^2/h на всех энергиях, поэтому их имеет смысл сохранять только вблизи дираковской точки (где квазиклассическое приближение, строго говоря, не работает).

Мы будем использовать приближение Друде для проводимости, пренебрегая поправками слабой локализации. Это эквивалентно суммированию диаграмм, показанных на рис. 1.3.

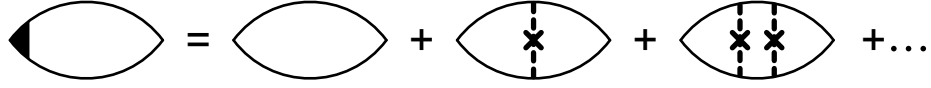


Рис. 1.3 — Диаграммы для квазиклассической проводимости с вершинной поправкой.

Из-за векторной природы оператора тока в вершине вклад дают только диагональные части функций Грина, поэтому проводимость можно выразить через интеграл

$$\Pi^{RA}(\epsilon) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \text{diag } G^R(\epsilon, \mathbf{p}) \text{diag } G^A(\epsilon, \mathbf{p}). \quad (1.22)$$

Сумма лестничных диаграмм на рис. 1.3 определяет вершинную поправку. Мы будем использовать специальное обозначение \mathcal{V} для коэффициента этой поправки. Для примесей короткого радиуса получается $\mathcal{V} = 1$. В противоположном случае большого радиуса примесей суммирование лестничных диаграмм дает

$$\mathcal{V} = \frac{1}{1 - \frac{n_{\text{imp}} U^2}{|1 - Ug|^2} \Pi^{RA}}. \quad (1.23)$$

Результирующая проводимость имеет вид⁴

$$\sigma(\epsilon) = \frac{8e^2}{h} v_0^2 \mathcal{V} \Pi^{RA}. \quad (1.24)$$

В следующих разделах мы будем решать уравнения самосогласования и находить плотность состояний и проводимость в различных пределах. Мы также проанализируем поправки к приближению самосогласованной T -матрицы от диаграмм с пересекающимися примесными линиями.

1.3 Слабый беспорядок

1.3.1 Самосогласованное борновское приближение

Рассмотрим сначала случай относительно слабых примесей, когда вместо полной T -матрицы можно ограничиться ее разложением по степеням U до второго порядка. При этом линейный член по U дает несущественный сдвиг энергии Ферми, поэтому мы не будем его учитывать. Квадратичный член в разложении T -матрицы соответствует борновскому приближению.

В этом пределе можно вывести более общие уравнения самосогласования для беспорядка произвольного вида (не только потенциального). Предположим, что существуют слабые

⁴В этой формуле мы восстановили размерный коэффициент, содержащий постоянную Планка. Будем делать так же и в дальнейшем во всех результатах для проводимости.

примеси с любой операторной структурой из таблицы 1. В борновском приближении T -матрицы таких примесей сводятся к второму слагаемому на рис. 1.2, причем на обоих концах штриховой линии стоит один и тот же оператор. Будем обозначать амплитуды такого типа беспорядка символами из той же таблицы 1. В частности, в модели потенциальных примесей из раздела 1.1.2 возникает три такие амплитуды, см. (1.8). При наличии примесей произвольной структуры собственная энергия определяется выражением

$$\Sigma(\epsilon) = 2\pi v_0^2 \alpha g(\epsilon), \quad (1.25)$$

где α — полная амплитуда беспорядка, то есть простая сумма всех амплитуд:

$$\alpha = \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp} + \gamma_{\perp} + \alpha_z + \beta_z + \gamma_z. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.25) и (1.17) образуют замкнутую систему, которая определяет собственную энергию в рамках самосогласованного борновского приближения [109; 114–118]. В этом приближении можно вычислить плотность состояний по формуле (1.19), непосредственно подставив в нее $g(\epsilon)$ из (1.25). Это значит, что простая сумма всех амплитуд (1.26) уже содержит достаточную информацию для вычисления термодинамических характеристик (но только в квазиклассическом пределе). Проводимость (и другие транспортные величины) содержат также вершинную поправку, которая в случае произвольного слабого беспорядка принимает вид

$$\mathcal{V} = \frac{1}{1 - 4\pi v_0^2 (\alpha - \alpha_{\text{tr}}) \Pi^{RA}}. \quad (1.27)$$

В этой формуле возникает другая, транспортная комбинация амплитуд беспорядка

$$\alpha_{\text{tr}} = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp} + \gamma_{\perp} + \frac{3}{2}(\alpha_z + \beta_z + \gamma_z). \quad (1.28)$$

Для слабых потенциальных примесей длинного и короткого радиуса, рассмотренных в разделе 1.1.2, эти выражения, согласно формуле (1.8), сводятся к

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\alpha_{\text{tr}} = \frac{n_{\text{imp}} U^2}{2\pi v_0^2}, & \text{длинные,} \\ \alpha &= \alpha_{\text{tr}} = \frac{n_{\text{imp}} U^2}{8\pi v_0^2}, & \text{короткие.} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Исключая $g(\epsilon)$ из (1.25) и (1.17), мы получаем замкнутое уравнение самосогласованного борновского приближения для собственной энергии

$$\Sigma(\epsilon) = -\frac{\alpha}{2} [\epsilon - \Sigma(\epsilon)] \ln \frac{-\Delta^2}{[\epsilon - \Sigma(\epsilon)]^2}. \quad (1.30)$$

Это уравнение было изучено численно Шоном и Андо [109]. Мы же представим аналитическое решение в пределе больших и малых энергий.

Характерный масштаб энергий в (1.30) оказывается экспоненциально малым по α ,

$$\gamma_0 = \Delta e^{-1/\alpha}. \quad (1.31)$$

При больших энергиях, $\epsilon \gg \gamma_0$, мы можем решить уравнение (1.30) итерациями⁵, а для низких энергий решение находится в виде ряда по степеням ϵ . При этом получается собственная энергия следующего вида⁶ (здесь верхний/нижний знак соответствует запаздывающей/опережающей функции):

$$\Sigma(\epsilon) = \begin{cases} \mp i\gamma_0 - \frac{\epsilon}{\alpha}, & \epsilon \ll \gamma_0, \\ -\alpha \ln \frac{\Delta}{\epsilon} \mp \frac{i\pi\alpha\epsilon}{2} \left(1 + 2\alpha \ln \frac{\Delta}{\epsilon}\right), & \epsilon \gg \gamma_0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Плотность состояний получается непосредственно из этого решения по формулам (1.25) и (1.19):

$$\rho_{\text{SCBA}}(\epsilon) = \frac{2|\text{Im} \Sigma(\epsilon)|}{\pi^2 v_0^2 \alpha} = \begin{cases} \frac{2\gamma_0}{\pi^2 v_0^2 \alpha}, & \epsilon \ll \gamma_0, \\ \frac{\epsilon}{\pi v_0^2} \left(1 + 2\alpha \ln \frac{\Delta}{\epsilon}\right), & \epsilon \gg \gamma_0. \end{cases} \quad (1.33)$$

При высоких энергиях найденная плотность состояний близка к своему значению в чистом графене, $\rho_0(\epsilon) = \epsilon/\pi v_0^2$, с точностью до логарифмических поправок. Вблизи дираковской точки получается конечная плотность состояний.

Чтобы найти проводимость в рамках самосогласованного борновского приближения, вычислим сначала поляризационный оператор (1.22),

$$\Pi^{RA}(\epsilon) = \frac{1}{4\pi v_0^2 \alpha} \frac{\epsilon}{\epsilon - \text{Re} \Sigma(\epsilon)}. \quad (1.34)$$

С помощью уравнений (1.24) и (1.27) проводимость выражается в виде

$$\sigma_{\text{SCBA}}(\epsilon) = \frac{2e^2}{\pi h} \left[\frac{\epsilon}{\alpha_{\text{tr}} \epsilon - \alpha \text{Re} \Sigma(\epsilon)} + 1 \right]. \quad (1.35)$$

Здесь первый член происходит от вклада $\langle jG^R jG^A \rangle$, а члены $\langle jG^R jG^R \rangle$ и $\langle jG^A jG^A \rangle$ дают второе слагаемое (единицу) в квадратных скобках в (1.35). При высоких энергиях $\epsilon \gg \gamma_0$ первый член оказывается доминирующим и принимает вид

$$\sigma_{\text{SCBA}}(\epsilon) \simeq \frac{2e^2}{\pi h \alpha_{\text{tr}}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_{\text{tr}}} \ln \frac{\Delta}{\epsilon}\right). \quad (1.36)$$

Найденный результат имеет логарифмическую зависимость от энергии выше экспоненциально малого масштаба γ_0 . В дираковской точке, $\epsilon \ll \gamma_0$, самосогласованное борновское приближение дает $\sigma_{\text{SCBA}} = 4e^2/\pi h$. Это значение также включает вклады $\langle jG^R jG^R \rangle$ и $\langle jG^A jG^A \rangle$, которые были отброшены при высоких энергиях. Значение проводимости порядка e^2/h , строго говоря, не имеет физического смысла, потому что локализационные поправки должны его существенно изменить. Мы подробно рассмотрим этот вопрос в следующих главах.

⁵Для упрощения формул будем предполагать $\epsilon > 0$. Все физические характеристики модели с гамильтонианом Дирака не зависят от знака энергии.

⁶Аккуратное решение уравнения (1.30) показывает, что кроссовер между низкими и высокими энергиями происходит при $\epsilon \sim \alpha\gamma_0 = \gamma_0/\ln(\Delta/\gamma_0)$. Для простоты мы будем пренебрегать логарифмическим фактором в выражении для точки кроссовера.

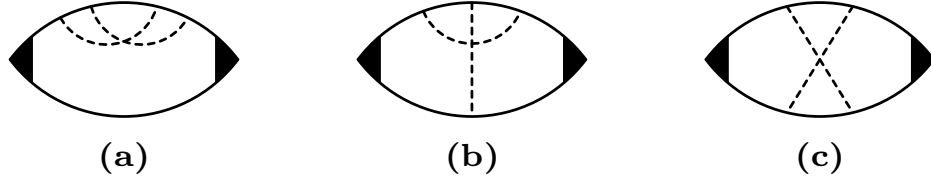


Рис. 1.4 — Диаграммы с пересекающимися примесными линиями, дающие логарифмические поправки к проводимости.

1.3.2 Логарифмические поправки и ренорм-группа

В рамках самосогласованного борновского приближения квазиклассическая проводимость (1.36) принимает значение $\propto \alpha_{\text{tr}}^{-1}$ с маленькими логарифмическими поправками. Однако существуют и другие вклады того же порядка, происходящие от диаграмм с пересекающимися примесными линиями (см. рис. 1.4) и не учтенные самосогласованным борновским приближением. Эффективным способом для суммирования логарифмических вкладов во всех порядках является метод ренорм-группы. В случае двумерных дираковских фермионов с различными типами беспорядка этот метод был развит Доценко и Доценко [119] (для модели Изинга со случайными связями), Людвигом, Фишером, Шанкараром и Гринштейном [120] (в контексте квантового эффекта Холла), Нерсесяном, Цвеликом и Венгером [91; 92], а также Боке, Сербаном и Цирнбауэром [121] (в применении к грязным d -волновым сверхпроводникам, см. также обзор Альтланда, Саймонса и Цирнбауэра [94]), а также Гурусвами, Леклером и Людвигом [122] (для модели с киральным беспорядком C_0 в наших обозначениях). Наконец, Алейнер и Ефетов [48] обсуждали подобную ренорм-группу для графена с ненарушенной симметрией по обращению времени (первые пять строчек в таблице 1).

Проанализируем ведущие логарифмические поправки и результаты ренорм-группы и сравним их с самосогласованным борновским приближением в простейшем случае диагонального беспорядка с единственным параметром $\alpha = 2\alpha_{\text{tr}} = \alpha_0$ (см. таблицу 1). Диаграммы, показанные на рис. 1.4, дают логарифмические поправки к проводимости, пропорциональные $\alpha_0 \ln(\Delta/\epsilon)$:

$$\delta\sigma = \frac{4e^2}{\pi h \alpha_0} \times \begin{cases} +2\alpha_0 \ln(\Delta/\epsilon), & \text{(a),} \\ -2\alpha_0 \ln(\Delta/\epsilon), & \text{(b).} \end{cases} \quad (1.37)$$

Вклад от диаграммы (с), которая потенциально того же порядка, зануляется после интегрирования по углам. Поскольку два вклада (1.37) сокращают друг друга, оказывается, что самосогласованное борновское приближение верно предсказывает ведущую логарифмическую поправку, включая численный коэффициент:

$$\sigma(\epsilon) = \frac{4e^2}{\pi h \alpha_0} \left[1 - 2\alpha_0 \ln \frac{\Delta}{\epsilon} + \dots \right]. \quad (1.38)$$

Однако это совпадение случайно. Если учесть амплитуды беспорядка, отличные от α_0 , диаграммы рис. 1.4 не сократятся и множитель перед ведущей логарифмической поправкой в самосогласованном борновском приближении в общем случае окажется неправильным.

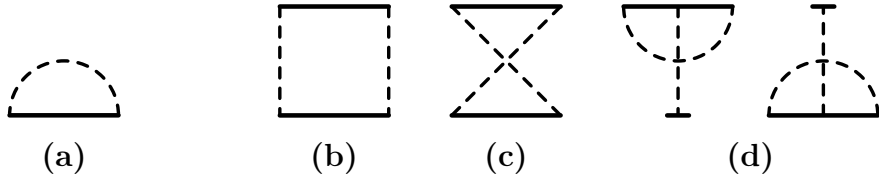


Рис. 1.5 — Однопетлевые диаграммы, перенормирующие (a) энергию и (b, c, d) силу беспорядка.

С понижением энергии учет логарифмической поправки первого порядка (1.38) становится недостаточным. Как уже говорилось, все логарифмические вклады в плотность состояний и проводимость можно просуммировать с помощью ренорм-группы. Представим сначала результаты в простейшем случае потенциального беспорядка большого радиуса (единственный параметр α_0), а затем приведем полные уравнения для произвольного беспорядка.

Для вывода ренорм-группы нужно рассмотреть действие дираковских электронов в графене, которое после усреднения по беспорядку имеет вид

$$S[\psi] = \int d^2r \left[-i\psi^\dagger (\epsilon + iv_0\tau_0\sigma\nabla)\psi + \pi v_0^2\alpha_0(\psi^\dagger\psi)^2 \right]. \quad (1.39)$$

Векторное поле ψ содержит 4 компоненты в соответствии со структурой гамильтониана (1.2). Для аккуратного усреднения по беспорядку нужно ввести еще дополнительную структуру в ψ , связанную с репликами или суперпространством бозонов—фермионов. Мы, однако, не будем это делать, а просто исключим все диаграммы с изолированными фермионными петлями из вычисления.

В процессе перенормировки энергия и сила беспорядка становятся функциями текущего масштаба, $\tilde{\epsilon} = \epsilon(L)$ и $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0(L)$, где L — текущая длина ультрафиолетового обрезания (она измеряется в единицах v_0/Δ). Коэффициент v_0 в кинетическом члене в действии (фермиевская скорость) фиксируется при помощи перенормировки поля (такая перенормировка возникает только в двухпетлевом порядке, см. приложение A). Однопетлевые диаграммы, перенормирующие энергию и силу беспорядка, показаны на рис. 1.5. Они приводят к следующим уравнениям ренорм-группы:

$$\frac{d\tilde{\alpha}_0}{d\ln L} = 2\tilde{\alpha}_0^2, \quad \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\ln L} = \tilde{\alpha}_0\tilde{\epsilon}. \quad (1.40)$$

Подобные уравнения для беспорядка типа случайной массы (α_z) были получены в работах [119–121]. Они отличаются от наших уравнений только знаком. Уравнение для случайного потенциала было выведено в [91; 92].

Решая уравнения ренорм-группы, мы получаем зависящие от масштаба значения перенормированных параметров

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{1 - 2\alpha_0 \ln L}, \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - 2\alpha_0 \ln L}}. \quad (1.41)$$

Перенормировка продолжается до тех пор, пока энергия $\tilde{\epsilon}$ не достигнет текущей величины ультрафиолетового обрезания Δ/L . Используя это условие, мы находим значение L при котором ренорм-группа останавливается,

$$L = \frac{\Delta}{\epsilon} \sqrt{1 - 2\alpha_0 \ln \frac{\Delta}{\epsilon}}. \quad (1.42)$$

Плотность состояний ρ масштабируется так, чтобы сохранялось произведение $\tilde{\rho}\tilde{\epsilon} = \rho\epsilon$. После окончания перенормировки плотность состояний определяется формулой для чистого графена на энергии Δ/L : $\tilde{\rho} = \Delta/\pi v_0^2 L$. Используя (1.41) и (1.42), мы получаем следующий результат для плотности состояний:

$$\rho(\epsilon) = \frac{\tilde{\rho}\tilde{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\pi v_0^2 \epsilon} = \frac{\epsilon}{\pi v_0^2} \left[1 - 2\alpha_0 \ln \frac{\Delta}{\epsilon} \right]^{-1}. \quad (1.43)$$

Проводимость определяется из перенормировки силы беспорядка $\tilde{\alpha}_0$:

$$\sigma(\epsilon) = \frac{4e^2}{\pi h \tilde{\alpha}_0} = \frac{4e^2}{\pi h \alpha_0} \left[1 - 2\alpha_0 \ln \frac{\Delta}{\epsilon} \right], \quad (1.44)$$

в согласии с [48].

Мы видим, что результат самосогласованного борновского приближения, полученный ранее, качественно совпадает с более точным результатом ренорм-группы: проводимость логарифмически убывает до экспоненциально малого масштаба. Однако значение этого масштаба (1.31) было оценено неверно, с неправильным численным коэффициентом в экспоненте. Более точный низкоэнергетический масштаб γ имеет значение

$$\gamma = \Delta e^{-1/2\alpha_0}. \quad (1.45)$$

Именно при такой энергии перенормированная сила беспорядка (1.41) становится порядка единицы. Для энергий ниже этого масштаба плотность состояний остается ненулевой константой, а квазиклассическая проводимость (без учета эффектов локализации) имеет порядок e^2/h . Обе эти функции качественно правильно воспроизводятся в самосогласованном борновском приближении.

Длина, на которой останавливается перенормировка, имеет смысл длины свободного пробега и принимает значение

$$l = a e^{1/2\alpha_0}, \quad (1.46)$$

где $a = v_0/\Delta$ — ультрафиолетовая длина, примерно соответствующая периоду решетки графена. Таким образом, при слабом беспорядке существует экспоненциально большой интервал масштабов между a и l , где динамика электронов баллистическая с маленькими логарифмическими поправками. Поэтому мы будем называть уравнения (1.41) баллистической ренорм-группой.

Более точные уравнения ренорм-группы можно получить, учитывая также двухпетлевые диаграммы. Это вычисление подробно изложено в приложении A и приводит к результату

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_0}{\partial \ln L} = 2\tilde{\alpha}_0^2 + 2\tilde{\alpha}_0^3. \quad (1.47)$$

С помощью такого уточненного уравнения мы можем также получить более аккуратную оценку для длины свободного пробега

$$l = a \sqrt{\alpha_0} e^{1/2\alpha_0}. \quad (1.48)$$

За счет дополнительного члена в (1.47) параметр α_0 растет с увеличением масштаба немного быстрее, поэтому перенормировка останавливается раньше, и появляется маленький степенной фактор в длине свободного пробега (1.48) по сравнению с (1.46). Из этого результата также видно, что вклад более высоких членов в бета-функцию не имеет смысла, поскольку ультрафиолетовый масштаб длины a определен с точностью до неизвестного множителя порядка единицы (это соображение обосновано более детально в разделе A.1). Тем самым выражение (1.48) уже обладает максимальной точностью в рамках низкоэнергетического дираковского гамильтониана.

В эксперименте обычно измеряется зависимость проводимости графена от концентрации носителей n_e , которая контролируется при помощи напряжения затвора: $en_e = CV_g$, где C — емкость затвора на единицу площади. Поэтому экспериментально найденная зависимость $\sigma(V_g)$ по существу совпадает с $\sigma(n_e)$ с точностью до единиц измерения. Чтобы сравнить теорию с экспериментом, найдем плотность носителей как функцию химического потенциала⁷,

$$n_e(\mu) = 2 \int_0^\mu d\epsilon \rho(\epsilon) \simeq \frac{\mu^2}{\pi v_0^2} \left[1 - 2\alpha_0 \ln \frac{\Delta}{\mu} \right]^{-1}. \quad (1.49)$$

Комбинируя это выражение с (1.44), получаем

$$\sigma(n_e) = \frac{4e^2}{\pi h \alpha_0} \left(1 - \alpha_0 \ln \frac{\Delta^2}{v_0^2 n_e} \right). \quad (1.50)$$

Мы видим, что проводимость слабо (логарифмически) зависит от электронной плотности. Это не соответствует результатам экспериментов [3–5; 8], обнаруживших гораздо более резкую, примерно линейную, зависимость. Как мы увидим в следующем разделе, подобная зависимость действительно возникает в пределе сильных примесей.

Метод баллистической ренорм-группы легко обобщается на случай слабого беспорядка общего вида, когда все девять параметров из таблицы 1 не равны нулю. При этом нужно вычислить диаграммы рис. 1.5 со всеми возможными матрицами в вершинах примесных линий. Полный набор уравнений однопетлевой ренорм-группы имеет вид⁸

$$\frac{d\alpha_0}{d \ln L} = 2\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \alpha_\perp + \beta_\perp + \gamma_\perp + \alpha_z + \beta_z + \gamma_z) + 2\alpha_\perp\alpha_z + \beta_\perp\beta_z + 2\gamma_\perp\gamma_z, \quad (1.51a)$$

$$\frac{d\alpha_\perp}{d \ln L} = 2(2\alpha_0\alpha_z + \beta_0\beta_z + 2\gamma_0\gamma_z), \quad (1.51b)$$

$$\frac{d\alpha_z}{d \ln L} = -2\alpha_z(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 - \alpha_\perp - \beta_\perp - \gamma_\perp + \alpha_z + \beta_z + \gamma_z) + 2\alpha_0\alpha_\perp + \beta_0\beta_\perp + 2\gamma_0\gamma_\perp, \quad (1.51c)$$

$$\frac{d\beta_0}{d \ln L} = 2[\beta_0(\alpha_0 - \gamma_0 + \alpha_\perp + \alpha_z - \gamma_z) + \alpha_\perp\beta_z + \alpha_z\beta_\perp + \beta_\perp\gamma_0], \quad (1.51d)$$

$$\frac{d\beta_\perp}{d \ln L} = 4(\alpha_0\beta_z + \alpha_z\beta_0 + \beta_0\gamma_0 + \beta_\perp\gamma_\perp + \beta_z\gamma_z), \quad (1.51e)$$

$$\frac{d\beta_z}{d \ln L} = 2[-\beta_z(\alpha_0 - \gamma_0 - \alpha_\perp + \alpha_z - \gamma_z) + \alpha_0\beta_\perp + \alpha_\perp\beta_0 + \beta_\perp\gamma_z], \quad (1.51f)$$

$$\frac{d\gamma_0}{d \ln L} = 2\gamma_0(\alpha_0 - \beta_0 + \gamma_0 + \alpha_\perp - \beta_\perp + \gamma_\perp + \alpha_z - \beta_z + \gamma_z) + 2\alpha_\perp\gamma_z + 2\alpha_z\gamma_\perp + \beta_0\beta_\perp, \quad (1.51g)$$

⁷Так же, как и для энергии, мы предполагаем $\mu > 0$.

⁸Для упрощения обозначений мы опустили знаки «тильда» у текущих значений параметров.

$$\frac{d\gamma_{\perp}}{d\ln L} = 4\alpha_0\gamma_z + 4\alpha_z\gamma_0 + \beta_0^2 + \beta_{\perp}^2 + \beta_z^2, \quad (1.51h)$$

$$\frac{d\gamma_z}{d\ln L} = -2\gamma_z(\alpha_0 - \alpha_{\perp} + \alpha_z - \beta_0 + \beta_{\perp} - \beta_z + \gamma_0 - \gamma_{\perp} + \gamma_z) + 2\alpha_0\gamma_{\perp} + 2\alpha_{\perp}\gamma_0 + \beta_{\perp}\beta_z, \quad (1.51i)$$

$$\frac{d\epsilon}{d\ln L} = (1 + \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp} + \gamma_{\perp} + \alpha_z + \beta_z + \gamma_z)\epsilon. \quad (1.51j)$$

Замечательным свойством этих уравнений является полное сохранение любых исходных симметрий. Например, если беспорядок сохраняет киральную симметрию C_0 , отличны от нуля только амплитуды α_{\perp} , β_0 , β_z и γ_{\perp} . В процессе перенормировки это свойство будет сохраняться: новые типы беспорядка, нарушающие симметрию C_0 , не возникнут. То же самое справедливо для симметрии C_z , когда ненулевыми могут быть только α_{\perp} , β_{\perp} и γ_{\perp} . Если гамильтониан коммутирует с τ_z , две долины оказываются полностью независимыми. При этом из шести параметров беспорядка (все α и все γ) можно составить комбинации, которые действуют внутри каждой долины. Для таких комбинаций уравнения ренорм-группы также получаются замкнутыми. В следующей главе мы будем детально изучать все эти случаи.

1.3.3 Поправки слабой локализации

Отметим, что выражения для проводимости, полученные в предыдущем разделе, не являются окончательным результатом даже вдали от дираковской точки. Существуют также логарифмические поправки слабой локализации (на масштабах больше длины свободного пробега l), которые малы при достаточно сильных процессах сбоя фазы или для образцов малого размера, однако могут существенно изменить результат при очень низких температурах. Для этих поправок также можно записать общее выражение [36]

$$\Delta\sigma_{\text{WL}} = -\frac{2e^2}{\pi h} \ln\left(\frac{L_{\text{IR}}}{l}\right) [c_0 - 2c_{\perp} - c_z], \quad (1.52)$$

где L_{IR} — длина инфракрасного обреза, связанная с размером системы, частотой или (зависящим от температуры) временем сбоя фазы. В (1.52) нужно подставить $c_i = 1$, если беспорядок сохраняет симметрию T_i по обращению времени. В противном случае $c_i = 0$ (см. таблицу 1). В частности, для диагонального беспорядка α_0 все $c_i = 1$, что приводит к положительной поправке (слабая антилокализация), в то время как, например, для комбинации γ_{\perp} и γ_z получим $c_0 = c_z = 1$ и $c_{\perp} = 0$, что соответствует отсутствию поправки (в одной петле). С другой стороны, для комбинации, например, β_z и γ_z имеем $c_0 = 1$, $c_z = c_{\perp} = 0$, и получаем локализацию. Подчеркнем, что эти поправки универсальны и определяются только симметрией гамильтониана [123; 124].

1.4 Сильные примеси

В предыдущем разделе мы проанализировали поведение плотности состояний и проводимости в случае слабых примесей. Теперь рассмотрим противоположный предел сильных примесей, когда рассеяние электрона нужно описывать полной T -матрицей (1.13). Анализ кроссовера между этими двумя пределами будет проведен в следующем разделе.

Сначала получим результат в рамках приближения самосогласованной T -матрицы, а затем обсудим его точность и возможные ограничения. Как и в случае слабого рассеяния, уравнения самосогласования можно упростить в пределе сильных примесей. А именно, при больших значениях U мы можем пренебречь единицей в знаменателе (1.18) по сравнению с $Ug(\epsilon)$. Используя также (1.17), находим уравнение на собственную энергию

$$\Sigma(\epsilon) = -\frac{\eta\Delta^2}{4\pi v_0^2 g(\epsilon)} = \frac{\eta\Delta^2}{[\epsilon - \Sigma(\epsilon)] \ln \frac{-\Delta^2}{[\epsilon - \Sigma(\epsilon)]^2}}. \quad (1.53)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр η , связанный с концентрацией примесей, и принимающий немного разные значения в случае примесей короткого и длинного радиуса:

$$\eta = \frac{\pi n_{\text{imp}} v_0^2}{\Delta^2} \times \begin{cases} 1, & \text{короткие,} \\ 4, & \text{длинные.} \end{cases} \quad (1.54)$$

Амплитуда рассеяния U выпадает из уравнения (1.53). Это означает, что примеси эффективно считаются бесконечно сильными. Такой предел называют унитарными примесями. Квазиклассическое приближение по-прежнему применимо, если предположить, что безразмерная концентрация примесей мала: $\eta \ll 1$.

Характерный энергетический масштаб в унитарном пределе можно определить, вычислив Σ при нулевой энергии: $\Sigma(\epsilon = 0) = \mp i\gamma_\eta$. Этот масштаб по порядку величины равен

$$\gamma_\eta \simeq \Delta \sqrt{\frac{\eta}{\ln(1/\eta)}}. \quad (1.55)$$

В отличие от борновского масштаба γ , который экспоненциально мал при $\alpha \ll 1$, энергетический масштаб γ_η зависит от эффективной силы беспорядка η степенным образом. Как мы увидим ниже, это приводит к качественно другой зависимости проводимости от концентрации носителей.

Дальнейший анализ уравнения (1.53) выполняется аналогично случаю борновских примесей: на больших энергиях работает метод итераций, а вблизи дираковской точки собственную энергию можно находить в виде степенного ряда по ϵ . В результате получим

$$\Sigma(\epsilon) = \begin{cases} \mp i\gamma_\eta + \frac{\eta\Delta^2 - 2\gamma_\eta^2}{2(\eta\Delta^2 - \gamma_\eta^2)} \epsilon, & \epsilon \ll \gamma_\eta, \\ \frac{\eta\Delta^2}{2\epsilon} \left[\frac{1}{\ln(\Delta/\epsilon)} \mp \frac{i\pi}{2\ln^2(\Delta/\epsilon)} \right], & \epsilon \gg \gamma_\eta. \end{cases} \quad (1.56)$$

Здесь верхние/нижние знаки соответствуют запаздывающей/опережающей собственной энергии.

Используя (1.56) и соотношение между функцией Грина и собственной энергией в унитарном пределе (1.53), получим плотность состояний по формуле (1.19)

$$\rho_U(\epsilon) = \frac{\eta\Delta^2}{\pi^2 v_0^2} |\text{Im} \Sigma^{-1}(\epsilon)| = \begin{cases} \frac{\eta\Delta^2}{\pi^2 v_0^2 \gamma_\eta}, & \epsilon \ll \gamma_\eta, \\ \frac{\epsilon}{\pi v_0^2}, & \epsilon \gg \gamma_\eta. \end{cases} \quad (1.57)$$

Плотность состояний постоянна на малой энергии и демонстрирует линейный рост при высоких энергиях, характерный для чистого графена. Чтобы найти поправку от беспорядка к этому результату, нужно использовать более точное значение собственной энергии, чем (1.56). После двух итераций уравнения (1.53) получается линейный по η вклад в плотность состояний

$$\rho_U(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\pi v_0^2} [1 - \alpha_c(\epsilon)]. \quad (1.58)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\alpha_c(\epsilon) = \frac{\eta\Delta^2}{2\epsilon^2 \ln^2(\Delta/\epsilon)}. \quad (1.59)$$

Этот параметр (с точностью до логарифмического фактора) ведет себя как квадрат отношения фермиевской длины волны электрона к типичному расстоянию между примесями. Условие $\epsilon \gg \gamma_\eta$ эквивалентно $\alpha_c \ll 1$, что обеспечивает относительную малость поправки.

Чтобы найти проводимость, вычисляем поляризационный оператор (1.22):

$$\Pi^{RA}(\epsilon) = \frac{1}{4\pi v_0^2} \frac{\eta\Delta^2}{2|\Sigma(\epsilon)|^2} \frac{\epsilon - 2 \text{Re} \Sigma(\epsilon)}{\epsilon - \text{Re} \Sigma(\epsilon)}. \quad (1.60)$$

В формуле для вершинной поправки (1.23) также нужно взять предел бесконечно большого U . В итоге проводимость (1.24) на больших энергиях $\epsilon \gg \gamma_\eta$ принимает вид

$$\sigma_U(\epsilon) = \frac{8e^2\epsilon^2}{\pi h \eta \Delta^2} \ln^2 \frac{\Delta}{\epsilon} = \frac{4e^2}{\pi h \alpha_c(\epsilon)}. \quad (1.61)$$

Этот результат выведен для унитарных примесей большого радиуса. В противоположном пределе малого радиуса потенциала примесей вершинная поправка отсутствует, что уменьшает проводимость в два раза.

Процессы множественного рассеяния электронов на комплексах из двух или более примесей (описываемые диаграммами с пересекающимися примесными линиями), не включены в наше самосогласованное вычисление. Напомним, что в пределе слабых примесей (раздел 1.3.2), аналогичные процессы рассеяния дают вклад в ведущую логарифмическую зависимость проводимости от энергии (1.44). Однако в унитарном пределе поведение проводимости $\sigma(\epsilon) \propto 1/\alpha_c(\epsilon)$ происходит уже из диаграмм с одной T -матрицей. Таким образом поправки от множественного рассеяния имеют второстепенное значение в этом случае.

Перепишем зависимость проводимости от энергии в терминах концентрации электронов n_e . В соответствии с (1.57), для большого значения химического потенциала $\mu \gg \gamma_\eta$ получается

$$n_e(\mu) = \frac{\mu^2}{\pi v_0^2}. \quad (1.62)$$

Это соотношение ничем не отличается от случая чистого графена. Проводимость как функция концентрации находится по формуле (1.61)

$$\sigma(n_e) = \frac{e^2}{2\pi h} \frac{n_e}{n_{\text{imp}}} \ln^2 \frac{\Delta^2}{v_0^2 n_e}. \quad (1.63)$$

Для примесей короткого радиуса результат в два раза больше. В отличие от предела слабых (борновских) примесей, проводимость демонстрирует сильную зависимость от концентрации — линейную с логарифмическим фактором. Этот результат хорошо согласуется с экспериментально полученным линейным поведением $\sigma(n_e)$ [3–8], поэтому мы можем сделать вывод, что основной механизм рассеяния электронов в графене связан с сильными примесями. Уравнение (1.63) предсказывает также дополнительный логарифмический фактор к линейному поведению. Однако чтобы надежно установить наличие или отсутствие такого множителя из экспериментальных данных, нужны результаты измерений в достаточно широком диапазоне концентраций. В современных экспериментах действительно наблюдается небольшое снижение подвижности электронов с ростом их концентрации, но сделать однозначный вывод, подтверждающий или опровергающий наличие дополнительного множителя в виде квадрата логарифма, все еще не представляется возможным.

Мы можем также вычислить проводимость в рамках самосогласованного приближения с унитарными примесями вблизи дираковской точки $\epsilon \ll \gamma_\eta$. В этом пределе вклады $\langle jG^R jG^R \rangle$ и $\langle jG^A jG^A \rangle$ также должны приниматься во внимание. При этом оказывается, что квазиклассическая проводимость принимает такое же значение $\sigma_U = 4e^2/\pi h$, как и в случае слабых примесей. Этот результат также подвержен сильному влиянию неучтенных локализационных поправок. Однако важно в связи с этим иметь в виду, что бесконечно сильные примеси, на самом деле, сохраняют киральную симметрию C_0 . Поэтому интерференционные поправки будут гораздо слабее, чем в обычном случае. Мы вернемся к обсуждению проводимости в киральных системах при половинном заполнении в следующей главе, а также в главах 4 и 5.

1.5 Фазовая диаграмма

В предыдущих разделах мы изучили пределы слабых (борновских) и сильных (унитарных) примесей. Поведение проводимости существенно различается в этих случаях. Теперь мы выведем условия возможного перехода между двумя пределами и построим «фазовую диаграмму» в пространстве параметров. (Конечно, мы не имеем в виду никаких фаз в строгом смысле; есть лишь плавный кроссовер между борновским и унитарным режимами.)

Унитарный предел соответствует пренебрежению единицей по сравнению с $Ug(\epsilon)$ в знаменателе (1.18). Чтобы определить, когда это приближение оправдано, используем выражение (1.56) для $\Sigma(\epsilon)$ при большой энергии и сравним $Ug(\epsilon)$ с единицей. При этом получается следующее значение параметра η на «границе фаз» между режимами слабых и сильных примесей:

$$\eta_c(\epsilon) \sim \frac{\alpha\epsilon^2}{\Delta^2} \ln^2 \frac{\Delta}{\epsilon}. \quad (1.64)$$

Этот же результат можно представить в виде $\alpha \sim \alpha_c(\epsilon)$, где $\alpha_c(\epsilon)$ определяется по формуле (1.59). Поэтому можно также сказать, что по мере увеличения α слабые борновские примеси постепенно перейдут в унитарный режим, и произойдет это, когда α превысит критическое значение α_c .

На рис. 1.6 мы изобразили фазовую диаграмму в двух системах координат: $\epsilon-\eta$ (при фиксированном α) и $\epsilon-\alpha$ (при фиксированном η). Заметим, что кроссовер от борновского к унитарному режиму может также происходить по мере увеличения энергии, в то время как сила беспорядка остается неизменной. Этот кроссовер происходит в экспоненциально широком диапазоне концентраций примесей $\alpha^{-1} \exp(-1/\alpha) \ll \eta \ll \alpha$. При еще меньших значениях η примеси ведут себя как унитарные при любых энергиях. Стоит подчеркнуть, что унитарная фаза на рис. 1.6 устанавливается даже для $\alpha \ll 1$, когда беспорядок можно наивно счесть слабым. Причина такого поведения заключается в том, что рост плотности состояний с увеличением энергии приводит к более эффективному рассеянию электронов, а значит те же примеси ведут себя как более сильные.

Рассмотренный нами кроссовер будет проявляться в изменении поведения проводимости от практически линейной энергетической зависимости при больших ϵ (раздел 1.4) к логарифмической зависимости при низких энергиях (раздел 1.3). Экспериментально измеренная проводимость графена линейно зависит от концентрации вплоть до самых низких энергий, где она принимает минимальное значение $\sim 4e^2/h$. Это указывает на то, что в реальных образцах доминируют сильные примеси, которые остаются в унитарной части фазовой диаграммы при всех энергиях.

1.6 Кулоновские примеси

Особого рассмотрения требует случай заряженных примесей. Если такие примеси расположены далеко от плоскости графена, они будут экранированы затвором и в результате произведут такой же эффект, как и примеси конечного радиуса, рассмотренные ранее. Будем изучать заряженные примеси, расположенные непосредственно в плоскости графена. Кулоновский потенциал в двумерной системе имеет вид $V_0(\mathbf{q}) = 2\pi e^2/\chi q$ в импульсном представлении. Учитывая статическую экранировку электронным газом в графене в приближении

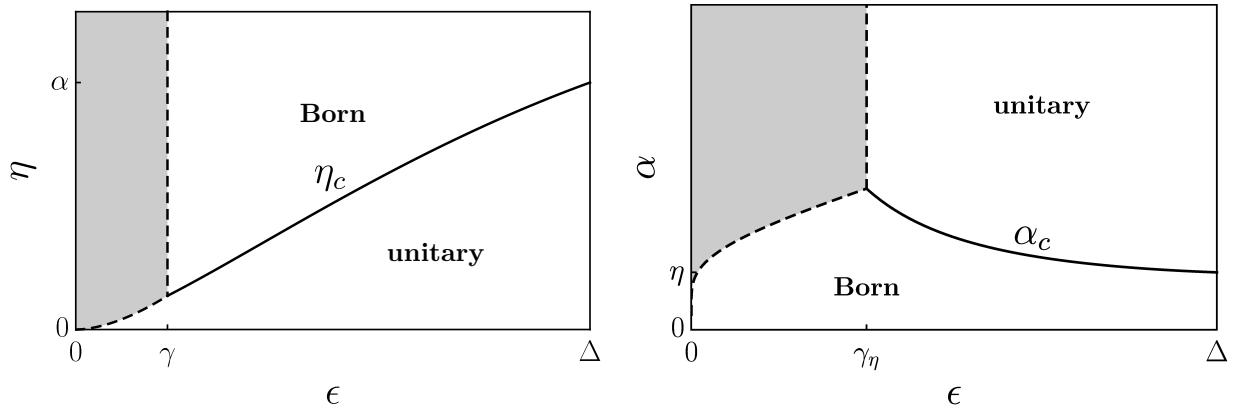


Рис. 1.6 — «Фазовая диаграмма» в плоскости ϵ – η при фиксированном значении α (левый график) и в плоскости ϵ – α при фиксированном η (правый график). Сплошная линия обозначает границу фаз (1.64) или (1.59). При низких энергиях (серая область) плотность состояний насыщается, в то время как квазиклассическая проводимость принимает значение $\sim e^2/h$. В этом режиме локализационные эффекты становятся особенно важны.

случайных фаз, получим⁹

$$V(\mathbf{q}) = \frac{2\pi e^2}{\chi q + 2\pi e^2 \rho(\epsilon)}. \quad (1.65)$$

Здесь χ — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится образец. Строго говоря, приближение случайных фаз не оправдано в случае графена, так как параметр $r_s = e^2/\hbar v_0 \chi$ не является малым. Однако нам достаточно определить поведение интересующих нас величин с точностью до коэффициентов порядка единицы, поэтому мы все же можем пользоваться приближением случайных фаз на границе области его применимости.

Как следует из уравнения (1.65), междолинное рассеяние на кулоновском потенциале, $V(K) \simeq 2\pi e^2/\chi K$ очень слабое, поэтому его можно не учитывать. Что касается внутридолинного рассеяния, оно лишь слегка анизотропно. Действительно, обратная длина экранировки $\kappa = 2\pi e^2 \rho(\epsilon)$ того же порядка, что характерный импульс $\kappa \sim q \sim \epsilon/v_0$ при $r_s \sim 1$. Поэтому, с точностью до численного фактора порядка единицы, мы можем пренебречь q в знаменателе (1.65) (это равнозначно пренебрежению анизотропией рассеяния внутри долины). Таким образом мы свели экранированные заряженные примеси к типу рассеивателей большого радиуса, рассмотренных выше, но с амплитудой, зависящей от энергии,

$$U(\epsilon) = \rho^{-1}(\epsilon) \simeq \frac{\pi v_0^2}{\epsilon}. \quad (1.66)$$

Существует, однако, важное различие между заряженной примесью и потенциальной примесью большого радиуса. Амплитуда рассеяния для медленных электронов (с импульсом $q \lesssim \epsilon/v_0$) дается уравнением (1.66), в то время как электроны с большими импульсами

⁹Второй член в знаменателе (1.65) написан в приближении Томаса—Ферми, которое справедливо при малых значениях импульса $q \lesssim \epsilon/v_0$. При больших импульсах этот член будет дополнительно подавлен фактором $\epsilon/qv_0 \ll 1$. Это, однако, несущественно, поскольку в таком режиме первый член в знаменателе более важен.

рассеиваются гораздо менее эффективно из-за отсутствия экранировки на малых расстояниях. Это может быть учтено путем установки эффективного ультрафиолетового обрезания $\Delta \sim \epsilon$.

С помощью уравнений (1.29), (1.54) и (1.64) и с величинами U из (1.66) и $\Delta \sim \epsilon$, мы получаем $\eta_c \sim \eta$. Таким образом мы приходим к выводу, что кулоновские примеси всегда находятся в кроссовере между борновским и унитарным режимами. Это также оправдывает использование плотности состояний чистого графена в уравнении (1.66). Действительно, при приближении к кроссоверу с унитарной стороны, поправки от беспорядка к плотности состояний малы, см. (1.58). С другой стороны, при использовании борновского результата (1.43), логарифмические поправки отсутствуют, поскольку $\Delta \sim \epsilon$, что также оправдывает использование плотности состояний чистого графена в (1.66).

Зависимость проводимости графена с кулоновскими примесями от энергии и концентрации носителей одинаково хорошо описывается результатами борновского (уравнения (1.44), (1.50) с зависящим от энергии параметром $\alpha_0 \sim n_{\text{imp}} v_0^2 / \epsilon^2$) и унитарного (уравнения (1.61), (1.63)) приближения с отброшенными логарифмами:

$$\sigma \sim \frac{e^2 \epsilon^2}{\hbar n_{\text{imp}} v_0^2} \sim \frac{e^2 n_e}{\hbar n_{\text{imp}}}. \quad (1.67)$$

Такое поведение проводимости очень хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями [3–8]. Результат аналогичный (1.67) был также получен в рамках борновского приближения в работах [39; 44; 46].

Глава 2

Электронные свойства графена со слабым беспорядком

В предыдущей главе мы построили квазиклассическую теорию транспорта в графене с различными видами примесей. В обоих случаях сильных и слабых примесей классическая проводимость оказалась равна $\sigma = 4e^2/\pi h$ в дираковской точке. Так как это значение порядка кванта проводимости, история на этом отнюдь не заканчивается. В дираковской точке должны наблюдаться сильные локализационные эффекты. Если междолинное рассеяние слабое (примеси большого радиуса), существует диапазон температур, где поправка к проводимости (1.52) положительна [36; 40; 41; 48; 125; 126] из-за наличия фазы Берри π , связанной с псевдоспином электронов в пространстве подрешеток. Эта ситуация относится к симплектическому классу симметрии. При понижении температуры T междолинное рассеяние становится существенным и происходит переход к ортогональному классу симметрии [36; 48; 49]. Локализационная поправка (1.52) становится отрицательной и приводит систему в режим сильной локализации [48]. Поэтому для беспорядка общего вида проводимость в дираковской точке должна иметь ярко выраженную температурную зависимость и сильно подавляться с понижением T . Удивительно, что это не наблюдается в эксперименте. Измеренная проводимость [3–8] оказывается близка к значению $4e^2/h$ и практически не зависит от температуры в очень широком диапазоне (по крайней мере, от 30 мК до 300 К).

Цель этой главы состоит в том, чтобы проанализировать ситуации, в которых такое поведение можно ожидать теоретически. Согласно сказанному выше, это может произойти только для очень специальных типов беспорядка, обладающих определенной симметрией, которая позволяет избежать локализации. В частности, это относится к ситуациям, когда одна из киральных симметрий гамильтониана не нарушается беспорядком.

Кроме кирального случая, мы изучим транспортные свойства в одной долине, предполагая, что беспорядок достаточно плавный и рассеянием между долинами можно пренебречь. В этой ситуации полная локализация также не наступает благодаря особым топологическим свойствам дираковского гамильтониана. Наконец, мы рассмотрим свойства неупорядоченного графена в магнитном поле и определим, при каких условиях возникает наблюдаемое в эксперименте нечетное квантование холловской проводимости [1]. Это явление также тесно связано с возможной локализацией.

2.1 Проводимость в графене с киральным беспорядком

Графен с беспорядком, который сохраняет одну из киральных симметрий (1.11) дираковского гамильтониана, относится к особому классу неупорядоченных систем. Некоторые возможные реализации беспорядка такого типа были перечислены в разделе 1.1.3. Наша цель здесь — проанализировать, какие последствия влечет предположение о киральном характере беспорядка.

Своеобразное поведение двумерных систем с киральной симметрией по отношению к эффектам локализации было обнаружено Гаде и Вегнером [72; 73]. Они рассматривали модель сильной связи на квадратной решетке со случайной амплитудой прыжка и показали, что при нулевой энергии, когда система обладает киральной симметрией, бета-функция соответствующей сигма-модели в точности зануляется во всех порядках теории возмущений по обратной проводимости. Это означает, что локализационные поправки к проводимости сокращаются во всех порядках. Такое необычное поведение можно грубо объяснить тем, что отрицательные (локализационные) поправки к коэффициенту диффузии в точности компенсируются положительными поправками к плотности состояний. Мы еще вернемся к этому утверждению в главе 5, где будет изучаться непертурбативная перенормировка сигма-модели.

Плотность состояний в киральном металле расходится как $\rho(\epsilon) \sim \epsilon^{-1}f(\epsilon)$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Функция $f(\epsilon)$ определяется сублидирующими поправками к плотности и обеспечивает конечность полного числа состояний¹. При сколь угодно малой энергии ϵ киральная симметрия нарушается и электроны локализуются [73] на длине $\xi(\epsilon) \propto |f(\epsilon)|^{-1/2}$. Состояния в центре зоны при $\epsilon = 0$ делокализованы, а проводимость $\sigma(\epsilon = 0)$ принимает конечное значение, зависящее от силы беспорядка. Согласно классификации неупорядоченных систем Альтланда—Цирнбауэра [70; 71; 94; 131], модель, изученная в работах [72; 73], относится к киральному унитарному классу симметрии АIII.

Хотя результаты [72; 73] предполагают, что графен с киральным беспорядком будет иметь конечную проводимость на нулевой энергии, они не могут быть применены непосредственно к графену. Дело в том, что квазиклассическая проводимость графена при $\epsilon = 0$ принимает значение порядка единицы, в то время как аккуратный вывод сигма-модели и изучение ее пертурбативной перенормировки оправдано только при больших значениях проводимости. Тем не менее, опираясь на особые свойства дираковского гамильтониана, мы докажем более сильное утверждение, чем предсказанное Гаде и Вегнером. А именно, будет продемонстрировано, что в графене с киральной симметрией проводимость в дираковской точке равна $4e^2/\pi h$ с точностью до квадратично (C_0) или экспоненциально (C_z) малых поправок по силе беспорядка.

¹В работах [73; 122] для функции $f(\epsilon)$ было найдено выражение $f(\epsilon) \sim \exp\{-c|\ln \epsilon|^x\}$ с параметром $x = 1/2$. Более поздние работы [127–130] скорректировали этот параметр и предсказали значение $x = 2/3$. Мы вернемся к обсуждению плотности состояний в главе 6, где будет получено другое выражение для $f(\epsilon)$ в киральном металле с вакансиями.

2.1.1 C_z киральность

Рассмотрим беспорядок, который сохраняет C_z киральность $H = -\sigma_z H \sigma_z$. Случайная часть гамильтониана может содержать только матрицы, пропорциональные $\sigma_{x,y}$. Согласно таблице 1, в случае слабого беспорядка будут отличны от нуля параметры α_\perp , β_\perp и γ_\perp . Если беспорядок характеризуется только константами β_\perp и γ_\perp , он сохраняет также симметрию по обращению времени T_0 , в то время как случайный векторный потенциал α_\perp эту симметрию нарушает.

Случайный дираковский гамильтониан, сохраняющий C_z киральность и нарушающий T_0 (случай 1 в терминологии [132]) принадлежит к киральному унитарному классу симметрии АIII, в то время как комбинация C_z и T_0 (случай 6 из [132]) переводит систему в ортогональный сверхпроводящий класс CI. В обоих случаях действие соответствующей низкоэнергетической теории (сигма-модели) будет содержать дополнительный топологический член типа Весса—Зумино.

Однопетлевые уравнения ренорм-группы для C_z беспорядка, см. (1.51), имеют вид:

$$\frac{\partial \alpha_\perp}{\partial \ln L} = 0, \quad \frac{\partial \beta_\perp}{\partial \ln L} = 4\beta_\perp \gamma_\perp, \quad \frac{\partial \gamma_\perp}{\partial \ln L} = \beta_\perp^2. \quad (2.1)$$

Обратим внимание, что уравнение для α_\perp полностью отделяется от остальных.

Подобная ренорм-группа изучалась в [94] для задачи о неупорядоченном двумерном d -волновом сверхпроводнике, а также в [91; 92; 133; 134]. Система эквивалентна модели с двумя типами безмассовых дираковских фермионов при наличии случайного неабелевого векторного потенциала. В этих работах было показано, что плотность состояний убывает на малых энергиях по закону²

$$\rho(\epsilon) \propto \epsilon^{1/7}. \quad (2.2)$$

Показатель степени определяется по формуле $1/7 = 1/(2N^2 - 1)$, где N — количество типов фермионов. В применении к графену $N = 2$ соответствует двум долинам.

При наличии только произвольного векторного потенциала (беспорядок α_\perp , который сохраняет все четыре киральности), плотность состояний также стремится к нулю с уменьшением энергии, но с неуниверсальной степенью [91; 92; 120], которая зависит от α_\perp :

$$\rho(\epsilon) \propto \epsilon^{(1-\alpha_\perp)/(1+\alpha_\perp)}. \quad (2.3)$$

Обратим внимание, что в этой ситуации сила случайного векторного потенциала α_\perp не перенормируется согласно (2.1) (на самом деле, однопетлевые уравнения для α_\perp и ϵ являются точными [120; 122]). Поэтому α_\perp не генерирует масштаб γ (то есть длина свободного пробега оказывается бесконечной) и однопетлевой результат для плотности состояний (2.3) остается справедливым при любых энергиях.

²В этой главе мы, как и раньше, считаем $\epsilon > 0$.

Рассмотрим проводимость графена, когда беспорядок сохраняет C_z киральность. Симметрия C_z позволяет установить связь между запаздывающими и опережающими функциями Грина:

$$\sigma_z G^{R(A)}(\epsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_z = -G^{A(R)}(-\epsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.4)$$

Проводимость дается формулой Кубо (1.20), которую мы перепишем здесь в полном виде,

$$\begin{aligned} \sigma^{xx} = \frac{1}{\pi} \int d^2(r - r') \text{Tr} \left[j^x G^R(0, \mathbf{r}, \mathbf{r}') j^x G^A(0, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} j^x G^R(0, \mathbf{r}, \mathbf{r}') j^x G^R(0, \mathbf{r}', \mathbf{r}) - \frac{1}{2} j^x G^A(0, \mathbf{r}, \mathbf{r}') j^x G^A(0, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь воспользуемся тождеством (2.4) и выразим все опережающие функции Грина в (2.5) через запаздывающие. Кроме того, воспользуемся важным соотношением между компонентами оператора тока (1.21)

$$\sigma_z j^x = -j^x \sigma_z = i j^y, \quad (2.6)$$

которое непосредственно следует из (1.21). В этом смысле наша задача отличается от рассмотренной Гаде и Вегнером [72; 73]. Они изучали модель на квадратной решетке, в которой нет тождества аналогичного (2.6).

Преобразования (2.4) и (2.6) позволяют нам привести формулу Кубо к следующему виду:

$$\sigma^{xx} = -\frac{1}{\pi} \sum_{\alpha=x,y} \int d^2(r - r') \text{Tr} \left[j^\alpha G^R(0; \mathbf{r}, \mathbf{r}') j^\alpha G^R(0; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \right]. \quad (2.7)$$

На первый взгляд, это выражение равно нулю из-за калибровочной инвариантности. Действительно, правая сторона (2.7) пропорциональна второй производной статистической суммы $Z[\mathbf{A}] = \text{Tr} \ln G^R[\mathbf{A}]$ (или, что эквивалентно, первой производной от среднего тока $\text{Tr} j^\alpha G^R[\mathbf{A}]$) по постоянному векторному потенциалу \mathbf{A} . Калибровочная инвариантность подразумевает, что постоянный векторный потенциал не влияет на наблюдаемые величины, такие как ток, поэтому производная должна обращаться в ноль. Это соображение, однако, не является полностью правильным, поскольку в нашей задаче есть квантовая аномалия. Постоянный векторный потенциал \mathbf{A} можно исключить сдвигом всех импульсов $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, который, казалось бы, не изменяет значение интеграла по импульсам. Если мы рассмотрим формальное разложение по силе беспорядка, такое рассуждение будет справедливым для всех членов кроме вклада нулевого порядка. Интеграл $\int d^2p \text{Tr} j^\alpha G_0^R(\mathbf{p})$ плохо сходится на больших импульсах, поэтому сдвиг переменной может его изменить. Такая аномалия была впервые изучена Швингером [135; 136] для $(1+1)$ -мерных безмассовых дираковских фермионов. В модели Швингера поляризационный оператор не зависит от произвольного внешнего векторного потенциала $\mathbf{A}(x, t)$ и дается аномальным вкладом, который генерирует массу фотона в $(1+1)$ -мерной электродинамике [135–137]. В нашем анализе роль $\mathbf{A}(x, t)$ играет киральный беспорядок. Явное вычисление диаграммы нулевого порядка (то есть диаграммы без примесей) дает

$$\sigma = -\frac{16e^2 v_0^2}{h} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\delta^2}{(v_0^2 p^2 + \delta^2)^2} = \frac{4e^2}{\pi h}. \quad (2.8)$$

Здесь δ — бесконечно малая мнимая константа, добавленная к энергии для правильного обхода полюсов функции Грина. Отметим, что такое же универсальное значение проводимости в ситуации, когда единственным типом беспорядка является случайный векторный потенциал α_{\perp} , было получено в [120].

Результат (2.8) можно также вывести из следующего тождества Уорда:

$$-ie(\mathbf{r} - \mathbf{r}')G^R(0; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = [G^R \mathbf{j} G^R](0; \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.9)$$

Мы усредним это тождество по беспорядку, подставим его в (2.7), перейдем к импульсному представлению и выполним интегрирование по частям. В результате получится поверхностный интеграл в импульсном пространстве:

$$\sigma = -\frac{ev_0}{2\pi^2 h} \oint d\mathbf{p}_n \text{Tr}[\mathbf{j} G^R(\mathbf{p})]. \quad (2.10)$$

Этот интеграл нужно взять вдоль границы области импульсов, в которой применим линеаризованный дираковский гамильтониан, например по окружности большого радиуса $|\mathbf{p}| = \text{const}$. При больших импульсах можно пренебречь беспорядком в функции Грина и заменить ее на функцию Грина чистого графена. Тем самым мы приходим к тому же результату (2.8)

$$\sigma = \frac{2e^2}{\pi^2 h} \oint \frac{d\mathbf{p}_n \mathbf{p}}{p^2} = \frac{4e^2}{\pi h}. \quad (2.11)$$

Это универсальное значение не зависит от деталей ультрафиолетового обрезания в импульсном пространстве, потому что интеграл (2.11) не меняется при деформациях контура. Важно только, что контур обходит точку $\mathbf{p} = 0$ один раз, то есть, на самом деле, проводимость определяется областью малых импульсов. Это видно и из уравнения (2.8). Тот факт, что в реальной системе линейность спектра нарушается по мере удаления от дираковской точки, не может изменить результат, потому что функции G^R и G^A , по существу, равны друг другу вдали от ферми-поверхности, а значит подынтегральное выражение в (2.5) там сокращается.

При выводе (2.11) мы предполагаем, что энергия ультрафиолетового обрезания Δ гораздо больше, чем масштаб энергии γ , связанный с беспорядком. В случае слабых примесей это означает, что $\alpha \ll 1$. По-другому это условие можно сформулировать так: для энергий, сравнимых с ультрафиолетовым масштабом $\epsilon \sim \Delta$, квазиклассическая проводимость, найденная в разделе 1.3, должна быть большой по сравнению с e^2/h . Это условие очень хорошо выполняется в эксперименте [3–8]. Возможные поправки к универсальному значению проводимости (2.8), (2.11) экспоненциально малы: $\delta\sigma \lesssim e^2\gamma/\Delta$. Такой вывод также согласуется с тем, что все диаграммы с примесями (конечного порядка по α) оказались равны нулю.

Приведенный выше вывод универсальной проводимости остается справедливым и в случае, когда графен помещен во внешнее магнитное поле произвольной силы. Векторный потенциал \mathbf{A} добавляется к импульсу, то есть тоже умножается на матрицы $\sigma_{x,y}$, сохраняя при этом киральную симметрию. В связи с этим стоит упомянуть результат Хиками, Ширази и Вегнера [138], которые обнаружили, что продольная проводимость в центре низшего уровня Ландау в киральном двумерном металле в точности равна $\sigma = 4e^2/\pi h$ в пределе очень сильного магнитного поля. Это утверждение можно рассматривать как предел бесконечно

сильного поля для нашего общего результата (2.8), (2.11). Действительно, кинетическая энергия электронов в очень сильном магнитном поле фактически равна константе, так что разница между дисперсией электрона на квадратной решетке (рассмотренной в [138]) и линейной дисперсией в графене становится несущественной.

2.1.2 C_0 киральность

Теперь рассмотрим беспорядок, который сохраняет C_0 киральность $H = -\sigma_z \tau_z H \sigma_z \tau_z$. Такой беспорядок может иметь матричную структуру $\sigma_z \tau_\perp$, $\sigma_\perp \tau_z$, $\sigma_\perp \tau_0$ и $\sigma_0 \tau_\perp$. Первые два типа примесей (соответствующие параметрам β_0 и α_\perp) нарушают симметрию по обращению времени T_0 , а два другие (γ_\perp и β_z) ее сохраняют, см. таблицу 1. Также беспорядок типа α_\perp и γ_\perp (вещественный и мнимый векторный потенциал) сохраняет киральную симметрию C_z , рассмотренную в предыдущем разделе.

Дираковский гамильтониан с беспорядком, который сохраняет C_0 , но нарушает T_0 (случай 2 в [132]), принадлежат к киральному унитарному классу АIII. Комбинация C_0 и T_0 (случай 9_+ в [132]) соответствует киральному ортогональному классу симметрии BDI. Наконец, комбинация C_0 и T_z (случай 9_- в [132]) относится к киральному симплектическому классу симметрии СII.

Однопетлевые уравнения ренорм-группы для беспорядка с C_0 симметрией непосредственно следуют из (1.51) и имеют вид

$$\frac{\partial \alpha_\perp}{\partial \ln L} = 2\beta_0 \beta_z, \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial \ln L} = \frac{\partial \beta_z}{\partial \ln L} = 2\alpha_\perp (\beta_0 + \beta_z), \quad \frac{\partial \gamma_\perp}{\partial \ln L} = \beta_0^2 + \beta_z^2. \quad (2.12)$$

Подобная модель изучалась в [122; 139]. Плотность состояний в общем случае C_0 симметрии расходится [72; 73; 122; 127; 128] в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, как обсуждалось в начале главы (для случайного векторного потенциала α_\perp применим результат (2.3) из предыдущего раздела).

Рассмотрим проводимость в дираковской точке для произвольного беспорядка, сохраняющего C_0 киральность. Доказательство универсальности проводимости на основе калибровочной инвариантности в этом случае не работает. Действительно, преобразование функции Грина для гамильтониана с C_0 киральностью имеет вид

$$\sigma_z \tau_z G^{R(A)}(\epsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_z \tau_z = -G^{A(R)}(-\epsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.13)$$

Это генерирует новые векторные вершины $j^{x,y} \tau_z$ вместо обычных токов (такие вершины аналогичны киральным токам \mathbf{j}_5 в квантовой электродинамике). Мы можем свести формулу Кубо к корреляторам только запаздывающих функций, но для токов $j^{x,y}$ и $j_5^{x,y}$. Последние не могут быть получены как производные статистической суммы по постоянному векторному потенциалу. Тем не менее, для слабого беспорядка проводимость в дираковской точке по-прежнему универсальна, $\sigma(\epsilon = 0) = 4e^2/\pi h$, но только с точностью до степенных поправок по силе беспорядка.

Чтобы показать это, будем вычислять поправки к проводимости чистого графена по теории возмущений. Поправка первого порядка $\delta\sigma^{(1)}$ включает всего две диаграммы и оказывается равна нулю, $\delta\sigma^{(1)} = 0$. Это означает, что проводимость при $\epsilon = 0$ не зависит от ультрафиолетового обрезания Δ . Действительно, если бы поправка $\delta\sigma^{(1)}$ не обращалась в ноль, мы могли бы подставить в нее перенормированную силу беспорядка в качестве эффективной примесной линии. Тем самым ответ оказался бы явно зависящим от Δ/δ . Расчет поправки второго порядка (которая содержит восемь диаграмм) дает

$$\delta\sigma^{(2)} = \frac{e^2}{\pi h}(\beta_0 - \beta_z)^2. \quad (2.14)$$

Отметим, что комбинация $\beta_0 - \beta_z$ не перенормируется, как видно из уравнений (2.12). Это согласуется с приведенным выше рассуждением для поправки первого порядка.

Мы приходим к выводу, что проводимость в дираковской точке может быть представлена как степенной ряд по параметру $\beta_0 - \beta_z$. Кроме того, в случае C_0 киральности локализационные поправки зануляются во всех порядках [72; 73]. Это доказывает, что разложение $\sigma(\epsilon = 0)$ в ряд по степеням $\beta_0 - \beta_z$ сходится. Поэтому для слабого беспорядка проводимость принимает универсальное значение (2.8) с малыми степенными поправками по силе беспорядка (в отличие от в случае C_z киральности, когда поправки оказываются экспоненциально малыми).

2.1.3 C_\perp киральность

Наконец, обсудим случай $C_{x,y}$ киральности (беспорядок типа α_\perp , γ_0 и γ_z). Каждая из этих симметрий в отдельности аналогична C_z . Однако в рассматриваемой нами модели предполагается, что C_x и C_y должны появляться одновременно из-за средней изотропности. Это подразумевает, что неупорядоченный гамильтониан антикоммутирует с матрицами τ_x и τ_y и, следовательно, пропорционален τ_z . Поэтому гамильтониан распадается на две эквивалентные копии в двух долинах, и симметрия задачи определяется свойствами этих отдельных гамильтонианов, а киральность полной модели становится несущественной. Приведем уравнения ренорм-группы в случае киральности C_\perp

$$\frac{\partial\alpha_\perp}{\partial\ln L} = 4\gamma_0\gamma_z, \quad \frac{\partial\gamma_0}{\partial\ln L} = 2(\alpha_\perp + \gamma_0)(\gamma_0 + \gamma_z), \quad \frac{\partial\gamma_z}{\partial\ln L} = 2(\alpha_\perp - \gamma_z)(\gamma_0 + \gamma_z). \quad (2.15)$$

В общем случае, при наличии всех трех видов беспорядка α_\perp , γ_0 и γ_z система попадает в обычный унитарный класс А и оказывается [120] в критическом состоянии эквивалентном переходу квантового эффекта Холла, как обсуждается в следующих разделах этой главы. При наличии одного лишь беспорядка γ_z получается класс симметрии D (дираковские фермионы со случайной массой). Такой беспорядок убывает в процессе перенормировки (2.15), и перехода в диффузный режим не происходит [119]. В этом случае также получается критическая фаза с конечной проводимостью при $\epsilon = 0$. Если же единственным видом беспорядка будет γ_0 , получится симплектический класс АII, для которого характерна антилокализация и можно

ожидать неограниченный рост проводимости. Более подробно эта ситуация обсуждается в следующем разделе.

2.2 Беспорядок, не смешивающий долины

Как объяснялось в предыдущем разделе, при наличии киральности C_{\perp} гамильтониан распадается на две эквивалентные копии в двух долинах. Теперь мы подробно изучим транспортные свойства дираковского гамильтониана с одной долиной. Такая ситуация возникает в графене с любым плавным беспорядком (например, кулоновские примеси или плавные искривления плоскости графена), а не только в случае киральности C_{\perp} . Будем рассматривать гамильтониан

$$H = v_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} + \sigma_{\mu} V_{\mu}(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

который действует на двухкомпонентные спиноры в пространстве подрешеток, но не долин. Возможные типы беспорядка в одной долине: случайный скалярный (V_0) и векторный ($V_{x,y}$) потенциалы, а также случайная масса (V_z). Мы, как и раньше, будем предполагать, что случайные величины V_{μ} подчиняются гауссовому распределению с нулевым радиусом корреляции, и введем три параметра силы беспорядка: $\alpha_0 = \langle V_0^2 \rangle / 2\pi v_0^2$, $\alpha_{\perp} = \langle V_x^2 + V_y^2 \rangle / 2\pi v_0^2$ и $\alpha_z = \langle V_z^2 \rangle / 2\pi v_0^2$. На коротких (баллистических) масштабах они перенормируются согласно уравнениям, которые легко вывести из общей ренорм-группы (1.51),

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial L} = 2(\alpha_0 + \alpha_z)(\alpha_0 + \alpha_{\perp}), \quad \frac{\partial \alpha_{\perp}}{\partial L} = 4\alpha_0 \alpha_z, \quad \frac{\partial \alpha_z}{\partial L} = 2(\alpha_0 + \alpha_z)(\alpha_{\perp} - \alpha_z), \quad (2.17)$$

и которые эквивалентны уравнениям (2.15). На более длинных диффузионных масштабах становятся важны эффекты квантовой интерференции, которые не учитываются баллистической ренорм-группой.

Адекватным способом описания таких явлений, имеющих особое значение вблизи дираковской точки, является нелинейная сигма-модель [140]. Чтобы построить эту теорию для гамильтониана (2.16), введем векторное поле ψ размера $2 \times 2 \times 2 = 8$, имеющее структуру в пространстве подрешеток, запаздывающих–опережающих функций (RA) и суперсимметричном пространстве бозонов–фермионов (BF). После усреднения по беспорядку действие для дираковского гамильтониана со случайным потенциалом принимает вид (ср. (1.39))

$$S[\psi] = \int d^2 r \left[-i \bar{\psi} (\epsilon + i0\Lambda - m\sigma_z + iv_0 \boldsymbol{\sigma} \nabla) \psi + \pi v_0^2 \alpha_0 (\bar{\psi} \psi)^2 \right]. \quad (2.18)$$

Здесь введено стандартное обозначение $\Lambda = \text{diag}\{1, -1\}_{RA}$ для матрицы в пространстве RA. Мы также добавили постоянную массу m , которая открывает щель в дираковском спектре. Такой член поможет нам при выводе сигма-модели. В конце мы положим $m = 0$.

Чистый дираковский гамильтониан с одной долиной и нулевой массой обладает эффективной симметрией по обращению времени $H = \sigma_y H^* \sigma_y$. Эта симметрия соответствует T_{\perp} в

модели с двумя долинами, рассмотренной ранее. Если единственным беспорядком является случайный скалярный потенциал, то симметрия не нарушается и система попадает в симплектический класс АII [36; 48; 49; 120]. Обычной реализацией такой симметрии является металл с сильным спин-орбитальным взаимодействием. В нашем случае роль эффективного спина выполняет пространство подрешеток (псевдоспин).

Начнем с более общего случая унитарной симметрии (класс А). Симметрия по обращению времени может нарушаться ненулевой массой или случайным векторным потенциалом в дополнение к скалярному. Нам будет удобнее проделать вывод для случая дираковского гамильтониана с ненулевой постоянной массой m и одним лишь случайным скалярным потенциалом α_0 , как и определено в действии (2.18).

В начале выполним стандартное преобразование Хаббарда—Стратоновича с матрицей Q , чтобы избавиться от члена $(\bar{\psi}\psi)^2$, и проинтегрируем по ψ [140]. В результате получим действие для Q

$$S[Q] = -\frac{\gamma^2}{4\pi v_0^2 \alpha_0} \int d^2r \text{Str} Q^2 + \text{Str} \left[\ln \left(\epsilon - m\sigma_z + iv_0 \boldsymbol{\sigma} \nabla + i\gamma Q \right) \right]. \quad (2.19)$$

Здесь операция **Str** подразумевает взятие не только суперследа от матрицы, но также и полного операторного следа в реальном пространстве. Параметр γ можно выбрать произвольно, поскольку он всего лишь определяет амплитуду поля Q . Мы свяжем его с временем свободного пробега $\gamma = 1/2\tau$. В таком виде γ соответствует масштабу, на котором начинается диффузия, и может быть найден из решения уравнений ренорм-группы (2.17), как объяснялось в разделе 1.3.2.

Дальнейший вывод сигма-модели [140] подразумевает ограничение пространства матриц Q седловым многообразием³ действия (2.19). Это приводит к стандартному многообразию сигма-модели унитарного класса, для которого матрица Q имеет размер 4×4 в пространствах RA и BF и удовлетворяет $Q^2 = 1$. Низкоэнергетические возбуждения соответствуют медленным пространственным вариациям Q в пределах этого многообразия, а эффективная теория является результатом градиентного разложения действия (2.19). Как мы покажем ниже, такое разложение оказывается нетривиальным из-за аномалий в теории дираковских фермионов [141], которые приводят к топологическим вкладам в действие сигма-модели⁴.

Разобьем полное действие (2.19) на вещественную и мнимую часть, $S = S_1 + iS_2$, и начнем с градиентного разложения вещественной части действия

$$S_1[Q] = \frac{1}{2} \text{Str} \ln \left(G_+^{-1} G_-^{-1} + v_0 \gamma \boldsymbol{\sigma} \nabla Q \right). \quad (2.20)$$

Здесь мы ввели специальные обозначения

$$G_{\pm} = \left[\epsilon - m\sigma_z + i\boldsymbol{\sigma} \nabla \pm i\gamma \Lambda \right]^{-1} \quad (2.21)$$

³Строго говоря, седловое приближение применимо при больших значениях безразмерной проводимости $\sigma \gg 1$, в то время как в дираковской точке $\sigma \sim 1$. Однако, это не повлияет на универсальное критическое поведение теории, которое определяется только симметрией и топологией задачи.

⁴Топологический член в сигма-модели для дираковских фермионов можно также вывести методом неабелевой бозонизации [94; 121].

для матриц, диагональных в пространстве RA и содержащих обычные функции Грина в качестве матричных элементов: $G_+ = \text{diag}\{G^R, G^A\}$, $G_- = \text{diag}\{G^A, G^R\}$. Раскладывая (2.20) до второго порядка по ∇Q и используя тождество $G^R - G^A = -2i\gamma G^R G^A$, мы получаем обычный градиентный член

$$S_1[Q] = \frac{\sigma_{xx}}{8} \int d^2r \text{Str}(\nabla Q)^2. \quad (2.22)$$

Множитель σ_{xx} равен безразмерной (в единицах e^2/h) квазиклассической продольной проводимости

$$\sigma_{xx} = -\frac{v_0^2}{2} \mathbf{Tr} \left[(G^R - G^A) \sigma_x (G^R - G^A) \sigma_x \right] = \frac{1}{2\pi} \left[1 + f(\epsilon, m) \frac{\epsilon^2 + \gamma^2 - m^2}{2\gamma} \right], \quad (2.23)$$

которая выражается через функцию

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \left(\arctg \frac{x+y}{\gamma} + \arctg \frac{x-y}{\gamma} \right). \quad (2.24)$$

Вычисление мнимой части $iS_2[Q]$ требует большей аккуратности. Мы используем представление $Q = T^{-1} \Lambda T$ и циклически переставим матрицы под знаком суперследа. Результирующее выражение выразим через вектор $\mathbf{u} = T \nabla T^{-1}$,

$$iS_2[Q] = \frac{1}{2} \mathbf{Str} \left[\ln(G_+^{-1} + iv_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) - \ln(G_-^{-1} + iv_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) \right]. \quad (2.25)$$

Перестановка матриц, приводящая к этой формуле, эквивалентна преобразованию полей $\psi \mapsto T\psi$, в действии (2.18). Это не вполне безобидная процедура с учетом квантовой аномалии [142]. Однако оказывается, что аномальные вклады из двух логарифмов взаимно сокращаются в $iS_2[Q]$. Теперь разложим мнимую часть действия по степеням \mathbf{u} . Первые два члена этого разложения имеют вид

$$iS_2^{(1)} = \frac{iv_0}{2} \mathbf{Str} \left[\Lambda (G^R - G^A) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u} \right] \equiv \pi \int d^2r \text{Str}(\Lambda \mathbf{J} \mathbf{u}), \quad (2.26)$$

$$iS_2^{(2)} = \frac{\sigma_{xy}^I \epsilon_{\alpha\beta}}{2} \int d^2r \text{Str}(u_\alpha \Lambda u_\beta) = \frac{\sigma_{xy}^I}{4} \int d^2r \text{Str}(Q \nabla_x Q \nabla_y Q). \quad (2.27)$$

Множители в уравнениях (2.26), (2.27) имеют смысл спектральной плотности тока $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ и классической части холловской проводимости [76]

$$\sigma_{xy}^I = \frac{v_0^2}{2} \mathbf{Tr} \left[(G^R + G^A) \sigma_x (G^R - G^A) \sigma_y \right] = -\frac{m}{2\pi} f(\epsilon, m). \quad (2.28)$$

Полный ток, а следовательно и линейный член (2.26), обращаются в ноль внутри образца, однако было бы неверным полностью пренебречь этим членом. Вклад $iS_2^{(1)}$ учитывает краевые токи и дает квантовую часть холловской проводимости [76]. Прежде чем рассматривать его, мы должны установить граничные условия для гамильтониана (2.16).

В реальном графене граничные условия перемешивают состояния из двух долин спектра. Мы можем, однако, остаться в рамках теории с одной долиной и предположить, что на границе образца масса обращается в бесконечность: $M \rightarrow \infty$ [143]. Эффекты локализации,

описываемые сигма-моделью, происходят в объеме образца и, следовательно, не чувствительны к граничным условиям. Мы предположим, что $m(\mathbf{r})$ непрерывно изменяется от постоянного значения m внутри образца к некоторому большому значению M за его пределами. Градиент массы отличен от нуля в области края. Более того, мы предположим, что масса меняется медленно на масштабе длины свободного пробега электронов, но быстро по сравнению с характерными длинами сигма-модели. Это позволяет нам разложить функции Грина в (2.26) по степеням ∇m . С помощью тождества Уорда $[\mathbf{r}, G] = iv_0 G \boldsymbol{\sigma} G$ мы получаем

$$J_\alpha(\mathbf{r}) = -\frac{v_0^2}{2\pi} \nabla_\beta m \operatorname{Tr} \left[\sigma_\alpha G^R \sigma_z G^R \sigma_\beta G^R - \sigma_\alpha G^A \sigma_z G^A \sigma_\beta G^A \right]_{\mathbf{r}, \mathbf{r}} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{2\pi} \frac{\partial \sigma_{xy}^\Pi}{\partial m} \nabla_\beta m. \quad (2.29)$$

Возникший здесь фактор является производной по массе от квантовой части холловской проводимости σ_{xy}^Π [76]. Прямое вычисление и интегрирование по m дает

$$\sigma_{xy}^\Pi = -\frac{m}{2\pi} f(m, \epsilon) \quad (2.30)$$

с той же функцией f из (2.24).

Подставляя (2.29) в (2.26) и интегрируя поперек границы образца, мы можем выразить $iS_2^{(1)}$ как интеграл вдоль края, а затем применить теорему Стокса:

$$iS_2^{(1)} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{2} \left[\sigma_{xy}^\Pi(m) - \sigma_{xy}^\Pi(M) \right] \int d^2r \operatorname{Str} (\Lambda \nabla_\alpha u_\beta) = \frac{1}{4} \left(\sigma_{xy}^\Pi + \frac{\operatorname{sgn} M}{2} \right) \int d^2r \operatorname{Str} (Q \nabla_x Q \nabla_y Q). \quad (2.31)$$

Чтобы получить последнее выражение, мы воспользовались тождеством $\epsilon_{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta = \epsilon_{\alpha\beta} u_\beta u_\alpha$ и значением σ_{xy}^Π в пределе бесконечно большого M . Такой же результат можно получить, используя реалистичные граничные условия с перемешиванием двух долин, если предположить, что вторая долина имеет большую щель M . В этом случае $(1/2) \operatorname{sgn} M$ войдет в действие в качестве вклада второй долины в σ_{xy} (см. [120; 141]).

Оба вклада (2.27) и (2.31) в мнимую часть действия содержат одинаковый функционал $\int d^2r \operatorname{Str} (Q \nabla_x Q \nabla_y Q) \equiv 8i\pi N[Q]$. Это хорошо известный топологический инвариант на многообразии сигма-модели [76]; он принимает целочисленные значения с точностью до множителя $8\pi i$. Поскольку мнимая часть действия определена с точностью до целого кратного $2\pi i$, знак M оказывается не важен. Как и предполагалось, теория в объеме не чувствительна к граничным условиям.

Собирая все вклады, мы получаем действие сигма-модели для одной долины дираковских фермионов с массой m :

$$S[Q] = \frac{1}{4} \int d^2r \operatorname{Str} \left[-\frac{\sigma_{xx}}{2} (\nabla Q)^2 + \left(\sigma_{xy} + \frac{1}{2} \right) Q \nabla_x Q \nabla_y Q \right]. \quad (2.32)$$

Топологический член в этом действии равен $i\theta N[Q]$, с углом $\theta = 2\pi\sigma_{xy} + \pi$. В графене масса m равна нулю, поэтому $\sigma_{xy} = 0$, а топологический угол $\theta = \pi$. В результате модель (2.32) оказывается в точности на критической линии перехода между плато квантового эффекта Холла [76], в согласии с [120]. Мы делаем вывод, что графен с плавным беспорядком общего вида (нарушающим симметрию по обращению времени) попадает в критическую точку квантового эффекта Холла с универсальной проводимостью $4\sigma_U^*$ (фактор 4 учитывает

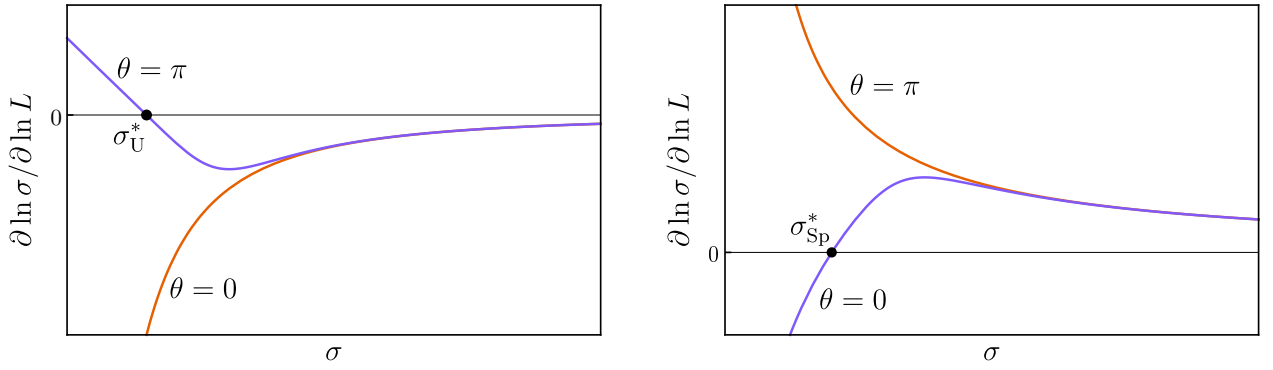


Рис. 2.1 — Схематическое изображение скейлинговых функций $\partial \ln \sigma / \partial \ln L$ в унитарном (левая панель) и симплектическом (правая панель) классах. В унитарном классе без топологического члена функция всюду отрицательна, поэтому даже слабый беспорядок приводит к полной локализации. При $\theta = \pi$ появляется устойчивая точка с проводимостью σ_U^* . Эта точка соответствует критическому состоянию в переходе между плато квантового эффекта Холла. В симплектическом классе с $\theta = 0$ слабая антилокализация приводит к росту проводимости при больших σ . По мере усиления беспорядка может, однако, произойти переход металл-изолятор. Ему соответствует неустойчивая критическая точка с проводимостью σ_{Sp}^* . Наличие топологического члена с $\theta = \pi$ запрещает этот переход и делает бета-функцию всюду положительной.

вырождение по спину и долинам). Скейлинг проводимости схематично изображен на левой панели рис. 2.1. Значение σ_U^* известно из численных расчетов [144–148] и находится в диапазоне $\sigma_U^* \simeq 0.5 \div 0.6$. Формально этот результат справедлив при любой энергии, но фактически он должен наблюдаться вблизи дираковской точки (когда квазиклассическая проводимость $\sim e^2/h$); для больших значений ϵ критическая точка квантового эффекта Холла будет достигнута только при нереалистично низких температурах и очень больших размерах образца.

Теперь рассмотрим случай, когда симметрия по обращению времени сохраняется. Например, это происходит, если основной тип беспорядка кулоновские примеси. Система принадлежит к симплектическому классу АII. Вывод сигма-модели начинается с удвоения переменных ψ , чтобы включить все мягкие моды (как диффузоны, так и купероны), возникающие из-за дополнительной симметрии [140]. В итоге Q является матрицей 8×8 , которая ограничена дополнительным условием $Q = \bar{Q}$, связанным с зарядовым сопряжением⁵. Вещественная часть действия вычисляется так же, как и в унитарном случае, и имеет вид (2.20) с дополнительным множителем $1/2$.

Поскольку статистическая сумма симплектической модели должна быть вещественной, мнимая часть действия $S_2[Q]$ может принимать одно из двух возможных значений: 0 или π . Дискретность $S_2[Q]$ предполагает, что мнимая часть действия пропорциональна топологическому инварианту на многообразии сигма-модели. Нетривиальная топология может возникнуть только в компактном (фермионном) секторе Q . Соответствующее пространство для симплектического класса является многообразием $\mathcal{M}_F = O(4N)/O(2N) \times O(2N)$, где N —

⁵Более детальный вывод сигма-модели симплектического класса будет изложен в разделе 3.5.1

число реплик. В минимальной модели $N = 1$, однако большие значения N могут понадобиться, если модель применяется для вычисления средних от большого числа функций Грина. Топологический инвариант принимает значения из гомотопической группы [149]

$$\pi_2(\mathcal{M}_F) = \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & N = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & N \geq 2. \end{cases} \quad (2.33)$$

В случае $N = 1$ эта группа богаче, чем при $N \geq 2$. Однако $S_2[Q]$ может принимать только два неэквивалентных значения, поэтому только определенная \mathbb{Z}_2 подгруппа [150] полной $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ играет роль. Так и должно быть, поскольку критические свойства теории не могут зависеть от N .

Чтобы наглядно продемонстрировать возникающую топологию и вычислить топологические инварианты, проанализируем случай $N = 1$ более подробно. Генераторами компактного сектора сигма-модели являются антисимметричные матрицы 4×4 , которые антикоммутируют с $\Lambda \equiv \rho_z$. Таких матриц ровно четыре: $\rho_x \tau_y$, $\rho_y \tau_0$, $\rho_y \tau_x$ и $\rho_y \tau_z$. Здесь ρ_i и τ_i обозначают матрицами Паули в пространствах RA и PH (последнее пространство возникло из-за удвоения полей). Эти генераторы делятся на две взаимно коммутирующие пары, каждая из которых генерирует двумерную сферу (диффузоры и купероны). Одновременная инверсия обеих сфер не меняет Q , поэтому компактный сектор модели является многообразием $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$. Таким образом возникает два топологических инварианта $I_{1,2}[Q]$, которые соответствуют степени накрытия каждой сферы, в соответствии с (2.33). Наиболее общий вид топологического члена в этом случае $iS_2 = i\theta_1 I_1 + i\theta_2 I_2$. Из-за симметрии по обращению времени действие инвариантно относительно перестановки диффузорной и куперонной сфер, что дает $\theta_1 = \theta_2 \equiv \theta$, где θ равна либо 0, либо π . Явное выражение для топологического члена при $N = 1$ можно написать в терминах $\mathbf{u} = T\nabla T^{-1}$

$$iS_2[Q] = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{8} \int d^2r \text{Str}[(\Lambda \pm 1)\tau_2 u_\alpha u_\beta] \equiv i\pi(I_1[Q] + I_2[Q]), \quad (2.34)$$

что соответствует $\theta = \pi$. Неоднозначность знака здесь никак не влияет на наблюдаемые величины.

В том что для дираковских фермионов со случайным потенциалом действительно получается $\theta = \pi$, можно убедиться при помощи простого рассуждения. Если симметрия по обращению времени нарушена, купероны приобретают массу и многообразие уменьшается до одной лишь диффузорной сферы. А как было показано выше, для унитарного класса мнимая часть действия должна быть $iS_2[Q] = i\pi I_1[Q]$. Значит и в симплектическом классе $\theta = \pi$. В случае $N \geq 2$ выражение для топологического члена не имеет приведенного вида⁶, но топологический угол по-прежнему $\theta = \pi$. Это следует из естественного вложения $\mathcal{M}_F|_{n=1} \subset \mathcal{M}_F|_{n \geq 2}$.

В обычном металле симплектического класса без топологического члена наблюдается переход металл-изолятор при $\sigma_{\text{Sp}}^* \approx 1.4$ [151]. Если проводимость меньше этой критической

⁶В главе 5 мы построим другое выражение, непосредственно в терминах матрицы Q , для аналогичного топологического члена в классе СИ при помощи конструкции действия Весса—Зумино. Это выражение будет одинаково справедливым для любого числа реплик.

величины, то локализация приводит систему в состояние изолятора, в то время как в металлической фазе, $\sigma > \sigma_{sp}^*$, происходит антилокализация. Скейлинг проводимости схематически показан на правой панели рис. 2.1. Используя аналогию с критической точкой квантового эффекта Холла в унитарном классе, мы утверждаем, что топологический член с $\theta = \pi$ подавляет эффекты локализации, когда проводимость мала. Поэтому переход металл-изолятор в симплектическом классе с топологическим членом не возникает, и система при всех параметрах остается в металлом, см. рис. 2.1.

Это утверждение можно доказать простым рассуждением от противного [152]. Предположим, что в графене с расцепленными долинами и очень сильным беспорядком произошла полная локализация. Тогда существует конечный масштаб локализационной длины ξ . Давайте свернем графен в трубку с радиусом $R \gg \xi$ и длиной $L \gg R$. Кроме того предположим, что через эту трубку пропущен магнитный поток, равный половине кванта. Такая величина магнитного потока не нарушает симметрию по обращению времени, поэтому система остается в симплектическом классе. Элементарный расчет показывает, что при любом значении химического потенциала в такой трубке будет нечетное количество проводящих каналов в каждой долине [152]. Как известно, в квазиодномерной металлической проволоке симплектического класса с нечетным числом каналов не наступает полная локализация. Один канал всегда топологически защищен и имеет абсолютную прозрачность при любой силе беспорядка и длине проволоки [153–157]. Этот результат противоречит нашему исходному предположению о полной локализации электронов в двумерном образце. Действительно, из-за условия $R \gg \xi$ локализованные состояния не чувствуют периодических граничных условий на цилиндре. В итоге все состояния в квазиодномерной системе должны также быть полностью локализованы. Таким образом мы получили противоречие и доказали, что полная локализация двумерных дираковских фермионов случайным потенциалом невозможна. Численное моделирование графена с плавным потенциальным беспорядком [44; 158–160] действительно подтверждает этот вывод и демонстрирует антилокализацию при любой силе беспорядка.

2.3 Квантовый эффект Холла в графене

Одной из характерных особенностей графена является необычное квантование холловской проводимости в поперечном магнитном поле. Как было показано уже в самых первых экспериментах [3–9], холловская проводимость графена принимает лишь нечетные значения в единицах $2e^2/h$ (здесь коэффициент 2 связан с вырождением по спину)

$$\sigma_{xy} = (2k + 1) \frac{2e^2}{h}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.35)$$

Благодаря такому необычному квантованию, холловские измерения широко используются в современных экспериментах для характеристики образцов графена. Замечательно, что признаки квантования холловской проводимости в графене наблюдаются даже при комнатной температуре [9].

Простое объяснение нечетного квантования (2.35) в однослойном графене [10] основывается на структуре уровней Ландау для двумерных безмассовых дираковских электронов [115]. В чистом графене энергии уровней Ландау принимают значения

$$\epsilon_N = \hbar\omega_c \operatorname{sgn} N \sqrt{|N|}, \quad \omega_c = v_0 \sqrt{\frac{2eB}{\hbar c}} \quad (2.36)$$

с произвольным целым N . Плато холловской проводимости отождествляются с классическими значениями $\sigma_{xy} = n_e e c / B$ при концентрациях n_e , соответствующих целочисленному фактору заполнения $n_e \hbar c / e B$ (то есть целому числу заполненных уровней Ландау). Это рассуждение подкрепляется вычислением холловской проводимости при наличии беспорядка с помощью уравнения Больцмана [10] или самосогласованного борновского приближения [22], то есть для уширенных беспорядком уровней Ландау.

Однако из наличия спектральных щелей в плотности состояний между отдельными уровнями Ландау не следует квантовый эффект Холла! Действительно, несмотря на то, что холловская проводимость квантуется как функция энергии Ферми в чистой системе, это не приводит к квантовому эффекту Холла. Дело в том, что уровень Ферми сам по себе не является непрерывной функцией плотности; он совершает прыжки между полностью занятыми и пустыми уровнями Ландау по мере возрастания концентрации электронов. В результате зависимость σ_{xy} от концентрации (которая и измеряется в экспериментах) остается гладкой и не имеет никаких плато. Учет уширения уровней Ландау беспорядком приводит лишь к осцилляциям $\sigma_{xy}(n_e)$, но не к ее квантованию [161]. На самом деле, во-первых, для квантового эффекта Холла вообще не требуется квантования плотности состояний [141], во-вторых, положение переходов между плато не обязательно соответствует центрам уровней Ландау [77; 162] и, в-третьих, квантование холловской проводимости возможно только благодаря квантовой локализации электронов беспорядком (см. обзоры [75; 131; 163]). Нечетное квантование холловской проводимости (2.35) в графене также требует более строгого обоснования с учетом квантовой интерференции, которая имеет важное значение в любой двумерной системе. Полный учет эффектов беспорядка должен привести к точному квантованию холловской проводимости, а переходы между плато должны стать квантовыми фазовыми переходами с универсальными критическими свойствами.

Неуниверсальность результата (2.35) сразу становится очевидной по следующим соображениям. Если беспорядок в графене имеет самый общий вид и не обладает какой-либо особой симметрией, то дираковская природа носителей не может проявиться на больших масштабах длины. Именно это происходит в графене с произвольным (сохраняющим лишь симметрию по обращению времени) беспорядком в нулевом магнитном поле. В такой системе локализация приводит к убыванию проводимости с понижением температуры [48; 49]. Критические свойства неупорядоченного графена не отличаются от любой другой двумерной системы. В итоге холловская проводимость будет принимать все целые значения кратные $2e^2/h$ вместо нечетного набора (2.35). Кроме того, σ_{xy} должна быть равна нулю в дираковской точке из-за симметрии между частицами и дырками. Традиционная теория квантового эффекта Холла [76] предсказывает полную локализацию ($\sigma_{xx} = 0$) и холловское плато вместо квантового

перехода в этом случае. Поэтому наблюдение нечетного квантования (2.35) представляет собой неожиданный экспериментальный результат, требующий теоретического объяснения.

Единственной причиной нестандартного квантования холловской проводимости является наличие некоторой особой симметрии, которая сохраняется беспорядком и таким образом изменяет критическое поведение системы. Необычные транспортные свойства графена со специальными симметриями беспорядка при $B = 0$ были изучены в предыдущих разделах (см. также [91–94; 120; 121]). Однако эффекты квантовой локализации (и, следовательно, особенности, вытекающие из симметрии беспорядка) не учитывались в большинстве аналитических работ, посвященных квантовому эффекту Холла в графене [10; 22; 164; 165]. Тем не менее численные исследования неупорядоченного графена в магнитном поле [158; 166; 167] действительно показали, что результат чувствителен к симметрии беспорядка. В этом разделе мы проанализируем свойства графена в магнитном поле и определим условия, при которых может возникать нечетное квантование (2.35).

Начнем с эффективного гамильтониана чистого графена во внешнем магнитном поле

$$H = v_0 \tau_0 \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (2.37)$$

Здесь матрицы Паули σ и τ , как и раньше, действуют в пространстве двух подрешеток A и B и двух долин K и K' . Полная симметричная классификация для этого гамильтониана без магнитного поля была построена в разделе 1.1.3. При наличии внешнего магнитного поля симметрия по обращению времени нарушается. Остается лишь SU(2) симметрия в пространстве долин [36], генерируемая матрицами $\tau_{x,y,z}$, и киральная симметрия C_0 , которая возникает только при нулевой энергии: $H = -\sigma_z \tau_z H \sigma_z \tau_z$. Также есть комбинации C_0 и вращений в пространстве долин, которые мы обозначаем $C_{x,y,z}$, см. (1.11).

Сначала рассмотрим ситуацию, когда все киральные симметрии нарушены. Это неизбежно происходит, если энергия Ферми сдвинута из дираковской точки (например напряжением затвора). При нулевой энергии Ферми киральная симметрия может быть нарушена, например, любым потенциальным беспорядком. В этом случае у нас есть только две возможности: смешанные (τ_z нарушена) или не смешанные (τ_z сохраняется) долины.

2.3.1 Разделенные долины

Начнем со случая разделенных долин, подразумевая плавный беспорядок на масштабе периода решетки. Мы покажем, что такая симметрия как раз и отвечает за нечетное квантование (2.35). Действительно, вырождение в пространстве долин приводит к квантованию холловской проводимости с шагом $4e^2/h$ (коэффициент 4 состоит из удвоения по спину и по долинам). Чтобы доказать справедливость уравнения (2.35), достаточно установить наличие квантовохолловского перехода при нулевой концентрации носителей. Для этого мы используем эффективную сигма-модель [140] для неупорядоченного графена с разделенными долинами, выведенную в предыдущем разделе (см. также [168]). Модель разделяется на два независимых

сектора, соответствующе двум долинам. В каждом секторе действие имеет вид (2.32)

$$S[Q] = \frac{1}{4} \int d^2r \text{Str} \left[-\frac{\sigma_{xx}}{2} (\nabla Q)^2 + \left(\sigma_{xy} \pm \frac{1}{2} \right) Q \nabla_x Q \nabla_y Q \right]. \quad (2.38)$$

Два параметра модели σ_{xx} и σ_{xy} соответствуют продольной и холловской проводимости в расчете на одну долину и одну компоненту спина в единицах e^2/h . Это действие отличается от обычной сигма-модели в магнитном поле [76] наличием добавки $\pm 1/2$ к σ_{xy} . Такой дополнительный вклад возникает из-за квантовой аномалии дираковских фермионов (см. предыдущий раздел, а также [94; 121; 141; 169]). Это единственное следствие дираковской природы носителей, которое выживает на больших масштабах и влияет на критические свойства. Знаки перед аномальными добавками $1/2$ противоположны в двух долинах из-за глобальной симметрии четности ($x \mapsto -x$, $K \leftrightarrow K'$) общего действия. Мнимая часть действия (2.38) определяется топологическим членом $\text{Im} S[Q] = \theta N[Q]$, который принимает целые значения, а соответствующий угол $\theta = 2\pi\sigma_{xy} \pm \pi$ определяется истинной, зависящей от магнитного поля холловской проводимостью в расчете на одну долину.

Исходные значения σ_{xx} и σ_{xy} даются соответствующими квазиклассическими выражениями (2.23), (2.28) и (2.30). Квантовые поправки, которые приводят к локализации, и, следовательно, квантовому эффекту Холла, являются результатом перенормировки действия (2.38). Поток ренорм-группы в терминах σ_{xx} и σ_{xy} был установлен в [76; 77] и показан на рис. 2.2 штриховыми линиями. Эффективная теория (2.38) инвариантна относительно сдвига угла $\theta \mapsto \theta + 2\pi$, следовательно ренорм-групповой поток также периодичен по σ_{xy} . Переходы между плато квантового эффекта Холла происходят, когда значение θ проходит через нечетное кратное π . Из-за аномального вклада в (2.38), это случается, в частности, в дираковской точке, когда $\sigma_{xy} = 0$. Таким образом, мы показали справедливость нечетного квантования (2.35) в случае, когда беспорядок не перемещивает долины. Отсутствие аномального вклада $\pm 1/2$ в топологическом члене (2.38) привело бы к возникновению плато, а не к переходу при $\epsilon = 0$ аналогично традиционному квантовому эффекту Холла.

Скачок холловской проводимости между плато происходит, когда уровень Ферми пересекает критическое делокализованное состояние при $\theta = \pi$. Все остальные состояния локализованы и не дают вклад ни в продольную, ни в холловскую проводимость. Величина продольной проводимости имеет максимум в точке перехода со значением

$$\sigma_{xx} = 4 \times \sigma_U^* \approx \frac{2e^2}{h}. \quad (2.39)$$

Величина σ_U^* лежит в диапазоне $0.5 \div 0.6$ (см. [144–148], а также предыдущий раздел). Множитель 4, как и ранее, связан с вырождением по спину и долинам. Значение (2.39) согласуется с экспериментальными измерениями для графена в сильном магнитном поле в дираковской точке [3–9; 170].

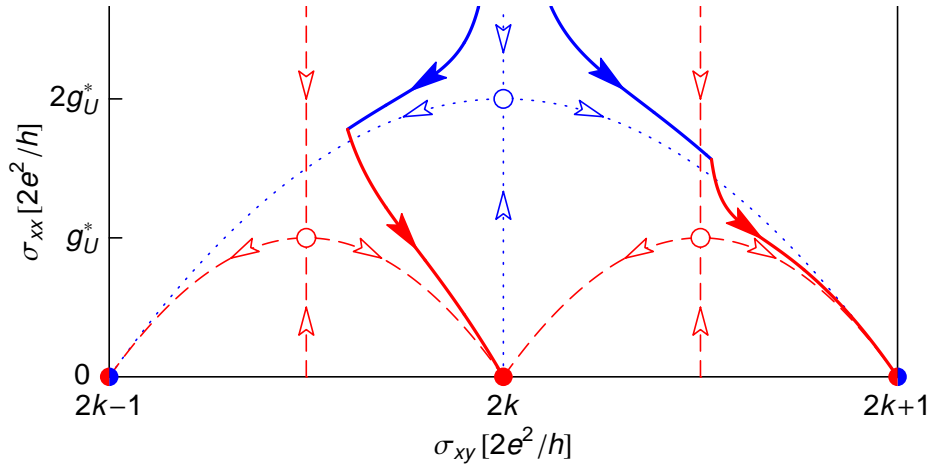


Рис. 2.2 — Ренорм-групповой поток в координатах σ_{xx} и σ_{xy} в графене с разделенными либо перемешанными долинами. Пунктирные/штриховые линии показывают сепаратрисы потока для этих двух случаев. Белые кружки соответствуют неустойчивым фиксированным точкам переходов между плато. Стабильные фиксированные точки (плато) показаны цветными кружками. Две сплошные линии показывают возможное направление потока к четному и нечетному плато в модели со слабо перемешанными долинами. Каждая из этих кривых имеет излом, когда текущий масштаб сравнивается с l_{mix} .

2.3.2 Слабое перемешивание долин

Теперь рассмотрим случай, когда долины слабо перемешиваются беспорядком. Например, кулоновские примеси рассеивают электроны между долинами с небольшой скоростью τ_{mix}^{-1} по сравнению со скоростью рассеяния τ^{-1} внутри долины. В полном действии возникает дополнительный малый член, связывающий матрицы Q_K и $Q_{K'}$, соответствующие двум долинам,

$$S[Q_K, Q_{K'}] = S[Q_K] + S[Q_{K'}] + \frac{\hbar\rho}{\tau_{\text{mix}}} \text{Str} Q_K Q_{K'}. \quad (2.40)$$

Здесь $S[Q_{K,K'}]$ дается уравнением (2.38), а ρ — плотность состояний на уровне Ферми. Это возмущение релевантно и приводит к установлению тождества $Q_K = Q_{K'}$ в инфракрасном пределе. Соответствующая длина смешивания долин определяется отношением $l_{\text{mix}}/l \sim (\tau_{\text{mix}}/\tau)^{1/z}$. Ультрафиолетовые масштабы l и τ определяются средними длиной и временем свободного пробега. В сильном магнитном поле (для низких уровней Ландау), длина l имеет порядок магнитной длины: $l \sim l_B = \sqrt{\hbar c/eB}$, и среднее время свободного пробега $\tau \sim \hbar l_B^2 \rho$. Динамический индекс принимает значение $z = 2$ для невзаимодействующих электронов, а также в случае короткого взаимодействия [171]. Для кулоновского взаимодействия z принимает другое значение [172]. Оно приблизительно известно из экспериментов [173] и равно $z \simeq 1$.

На масштабах больше l_{mix} мы имеем $Q_K = Q_{K'}$, и аномальные вклады $\pm 1/2$ в топологических членах сокращаются в (2.40). В итоге получается унитарная сигма-модель для обычного квантового эффекта Холла [49] с $\theta = 4\pi\sigma_{xy}$ и традиционное квантование холловской

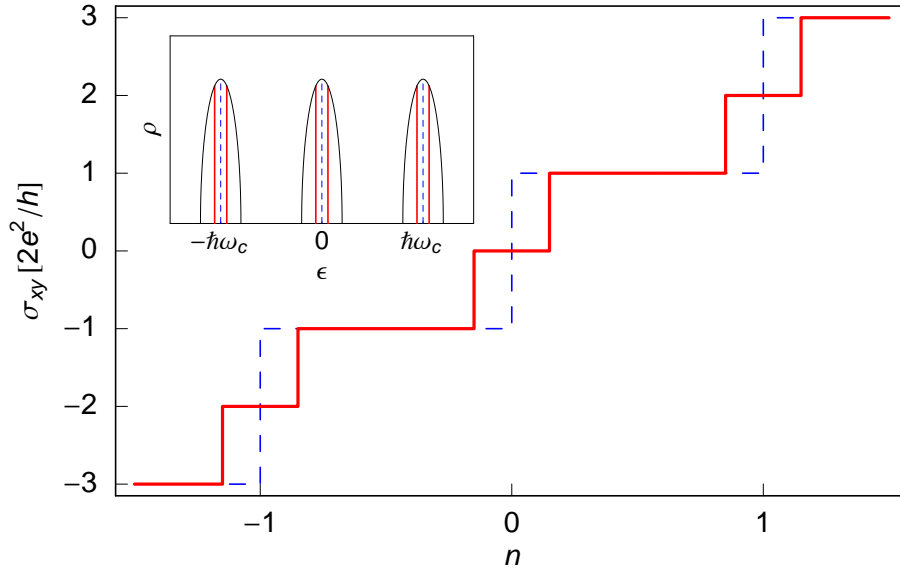


Рис. 2.3 — Квантовый эффект Холла в графене с плавным беспорядком при нулевой температуре. Холловская проводимость как функция фактора заполнения: нечетное (разделенные долины, штриховые линии) и обычное (слабое перемешивание долин, сплошные линии) квантование. На вставке показана плотность состояний. В центре уровня Ландау находится делокализованное состояние (штриховая линия), когда долины разделены. Перемешивание долин приводит к расщеплению делокализованного состояния (сплошные линии).

проводимости

$$\sigma_{xy} = k \frac{2e^2}{h}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.41)$$

Делокализованное состояние в центре каждого уровня Ландау дважды вырождено, когда долины разделены. Слабое перемешивание долин приводит к небольшому расщеплению делокализованного состояния в рамках одного уширенного беспорядком уровня Ландау. В результате возникает новое четное плато между двумя нечетными, когда химический потенциал попадает между двумя расщепленными делокализованными состояниями (см. рис. 2.3). В этом случае продольная проводимость σ_{xx} имеет два разделенных максимума $2 \times \sigma_U^* \simeq e^2/h$ (здесь фактор 2 из-за вырождения по спину). Расщепление делокализованного состояния из-за смешивания долин полностью аналогично такому же расщеплению спин-орбитальными примесями в случае обычного (но вырожденного по спину) квантового эффекта Холла [174; 175].

Ренорм-групповой поток σ_{xx} и σ_{xy} для обоих случаев разделенных и смешанных долин показан на рис. 2.2. Для случая слабо смешанных долин (сплошные линии) происходит кроссовер между этими двумя потоками на длине l_{mix} . Четные плато гораздо короче нечетных (2.35), когда перемешивание долин слабое. Если долины полностью разделены, то квантовый переход между двумя последовательными нечетными плато имеет конечную ширину, определяемую зависящей от температуры длиной сбоя фазы l_φ . Состояния, близкие к центру уровня Ландау, локализованы на длине $l_{\text{loc}} \sim l(\delta n)^{-\nu}$, где δn — отклонение фактора заполнения $n = 2\pi l_B^2 n_e$

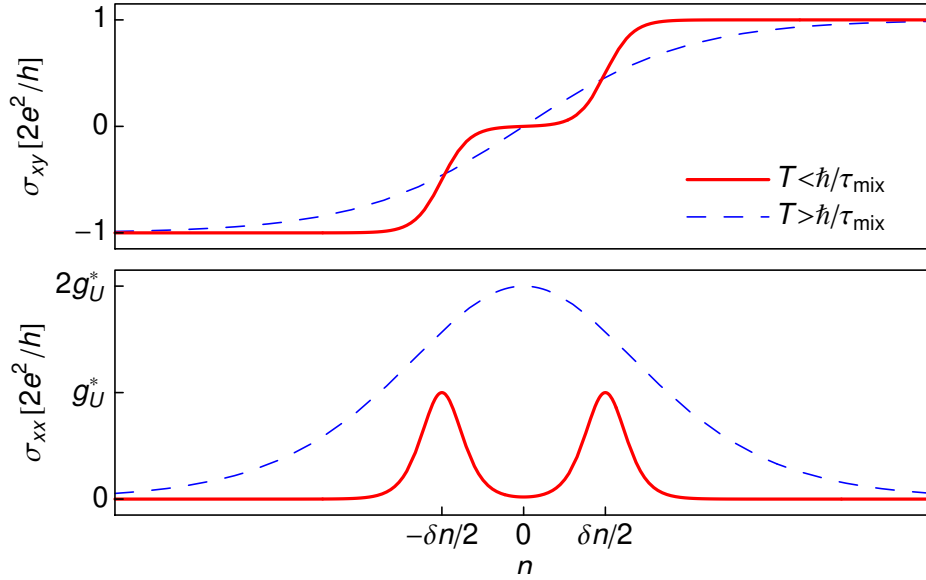


Рис. 2.4 — Переход между плато при конечной температуре. Двойной скачок в σ_{xy} и двойной пик в σ_{xx} (сплошные линии) видны при достаточно низких температурах $T \lesssim \hbar/\tau_{\text{mix}}$. В противном случае наблюдается один широкий переход (штриховые линии).

от точки перехода, а $\nu \simeq 2.3$ — критический индекс локализационной длины для квантово-холловского перехода. Таким образом, ширину перехода можно оценить как $\delta n \sim (l/l_\varphi)^{1/\nu}$. Если длина перемешивания долин l_{mix} больше, чем l_φ , четные плато будут полностью размыты: расщепление между критическими состояниями меньше, чем делокализованные области вокруг них. Четное плато становится видимым при достаточно низких температурах, когда l_φ превышает l_{mix} (см. рис. 2.4). Поэтому ширина четного плато оказывается порядка

$$\delta n_{\text{even}} \sim \delta n(l_\varphi = l_{\text{mix}}) \sim \left(\frac{l}{l_{\text{mix}}}\right)^{1/\nu} \sim \left(\frac{\tau}{\tau_{\text{mix}}}\right)^{1/\nu z}. \quad (2.42)$$

Для кулоновских примесей типичное значение расщепления можно оценить как $\delta n_{\text{even}} \sim 0.05$ для самого низкого уровня Ландау и ~ 0.1 для более высоких уровней [176]. В эксперименте температура должна быть достаточно низкой, для того чтобы наблюдать расщепление перехода, $T \lesssim \hbar/\tau_{\text{mix}}$. Это соответствует $T \lesssim 100$ мК для самого низкого уровня Ландау и $T \lesssim 1$ К для более высоких уровней. Эти значения находятся в разумном согласии с экспериментами по слабой локализации в слабых магнитных полях [177–179]. При более высоких температурах вместо двух расщепленных переходов будет виден уширенный скачок холловской проводимости двойной амплитуды (рис. 2.4).

Помимо междолинного рассеяния, существует еще два механизма, приводящие к появлению четных плато: зеемановское расщепление и электрон-электронное взаимодействие. Эффект Зеемана слаб в графене, тем не менее именно этим механизмом объяснялось возникновение нулевого плато в сильных магнитных полях в работе [170]. Альтернативный стонеровский механизм был предложен в работе [180]. Отталкивание между электронами может привести к неустойчивости [43; 181] и спонтанно нарушить симметрию по спину и/или долинам. Отметим, что эта неустойчивость полностью расщепляет уровень Ландау и

приводит к появлению четного плато, сравнимого по ширине с нечетными плато, по мере увеличения магнитного поля или подвижности электронов [181]. В то же время расщепление перехода квантового эффекта Холла за счет перемешивания долин беспорядком не зависит от силы магнитного поля. Это может быть использовано, чтобы экспериментально отличить стонеровское расщепление от расщепления, вызванного беспорядком.

2.3.3 Киральный беспорядок

До сих пор мы рассматривали произвольный беспорядок в каждой долине. Ранее в этой главе было показано, что, если беспорядок сохраняет киральную симметрию C_z , то продольная проводимость при нулевой энергии в точности равна $4e^2/\pi h$. Внешнее магнитное поле также не нарушает киральную симметрию и, следовательно, не изменяет значение проводимости [138]. Это приводит нас к выводу, что переход между плато в дираковской точке как-то модифицируется при наличии C_z симметрии. Действительно, найденное нами универсальное значение $\sigma_{xx} = 4e^2/\pi h$, см. (2.8), отличается от значения (2.39), характерного для обычного перехода между плато квантового эффекта Холла.

В общем случае киральный беспорядок в одной долине имеет вид случайного (абелевого) векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. При этом нулевой уровень Ландау остается в точности вырожденным [182], как следует из теоремы Атья—Зингера [183—186]. Более того, можно явно найти волновые функции при нулевой энергии. С помощью калибровочного преобразования произвольный двумерный векторный потенциал выражается в виде ротора некоторого скалярного поля $\phi(\mathbf{r})$:

$$A_x = -\nabla_y \phi, \quad A_y = \nabla_x \phi. \quad (2.43)$$

Это поле ϕ однозначно определяется (вообще говоря, неоднородным) магнитным полем $B(\mathbf{r})$, проходящим через двумерный образец, при помощи уравнения Пуассона $\nabla^2 \phi = B$. Предположим, что однородная часть магнитного поля B_0 , которая обеспечивает возникновение уровней Ландау, направлена вверх, $B_0 > 0$. Тогда функция ϕ растет на бесконечности как $\phi \sim B_0 r^2$. Все волновые функции с нулевой энергии будут полностью лежать в подрешетке В. Один из возможных наборов таких функций (с точностью до нормировки), имеет вид

$$\Psi_m^B(x, y) = (x - iy)^m \exp(-e\phi/c). \quad (2.44)$$

Индекс m принимает целые неотрицательные значения. Полное вырождение нулевого уровня Ландау оказывается в точности равным полному магнитному потоку (в единицах кванта потока) через двумерный образец.

Точное вырождения уровня Ландау подразумевает отсутствие локализации. Когда химический потенциал лежит на нулевой энергии, система ведет себя так же, как если бы она была чистой. Это означает, что эффект Холла будет классическим, а не квантовым, с

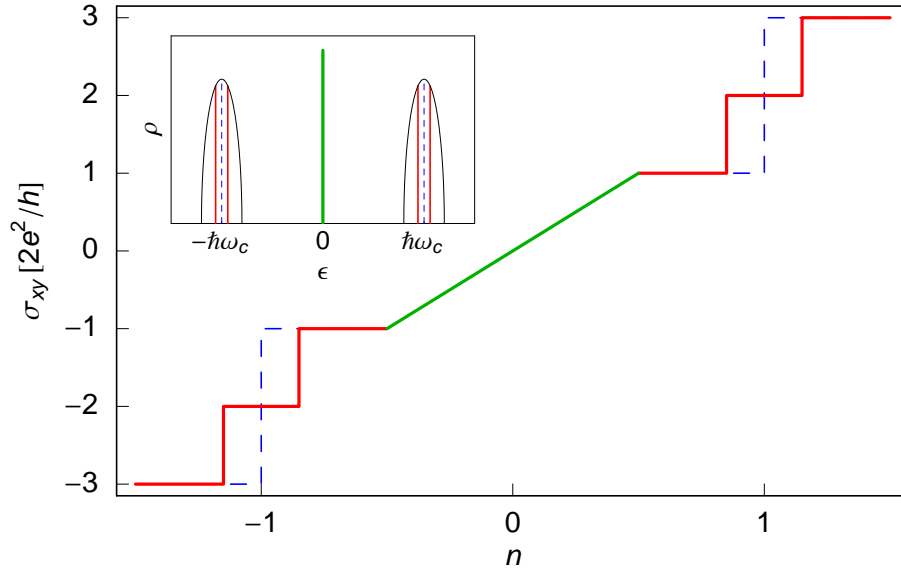


Рис. 2.5 — Классический эффект Холла в графене с киральным беспорядком (случайный векторный потенциал). Киральная симметрия обеспечивает вырождение нулевого уровня Ландау; холловская проводимость растет линейно с концентрацией электронов по мере заполнения этого уровня. В абелевом случае (C_0 и C_z киральность) возникают только нечетные плато при переходе между ненулевыми уровнями Ландау (штриховая линия). Неабелевый калибровочный беспорядок (только C_z киральность), приводит к расщеплению переходов и появлению четных плато (сплошная линия). На вставке схематически показана плотность состояний с вырожденным нулевым уровнем Ландау.

линейной зависимостью холловской проводимости от концентрации электронов n_e :

$$\sigma_{xy} = \frac{n_e e c}{B} = n \frac{4e^2}{h}. \quad (2.45)$$

Эта классическая зависимость сохраняется, пока фактор заполнения находится в пределах нулевого уровня Ландау, $|n| < 1/2$. При этом продольная проводимость остается постоянной, $\sigma_{xx} = 4e^2/\pi h$. Поведение холловской проводимости в этом случае показано на рис. 2.5.

Теперь рассмотрим случай, когда беспорядок слабо перемешивает долины, но сохраняет C_z киральность. Напомним, что для случайного скалярного потенциала в дираковской точке междолинное рассеяние приводит к расщеплению перехода квантового Холла на два и появлению плато $\sigma_{xy} = 0$ между ними. В этом случае продольная проводимость равна нулю. Однако для кирального беспорядка проводимость при $n = 0$ остается равной $4e^2/\pi h$, а это подразумевает отсутствие плато. Такое поведение объясняется так же, как и в случае абелевого векторного потенциала: нулевой уровень Ландау остается в точности вырожденным. Но на этот раз беспорядок перемешивает долины, а значит имеет вид случайного неабелевого векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, который является матрицей в пространстве долин. Вырождение нулевого уровня Ландау по-прежнему следует из теоремы Атья—Зингера [183—186], однако явная конструкция волновых функций нулевой энергии немного видоизменяется.

Выразим случайный векторный потенциал в виде [187]

$$A_+ = \frac{ic}{e} g^{-1} \partial_+ g, \quad A_- = -\frac{ic}{e} g \partial_- g^{-1}. \quad (2.46)$$

Здесь $A_{\pm} = A_x \pm iA_y$, $\partial_{\pm} = \nabla_x \pm i\nabla_y$, а g — подходящим образом выбранная матрица в пространстве долин. Волновые функции нулевого уровня Ландау снова лежат в подрешетке В и имеют вид

$$\Psi_m^B(x, y) = (x - iy)^m g_{1,2}, \quad (2.47)$$

где $g_{1,2}$ — любой из двух столбцов матрицы g .

Холловская проводимость по-прежнему классически зависит от концентрации в пределах нулевого уровня Ландау: $\sigma_{xy} = 4ne^2/h$ при $|n| < 1/2$. Однако остальные переходы между нечетными плато (вдали от дираковской точки) расщепляются на пары, и между ними появляются дополнительные узкие четные плато (см. рис. 2.5).

Экспериментальное наблюдение узкого перехода между плато в дираковской точке указывает, что доминирующим механизмом рассеяния в графене является плавный потенциальный беспорядок. Это также согласуется с наблюдаемой величиной минимальной проводимости при отсутствии магнитного поля, которая оказывается заметно больше, чем $4e^2/\pi h$.

Глава 3

Полная статистика переноса заряда в графене

В предыдущих главах мы подробно рассмотрели транспортные свойства бесконечного графена с разными типами беспорядка. Однако в реальных экспериментах, а также во многих численных моделях графена [44; 158–160; 188; 189], изучаются образцы вполне конкретной формы и конечных размеров. Причем, как оказывается, транспортные свойства могут существенно зависеть от того, каким именно образом они измеряются.

Самый простой пример таких моделей представляет собой прямоугольный образец ширины W и длины L , см. рис. 3.1. Для такой системы можно вычислить или измерить кондактанс G , а затем определить «проводимость» по формуле $\sigma \equiv GL/W$ даже в баллистических условиях, когда L много меньше средней длины свободного пробега l . Замечательно, что для графена в дираковской точке эта баллистическая «проводимость» принимает универсальное значение $4e^2/\pi h$ в чистом случае [16; 33]. Образцы такого вида были также исследованы экспериментально [190–194], и баллистическое значение проводимости $4e^2/\pi h$ было подтверждено в пределе $W \gg L$. Эта геометрия особенно удобна для анализа эволюции электронного транспорта от баллистического к диффузному пределу по мере увеличения концентрации примесей или размера образца.

Полное описание электронного транспорта в системах конечного размера включает не только кондактанс, но и более высокие моменты распределения перенесенного заряда [195; 196]. Например, второй момент этого распределения связан с дробовым шумом, интенсивность которого характеризуется фактором Фано F [33]. Весьма неожиданно в коротком и широком образце графена ($W \gg L$) фактор Фано принимает универсальное значение $F = 1/3$, что совпадает с хорошо известным результатом для диффузной металлической проволоки [197]. Это противоречит стандартным представлениям о чистых металлических образцах, в которых дробовой шум должен отсутствовать ($F = 0$). Фактор Фано $F = 1/3$ в чистом графене связан с тем [33], что ток переносится большим количеством затухающих с разной скоростью мод. Кроме того, полное распределение коэффициентов прохождения для гамильтониана Дирака в образце с размерами $W \gg L$ совпадает с распределением для мезоскопических металлических проволок в диффузионном режиме [198].

Влияние беспорядка на дробовой шум изучалось численно в [188; 189], где было найдено значение фактора Фано $F \approx 0.3$ всюду в кроссовере от баллистического к диффузному режиму. Фактор Фано близкий к $1/3$ также наблюдался в дираковской точке экспериментально [192–

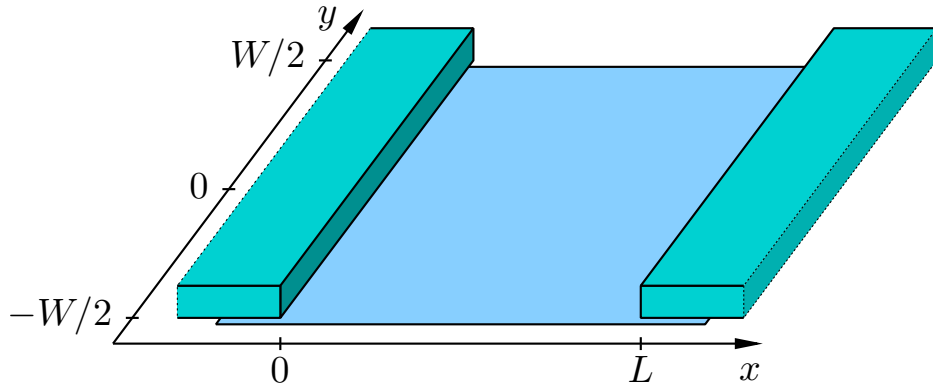


Рис. 3.1 — Схематическое изображение баллистического образца графена для двухконтактного измерения. Графен размером $L \times W$ расположен между двумя параллельными металлическими контактами. Мы предполагаем, что $W \gg L$.

194; 199]. По мере увеличения химического потенциала он постепенно снижается, стремясь к нулю при больших концентрациях носителей.

В этой главе будет развита последовательная теория, позволяющая описывать баллистический транспорт в образцах, аналогичных изображенному на рис. 3.1. Сначала мы изучим транспортные свойства образца без примесей, непосредственно решая уравнение Дирака с соответствующими граничными условиями для произвольной энергии. В дальнейшем мы адаптируем для графена метод матричных функций Грина, развитый Назаровым [200; 201]. Этот метод позволяет эффективно учитывать примеси в системе и дает полную статистику переноса заряда. Такой подход наиболее удобен вблизи дираковской точки. Мы также проведем сравнение транспортных свойств баллистических и диффузных образцов. В последнем случае результаты напрямую получаются из нелинейной сигма-модели.

3.1 Чистый образец

В этом разделе мы изучим транспортные свойства чистого прямоугольного образца графена с размерами $L \times W$ в двухконтактном эксперименте, как показано на рис. 3.1. Контакты прикреплены к двум сторонам ширины W и отстоят друг от друга на расстояние L . Мы выбираем ось x в направлении тока и располагаем контакты при $x = 0$ и $x = L$. Будем также предполагать $W \gg L$, что позволит нам игнорировать граничные эффекты на краях образца, параллельных оси x (при $y = \pm W/2$).

Будем использовать дираковский гамильтониан с одной долиной (результаты будут умножены на 4 для учета долинного вырождения и спина)

$$H = \sigma p. \quad (3.1)$$

В этой и следующих главах мы для упрощения формул, как обычно, полагаем $\hbar = 1$, а также дополнительно считаем единичной фермиевскую скорость $v_0 = 1$. В таких обозначениях длина и время имеют одинаковую размерность.

Металлические контакты будем моделировать как сильно допированные области графена [33], которые описывается тем же гамильтонианом (3.1). Иными словами, мы полагаем, что энергия Ферми E_F в контактах смещена далеко от дираковской точки. В частности, $E_F \gg \epsilon$, где ϵ — химический потенциал образца графена, отсчитанный от дираковской точки. Все последующие результаты не будут зависеть от знака энергии, поэтому мы будем считать $\epsilon > 0$. В металлических контактах существует большое число проводящих каналов, соответствующих состояниям на круговой поверхности Ферми радиуса $p_F = E_F$ (напоминаем, что $v_0 = 1$). Эти каналы удобно обозначать импульсом $p_n = 2\pi n/W$ в направлении y с $|n| < N = Wp_F/2\pi$. Граничные условия при $y = \pm W/2$ могут вызвать сдвиг дискретных значений p_n на величину порядка $1/W$, но этот сдвиг не будет иметь значения в пределе $W \gg L$, когда большое число каналов участвует в переносе электронов.

В виду большого количества проводящих каналов в пределе $W \gg L$, нам будет удобнее ввести непрерывную переменную $p = p_n L$, которая параметризует пространство каналов и имеет смысл безразмерного импульса в направлении y . В терминах этой переменной сумму по каналам можно представить в виде интеграла

$$\sum_n \mapsto \frac{W}{L} \int \frac{dp}{2\pi}. \quad (3.2)$$

В чистой системе поперечный импульс p сохраняется. Соответствующие волновые функции мы будем обозначать $\Psi_p(x)$. Эти функции представляют собой двухкомпонентные спиноры, причем направление псевдоспина в собственных состояниях совпадает с направлением скорости. Нам будет удобно сделать поворот в пространстве псевдоспина $\psi = \mathcal{L}\Psi$ с матрицей $\mathcal{L} = (\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}$. Такой поворот приводит σ_x к диагональному виду $\mathcal{L}\sigma_x\mathcal{L}^\dagger = \sigma_z$. Тем самым две компоненты повернутого спинора соответствуют состояниям, бегущим направо и налево в направлении оси x : $\psi = \{\psi^R, \psi^L\}$. Для повернутой волновой функции $\psi_p(x)$ уравнение Дирака приобретает вид [188; 202]

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial x} = (\sigma_x p/L + i\sigma_z \epsilon)\psi_p. \quad (3.3)$$

Общее решение этого уравнения легко записывается при помощи матричной экспоненты

$$\psi_p(x) = \exp[(\sigma_x p/L + i\sigma_z \epsilon)x] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Здесь a и b — произвольные константы. Мы будем рассматривать состояния рассеяния, которые содержат падающую и отраженную волну в левом контакте, в то время как в правом контакте есть только прошедшая волна:

$$\psi_p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ r_p \end{pmatrix}, \quad \psi_p(L) = \begin{pmatrix} t_p \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Решая эти уравнения на a и b , мы найдем амплитуды отражения (r_p) и прохождения (t_p) в канале p . Вероятность прохождения дается квадратом амплитуды [202]

$$T_p = |t_p|^2 = \frac{(\epsilon L)^2 - p^2}{(\epsilon L)^2 - p^2 \operatorname{ch}^2 \sqrt{p^2 - (\epsilon L)^2}}. \quad (3.6)$$

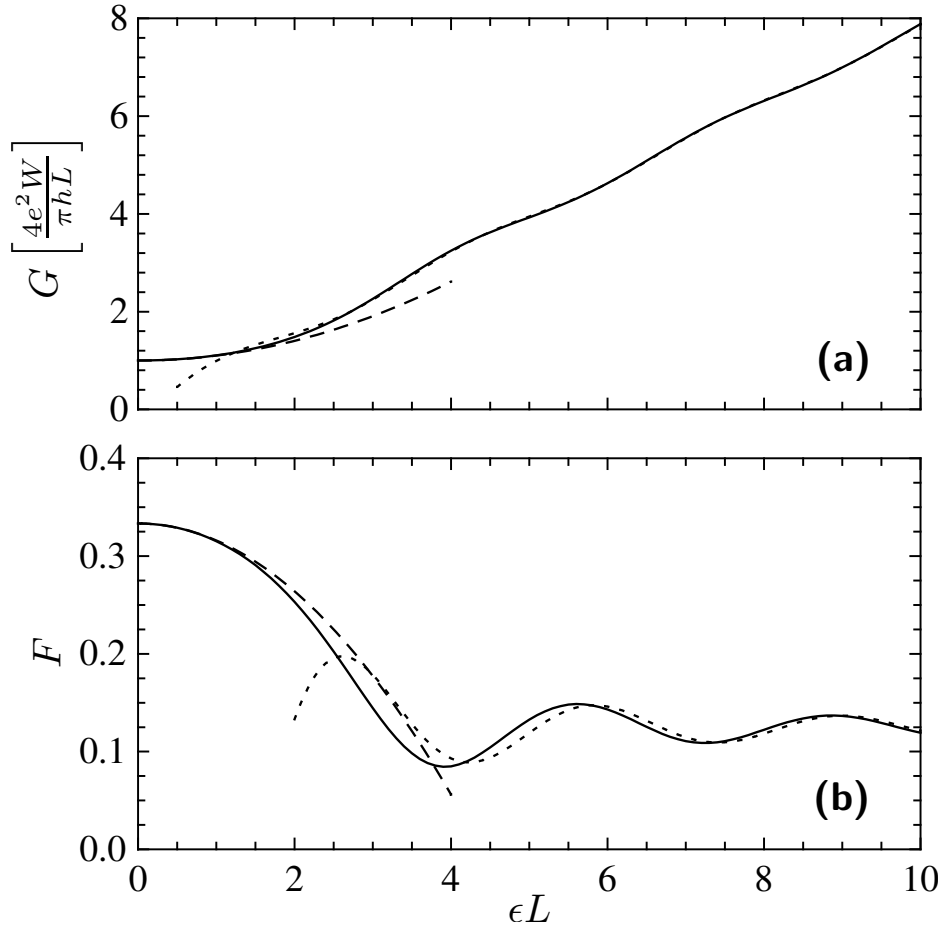


Рис. 3.2 — Зависимость кондактанса (а) и фактора Фано (б) чистого графена от энергии в пределе $W \gg L$. Сплошные линии показывают численный результат. Асимптотика малых энергий (3.12) и (3.13) показана штриховыми линиями. Пунктирные линии изображают асимптотику (3.28) вдали от дираковской точки.

При помощи найденной вероятности прохождения можно вычислить произвольные транспортные характеристики образца. В частности, кондактанс системы и фактор Фано для дробового шума непосредственно выражаются формулами Ландауэра:

$$G = \frac{2e^2W}{\pi hL} \int dp T_p, \quad F = 1 - \frac{\int dp T_p^2}{\int dp T_p}. \quad (3.7)$$

В формулу для кондактанса мы включили множитель 4, который учитывает вырождение по спине и долинам. Подставляя (3.6) и выполняя численное интегрирование по p , мы получаем кривые, изображенные на рис. 3.2.

Полное описание транспортных свойств двухконтактной системы обычно выражают в терминах функции распределения коэффициентов прохождения $P(T)$. Эта функция определяет вероятность того, что система обладает проводящим каналом с прозрачностью в интервале от T до $T + dT$. Для чистого графена, мы можем найти функцию распределения из тождества для меры в пространстве прозрачностей

$$P(T) dT = \frac{W dp}{2\pi L}. \quad (3.8)$$

Однако решить это уравнение в общем виде не представляется возможным, потому что функция T_p не монотонна, см. (3.6). Это значит, что для заданного значения T нужно найти

все возможные значения p и вычислить сумму по ним в правой части (3.8). Эта задача сильно упрощается в дираковской точке. При $\epsilon = 0$ функция T_p имеет максимум в нуле и монотонно убывает по обе стороны от него по мере увеличения $|p|$. Таким образом для чистого графена в дираковской точке мы получаем

$$P(T) = \frac{W}{\pi L} \left| \frac{dp}{dT} \right| = \frac{W}{2\pi L} \frac{1}{T\sqrt{1-T}}. \quad (3.9)$$

Стоит отметить, что, по определению, $\int dTP(T)$ должен давать полное число каналов в системе. Оно определяется уровнем Ферми в контактах и равно Wp_F/π . Это означает, что логарифмическая расходимость при $T \rightarrow 0$ в интеграле от (3.9) нужно обрезать на минимальной прозрачности $T_{\min} \sim \exp(-2p_FL)$. Но такие малые T не существенны при вычислении моментов распределения (кондактанса, шума и т.д.), поэтому мы не будем выполнять это обрезание.

При нулевой энергии функция (3.9) воспроизводит известный результат Дорохова [104] для классической диффузной металлической проволоки. Поэтому баллистический транспорт в графене вблизи дираковской точки часто называют псевдодиффузным. Отсюда, в частности, следует, что фактор Фано в дираковской точке равен $1/3$ [33]. Тот факт, что чистый графен обладает в точности такой же функцией распределения прозрачностей, что и диффузный провод, является весьма неожиданным. Ниже мы покажем, что это замечательное совпадение остается до некоторой степени справедливым и при включении эффектов слабого беспорядка.

3.1.1 Малые энергии $\epsilon L \ll 1$

Рассмотрим свойства чистого графена в двух пределах малых и больших энергий. Начнем с окрестности дираковской точки и вычислим поправки по энергии к функции распределения (3.9). Для этого обратим функцию T_p , которая дается уравнением (3.6), с точностью до второго порядка по ϵL :

$$p(T) = p_0(T) + \frac{(\epsilon L)^2}{2} \left[\frac{1}{p_0(T)} - \frac{\sqrt{1-T}}{p_0^2(T)} \right], \quad p_0(T) = \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{T}}. \quad (3.10)$$

Теперь подставим это выражение в (3.8) и получим следующий результат для функции распределения:

$$P(T) = \frac{W}{\pi L} \frac{dp(T)}{dT} = \frac{W}{2\pi L} \frac{1}{T\sqrt{1-T}} \left[1 + (\epsilon L)^2 \left(\frac{\sqrt{1-T}}{\operatorname{arch}^3(1/\sqrt{T})} - \frac{1+T}{2\operatorname{arch}^2(1/\sqrt{T})} \right) \right]. \quad (3.11)$$

С помощью этой формулы можно вычислить квадратичные поправки по ϵL к кондактансу и фактору Фано чистого графена

$$G = \frac{4e^2}{\pi h} \frac{W}{L} [1 + c_1(\epsilon L)^2], \quad c_1 = \frac{35\zeta(3)}{3\pi^2} - \frac{124\zeta(5)}{\pi^4} \approx 0.101, \quad (3.12)$$

$$F = \frac{1}{3} [1 + c_2(\epsilon L)^2], \quad c_2 = -\frac{28\zeta(3)}{15\pi^2} - \frac{434\zeta(5)}{\pi^4} + \frac{4572\zeta(7)}{\pi^6} \approx -0.052. \quad (3.13)$$

Эта низкоэнергетическая асимптотика показана на рис. 3.2 штриховыми линиями.

3.1.2 Большие энергии $\epsilon L \gg 1$

В этом разделе мы рассмотрим транспортные свойства чистого графена вдали от дираковской точки. В пределе $\epsilon L \gg 1$ в системе есть много открытых каналов с $T \sim 1$. В таком режиме кондактанс и более высокие моменты распределения прозрачностей линейно растут с энергией с точностью до маленьких осциллирующих поправок (см. рис. 3.2). Колебания связаны с эффектами интерференции: кондактанс относительно усиливается, а шум подавляется, когда один из каналов попадает в условия резонансной проводимости с T близким к 1. Это явление похоже на резонансы Фабри—Перо.

Начнем с расчета основной (пропорциональной ϵ) части функции распределения, а потом найдем осциллирующие поправки к ней. Нам будет удобно ввести производящую функцию моментов перенесенного заряда

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^{l-1} \sum_n T_n^l = \sum_n \frac{1}{T_n^{-1} - z} = \int_0^1 \frac{P(T) dT}{T^{-1} - z}. \quad (3.14)$$

Производящую функцию можно представить как в виде суммы по каналам, так и в виде интеграла с функцией распределения $P(T)$. Раскладывая производящую функцию в ряд по малым z , можно непосредственно получать моменты функции распределения прозрачностей.

Функцию распределения можно восстановить по известной производящей функции, решив интегральное уравнение (3.14). Обратим внимание, что функция $\mathcal{F}(z)$ имеет разрез в комплексной плоскости z , идущий вдоль вещественной оси от 1 к $+\infty$. Проинтегрируем последнее выражение в уравнении (3.14) по контуру, идущему из $z = 1/T - i0$ в $z = 1/T + i0$ вокруг точки $z = 1$, см. рис. 3.3. Этот интеграл дает

$$\int_{1/T-i0}^{1/T+i0} \frac{dz}{2\pi i} \mathcal{F}(z) = \int_0^1 P(\tilde{T}) d\tilde{T} \int_{1/T-i0}^{1/T+i0} \frac{dz}{2\pi i (\tilde{T}^{-1} - z)} = \int_T^1 P(\tilde{T}) d\tilde{T}. \quad (3.15)$$

Чтобы найти функцию распределения, возьмем производную по T и получим

$$P(T) = \frac{\mathcal{F}(1/T + i0) - \mathcal{F}(1/T - i0)}{2\pi iT^2}. \quad (3.16)$$

Таким образом функция распределения $P(T)$ связана с прыжком $\mathcal{F}(z)$ на разрезе в точке $z = 1/T$. Иными словами, уравнение (3.14) решает соответствующую задачу Римана—Гильберта.

Производящая функция $\mathcal{F}(z)$ будет очень полезна в дальнейшем при изучении свойств графена с беспорядком. В этом разделе мы применим ее к чистой системе. Согласно уравнениям (3.14) и (3.6), имеем

$$\mathcal{F}(z) = \frac{W}{L} \int \frac{dp}{2\pi} \left[\frac{(\epsilon L)^2 - p^2 \cos^2 \sqrt{(\epsilon L)^2 - p^2}}{(\epsilon L)^2 - p^2} - z \right]^{-1}. \quad (3.17)$$

Имеет смысл ограничить интеграл интервалом импульсов $[-\epsilon L, \epsilon L]$, который содержит все хорошо проводящие каналы. На импульсах $|p| > \epsilon L \gg 1$ электронные волновые функции затухают, поэтому их вкладом можно пренебречь.

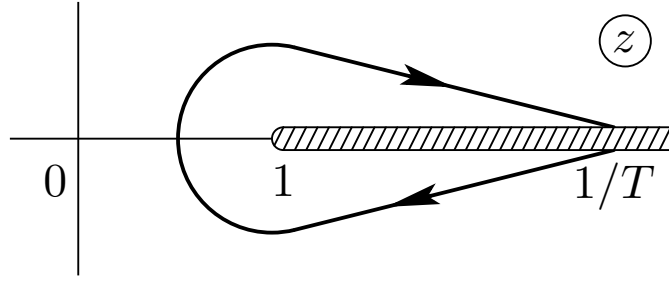


Рис. 3.3 — Контур интегрирования в уравнении (3.15).

Удобно ввести новую переменную u согласно

$$p = \epsilon L \sqrt{1 - u^2}. \quad (3.18)$$

Такая замена переменной приводит (3.17) к виду

$$\mathcal{F}(z) = \frac{W\epsilon}{\pi} \int_0^1 \frac{u du}{\sqrt{1 - u^2}} \left[\cos^2(u\epsilon L) + \frac{\sin^2(u\epsilon L)}{u^2} - z \right]^{-1}. \quad (3.19)$$

Подынтегральное выражение быстро осциллирует в пределе $\epsilon L \gg 1$, поэтому удобно разложить его в ряд Фурье по гармоникам $\cos(nu\epsilon L)$. При этом будем удерживать только нулевой и первый член этого ряда

$$\mathcal{F}(z) = \frac{W\epsilon}{\pi\sqrt{1 - z}} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - zu^2)}} \left[1 + \frac{2(u\sqrt{1 - z} - \sqrt{1 - zu^2})^2}{1 - u^2} \cos(2u\epsilon L) \right]. \quad (3.20)$$

Из члена нулевого порядка (без осцилляций) получается следующее выражение для производящей функции:

$$\mathcal{F}(z) = \frac{W\epsilon}{\pi\sqrt{1 - z}} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - zu^2}} = \frac{W\epsilon}{\pi} \frac{K(z) - E(z)}{z\sqrt{1 - z}}. \quad (3.21)$$

Здесь $K(m)$ и $E(m)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с параметром m . Выполняя аналитическое продолжение выражения (3.21) из окрестности $z = 0$ к точкам $z = 1/T \pm i0$ и применяя формулу (3.16), получаем

$$P(T) = \frac{W\epsilon}{\pi^2} \frac{K(T) - E(T)}{T\sqrt{1 - T}}. \quad (3.22)$$

Это ведущий член в функции распределения в пределе $\epsilon L \gg 1$. Из него можно получить следующие выражения для кондактанса и фактора Фано

$$G = \frac{e^2}{h} W\epsilon, \quad F = \frac{1}{8}. \quad (3.23)$$

Теперь давайте учтем второй член в подынтегральном выражении (3.20) и вычислим осциллирующие поправки к транспортным характеристикам. Для этого представим $\cos(2u\epsilon L)$ как вещественную часть соответствующей мнимой экспоненты и воспользуемся седловым приближением, деформировав контур как показано на рис. 3.4а. Мы получим поправку к производящей функции в виде

$$\delta\mathcal{F}(z) = \frac{2W\epsilon}{\pi} \operatorname{Re} \int \frac{u^2 (u\sqrt{1 - z} - \sqrt{1 - zu^2})^2 du}{\sqrt{(1 - z)(1 - u^2)^3(1 - zu^2)}} e^{2iu\epsilon L}. \quad (3.24)$$

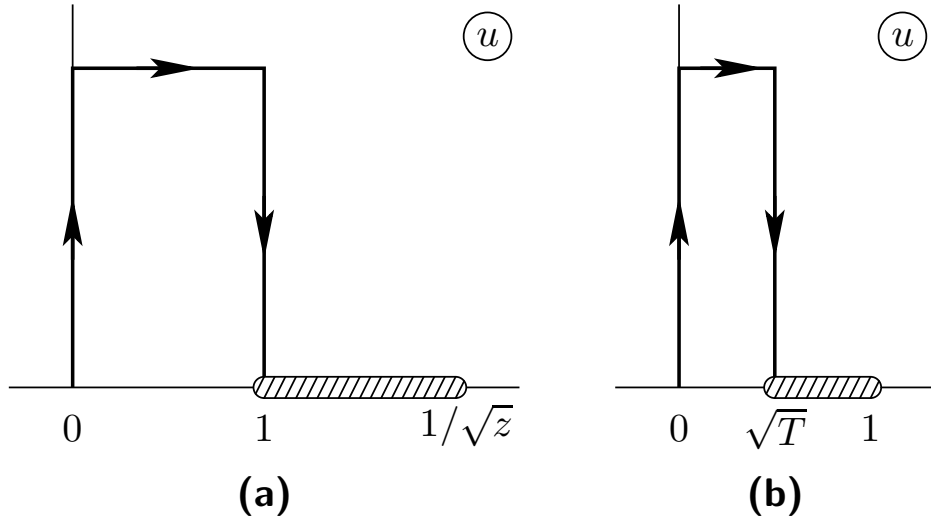


Рис. 3.4 — Контуры интегрирования для уравнений (3.24) и (3.29).

Подынтегральное выражение экспоненциально мало вдали от вещественной оси, поэтому основной вклад в интеграл набирается в окрестности концов контура интегрирования. Мы параметризуем эти части, заменив $u = iw$ и $u = 1 + iw$, и получаем два вклада

$$\delta\mathcal{F}_a = -\frac{4W\epsilon}{\pi} \int_0^\infty dw w^3 e^{-2w\epsilon L} = -\frac{3W\epsilon}{2\pi(\epsilon L)^4}, \quad (3.25)$$

$$\delta\mathcal{F}_b = \frac{W\epsilon \sin(2\epsilon L - \pi/4)}{\sqrt{2}\pi(1-z)^2} \int_0^\infty dw \sqrt{w} e^{-2w\epsilon L} = \frac{W\epsilon \sin(2\epsilon L - \pi/4)}{8\sqrt{\pi}(1-z)^2(\epsilon L)^{3/2}}. \quad (3.26)$$

Отсюда видно, что окрестность $u = 0$ дает гораздо меньшую, хотя и не осциллирующую, поправку, которая должна быть отброшена. Складывая (3.21) и (3.26), получаем производящую функцию с точностью до ведущего осциллирующего вклада

$$\mathcal{F}(z) = W\epsilon \left[\frac{K(z) - E(z)}{\pi z \sqrt{1-z}} + \frac{\sin(2\epsilon L - \pi/4)}{8\sqrt{\pi}(1-z)^2(\epsilon L)^{3/2}} \right]. \quad (3.27)$$

Раскладывая этот результат в ряд по малым z , находим следующие выражения для кондактанса и фактора Фано:

$$G = \frac{e^2}{h} W\epsilon \left[1 + \frac{\sin(2\epsilon L - \pi/4)}{2\sqrt{\pi}(\epsilon L)^{3/2}} \right], \quad F = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{9 \sin(2\epsilon L - \pi/4)}{2\sqrt{\pi}(\epsilon L)^{3/2}} \right]. \quad (3.28)$$

Они изображены пунктирными линиями на рис. 3.2 и хорошо согласуются с численным результатом (сплошная линия на том же рисунке).

Теперь вычислим осциллирующую поправку к функции распределения (3.22). Вторым членом в производящей функции (3.27) не имеет разреза на вещественной оси (это неточность седлового приближения, использованного в (3.24)). Поэтому мы не можем получить результат, применив (3.16) к производящей функции (3.27). Вместо этого используем более точное выражение (3.20), которое обладает необходимым ветвлением. Выполнив аналитическое продолжение в подынтегральном выражении (3.20) и применив (3.16), мы получим поправку к функции распределения в виде

$$\delta P(T) = \frac{2W\epsilon}{\pi^2 T^2} \int_0^{\sqrt{T}} \frac{du u^2 [T - (2-T)u^2] \cos(2u\epsilon L)}{\sqrt{(1-T)(1-u^2)^3(T-u^2)}}. \quad (3.29)$$

Этот интеграл содержит быстро осциллирующие функции, поэтому мы вновь применим седловое приближение. Заменяем $\cos(2u\epsilon L)$ экспонентой, деформируем контур, как показано на рис. 3.4b, и оцениваем интеграл в непосредственной близости от $u = \sqrt{T}$, вводя переменную $u = \sqrt{T} + iw$. Это вычисление дает

$$\delta P(T) = -\frac{\sqrt{2}W\epsilon \sin(2\epsilon L\sqrt{T} + \pi/4)}{\pi^2 T^{1/4}(1-T)} \int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{w}} e^{-2\epsilon Lw} = -\frac{W\epsilon \sin(2\epsilon L\sqrt{T} + \pi/4)}{\pi^{3/2} T^{1/4}(1-T)\sqrt{\epsilon L}}. \quad (3.30)$$

Собирая (3.30) и (3.22), находим функцию распределения

$$P(T) = W\epsilon \left[\frac{K(T) - E(T)}{\pi^2 T\sqrt{1-T}} - \frac{\sin(2\epsilon L\sqrt{T} + \pi/4)}{\pi^{3/2} T^{1/4}(1-T)\sqrt{\epsilon L}} \right]. \quad (3.31)$$

Поправка к функции распределения (3.30) не интегрируема в окрестности $T = 1$. Это не позволяет вычислять поправки к моментам распределения непосредственно из (3.31). Дело в том, что результат (3.31) не обладает нужной точностью, когда T близко к 1. Раскладывая подынтегральное выражение (3.29) в окрестности $u = \sqrt{T}$, мы пренебрегли вариацией фактора $(1-u^2)^{-3/2}$. Когда T приближается к 1, это пренебрежение не оправдано, потому что сингулярность в точке $u = 1$ оказывается близка к контуру интегрирования, см. рис. 3.4b. Интеграл в (3.30) сходится на $w \sim 1/\epsilon L$. Когда типичных значениях w имеют порядок $1 - \sqrt{T}$, наше приближение нарушается. Таким образом, нужно наложить условие

$$1 - T \gg \frac{1}{\epsilon L} \quad (3.32)$$

для применимости результата (3.31). Это условие также гарантирует, что осциллирующая поправка меньше, чем главный член в (3.31).

В заключение отметим, что транспортные свойства графена при высоких энергиях зависят от конкретной модели контактов [203; 204]. В нашем расчете мы предполагали резкие границы между графеном и металлическими контактами. Эта модель вполне оправдана, если фактическая ширина d переходной области на границе мала по сравнению с длиной волны электрона в графене. Длина волны зависит от энергии: она стремится к бесконечности при $\epsilon \rightarrow 0$ и убывает по мере увеличения ϵ . Таким образом результаты раздела 3.1.1 на малых энергиях универсальны и не зависят от микроскопических деталей интерфейса, если размер переходной области d мал по сравнению с длиной образца L . С другой стороны, результаты этого раздела применимы для не очень высоких энергий, $L^{-1} \ll \epsilon \ll d^{-1}$. Для еще больших энергий, когда длина волны электрона меньше, чем d , граничные условия становятся адиабатическими. Это, в частности, приводит к занулению фактора Фано, поскольку классически распространяющиеся электроны проходят или отражаются без какой-либо неопределенности.

Наши результаты для энергетической зависимости контактанса и фактора Фано в чистом графене согласуются с выводами [33; 202], где сумма по каналам определялась численно для конечного (но достаточно большого) соотношения W/L . Экспериментально такая баллистическая система была изучена в [192–194]. Большинство экспериментальных наблюдений согласуются с нашими результатами. «Проводимость» GL/W (которая равна $4e^2/\pi h$ в дираковской точке) увеличивается приблизительно линейно с энергией ϵ . Фактор

Фано имеет значение, близкое к $1/3$ в дираковской точке и уменьшается с ростом энергии, имея промежуточное плато в районе $F \approx 0.15$, что недалеко от значения $1/8$, которое мы получили в режиме высоких энергий. Измерения на других образцах показывают, что на самых больших энергиях фактор Фано становится еще меньше, достигая значений около 0.02 . По-видимому, промежуточное плато соответствует режиму $L^{-1} \ll \epsilon \ll d^{-1}$, в то время как самые малые значения фактора Фано попадают в диапазон $\epsilon \gg d^{-1}$.

3.2 Металлический эффект близости

Отвлечемся на время от транспортных свойств баллистических образцов и обсудим плотность состояний. Как уже подробно обсуждалось в главе 1, плотность состояний в неограниченном чистом графене является простой линейной функцией энергии $\rho = \epsilon/2\pi$ (без учета спина и долин). Оказывается, что в двухконтактной геометрии (рис. 3.1) появляются существенные отклонения от этого значения [205]. Плотность состояний внутри металлических контактов гораздо выше, чем в графене из-за большой ферми-поверхности. Основная часть этих состояний не может проникнуть в графен и экспоненциально затухает в нем по мере удаления от границы. Тем не менее, благодаря большому количеству таких затухающих мод, плотность состояний в графене вблизи контакта с металлом оказывается гораздо выше, чем в таком же изолированном образце. Мы будем называть это явление металлическим эффектом близости.

Плотность состояний в баллистическом образце графена можно вычислить непосредственно по известным волновым функциям рассеяния (3.4)

$$\rho(\epsilon, x) = \int \frac{dp}{(2\pi)^2 L} \left(|\psi_p(x)|^2 + |\psi_p(L-x)|^2 \right). \quad (3.33)$$

В этот интеграл явно включены вклады функций рассеяния как из левого, так и из правого контакта. Используя найденные ранее волновые функции, мы можем выразить первое слагаемое в подынтегральном выражении в виде

$$|\psi_p(x)|^2 = \frac{(\epsilon L)^2 - p^2 \operatorname{ch} [2\sqrt{p^2 - (\epsilon L)^2} (1 - x/L)]}{(\epsilon L)^2 - p^2 \operatorname{ch}^2 \sqrt{p^2 - (\epsilon L)^2}}. \quad (3.34)$$

Подставляя эту функцию в интеграл (3.33), мы находим распределение плотности состояний по площади образца. Результат показан на рис. 3.5. Действительно наблюдается рост плотности состояний вблизи края из-за эффекта близости.

Интеграл (3.33) сильно упрощается в пределе нулевой энергии и приводит к результату

$$\rho(\epsilon = 0, x) = \frac{1}{2\pi L \sin(\pi x/L)}. \quad (3.35)$$

Это самая нижняя кривая на рис. 3.5. Вся плотность состояний на нулевой энергии целиком обеспечивается затухающими волновыми функциями. Вблизи краев плотность состояний

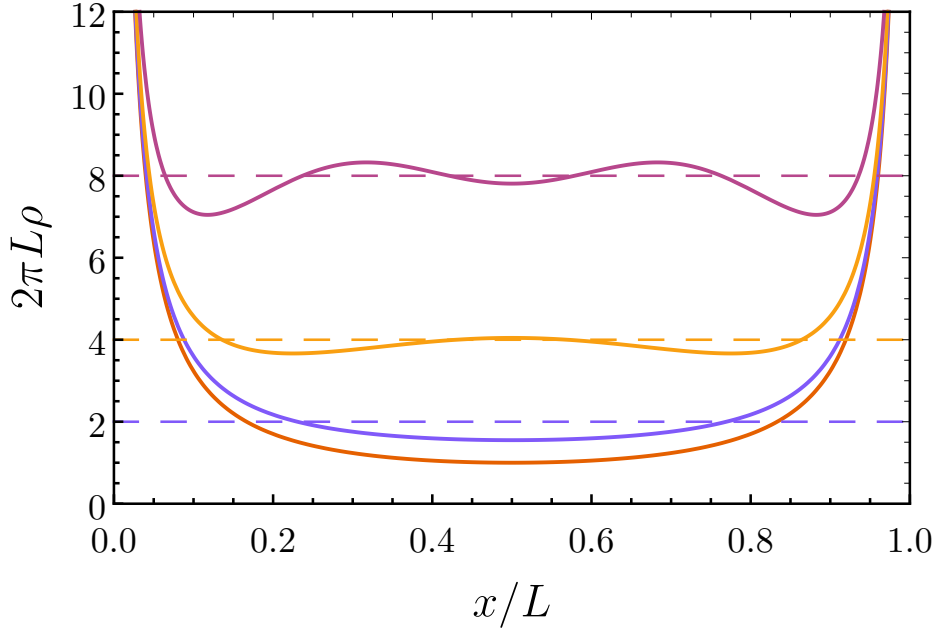


Рис. 3.5 — Плотность состояний в образце чистого графена ширины L . Сплошные кривые соответствуют значениям энергии $\epsilon L = 0, 2, 4, 8$. Штриховые линии показывают величину плотности состояний $\rho = \epsilon/2\pi$ на той же энергии в бесконечном образце.

расходится $\sim 1/2\pi^2 x$. Разумеется, этот рост остановится, когда плотность состояний сравняется со своим значением в металлическом контакте. Особенность плотности состояний на краю образца остается такой же и на ненулевых энергиях. При этом вдали от краев, в объеме образца, достигается значение $\epsilon/2\pi$, характерное для неограниченного графена. На фоне этой величины также видны фриделевские осцилляции, период которых соответствует фермиевской длине волны на данной энергии.

Чтобы изучить эффект близости более детально, рассмотрим предельный случай широкого образца $\epsilon L \gg 1$. В этом пределе можно изучать плотность состояний возле одного края, пренебрегая влиянием другого. Для этого предположим, что $x \ll L$, а безразмерное произведение ϵx может быть любым. Плотность состояний должна описываться некоторой универсальной функцией ϵx , не зависящей от L . В эту функцию существенный вклад дают как распространяющиеся ($|p| < \epsilon$), так и затухающие ($|p| > \epsilon$) моды. Рассмотрим сначала вклад распространяющихся мод. Для этого в формуле (3.33) сделаем замену переменной (3.18) и получим интеграл

$$\rho_{\text{prop}}(\epsilon, x) = \frac{\epsilon}{\pi^2} \int_0^1 \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1 - (1-u^2) \cos(\epsilon u L) \cos[\epsilon u(L-2x)]}{1 - (1-u^2) \cos^2(\epsilon u L)}. \quad (3.36)$$

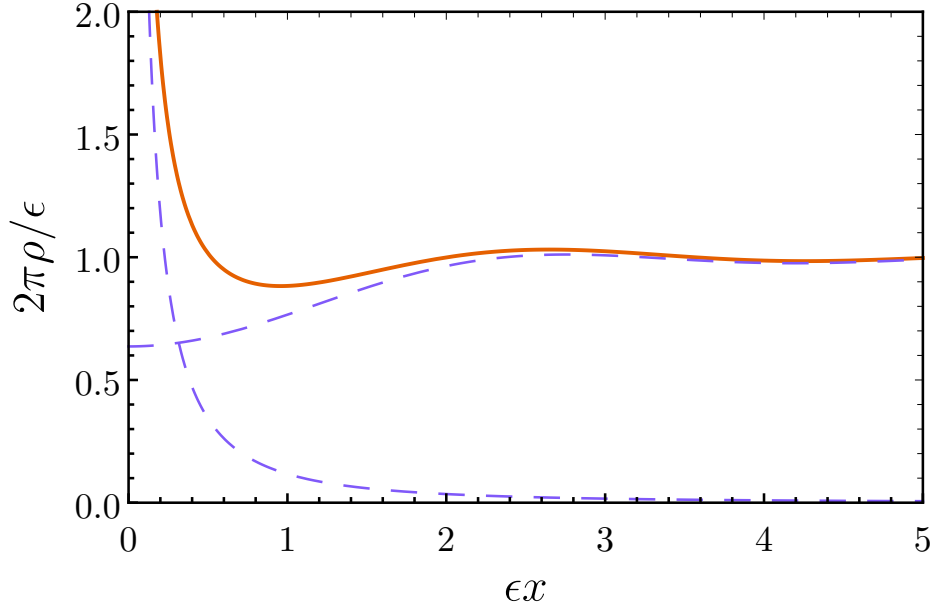


Рис. 3.6 — Плотность состояний в полубесконечном образце графена вблизи контакта с металлом (3.39). Штриховыми линиями показаны вклады распространяющихся (3.37) и затухающих (3.38) состояний.

Теперь мы воспользуемся неравенством $\epsilon L \gg 1$ и усредним быстрые осцилляции косинусов. Это приводит к результату

$$\begin{aligned} \rho_{\text{prop}}(\epsilon, x) &= \frac{\epsilon}{\pi^2} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \left[u \cos(2\epsilon ux) + 2 \sin^2(\epsilon ux) \right] = \frac{\epsilon}{2\pi} \left[1 - J_0(2\epsilon x) + \mathbf{H}_{-1}(2\epsilon x) \right] \\ &= \begin{cases} \epsilon/\pi^2, & \epsilon x \ll 1, \\ \frac{\epsilon}{2\pi} \left[1 + \frac{\cos(2\epsilon x + \pi/4)}{4\sqrt{\pi}(\epsilon x)^{3/2}} \right], & \epsilon x \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Интеграл выразился через функции Бесселя и Струве; результат показан на рис. 3.6. Найденный нами вклад распространяющихся мод правильно воспроизводит асимптотику на больших расстояниях $\epsilon x \gg 1$, где плотность состояний достигает своего объемного значения $\epsilon/2\pi$ и испытывает небольшие фриделевские осцилляции. Однако в пределе малых расстояний получился конечный вклад вместо расходимости, как на рис. 3.5.

Чтобы найти полный эффект близости, нужно рассмотреть затухающие волновые функции с импульсами $|p| > \epsilon$. При этом в интеграле (3.33) можно оставить только первое слагаемое, а также, пользуясь большой величиной $\epsilon L \gg 1$, заменить гиперболические косинусы в (3.34) экспонентами. В итоге получим (здесь сделана замена переменной $p = \epsilon Lu$)

$$\rho_{\text{evan}}(\epsilon, x) = \frac{\epsilon}{\pi^2} \int_1^\infty du \exp[-2\epsilon x \sqrt{u^2 - 1}] = -\frac{\epsilon}{2\pi} \left[Y_1(2\epsilon x) + \mathbf{H}_{-1}(2\epsilon x) \right] = \begin{cases} (2\pi^2 x)^{-1}, & \epsilon x \ll 1, \\ (4\pi^2 x^2 \epsilon)^{-1}, & \epsilon x \gg 1. \end{cases} \quad (3.38)$$

Эта функция также показана на рис. 3.6. Она затухает при удалении от границы с металлом степенным образом, несмотря на то, что составлена из экспоненциально затухающих состояний. Такое поведение связано с большим количеством этих мод. В области коротких расстояний

$\epsilon x \ll 1$ функция ρ_{evan} доминирует и описывает главную часть эффекта близости — рост плотности состояний $\sim (2\pi^2 x)^{-1}$.

Суммарная плотность состояний складывается из двух выше найденных частей

$$\rho(\epsilon, x) = \frac{\epsilon}{2\pi} \left[1 - J_0(2\epsilon x) - Y_1(2\epsilon x) \right] = \begin{cases} (2\pi^2 x)^{-1}, & \epsilon x \ll 1, \\ \frac{\epsilon}{2\pi} \left[1 + \frac{\cos(2\epsilon x + \pi/4)}{4\sqrt{\pi}(\epsilon x)^{3/2}} \right], & \epsilon x \gg 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Она правильно воспроизводит обе асимптотики на малых и больших расстояниях. Полная плотность состояний в графене вблизи границы с металлом также показана на рис. 3.6.

Плотность состояний в полубесконечном образце графена можно было бы вычислить по-другому, не начиная с состояний рассеяния в образце размера L , однако это сильно увело бы нас в сторону от основной линии изложения транспортных свойств.

3.3 Формализм матричных функций Грина

Теперь мы переходим к изучению эффектов беспорядка. При наличии примесей непосредственное решение уравнения Дирака, как это делалось в предыдущих разделах, не представляется возможным. Поэтому мы будем использовать альтернативный метод матричных функций Грина, впервые предложенный Назаровым [200]. Этот метод позволяет вычислять любые транспортные характеристики, в том числе функцию распределения коэффициентов прохождения, не требуя точного знания всех собственных состояний гамильтониана.

Рассмотрим квазиодномерный образец, присоединенный к двум идеальным металлическим контактам. Транспортные характеристики системы полностью определяются матрицей амплитуд прохождения t_{mn} , индексы которой нумеруют проводящие каналы в левом и правом контакте¹. Собственные значения матрицы $\hat{t}^\dagger \hat{t}$ соответствуют вероятностям прохождения через образец (мы используем «шляпки» для обозначения матриц в пространстве каналов). Нашей основной целью будет вычисление распределения этих вероятностей. Полная статистика переноса заряда определяется моментами этого распределения, например, первые два момента позволяют выразить кондактанс и фактор Фано для дробового шума по формулам Ландауэра²

$$G = \frac{4e^2}{h} \text{Tr} \hat{t}^\dagger \hat{t}, \quad F = 1 - \frac{\text{Tr}(\hat{t}^\dagger \hat{t})^2}{\text{Tr} \hat{t}^\dagger \hat{t}}. \quad (3.40)$$

¹В случае чистого графена, рассмотренном ранее, эта матрица имела диагональный вид в базисе поперечных импульсов p , а ее собственные значения соответствовали коэффициентам t_p в формуле (3.5).

²Мы включили в определение кондактанса множитель 4, учитывающий вырождение по спину и долинам в графене. В стандартном представлении формулы Ландауэра такого множителя нет.

3.3.1 Обобщенная формула Кубо

Сначала «переведем» формулы Ландауэра на язык функций Грина, то есть выведем формулы Кубо для кондактанса и более высоких моментов функции распределения прозрачностей. Амплитуды прохождения t и t' , а также соответствующие им амплитуды отражения r и r' , определяются из волновых функций состояний рассеяния в образце с двумя контактами

$$|\psi_n^L\rangle = \begin{cases} e^{ip_n x} |\varphi_n\rangle + \sum_m r_{mn} e^{-ip_m x} |\varphi_m^*\rangle, & \text{в левом контакте,} \\ \sum_m t_{mn} e^{ip_m x} |\varphi_m\rangle, & \text{в правом контакте,} \end{cases} \quad (3.41)$$

$$|\psi_n^R\rangle = \begin{cases} \sum_m t'_{mn} e^{-ip_m x} |\varphi_m^*\rangle, & \text{в левом контакте,} \\ e^{-ip_n x} |\varphi_n^*\rangle + \sum_m r'_{mn} e^{ip_m x} |\varphi_m\rangle, & \text{в правом контакте.} \end{cases} \quad (3.42)$$

Здесь $|\varphi_n\rangle$ — полный набор функций поперечных координат, определяющий базис каналов в контактах, $|\varphi_n^*\rangle$ соответствует обращенному по времени состоянию $|\varphi_n\rangle$, p_n — зависящий от энергии импульс в продольном направлении в канале с индексом n . Волновые функции каналов нормированы условием

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_n^* | \varphi_m^* \rangle = \frac{\delta_{nm}}{v_n}, \quad (3.43)$$

где $v_n = (\partial p_n / \partial \epsilon)^{-1}$ — собственное значение скорости в канале n . Состояния рассеяния $|\psi_n^L\rangle$ нормированы на единичный поток входящих электронов, попадающих в образец из левого контакта в канале n ; в состояниях $|\psi_n^R\rangle$ единичный поток входящих частиц находится в канале n в правом контакте.

Теперь рассмотрим асимптотики функции Грина в левом и правом контакте и выразим их через амплитуды прохождения. Функция Грина подчиняется уравнению Шредингера, которое в контактах имеет следующий вид:

$$\left[\epsilon \pm i0 + i\hat{v} \frac{\partial}{\partial x} \right] \hat{G}^{R,A}(x, x') = \delta(x - x') \hat{1}. \quad (3.44)$$

Оператор скорости \hat{v} диагонален в базисе каналов и действует на волновые функции согласно

$$\hat{v} |\varphi_n\rangle = v_n |\varphi_n\rangle, \quad \hat{v} |\varphi_n^*\rangle = -v_n |\varphi_n^*\rangle. \quad (3.45)$$

Вычислим запаздывающую функцию Грина $\hat{G}^R(x, x')$. Для этого зафиксируем точку x' в левом контакте и изучим зависимость от x . Когда положение точки x стремится к $+\infty$ в правом контакте, функция Грина не должна возрастать. Бесконечно малая добавка $i0$ в уравнении (3.44) отбирает решения уравнения Шредингера, которые содержат только бегущую направо волну, поэтому мы можем записать общее решение в виде разложения по состояниям рассеяния $|\psi_n^L\rangle$

$$\hat{G}^R(x \in R, x' \in L) = \sum_n |\psi_n^L(x)\rangle \langle a_n(x')|. \quad (3.46)$$

Коэффициенты $\langle a_n(x') |$ в этом разложении пока не определены. Обозначения $x \in R$ и $x' \in L$ указывают на принадлежность точек x и x' к правому и левому контактам.

Перенесем точку x в левый контакт, но расположим ее немного правее точки x' . В такой конфигурации уравнение (3.46) дает

$$\hat{G}^R(x = x' + 0, x' \in L) = \sum_n \left[e^{ip_n x'} |\varphi_n\rangle + \sum_m r_{mn} e^{-ip_m x'} |\varphi_m^*\rangle \right] \langle a_n(x')|. \quad (3.47)$$

Когда точки x и x' меняются местами, функция Грина испытывает скачок. Проинтегрировав уравнение (3.44) по x в бесконечно малой окрестности точки x' , находим

$$\begin{aligned} \hat{G}^R(x = x' - 0, x' \in L) &= \hat{G}^R(x = x' + 0, x' \in L) + i\hat{v}^{-1} \\ &= \sum_n \left[e^{ip_n x'} |\varphi_n\rangle + \sum_m r_{mn} e^{-ip_m x'} |\varphi_m^*\rangle \right] \langle a_n(x')| + i \sum_n (|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| - |\varphi_n^*\rangle \langle \varphi_n^*|). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Здесь мы использовали явный вид оператора \hat{v}^{-1} в базисе каналов, в соответствии с (3.43) и (3.45). Если теперь устремить положение x к $-\infty$, функция Грина также не должна возрастать, поэтому в этом пределе остаются только состояния, бегущие налево. Это означает, что члены, содержащие $|\varphi_n\rangle$ в формуле (3.48) должны сократиться. Пользуясь этим условием, мы определяем коэффициенты $\langle a_n(x') |$:

$$\langle a_n(x') | = -i e^{-ip_n x'} \langle \varphi_n|. \quad (3.49)$$

Наконец, подставив этот результат в уравнение (3.46), находим общий вид запаздывающей функции Грина между левым и правым контактом

$$\hat{G}^R(x \in R, x' \in L) = -i \sum_{mn} |\varphi_m\rangle e^{ip_m x} t_{mn} e^{-ip_n x'} \langle \varphi_n|. \quad (3.50)$$

Аналогичный результат для опережающей функции Грина можно получить с помощью эрмитового сопряжения

$$\hat{G}^A(x \in L, x' \in R) = i \sum_{mn} |\varphi_m\rangle e^{ip_m x} t_{mn}^* e^{-ip_n x'} \langle \varphi_n|. \quad (3.51)$$

В итоге, моменты функции распределения прозрачностей выражаются через функции Грина между двумя контактами следующим образом:

$$\text{Tr}(t^\dagger t)^n = \text{Tr} \left[\hat{v} \hat{G}^R(x \in R, x' \in L) \hat{v} \hat{G}^A(x' \in L, x \in R) \right]^n. \quad (3.52)$$

Для первого момента, $n = 1$, это тождество устанавливает эквивалентность формул Ландауэра и Кубо для контактанса.

3.3.2 Производящая функция

В разделе 3.1 мы ввели производящую функцию для моментов переноса заряда (3.14) в чистом графене. Для произвольной системы такая производящая функция определяется

в терминах матрицы амплитуд прохождения

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \text{Tr}(\hat{t}^\dagger \hat{t})^n = \text{Tr} \left[\hat{t}^{-1} \hat{t}^{\dagger -1} - z \right]^{-1}. \quad (3.53)$$

Моменты получаются разложением этой функции в ряд по малым z .

Производящую функцию $\mathcal{F}(z)$ можно выразить при помощи специально сконструированной матричной функции Грина [200], определенной следующим уравнением:

$$\begin{pmatrix} \epsilon - \hat{H} + i0 & -\sqrt{z} \hat{v} \delta(x - x_L) \\ -\sqrt{z} \hat{v} \delta(x - x_R) & \epsilon - \hat{H} - i0 \end{pmatrix} \check{G}(x, x') = \delta(x - x') \check{1}. \quad (3.54)$$

Здесь параметр z соответствует полю источника, который смешивает запаздывающие и опережающие функции Грина. Координаты x_L и x_R , где приложено поле источника, лежат внутри левого и правого контакта. Матричная функция Грина имеет нетривиальную структуру в RA пространстве запаздывающих–опережающих функций Грина. Мы будем обозначать такие матрицы перевернутой «шляпкой».

Главное преимущество матричной функции Грина (3.54) состоит в следующем тождестве для производящей функции переноса заряда:

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{v} & 0 \end{pmatrix} \check{G}(x_R, x_R) \right] = \frac{1}{\sqrt{z}} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \check{G}(x_L, x_L) \right]. \quad (3.55)$$

Справедливость этого тождества можно легко проверить, раскладывая функцию Грина в ряд по степеням z с помощью теории возмущений и сравнивая члены этого разложения с (3.53). Эквивалентность этих двух рядов обеспечивается тождеством (3.52).

Функция распределения коэффициентов прохождения $P(T)$ является альтернативным способом описания транспортных свойств. Она была определена в предыдущем разделе. Нам будет удобно выразить эту функцию не через вероятности T , а через ляпуновские экспоненты λ , которые связаны с T формулой

$$T = \frac{1}{\text{ch}^2 \lambda}. \quad (3.56)$$

В терминах λ функция распределения определяется тождеством $P(T)dT = P(\lambda)d\lambda$. Такое представление удобно, в частности, потому что дороховское распределение (3.9) оказывается константой в терминах λ . Производящая функция (3.53) связана с функцией распределения $P(T)$ формулами (3.14) и (3.16). В представлении ляпуновских экспонент эти тождества принимают вид

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^{\infty} \frac{P(\lambda)d\lambda}{\text{ch}^2 \lambda - z}, \quad P(\lambda) = \frac{\text{sh} 2\lambda}{2\pi i} [\mathcal{F}(\text{ch} \lambda + i0) - \mathcal{F}(\text{ch} \lambda - i0)]. \quad (3.57)$$

Производящую функцию $\mathcal{F}(z)$ можно выразить через свободную энергию системы во внешнем «поле» источника z . Свободная энергия определяется функциональным детерминантом

$$\Omega = \text{Tr} \ln \check{G}, \quad \mathcal{F} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad (3.58)$$

Здесь мы, как и раньше, используем символ \mathbf{Tr} для обозначения операторного следа. Второе тождество непосредственно следует из (3.55). Свободную энергию можно вычислять стандартными методами диаграммной техники [206], что обеспечивает очень удобный способ нахождения полной статистики переноса заряда. Также удобно параметризовать аргумент свободной энергии углом ϕ , который связан с источником z формулой

$$z = \sin^2 \frac{\phi}{2}. \quad (3.59)$$

Таким образом, мы определили три эквивалентных представления полной статистики переноса заряда в терминах $\mathcal{F}(z)$, $P(\lambda)$ и $\Omega(\phi)$. В дальнейшем мы будем вычислять свободную энергию неупорядоченного образца $\Omega(\phi)$, а две другие функции выразить по формулам

$$\mathcal{F}(z) = \frac{2}{\sin \phi} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \right|_{\phi=2 \arcsin \sqrt{z}}, \quad P(\lambda) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \right|_{\phi=\pi+2i\lambda}. \quad (3.60)$$

Первое из этих тождеств непосредственно следует из (3.58), а второе является результатом подстановки (3.58) в (3.57).

Два первых момента, определяющих кондактанс и фактор Фано (3.40), можно выразить через любую из определенных выше функций. В частности, их можно найти прямо из свободной энергии

$$G = \frac{8e^2}{h} \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=0}, \quad F = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left. \frac{\partial^4 \Omega / \partial \phi^4}{\partial^2 \Omega / \partial \phi^2} \right|_{\phi=0}. \quad (3.61)$$

3.3.3 Функция Грина чистого графена

Продemonстрируем, как метод матричной функции Грина позволяет получить результаты для чистого графена, выведенные в предыдущем разделе. Но сначала найдем в явном виде саму функцию Грина. В чистом образце, присоединенном к идеальным металлическим контактам, рис. 3.1, матричная функция Грина на нулевой энергии определяется уравнением (3.54) с гамильтонианом (3.1):

$$\begin{pmatrix} \mu(x) - \sigma \mathbf{p} + i0 & -\sigma_x \sqrt{z} \delta(x) \\ -\sigma_x \sqrt{z} \delta(x-L) & \mu(x) - \sigma \mathbf{p} - i0 \end{pmatrix} \check{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.62)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, \\ +\infty, & x < 0 \text{ или } x > L, \end{cases} \quad (3.63)$$

Поскольку оператор в левой части коммутирует с y -компонентой импульса, мы сначала вычислим функцию Грина в смешанном координатно-импульсном представлении, $\check{G}_p(x, x')$. Внутри образца эта функция удовлетворяет

$$\left[i\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} - \sigma_y p \right] \check{G}_p(x, x') = \delta(x - x'). \quad (3.64)$$

Будем искать общее решение этого уравнения в виде

$$\check{G}_p(x, x') = e^{\sigma_z p(x-L/2)} M e^{\sigma_z p(x'-L/2)}, \quad M = \begin{cases} M_<, & x < x', \\ M_>, & x > x', \end{cases} \quad (3.65)$$

с не известными пока постоянными матрицами M_{\leq} . Профиль химического потенциала (3.63) и бесконечно малые члены $\pm i0$ в уравнении (3.62) определяют граничные условия для функции Грина. Источники z также могут быть включены в граничные условия. При этом для M_{\leq} получаются уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i\sqrt{z} & i\sqrt{z} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} e^{-\sigma_z pL/2} M_< = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -i\sqrt{z} & -i\sqrt{z} & 1 & 1 \end{pmatrix} e^{\sigma_z pL/2} M_> = 0. \quad (3.66)$$

Дельта-функция в правой части (3.64) определяет скачок функции Грина при $x = x'$. Из этого следует еще одно условие

$$M_> - M_< = -i\sigma_x. \quad (3.67)$$

Матрицы M_{\leq} , а значит и функция Грина, полностью определяются уравнениями (3.66) и (3.67),

$$M_{\leq} = \frac{-i}{2(\text{ch}^2 pL - z)} \begin{pmatrix} \text{ch } pL & z - \frac{\text{sh } 2pL}{2} & i\sqrt{z}e^{-pL} & i\sqrt{z} \\ z + \frac{\text{sh } 2pL}{2} & \text{ch } pL & i\sqrt{z} & i\sqrt{z}e^{pL} \\ i\sqrt{z}e^{pL} & i\sqrt{z} & -\text{ch } pL & -z - \frac{\text{sh } 2pL}{2} \\ i\sqrt{z} & i\sqrt{z}e^{-pL} & -z + \frac{\text{sh } 2pL}{2} & -\text{ch } pL \end{pmatrix} \pm \frac{i\sigma_x}{2}. \quad (3.68)$$

Преобразование Фурье по p дает функцию Грина в полностью координатном представлении. Ее удобнее выразить через параметр ϕ , который связан с z формулой $z = \sin^2(\phi/2)$, см. (3.59). Для упрощения дальнейших вычислений мы представим функцию Грина в виде произведения матриц:

$$\check{G}_0(x, x'; y) = \frac{1}{4L} \check{V}(x) \check{\Lambda} \begin{pmatrix} i \text{ch } \frac{\phi y}{2L} & \text{sh } \frac{\phi y}{2L} \\ \text{sh } \frac{\phi y}{2L} & -i \text{ch } \frac{\phi y}{2L} \end{pmatrix}_{RA} \times \begin{pmatrix} \sin^{-1} \frac{\pi(x+x'+iy)}{2L} & \sin^{-1} \frac{\pi(x-x'+iy)}{2L} \\ \sin^{-1} \frac{\pi(x-x'-iy)}{2L} & \sin^{-1} \frac{\pi(x+x'-iy)}{2L} \end{pmatrix}_{\sigma} \check{\Lambda} \check{V}^{-1}(x'), \quad (3.69)$$

$$\check{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{RA}, \quad \check{V}(x) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\phi(L-x)}{2L} & \cos \frac{\phi(L-x)}{2L} \\ i \cos \frac{\phi x}{2L} & i \sin \frac{\phi x}{2L} \end{pmatrix}_{RA}. \quad (3.70)$$

Матрицы $\check{V}(x)$ и $\check{V}^{-1}(x')$ действуют только в RA пространстве и, следовательно, коммутируют с любым оператором беспорядка. Поэтому множители \check{V} и \check{V}^{-1} можно опустить при вычислении любых диаграмм без внешних концов. Поворот простыми диагональными матрицами

Ѕ в приведенном выше уравнении позволяет представить функцию Грина в виде прямого произведения двух операторов, действующих в пространстве RA и в пространстве подрешеток.

Покажем, как на языке функций Грина получаются результаты раздела 3.1 для транспортных свойствах чистого графена. Производящая функция определяется уравнением (3.55). Используя функцию Грина (3.69), мы сразу получаем

$$\mathcal{F}_0 \left(\sin^2 \frac{\phi}{2} \right) = \frac{W}{\sin(\phi/2)} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \check{G}(0, 0; 0) \right] = \frac{W}{\pi L} \frac{\phi}{\sin \phi}. \quad (3.71)$$

Выражение для свободной энергии следует из интегрирования (3.60) по ϕ .

$$\Omega_0(\phi) = \frac{W\phi^2}{4\pi L}. \quad (3.72)$$

Этот удивительно простой результат показывает, почему было удобно параметризовать источники переменной ϕ . Распределение прозрачностей определяется из (3.60) и оказывается просто константой, $P_0(\lambda) = W/\pi L$, в терминах λ . В переменных T мы получаем стандартное дороховское [104] распределение, ср. (3.9)

$$P_0(T) = \frac{W}{2\pi L} \frac{1}{T\sqrt{1-T}}. \quad (3.73)$$

Таким образом мы воспроизвели результат о псевдодиффузном транспорте в дираковской точке.

Давайте теперь найдем поправку от малой энергии к этому результату, как в разделе 3.1.1. Будем вычислять свободную энергию Ω по теории возмущений. Линейный член по ϵ отсутствует из-за симметрии частица-дырка в дираковской точке. Первый неисчезающий вклад возникает во втором порядке и дается диаграммой рис. 3.7. Крестики соответствуют вставке множителя ϵ , а сплошные линии — матричным функциям Грина (3.69). Выражение для диаграммы принимает вид

$$\Omega_\epsilon = \frac{W\epsilon^2}{2} \int_0^L dx dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Tr} \left[G(x, x'; y) G(x', x; -y) \right]. \quad (3.74)$$

После подстановки функций Грина (3.69), вычисления следа и перемасштабирования переменных на L , получаем следующий интеграл:

$$\Omega_\epsilon = \frac{WL\epsilon^2}{4} \int_0^1 dx dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{ch}(\phi y) \left[\frac{1}{\text{ch}(\pi y) - \cos \pi(x+x')} - \frac{1}{\text{ch}(\pi y) - \cos \pi(x-x')} \right]. \quad (3.75)$$

Первый (второй) член в квадратных скобках зависит только от суммы (разности) x и x' . Это позволяет нам сначала проинтегрировать по разности (сумме) этих переменных. После некоторых сдвигов оставшихся переменных получаем

$$\Omega_\epsilon = -\frac{WL\epsilon^2}{2} \int_0^1 du u \sin \frac{\pi u}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy \text{ch}(\phi y)}{\text{ch}^2(\pi y) - \sin^2(\pi u/2)} = -\frac{WL\epsilon^2}{2 \sin(\phi/2)} \int_0^1 du u \frac{\sin(\phi u/2)}{\cos(\pi u/2)}. \quad (3.76)$$

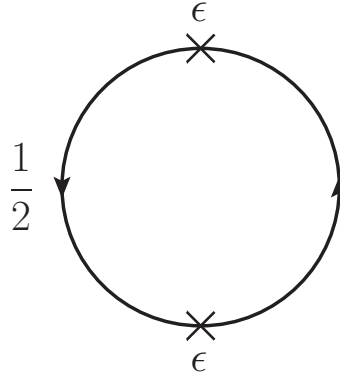


Рис. 3.7 — Поправка второго порядка по ϵ к свободной энергии.

Последнее выражение является результатом интегрирования по y .

Для вычисления оставшегося интеграла в (3.76) представим $\cos^{-1}(\pi u/2)$ в виде ряда Фурье:

$$\Omega_\epsilon = \frac{2WL\epsilon^2}{\sin(\phi/2)} \frac{\partial}{\partial\phi} \int_0^1 du \cos \frac{\phi u}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos[\pi u(n + 1/2)]. \quad (3.77)$$

Мы здесь также ввели производную по ϕ , чтобы избавиться от множителя u в подынтегральном выражении. После интегрирования по u получается следующий ряд:

$$\Omega_\epsilon = \frac{2WL\epsilon^2}{\sin(\phi/2)} \frac{\partial}{\partial\phi} \cos \frac{\phi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi(2n+1) + \phi} + \frac{1}{\pi(2n+1) - \phi} \right]. \quad (3.78)$$

Сумма по n расходится логарифмически, однако эта расходимость не зависит от ϕ и добавляет к свободной энергии несущественную константу. Она не влияет на наблюдаемые величины, которые выражаются через производные свободной энергии по ϕ . Мы можем легко избавиться от расходимости, вычитая аналогичную сумму по n с $\phi = 0$. Это дает окончательный результат

$$\Omega_\epsilon = \frac{W}{\pi L} \frac{(\epsilon L)^2}{\sin(\phi/2)} \frac{\partial}{\partial\phi} \left\{ \cos \frac{\phi}{2} \left[\psi \left(\frac{\pi + \phi}{2\pi} \right) + \psi \left(\frac{\pi - \phi}{2\pi} \right) \right] \right\}. \quad (3.79)$$

Здесь ψ обозначает дигамма-функцию, и мы опустили несущественные постоянные слагаемые в квадратных скобках.

Свободная энергия $\Omega_0 + \Omega_\epsilon$ содержит полную информацию о статистике переноса заряда при низких энергиях. В частности, с помощью формул (3.61) мы можем воспроизвести результаты (3.12) и (3.13) для кондактанса и фактора Фано.

3.4 Графен со слабым беспорядком. Баллистический предел

Теперь мы переходим к рассмотрению эффектов беспорядка в баллистическом пределе. Предполагаем, что образец графена, как и прежде, соединен с двумя идеальными металлическими контактами, рис. 3.1, и имеет размеры $W \gg L$. К гамильтониану добавим случайный

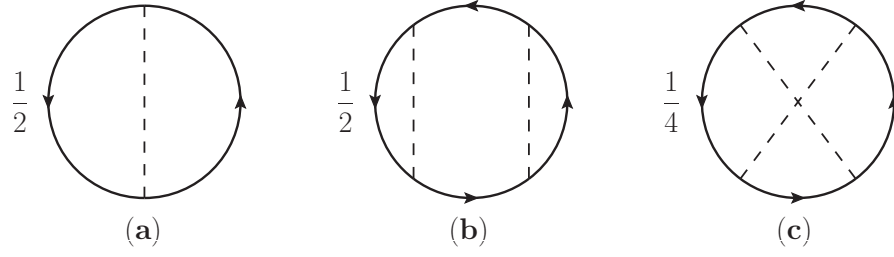


Рис. 3.8 — Диаграммы (a) первого и (b, c) второго порядка для поправок к свободной энергии Ω от гауссового беспорядка.

член, как в (2.16), описывающий беспорядок,

$$H = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} + V(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=0,x,y,z} \sigma_{\mu} V_{\mu}(\mathbf{r}). \quad (3.80)$$

По-прежнему будем полагать фермиевскую скорость $v_0 = 1$ и считать, что беспорядок не перемешивает долины. В общей сложности существует четыре типа беспорядка: V_0 — случайный потенциал (например, кулоновские примеси в подложке), V_x и V_y — случайный векторный потенциал (например, плавные искривления плоскости графена) и V_z — случайная масса. Мы будем рассматривать случай гауссового распределения беспорядка с корреляционной функцией

$$\langle V_{\mu}(\mathbf{r}) V_{\nu}(\mathbf{r}') \rangle = 2\pi \delta_{\mu\nu} w_{\mu}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (3.81)$$

Функции $w_{\mu}(r)$ зависят только от относительного расстояния r и имеют острый максимум при $r = 0$. Таким образом, мы имеем дело с почти дельта-коррелированным беспорядком, но будем сохранять небольшую корреляционную длину, которая поможет избежать ультрафиолетовых расходимостей в нашем вычислении. Результаты будут выражены через четыре интегральные константы, характеризующие силу беспорядка и аналогичные параметрам дельта-коррелированной модели,

$$\alpha_{\mu} = \int d^2r w_{\mu}(|\mathbf{r}|). \quad (3.82)$$

В рамках этой гауссовой модели беспорядка поправки к свободной энергии даются петлевыми диаграммами, показанными на рис. 3.8. Штриховые линии в этих диаграммах соответствуют корреляционным функциям (3.81) с соответствующими матрицами σ_{μ} на концах.

3.4.1 Первый порядок

Поправка первого порядка к свободной энергии $\Omega(\phi)$ происходит от петлевой диаграммы рис. 3.8a с двумя функциями Грина и одной примесной линией. Функция Грина в совпадающих точках расходится, поэтому мы будем удерживать конечную длину корреляции беспорядка в этом вычислении. Предполагая, что два конца примесной линии находятся на расстоянии

δ , имеем

$$\Omega_a = \int d^2\delta \sum_{\mu} w_{\mu}(|\delta|) \Omega_a^{(\mu)}, \quad (3.83)$$

$$\delta\Omega_a^{(\mu)} = \pi \int d^2r \operatorname{Tr} \left[\sigma_{\mu} \check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \delta) \sigma_{\mu} \check{G}(\mathbf{r} + \delta, \mathbf{r}) \right]. \quad (3.84)$$

Теперь подставим функцию Грина из (3.69) и разложим поправку к свободной энергии в ряд по степеням δ . Для четырех возможных типов беспорядка получим

$$\Omega_a^{(0),(z)} = \frac{\pi W}{2L^2} \int_0^L dx \left[-\frac{1}{2} \sin^{-2} \frac{\pi x}{L} \pm \left(\frac{2}{\pi^2 \delta^2} + \frac{\delta_x^2 - \delta_y^2}{6\delta^4} + \frac{\delta_y^2 \phi^2}{\pi^2 \delta^2} \right) \right], \quad (3.85)$$

$$\Omega_a^{(x),(y)} = \frac{\pi W}{L^2} \int_0^L dx \left[-\frac{1}{4} \sin^{-2} \frac{\pi x}{L} \pm \left(\frac{1}{12} + \frac{\delta_x^2 - \delta_y^2}{\pi^2 \delta^4} \right) \right]. \quad (3.86)$$

В этих выражениях мы сталкиваемся с двумя типами расходящихся вкладов: с отрицательной степенью δ и с интегралом от $\sin^{-2}(\pi x/L)$. Последний расходится при $x = 0$ и $x = L$. Эти члены, однако, не зависят от параметра ϕ и, следовательно, не влияют на наблюдаемые величины. Члены, зависящие от ϕ , остаются конечными и, после интегрирования по δ в (3.83), дают простой результат:

$$\Omega_a = \text{const} + (\alpha_0 - \alpha_z) \frac{W\phi^2}{4\pi L}. \quad (3.87)$$

Эта линейная по α_{μ} поправка к свободной энергии чистого образца (3.72) просто изменяет общий коэффициент (кондактанс), но сохраняет квадратичную зависимость от ϕ , а значит и форму дороховского распределения (3.9). Таким образом линейная поправка по силе беспорядка не разрушает псевдодиффузный характер транспорта в графене в дираковской точке.

3.4.2 Второй порядок

Поскольку поправка первого порядка (3.87) сохраняет форму дороховского распределения, мы вычислим следующую, квадратичную поправку. Наша цель заключается в том, чтобы найти отклонение от псевдодиффузного транспорта. Поправка второго порядка к свободной энергии дается двумя диаграммами рис. 3.8b и 3.8c. Диаграмма с параллельными линиями примесей (рис. 3.8b) дает

$$\Omega_b = \int d^2\delta d^2\delta' \sum_{\mu,\nu} w_{\mu}(|\delta|) w_{\nu}(|\delta'|) \Omega_b^{(\mu\nu)}, \quad (3.88)$$

$$\Omega_b^{(\mu\nu)} = 2\pi^2 \int d^2r d^2r' \operatorname{Tr} \left[\sigma_{\mu} G(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \delta) \sigma_{\mu} G(\mathbf{r} + \delta, \mathbf{r}') \sigma_{\nu} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}' + \delta') \sigma_{\nu} G(\mathbf{r}' + \delta', \mathbf{r}) \right]. \quad (3.89)$$

Подставляя функцию Грина из (3.69), мы, как и раньше, раскладываем подынтегральное выражение по степеням δ и δ' . После отбрасывания всех не зависящих от ϕ членов и усреднения

по направлениям δ и δ' , получаем следующие четыре вклада:

$$\begin{aligned}\Omega_b^{(00)} &= \Omega_b^{(zz)} = -\Omega_b^{(0z)} = -\Omega_b^{(z0)} \\ &= \frac{W\phi^2}{64L^4} \int_0^L dx dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\sin^{-2} \frac{\pi(x+x'+iy)}{2L} + \sin^{-2} \frac{\pi(x-x'+iy)}{2L} + \text{c.c.} \right].\end{aligned}\quad (3.90)$$

Однако после интегрирования по x и x' оказывается, что это выражение обнуляется. Таким образом мы заключаем, что диаграмма рис. 3.8b не дает никакого вклада в свободную энергию,

$$\Omega_b = 0. \quad (3.91)$$

Теперь рассмотрим диаграмму рис. 3.8с с пересекающимися примесными линиями. Эта диаграмма не содержит функций Грина в близких точках и поэтому не требует регуляризации. Мы можем сразу заменить корреляторы беспорядка w_μ эквивалентными дельта-функциями и получим

$$\Omega_c = \sum_{\mu\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu \Omega_c^{(\mu\nu)}, \quad \Omega_c^{(\mu\nu)} = \pi^2 \int d^2r d^2r' \text{Tr} \left[\sigma_\mu \check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_\nu \check{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right]^2. \quad (3.92)$$

Подставив функцию Грина (3.69), мы находим следующие вклады в сумму (3.92):

$$\begin{aligned}\Omega_c^{(00)} = \Omega_c^{(0z)} = \Omega_c^{(z0)} &= \frac{\pi^2 W}{64L^4} \int_0^L dx dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{ch} \frac{2\phi y}{L} \left(\left| \sin \frac{\pi(x+x'+iy)}{2L} \right|^{-2} \right. \\ &\quad \left. - \left| \sin \frac{\pi(x-x'+iy)}{2L} \right|^{-2} \right)^2,\end{aligned}\quad (3.93)$$

$$\Omega_c^{(zz)} = \Omega_c^{(00)} + \frac{\pi^2 W}{8L^4} \int_0^L dx dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{ch} \frac{2\phi y}{L} \left| \sin \frac{\pi(x+x'+iy)}{2L} \sin \frac{\pi(x-x'+iy)}{2L} \right|^{-2}. \quad (3.94)$$

Интегралы по x и x' легко вычисляются благодаря периодичности подынтегрального выражения. В результате свободная энергия выражается в виде интеграла по y

$$\Omega_c = \frac{\pi^2 W}{8L^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\text{ch}(2\phi y/L)}{\text{sh}^2(\pi y/L)} \left[(\alpha_0 + \alpha_z)^2 \text{cth} \left| \frac{\pi y}{L} \right| - (\alpha_0 + 3\alpha_z)(\alpha_0 - \alpha_z) \right]. \quad (3.95)$$

Этот интеграл расходится при $y = 0$. Раскладывая в ряд около этой точки, мы находим, что подынтегральное выражение ведет себя как $|L/y|^3 + 2\phi^2|L/y|$. Самый сингулярный член не зависит от ϕ , а значит может быть отброшен. Интеграл от второго члена расходится логарифмически и множится на ϕ^2 . Он дает логарифмическую поправку к кондактансу, сохраняя псевдодиффузный (дороховский) тип функции распределения. Обрежем логарифмический интеграл на некоторой ультрафиолетовой длине $y = a$, которая является минимальным масштабом для дираковского гамильтониана, например, длиной корреляции беспорядка или периодом решетки графена. Обрезание сверху на масштабе L уже встроено в подынтегральное выражение (3.95). Мы можем отделить расходящуюся часть интеграла (3.95) от остальной части Ω_c , которая имеет нетривиальную зависимость от ϕ ,

$$\Omega_c = \frac{W\phi^2}{4\pi L} \left\{ (\alpha_0 + \alpha_z)^2 [2 \ln(L/a) + \omega_1(\phi)] + (\alpha_0 + 3\alpha_z)(\alpha_0 - \alpha_z) \omega_2(\phi) \right\}. \quad (3.96)$$

Поскольку логарифмический вклад в свободную энергию содержит ультрафиолетовый масштаб a , который определен с точностью до неуниверсальной константы, функции $\omega_{1,2}(\phi)$ также известны с точностью до произвольной константы

$$\omega_1(\phi) = \frac{\pi^3}{2L\phi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\text{ch}(\pi y/L)}{\text{sh}^3|\pi y/L|} \left(\text{ch} \frac{2\phi y}{L} - 1 - \frac{2\phi^2 y^2}{L^2} \right) = \text{const} - \psi(\phi/\pi) - \psi(-\phi/\pi), \quad (3.97a)$$

$$\omega_2(\phi) = -\frac{\pi^3}{2L\phi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\text{ch}(2\phi y/L) - 1}{\text{sh}^2(\pi y/L)} = \text{const} + \pi^2 \frac{\phi \text{ctg} \phi - 1}{\phi^2}. \quad (3.97b)$$

Логарифмическая поправка в (3.96) может быть включена в зависимость эффективных параметров α_μ от L методами ренорм-группы, см. раздел 1.3.2. Однопетлевые уравнения ренорм-группы для беспорядка в одной долине (2.17) были выведены в разделе 2.2. Параметры, определенные в (3.82), служат начальными условиями для этих уравнений на ультрафиолетовом масштабе a . После интегрирования (2.17) до масштаба размера системы L , мы получаем эффективные перенормированные значения $\tilde{\alpha}_\mu = \alpha_\mu(L)$, которые автоматически учитывают все ведущие логарифмические вклады. Это позволяет нам заменить параметры беспорядка в свободной энергии этими перенормированными значениями и отбросить логарифм в (3.96).

Собирая (3.72), (3.87) и (3.96), мы получаем результат для свободной энергии до второго порядка по перенормированной силе беспорядка:

$$\Omega = \frac{W\phi^2}{4\pi L} \left[1 + \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z + (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_z)^2 \omega_1(\phi) + (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_z)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z) \omega_2(\phi) \right]. \quad (3.98)$$

Таким образом, мы обнаружили отклонение от псевдодиффузного (дороховского) режима $\Omega \sim \phi^2$ во втором порядке.

Если единственным типом беспорядка является случайный потенциал α_0 , можно использовать более точную перенормировку с учетом двухпетлевых вкладов, см. приложение A. Это позволяет определить логарифмические вклады $\sim \alpha_0^3 \ln(L/a)$ в свободную энергию по уже известным линейному и квадратичному вкладам. Можно также изучить диаграммы третьего порядка непосредственно в собственной энергии и найти не только логарифмические, но и конечные поправки. Однако такое вычисление требует значительных технических усилий, а наблюдаемые величины, которые чувствительны к третьему порядку по α_0 (например, третий кумулянт перенесенного заряда), очень сложно измерять.

3.4.3 Поправки к функции распределения

Теперь найдем поправку к функции распределения прозрачностей. В представлении ляпуновских экспонент λ функция распределения дается уравнением (3.60). Используя результат (3.98), мы получим

$$P(\lambda) = \frac{W}{\pi L} \left[1 + \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z + (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_z)^2 p_1(\lambda) + (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_z)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z) p_2(\lambda) \right]. \quad (3.99)$$

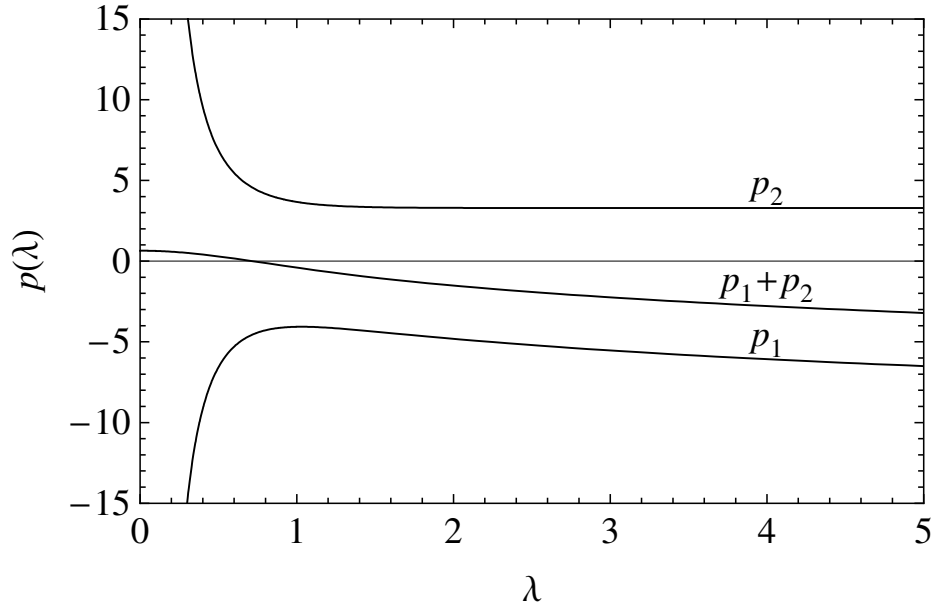


Рис. 3.9 — Функции p_1 и p_2 , входящие в выражение для поправки к функции распределения ляпуновских экспонент (3.99). В случае беспорядка типа скалярного потенциала (α_0), поправка пропорциональна сумме $p_1 + p_2$.

По аналогии с $\omega_{1,2}(\phi)$, функции $p_{1,2}(\lambda)$ определены с точностью до неуниверсальной константы. Из уравнений (3.97) мы находим

$$p_1(\lambda) = \text{const} - 2 \text{Re} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lambda \psi \left(\frac{2i\lambda}{\pi} \right) \right], \quad p_2(\lambda) = \text{const} + \frac{\pi^2}{2 \text{sh}^2(2\lambda)}. \quad (3.100)$$

Функции p_1 и p_2 показаны на рис. 3.9. Если единственным видом беспорядка является случайный потенциал α_0 , то поправка к функции распределения дается суммой $p_1 + p_2$, которая также показана на рисунке. Функции p_1 и p_2 нельзя использовать для непосредственного вычисления моментов из-за сингулярности при $\lambda = 0$. Эта расходимость означает, что теория возмущений по малым параметрам α_μ неприменима около $\lambda = 0$ (то есть $T = 1$). Сравнивая поправку с функцией распределения в чистом образце, мы заключаем, что результат (3.99) справедлив только при условии $\lambda \gg \tilde{\alpha}$.

Отклонение от режима псевдодиффузного транспорта может быть экспериментально продемонстрировано как поправка к фактору Фано $F = 1/3$. Сингулярность функций $p_{1,2}$ в точке $\lambda = 0$ не позволяет нам вычислять моменты из функции распределения (3.99). Тем не менее мы можем получить транспортные характеристики напрямую из свободной энергии (3.98) с помощью тождества (3.61). Фактор Фано с точностью до квадратичных членов по перенормированной силе беспорядка равен

$$F = \frac{1}{3} - \frac{16\zeta(3)}{\pi^2} (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_z)^2 + \frac{8\pi^2}{45} (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_z)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_z) \approx \frac{1}{3} - 0.194 \tilde{\alpha}_0^2 - 0.388 \tilde{\alpha}_0 \tilde{\alpha}_z - 7.212 \tilde{\alpha}_z^2. \quad (3.101)$$

Мы видим, что любой слабый беспорядок, независимо от его матричной структуры, подавляет дробовой шум. (Напомним, что поправка по энергии (3.13) также отрицательна.) Поправка к фактору Фано растет с увеличением длины образца L из-за перенормировки (2.17). Когда размер образца достигнет длины свободного пробега l , один из параметров беспорядка

перенормируется до значения порядка единицы (на самом деле, это и есть определение длины свободного пробега). На этом масштабе происходит кроссовер от баллистического к диффузному режиму, а поправка к фактору Фано достигает значения порядка единицы. Чтобы описывать транспорт на масштабах больше длины свободного пробега l , нам понадобится нелинейная сигма-модель, которая специально предназначена для диффузных систем.

3.5 Графен со слабым беспорядком. Диффузный предел

Когда размер системы превышает длину свободного пробега l , в образце устанавливается диффузный режим переноса электронов. На квазиклассическом уровне система может быть охарактеризована проводимостью на квадрат. В кроссовере от баллистического к диффузному режиму проводимость графена близка к квантовой величине e^2/h . Это означает, что интерференционные поправки должны существенно влиять на транспортных свойства, делая квазиклассическое описание неадекватным. Квантовые эффекты приводят к одному из четырех возможных сценариев в зависимости от симметрии беспорядка:

1. Если единственным типом беспорядка является случайный скалярный потенциал α_0 , гамильтониан обладает симметрией по обращению времени $H = \sigma_y H^* \sigma_y$ и попадает в симплектический класс симметрии АII [70; 71; 131]. Эту ситуацию мы уже изучали в разделе 2.2. Наличие топологического члена в действии сигма-модели (2.34) обеспечивает отсутствие перехода металл-изолятор. Квантовые поправки к проводимости всегда положительны (антилокализация) и приводят к установлению хороших металлических свойств.
2. В случае беспорядка типа векторного потенциала $\alpha_{x,y}$ единственная симметрия гамильтониана — киральность $H = -\sigma_z H \sigma_z$, приводящая к киральному унитарному классу АIII. Такой беспорядок не дает квантовых поправок и может быть эффективно исключен выбором калибровки, см. раздел 2.3.3 и [207]. С точки зрения транспортных свойств, система остается эффективно чистой и баллистической на всех масштабах.
3. Если беспорядок имеет вид случайной массы α_z , гамильтониан приобретает боголюбовскую симметрию $H = -\sigma_x H^* \sigma_x$ и попадает в сверхпроводящий класс D. В процессе перенормировки (2.17) такой беспорядок становится слабее, и на больших масштабах образец также оказывается эффективно чистым. Это означает отсутствие масштаба длины свободного пробега, а значит и диффузного режима.
4. В общем случае, когда в системе есть любые два или все три из вышеперечисленных типов беспорядка, все симметрии нарушены. Это соответствует унитарному классу симметрии А, а транспортные свойства оказываются такими же, как в критической точке перехода между плато квантового эффекта Холла, см. раздел 2.2.

В этом разделе мы будем рассматривать первый случай (скалярный потенциал), когда система, в конечном итоге, приобретает большую безразмерную проводимость и может быть количественно описана нелинейной сигма-моделью симплектического класса. Наше изложение будет следовать работе [201].

3.5.1 Вывод сигма-модели с источником

Сначала нам нужно вывести сигма-модель для усреднения матричной функции Грина (3.54) с источниками z . Вывод сигма-модели существенно использует большой параметр — квазиклассическую безразмерную проводимость. Чтобы обеспечить такое условие, рассмотрим модифицированную модель с большим количеством долин $n \gg 1$. Выводы, которые мы сделаем в конце этого раздела, будут справедливы и в случае одной долины³.

Для усреднения по беспорядку введем также N реплик. (В качестве альтернативы можно построить суперсимметричную модель, но, поскольку мы будем использовать только теорию возмущений, оба подхода полностью эквивалентны.) Вывод сигма-модели начинается с фермионного действия, генерирующего матричную функцию Грина (3.54).

$$S = \int d^2r \sum_{a,b,\alpha} \phi_a^{\alpha\dagger} \left(\left\{ i0\Lambda_z - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \sqrt{z}\sigma_x [\Lambda_+ \delta(x) + \Lambda_- \delta(x-L)] \right\} \delta_{ab} - V_{ab}(\mathbf{r}) \right) \phi_b^\alpha. \quad (3.102)$$

Здесь $\Lambda_{x,y,z}$ — матрицы Паули в RA пространстве и $\Lambda_\pm = (\Lambda_x \pm i\Lambda_y)/2$. Действие является функционалом от двух независимых грассмановых векторных полей ϕ и ϕ^* , которые имеют двухкомпонентную структуру в пространстве подрешеток (матрицы σ). Нижние индексы a и b относятся к долинам, а верхний индекс α нумерует реплики. В целом вектор ϕ состоит из $4nN$ независимых грассмановых переменных, и еще столько же содержатся в ϕ^* . Случайная вещественная симметричная матрица V_{ab} действует только в пространстве долин, что обеспечивает симметрию по обращению времени. Мы предполагаем гауссову статистику беспорядка V с коррелятором

$$\langle V_{ab}(\mathbf{r}) V_{cd}(\mathbf{r}') \rangle = \frac{2\pi\alpha_0}{n} [\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.103)$$

Используя симметрию по обращению времени, перепишем действие в терминах одного четырехкомпонентного поля ψ (и его сопряженной версии $\bar{\psi}$, которая линейно связана с ψ):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi \\ i\sigma_y \phi^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = i\psi^T \sigma_y \tau_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi^\dagger, i\phi^T \sigma_y \right). \quad (3.104)$$

Тем самым мы ввели дополнительную структуру полей в пространстве частица-дырка (РН). Матрицы Паули, действующие в РН пространстве, будем обозначать $\tau_{x,y,z}$. Черта обозначает

³Имеются в виду долины, перемешанные беспорядком. Для графена с плавным случайным потенциалом нужно считать $n = 1$, несмотря на вырождение спектра по спину и двум долинам K и K' .

операцию зарядового сопряжения; она обладает важным свойством $\bar{\psi}_1\psi_2 = \bar{\psi}_2\psi_1$. В терминах ψ действие принимает вид

$$S = \int d^2r \sum_{a,b,\alpha} \bar{\psi}_a^\alpha \left(\left\{ i0\Lambda_z - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \sqrt{z}\sigma_x [\rho_+\delta(x) + \rho_-\delta(x-L)] \right\} \delta_{ab} - V_{ab}(\mathbf{r}) \right) \psi_b^\alpha. \quad (3.105)$$

Здесь мы ввели обозначение $\rho_\pm = (\Lambda_x\tau_z \pm i\Lambda_y)/2$.

Теперь мы усредняем e^{-S} по гауссовому распределению (3.103). Это дает эффективное действие с четырехфермионным членом. Используя вышеупомянутое свойство зарядового сопряжения, переписываем действие в виде

$$S = \int d^2r \left[\sum_{a,\alpha} \bar{\psi}_a^\alpha \left\{ i0\Lambda_z - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \sqrt{z}\sigma_x [\rho_+\delta(x) + \rho_-\delta(x-L)] \right\} \psi_a^\alpha + \frac{2\pi\alpha_0}{n} \sum_{a,b,\alpha,\beta} \text{Tr}(\psi_a^\alpha \bar{\psi}_a^\beta \psi_b^\beta \bar{\psi}_b^\alpha) \right]. \quad (3.106)$$

Далее мы расщепляем четырехфермионный член с помощью преобразования Хаббарда–Стратоновича, интегрируя по вспомогательной матрице R размера $8N \times 8N$. Эта матрица действует во всех пространствах кроме долин. Действие принимает вид

$$S = \int d^2r \left[\frac{n\gamma^2}{8\pi\alpha_0} \text{Tr} R^2 + \sum_{a,\alpha,\beta} \bar{\psi}_a^\alpha \left(i\gamma R_{\alpha\beta} - \left\{ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} + \sqrt{z}\sigma_x [\rho_+\delta(x) + \rho_-\delta(x-L)] \right\} \delta_{\alpha\beta} \right) \psi_a^\beta \right]. \quad (3.107)$$

На данном этапе параметр γ произволен, его значение будет выбрано позже. Матрица $R_{\alpha\beta}$ свертывается с произведением $\sum_a \psi_a^\alpha \bar{\psi}_a^\beta$. Это позволяет нам наложить соответствующую симметрию на R : $R = \sigma_y \tau_x R^T \sigma_y \tau_x$. Теперь мы можем проинтегрировать по фермионным переменным и получить действие в терминах одной лишь R

$$S = \frac{n}{2} \left(\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha_0} \int d^2r \text{Tr} R^2 - \text{Tr} \ln \left\{ i\gamma R - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \sqrt{z}\sigma_x [\rho_+\delta(x) + \rho_-\delta(x-L)] \right\} \right). \quad (3.108)$$

Теперь проанализируем седловые точки действия (3.108) при отсутствии источника z . Сначала найдем диагональную и постоянную в пространстве матрицу R , минимизирующую действие. Уравнение на минимум эквивалентно самосогласованному борновскому приближению (1.30) для собственной энергии $-i\gamma R$,

$$-i\gamma R = 2\pi\alpha_0 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} (i\gamma R - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})^{-1}. \quad (3.109)$$

Мы зафиксируем γ равным мнимой части собственной энергии (1.31) в этом приближении⁴: $\gamma = \Delta e^{-1/\alpha_0}$, где Δ — масштаб ультрафиолетового обрезания энергии (ширина зоны). Тогда седловая точка действия для R имеет простой вид $R = \Lambda_z$. Это же значение определяет граничные условия для матрицы R в металлических контактах. Поскольку в очень хороших металлах флуктуации R сильно подавлены, имеем $R = \Lambda_z$ при $x < 0$ и $x > L$.

Матрица $R = \Lambda_z$ не единственная седловая точка действия (3.108). Другие матрицы, минимизирующие действие, могут быть получены вращением $R = T^{-1}\Lambda_z T$ с любой матрицей

⁴На самом деле, более правильный масштаб $\gamma = \Delta e^{-1/2\alpha_0}$ определяется из баллистической ренорм-группы (1.45). Эта величина естественно возникнет и при выводе сигма-модели, если сначала перенормировать исходное действие (3.106).

T , которая коммутирует с $\sigma\mathbf{p}$ и сохраняет тождество $R = \sigma_y\tau_x R^T \sigma_y\tau_x$. Такие матрицы T , а вместе с ними и R , тривиальны в пространстве подрешеток σ . Это позволяет нам уменьшить размер R до $4N \times 4N$ в пространствах RA, PH и реплик. Седловое многообразие, генерируемое матрицами T , имеет структуру $O(4N)/O(2N) \times O(2N)$.

Теперь учтем источник z в действии и установим граничные условия для R . Матрица R испытывает скачки на границах с металлическими контактами из-за дельта-функций в действии (3.108). Эти скачки можно устранить, сделав калибровочное преобразование. Выполним поворот $R = A\tilde{R}A^{-1}$ с зависящей от x матрицей A . Действие от \tilde{R} примет вид

$$S = -\frac{n}{2} \text{Tr} \ln \left(i\gamma\tilde{R} - \sigma\mathbf{p} + i\sigma_x A^{-1} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} + i\sqrt{z} [\rho_+ \delta(x) + \rho_- \delta(x-L)] A \right\} \right). \quad (3.110)$$

Источник можно исключить из действия, выбрав A так, чтобы выражение в фигурных скобках занулилось. Например, этого можно добиться, взяв

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - i\sqrt{z}\rho_+, & 0 < x < L, \\ (1 - i\sqrt{z}\rho_-)(1 - i\sqrt{z}\rho_+), & x > L. \end{cases} \quad (3.111)$$

Обратим внимание, что матрица \tilde{R} , определенная с помощью такого поворота A , удовлетворяет условию $\tilde{R} = \tau_x \tilde{R}^T \tau_x$. Поскольку дельта-функции из действия выпали, мы можем сделать вывод, что \tilde{R} непрерывна в точках $x = 0$ и $x = L$. В левом контакте $R = \tilde{R} = \Lambda_z$. Это задает левое граничное условие для матрицы \tilde{R} . Правое граничное условие получается из $\tilde{R} = A^{-1}RA$ и $R = \Lambda_z$ при $x > L$. Это дает

$$\tilde{R}(L) = (1 - 2z)\Lambda_z + iz^{3/2}\Lambda_x + \sqrt{z}(2 - z)\Lambda_y\tau_z. \quad (3.112)$$

Мы можем дополнительно упростить это громоздкое выражение, выполнив вращение постоянной матрицей $\tilde{R} = B^{-1}QB$, где

$$B = \frac{\tau_z - \tau_y}{2\sqrt{2}} \left[(1 - z)^{-1/4} (1 + \Lambda_z\tau_z) - i(1 - z)^{1/4} (1 - \Lambda_z\tau_z) \right]. \quad (3.113)$$

После такого поворота действие и граничные условия принимают вид

$$S[Q] = -\frac{n}{2} \text{Tr} \ln (i\gamma Q - \sigma\mathbf{p}), \quad Q(0) = \Lambda_z, \quad Q(L) = \Lambda_z \cos \phi + \Lambda_x \sin \phi. \quad (3.114)$$

Здесь мы заменили источник z на ϕ согласно (3.59). Как видно, угол ϕ простейшим образом входит в граничные условия (3.114) сигма-модели. Кроме того, мы выбрали матрицу B так, чтобы удовлетворить $B^T B = \tau_x$. Следовательно, матрица Q подчиняется простому условию симметрии $Q = Q^T$.

Последний шаг вывода сигма-модели — градиентное разложение (3.114). Мы ограничимся вещественной частью действия, которая имеет вид⁵

$$\text{Re} S = -\frac{n}{4} \text{Tr} \ln (p^2 + \gamma^2 + \gamma\sigma\nabla Q) \simeq \frac{n}{16\pi} \int d^2r \text{Tr} (\nabla Q)^2. \quad (3.115)$$

⁵ Действие сигма-модели также имеет мнимую часть, которая пропорциональна \mathbb{Z}_2 топологическому члену, как обсуждалось в разделе 2.2. Этот член обеспечивает отсутствие перехода металл-изолятор при малых значениях проводимости. Однако в этом разделе мы рассматриваем случай большой проводимости, поэтому экспоненциально слабые эффекты топологического члена можно не учитывать.

Квазиклассическая проводимость n долин дираковских фермионов равна $(n/\pi)(e^2/h)$. Поэтому безразмерная проводимость $\sigma = n/\pi$, и мы можем окончательно написать действие сигма-модели (без топологического члена) в виде

$$S[Q] = \frac{\sigma}{16} \int d^2r \operatorname{Tr}(\nabla Q)^2. \quad (3.116)$$

3.5.2 Поправки к функции распределения

В предыдущем разделе мы вывели симплектическую сигма-модель с действием (3.116) и граничными условиями (3.114). Действие сигма-модели определено для матриц Q размера $4N \times 4N$, подчиняющихся условиям $Q^2 = 1$ и $Q = Q^T$. В этом разделе мы используем сигма-модель для вычисления квантовых поправок к функции распределения прозрачностей.

Свободная энергия системы (3.58) в поле источника ϕ непосредственно выражается через репличный предел $N \rightarrow 0$ статистической суммы сигма-модели

$$\Omega = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N} \left(1 - \int DQ e^{-S[Q]} \right). \quad (3.117)$$

В хорошем металлическом образце с $\sigma \gg 1$ интеграл по Q в (3.117) можно взять методом перевала. Действие (3.116) достигает минимума при следующей конфигурации Q :

$$Q_0 = U^{-1} \Lambda_z U, \quad U = \exp \left(i \Lambda_y \frac{\phi x}{2L} \right). \quad (3.118)$$

Иными словами, матрица Q равномерно поворачивается так, чтобы удовлетворить граничным условиям (3.114). Замена интеграла (3.117) значением подынтегрального выражения в точке минимума воспроизводит квазиклассический результат

$$\Omega_0 = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{S[Q_0]}{N} = \frac{W \sigma \phi^2}{4L}. \quad (3.119)$$

Такая функция эквивалентна дороховскому распределению прозрачностей, см. (3.72) и (3.73), в диффузионной двухмерной системе. Чтобы найти квантовые поправки к этому результату, учтем флуктуации Q вблизи минимума Q_0 . Это эквивалентно вычислению куперонной петли в свободной энергии, рис. 3.10, выполненному в [201].

Малые отклонения Q от конфигурации Q_0 можно параметризовать матрицей B (мы разлагаем по малому B до второго порядка)

$$Q = U^{-1} \Lambda_z \left(1 + B + \frac{B^2}{2} \right) U, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

Такая форма Q автоматически удовлетворяет условиям $Q^2 = 1$ и $Q = Q^T$. Действие сигма-модели, разложенное до второго порядка по B принимает вид

$$S[Q] = S[Q_0] - \frac{\sigma}{16} \int d^2r \operatorname{Tr} \left[(\nabla B)^2 - \frac{\phi^2}{4L^2} \{ \Lambda_x, B \}^2 \right]. \quad (3.121)$$

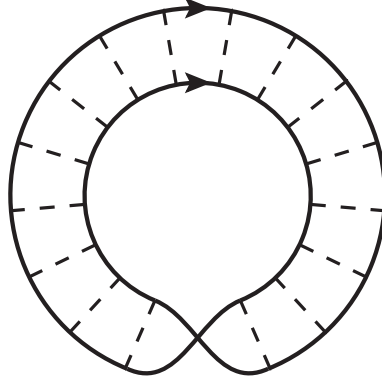


Рис. 3.10 — Поправка к свободной энергии от куперонной петли.

Здесь фигурные скобки обозначают антикоммутатор. Разделим B на две части: коммутирующую и антикоммутирующую с Λ_x . Эти две части не взаимодействуют друг с другом в квадратичном действии (3.121), и только коммутирующая часть зацеплена с параметром ϕ . Таким образом, мы можем отбросить антикоммутирующую часть и наложить условие $[B, \Lambda_x] = 0$ на B . Это эквивалентно требованию $b = -b^T$, а действие принимает вид

$$S[Q] = S[Q_0] + \frac{\sigma}{8} \int d^2r \operatorname{Tr} \left[\nabla b \nabla b^T - \frac{\phi^2}{L^2} b b^T \right]. \quad (3.122)$$

Такая квадратичная форма диагонализуется в импульсном представлении. Компонента импульса вдоль x принимает дискретные значения $\pi n/L$ с целым положительным n (сохранение граничных условий (3.114) требует $b = 0$ при $x = 0$ и $x = L$). Импульс вдоль y непрерывен и не ограничен. Для каждого значения импульса в антисимметричной матрице b есть $N(2N - 1)$ независимых элементов. Вычисление гауссового интеграла в (3.117) дает свободную энергию

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{W}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dq_y}{2\pi} \ln (\pi^2 n^2 + q^2 L^2 - \phi^2) = \frac{W}{2L} \left(\frac{\sigma \phi^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\pi^2 n^2 - \phi^2} \right). \quad (3.123)$$

В формуле (3.123) сумма расходится на больших n . Эта ситуация схожа с тем, что мы уже наблюдали для баллистического режима. Раскладывая сумму в ряд по ϕ , мы видим, что самый сингулярный член не зависит от ϕ , а следующий, логарифмически расходящийся член умножается на ϕ^2 . Это не что иное, как поправка слабой антилокализации к проводимости σ . Такая поправка перенормирует проводимость, но не изменяет форму функции распределения прозрачностей. Логарифмически расходящаяся сумма обрезается на $n \sim L/l$, где l — длина свободного пробега. В терминах перенормированной проводимости свободная энергия равна

$$\Omega = \frac{W}{2L} \left[\frac{\tilde{\sigma} \phi^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\pi^2 n^2 - \phi^2} - \pi n + \frac{\phi^2}{2\pi n} \right) \right], \quad \tilde{\sigma} = \sigma + \frac{1}{\pi} \ln \frac{L}{l} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{L}{l}. \quad (3.124)$$

В дираковской точке и в модели с одной долиной абсолютная величина квазиклассической проводимости $\sigma \sim 1$. Мы пренебрегли этой величиной по сравнению с перенормирующим логарифмом. Сумма по n в (3.124) сходится и описывает отклонение от квазиклассической дороховской статистики прозрачностей.

На самом деле, требуется несколько более строгий вывод результата (3.124). Сначала нужно решить уравнения ренорм-группы для сигма-модели, начиная с квазиклассического

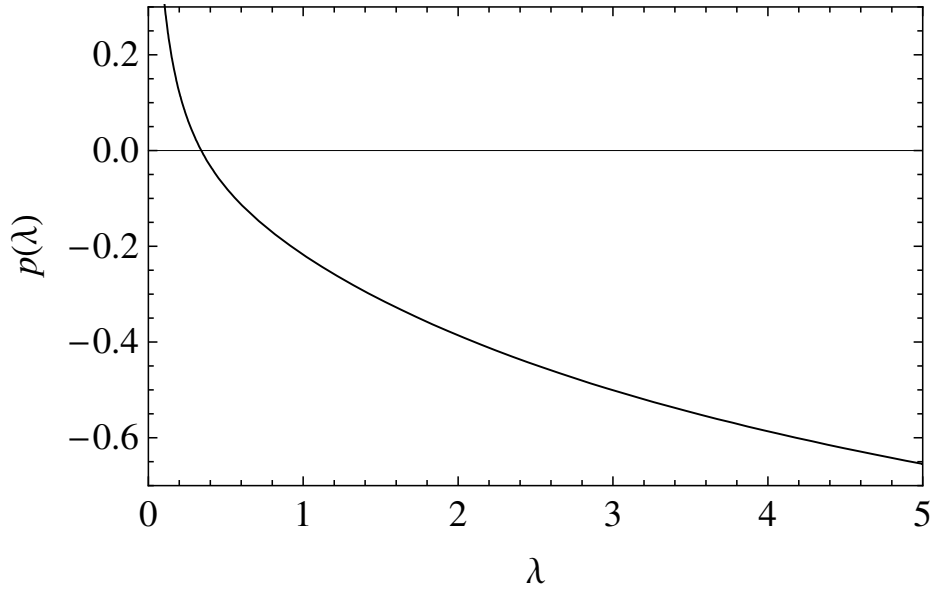


Рис. 3.11 — Поправка к функции распределения ляпуновских экспонент в диффузном пределе.

значения σ и ультрафиолетового масштаба l , до длин $\sim L$. После этого можно применить теорию возмущений для свободной энергии вблизи минимума перенормированного действия. Однако оказывается, что такой способ дает тот же самый результат. Дело в том, что уравнение ренорм-группы для слабой антилокализации $\partial\sigma/\partial\ln L = 1/\pi$ в точности приведет к перенормированной проводимости $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$, как в (3.124). А затем теория возмущений для Ω даст (3.123), в котором σ заменена на $\tilde{\sigma}$, а сумма по n ограничена конечным (не зависящим от L) числом слагаемых. Иными словами, перенормировка просто переносит логарифмический вклад в σ из второго члена в скобках (3.123) в первый.

Найдем функцию распределения ляпуновских экспонент $P(\lambda)$ из свободной энергии (3.124). Применяя (3.60), получим

$$P(\lambda) = \frac{W}{L} [\tilde{\sigma} + p(\lambda)], \quad p(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{Re} \frac{\pi + 2i\lambda}{\sqrt{\pi^2 n^2 - (\pi + 2i\lambda)^2}} - \frac{1}{n} \right]. \quad (3.125)$$

При малых значениях λ , сумма в (3.125) определяется слагаемым с $n = 1$. В противоположном пределе сумму можно оценить соответствующим интегралом с помощью формулы Эйлера—Маклорена. Таким образом, мы получаем асимптотические выражения

$$p(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8\pi\lambda}}, & \lambda \ll 1, \\ -\frac{1}{\pi} \ln \lambda, & \lambda \gg 1. \end{cases} \quad (3.126)$$

Функция $p(\lambda)$ показана на рис. 3.11. Она качественно схожа с численным результатом [188].

Отклонение от квазиклассического диффузного транспорта можно «измерить» отличием фактора Фано от $1/3$. С помощью (3.61), мы получаем

$$F = \frac{1}{3} - \frac{2\zeta(3)}{\pi^3 \tilde{\sigma}} = \frac{1}{3} - \frac{0.244}{\ln(L/l)}. \quad (3.127)$$

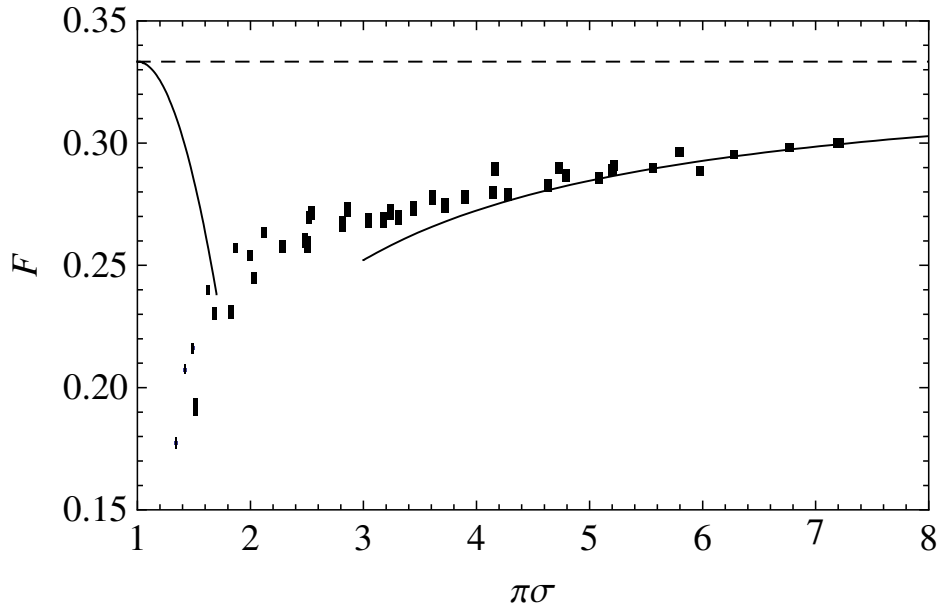


Рис. 3.12 — Фактор Фано как функция проводимости. Сплошные линии показывают баллистический (для гауссового беспорядка) и диффузный результат (3.128). Штриховая линия соответствует асимптотическому значению $F = 1/3$, которое достигается в обоих пределах. Черными прямоугольниками показаны численные данные из [208], размер прямоугольников соответствует оценке погрешности.

Аналогичная поправка была найдена численно в [208]. Мы сравним численные результаты с формулой (3.127) ниже.

В случае слабого скалярного беспорядка α_0 , система проходит через непрерывный кроссовер от баллистического к диффузионному режиму по мере увеличения размера L . В обоих предельных случаях распределение прозрачностей дороховское с малыми поправками (3.101) и (3.127). В баллистическом пределе можно формально определить безразмерную проводимость по формуле $\sigma = (GL/W)/(e^2/h)$. Тогда поправки к фактору Фано выражаются как функции проводимости

$$F = \frac{1}{3} - \begin{cases} \left(\frac{16\zeta(3)}{\pi^2} - \frac{8\pi^2}{45} \right) (\pi\sigma - 1)^2, & \pi\sigma - 1 \ll 1, \\ \frac{2\zeta(3)}{\pi^3\sigma}, & \sigma \gg 1. \end{cases} \quad (3.128)$$

Эти формулы проиллюстрированы на рис. 3.12 вместе с численными результатами из [208]. В работе [208] использовался специально разработанный метод сильной связи, обеспечивающий скалярный беспорядок в рамках одной долины. Наши результаты хорошо согласуются с численными в диффузионном пределе при $\pi\sigma \gtrsim 3$. С баллистической стороны различие между (3.128) и численными данными обусловлено неуниверсальностью баллистических поправок. Функция $F(\sigma)$ существенно зависит от микроскопических деталей беспорядка. В работе [208] использовалась модель с сильными потенциальными примесями, в то время как в нашем расчете предполагался слабый гауссов беспорядок. Электронные свойства графена с сильными примесями будут изучены в следующей главе.

В другой численной работе [188] уравнение Дирака решалось методом трансфер-матрицы и было показано, что фактор Фано принимает значения в диапазоне $0.29 \div 0.30$ (для различных образцов) при значениях проводимости $\pi\sigma$ от 6 до 10. Это согласуется с нашим результатом для режима диффузного транспорта (см. рис. 3.12). Поведение F в баллистическом режиме отличается от предсказанного нами по той же причине неуниверсальности транспортных свойств в этом пределе. Немонотонная зависимость $F(\sigma)$ в дираковской точке также наблюдалось в [189].

Глава 4

Электронные свойства графена с сильными примесями

В предыдущей главе мы рассмотрели транспортные свойства графена в геометрии с двумя широкими металлическими контактами, как показано на рис. 3.1. В частности, мы продемонстрировали возникновение псевдодиффузного режима [16; 33; 198; 209] в дираковской точке в чистом пределе и нашли поправки к дороховской функции распределения коэффициентов прохождения за счет слабого гауссового беспорядка. Мы также показали, что, в отличие от обычных металлов, проводимость графена вблизи дираковской точки улучшается по мере усиления беспорядка [159; 188; 189; 202; 207; 208; 210]. Псевдодиффузный характер баллистических образцов графена был подтвержден в экспериментах по измерению контактного и дробового шума [191–194; 199].

Как было показано в разделе 1.3, модель слабого беспорядка предсказывает логарифмическую зависимость проводимости графена от концентрации носителей вдали от дираковской точки, в то время как в эксперименте [3–8] наблюдается более сильная, практически линейная зависимость. Гораздо лучшее согласие с экспериментом получается, если предположить, что основной механизм рассеяния электронов в графене связан с сильными примесями, см. раздел 1.4. Вблизи дираковской точки такие примеси могут создавать почти локализованные состояния, которые приводят к резонансному рассеянию и поэтому должны существенно влиять на транспортные свойства графена. Примерами сильных примесей служат вакансии, а также адсорбированные атомы или молекулы на поверхности графена [47; 55; 57; 211–227]. Важными частными случаями являются атомы водорода [228–231] или фтора [232–236], которые можно контролируемо осаждать на образец графена. Модель сильных примесей хорошо подходит и для описания рассеяния электронов на металлических островках, которые также можно помещать на поверхность графена [237]. В этом случае есть дополнительный способ контролировать силу рассеяния при помощи внешнего затвора. Различные типы сильных примесей схематически показаны на рис. 4.1.

В этой главе мы применим метод матричных функций Грина, развитый в разделе 3.3, для описания транспорта в графене с сильными (неборновскими) примесями, уделяя особое внимание резонансному пределу. В частности, мы получим вириальное разложение транспортных характеристик по степеням концентрации примесей. Также будет построено специальное представление «развернутой» функции Грина, которое позволяет чрезвычайно эффективно численно находить транспортные свойства графена как в баллистическом, так и

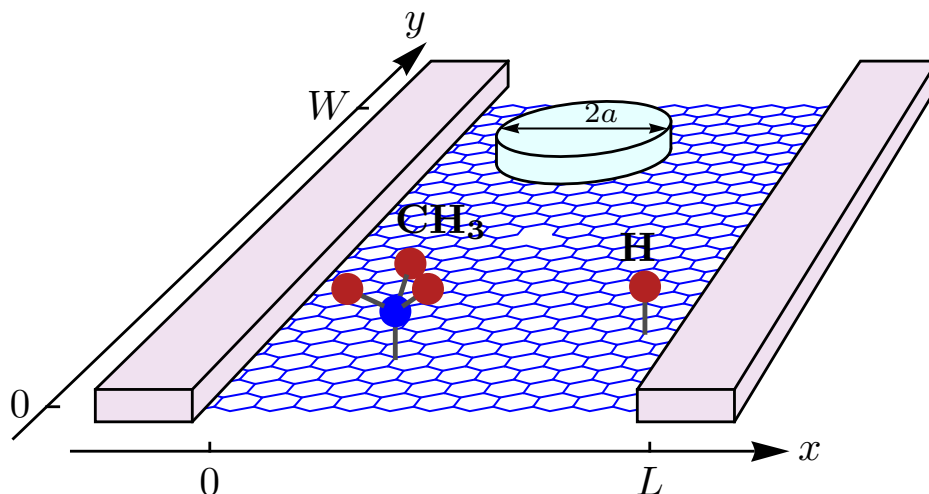


Рис. 4.1 — Схематическое изображение образца графена с двумя широкими металлическими контактами (ср. рис. 3.1) и различными типами сильных примесей.

в диффузном пределе. Мы также изучим эффекты сильных примесей во внешнем магнитном поле и рассмотрим случай специального анизотропного распределения беспорядка.

4.1 Резонансные потенциальные примеси

Начнем с рассмотрения сильных потенциальных примесей. Предположим, как и в предыдущей главе, что к образцу графена с размерами $W \gg L$ присоединены два широких идеальных металлических контакта, как показано на рис. 4.1. Будем описывать систему дираковским гамильтонианом¹

$$H = \sigma \mathbf{p} + U(\mathbf{r}), \quad U(\mathbf{r}) = \sum_i u(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|). \quad (4.1)$$

Металлические контакты располагаются в областях $x < 0$ и $x > L$ и моделируются тем же дираковским гамильтонианом с большим химическим потенциалом. Внутри образца, то есть при $0 < x < L$, полагаем химический потенциал равным нулю (дираковская точка). Беспорядок описывается функцией $U(\mathbf{r})$, которая представляет собой сумму потенциалов отдельных примесей, расположенных в точках \mathbf{r}_i . Мы будем предполагать, что все примеси имеют одинаковый вращательно симметричный потенциал $u(|\mathbf{r}|)$ и не рассеивают между долинами². Именно поэтому мы оставили в гамильтониане (4.1) только одну долину.

Будем также предполагать, что центры примесей \mathbf{r}_i распределены по площади образца равномерно, случайно и не скоррелированы друг с другом. Такой тип беспорядка называется пуассоновским. Среднюю концентрацию примесей будем обозначать n_{imp} . Дополнительно

¹Мы по-прежнему пользуемся системой единиц $\hbar = v_0 = 1$.

²Приближение слабого рассеяния между долинами обосновано тем, что оно хорошо объясняет наблюдаемое нечетное квантование холловской проводимости, см. раздел 2.3.

предположим, что типичный радиус потенциала каждой примеси мал как по сравнению с размерами образца, так и по сравнению с типичным расстоянием между примесями $n_{\text{imp}}^{-1/2}$.

4.1.1 Баллистический режим

При достаточно низкой концентрации примесей в образце $n_{\text{imp}} \ll L^{-2}$ можно пренебречь интерференцией электронов при рассеянии на разных примесях. Иными словами, можно вычислить поправку к транспортным характеристикам от одной единственной примеси, а потом просто умножить ответ на среднее количество таких примесей. Таким образом получается первый член вириального разложения по малому параметру $n_{\text{imp}}L^2$. Баллистический режим с малой концентрацией примесей реализуется экспериментально как в образцах графена на подложке SiO₂ [190–194], так и в подвешенных образцах [238–241]. В последнем случае были достигнуты рекордные значения подвижности электронов в графене, поэтому баллистическое описание транспорта для таких экспериментов наиболее адекватно.

Имея в виду баллистический предел, рассмотрим сначала эффект единственной примеси, расположенной в точке \mathbf{r}_0 . Полный потенциал беспорядка в (4.1) имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = u(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \quad (4.2)$$

Чтобы вычислить распределение коэффициентов прохождения в образце, используем метод матричных функций Грина [200], развитый в предыдущей главе. Свободная энергия с источником ϕ дается формулой (3.58), а функция Грина при наличии примеси вычисляется стандартными методами диаграммной техники [206]. В итоге получается следующее формальное тождество:

$$\Omega = \mathbf{Tr} \ln(\check{G} + \check{G}U\check{G} + \check{G}U\check{G}U\check{G} + \dots) = \Omega_0 - \mathbf{Tr} \ln [1 - U\check{G}]. \quad (4.3)$$

В этой формуле Ω_0 соответствует свободной энергии чистого образца (3.72), а матричная функция Грина дается формулой (3.69). Второй член, описывающий поправку от примеси, содержит функции Грина $\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, взятые между точками, лежащими внутри потенциала примеси. Воспользуемся условием малости радиуса примеси и попытаемся разложить функцию Грина в пределе $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'$.

Оказывается, что в пределе совпадающих точек функция Грина имеет сингулярность, которая не зависит от геометрии образца и источника ϕ , а полностью определяется свойствами дираковского гамильтониана. Точно такая же сингулярность есть и в обычной функции Грина неограниченного и трансляционно инвариантного графена

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (4.4)$$

Чтобы избавиться от этой сингулярности в (4.3), введем T -матрицу примеси (рис. 1.2)

$$T = U + UgU + UgUgU + \dots = U(1 - gU)^{-1}. \quad (4.5)$$

Мы также можем обратить это тождество и выразить потенциал примеси через ее T -матрицу: $U = (1 + Tg)^{-1}T$. Подставляя это выражение в (4.3), перепишем вклад примеси в свободную энергию в виде

$$\delta\Omega = \mathbf{Tr} \ln(1 + Tg) - \mathbf{Tr} \ln [1 - T(\check{G} - g)]. \quad (4.6)$$

Первое слагаемое не зависит от источника ϕ , поэтому его можно отбросить, а второе слагаемое содержит разность $\check{G} - g$, которая имеет хорошо определенный предел в совпадающих точках. Мы будем называть такой предел регуляризованной функцией Грина и введем для нее обозначение

$$\check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} [\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \frac{i}{4L} \check{V}(x) \begin{pmatrix} \sin^{-1} \frac{\pi x}{L} & -\sigma_x \frac{\phi}{\pi} \\ \sigma_x \frac{\phi}{\pi} & -\sin^{-1} \frac{\pi x}{L} \end{pmatrix}_{RA} \check{V}^{-1}(x). \quad (4.7)$$

Здесь матрицы \check{V} и \check{V}^{-1} определяются формулой (3.70). Итак мы заменяем разность $\check{G} - g$ в формуле (4.6) на $\check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_0)$, где \mathbf{r}_0 — положение центра примеси. После этого T -матрицу, которая сконцентрирована в узкой области около \mathbf{r}_0 , можно заменить на ее проинтегрированное значение, которое мы будем обозначать ℓ . В итоге получим

$$\delta\Omega = -\ln \det [1 - \ell \check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_0)], \quad \ell = \int d^2r d^2r' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (4.8)$$

Таким образом мы спрятали все сингулярные вклады в выражение для T -матрицы и свели поправку к свободной энергии к простому детерминанту размера 2×2 . Это очень удобное представление, поскольку T -матрицу можно вычислять непосредственно, решая задачу рассеяния для примеси. При этом в случае вращательно симметричного потенциала рассеяния величина ℓ пропорциональна единичной матрице и имеет смысл длины рассеяния в s -канале.

4.1.2 Вклад одной примеси в s -канале

Покажем, как найти проинтегрированную T -матрицу из решения задачи рассеяния для дираковского гамильтониана. Собственная функция гамильтониана H с примесью U и энергией ϵ удовлетворяет уравнению

$$(\epsilon - H - U)|\psi\rangle = 0. \quad (4.9)$$

При отсутствии примеси собственные функции — плоские волны с импульсом \mathbf{p} :

$$(\epsilon - H)|\mathbf{p}\rangle = 0, \quad |\mathbf{p}\rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Здесь мы привели явный вид плоской волны для дираковского гамильтониана; $\varphi_{\mathbf{p}}$ обозначает угол между \mathbf{p} и осью x . Будем искать состояние рассеяния с падающей волной $|\mathbf{p}\rangle$. Мы можем формально переписать уравнение на такую собственную функцию в следующем виде:

$$|\psi\rangle = |\mathbf{p}\rangle + gU|\psi\rangle, \quad g = (\epsilon - H)^{-1}. \quad (4.11)$$

Решение этого уравнение строится в виде ряда по степеням U :

$$|\psi\rangle = (1 + gU + gUgU + \dots)|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}\rangle + gT|\mathbf{p}\rangle, \quad T = U(1 - gU)^{-1}. \quad (4.12)$$

Таким образом мы видим, что рассеянная волна напрямую связана с T -матрицей примеси.

На больших расстояниях от центра примеси можно заменить функцию Грина³ ее асимптотическим разложением в пределе $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq -\sqrt{\frac{\epsilon}{8\pi r}} e^{i\epsilon r - i\epsilon(\mathbf{r}\mathbf{r}')/r + i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\varphi_{\mathbf{r}}} \\ e^{i\varphi_{\mathbf{r}}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Как и в случае импульса, $\varphi_{\mathbf{r}}$ обозначает угол между \mathbf{r} и осью x . Подставляя асимптотику функции Грина в (4.12), мы получаем стандартный вид состояния рассеяния

$$|\psi(\mathbf{r})\rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} \end{pmatrix} - f_{\epsilon}(\varphi_{\mathbf{r}}, \varphi_{\mathbf{p}}) \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi r}} e^{i\epsilon r + i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_{\mathbf{r}}} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

в котором амплитуда рассеяния выражается следующим образом:

$$f_{\epsilon}(\varphi, \varphi') = \langle \mathbf{p}|T|\mathbf{p}'\rangle = \frac{1}{2} \int d^2r d^2r' (1, e^{-i\varphi}) T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi'} \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r} + i\mathbf{p}'\mathbf{r}'}. \quad (4.15)$$

В этой формуле предполагается, что вектора \mathbf{p} и \mathbf{p}' по абсолютной величине равны ϵ и направлены по φ и φ' .

Вблизи дираковской точки можно пренебречь экспоненциальным множителем в интеграле (4.15). Поскольку для вращательно симметричной примеси амплитуда рассеяния зависит только от относительного угла $\varphi - \varphi'$, проинтегрированная T -матрица должна быть диагональной. Ее величину можно непосредственно выразить через амплитуду

$$\ell = \int d^2r d^2r' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\pi} f_{\epsilon=0}(\varphi). \quad (4.16)$$

Мы показали, что ℓ действительно имеет смысл длины рассеяния в s -канале, который доминирует при рассеянии на малых энергиях. Эта длина простым образом связана с полным сечением рассеяния, равным $\epsilon\ell^2/2$. Таким образом, вместо вычисления T -матрицы через функции Грина, можно просто решить задачу рассеяния с заданным потенциалом примеси на малых энергиях и по найденной амплитуде рассеяния восстановить проинтегрированную T -матрицу.

В качестве примера вычислим длину рассеяния для потенциала прямоугольного профиля радиуса a

$$u(r) = \begin{cases} u_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (4.17)$$

Такой потенциал соответствует металлическому островку круглой формы, помещенному на поверхность графена, с приложенным внешним напряжением, см. рис. 4.1. Уравнение Дирака

³Для состояния рассеяния (4.12) в этом месте нужно использовать запаздывающую функцию Грина.

легко решается в полярных координатах [242–244]. После сшивки решений внутри и снаружи примеси, мы получаем простую формулу для длины рассеяния

$$\ell = 2\pi a \frac{J_1(u_0 a)}{J_0(u_0 a)}. \quad (4.18)$$

Здесь J_m обозначает функцию Бесселя порядка m . Мы видим, что при $J_0(u_0 a) = 0$, длина рассеяния расходится. Это соответствует условиям резонанса, когда в потенциале примеси возникает связанное состояние на нулевой энергии.

Теперь вернемся к выражению (4.8) и обсудим эффект одной сильной примеси на транспортные свойства графена. Используя явное выражение (4.7) для регуляризованной функции Грина, получаем

$$\delta\Omega = -2 \ln \left[1 - \frac{\ell^2}{16L^2} \left(\frac{\phi^2}{\pi^2} - \sin^{-2} \frac{\pi x_0}{L} \right) \right]. \quad (4.19)$$

Отсюда с помощью (3.61) находим поправку к кондактансу

$$\delta G = \frac{32e^2}{\pi^2 h} \left[\sin^{-2} \frac{\pi x_0}{L} + \frac{16L^2}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (4.20)$$

В работе [245] численно решалось уравнение Дирака с круглой потенциальной примесью (4.17), помещенной в центр образца. Вычислялась поправка к кондактансу как функция амплитуды примеси u_0 . На рис. 4.2 мы сравниваем результаты численного моделирования с нашими формулами (4.20), (4.18). В дополнение к s -волновым резонансам, которые прекрасно описываются нашей теорией, существуют более высокие резонансы, положение которых дается нулями $J_m(u_0 a)$ с $m = 1, 2, \dots$. Их также можно включить в наше рассмотрение, если разложить \check{G} в близких точках до более высокого порядка. В следующем разделе мы покажем, как учесть резонансное рассеяние в p -канале.

Когда резонансная примесь $\ell \rightarrow \infty$ находится в центре образца $x_0 = L/2$, она дает максимальный вклад в кондактанс. Амплитуда такой максимальной поправки находится из формулы (4.20)

$$\delta G_{\max} = \frac{32e^2}{\pi^2 h}. \quad (4.21)$$

Это значение определяет высоту s -резонансов на рис. 4.2.

4.1.3 Вклад одной примеси в p -канале

Чтобы учесть рассеяние в p -канале, введем следующую матрицу, содержащую предел регуляризованной функции Грина в совпадающих точках, а также ее производные:

$$\check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0}} \begin{bmatrix} 1 & \partial_{x'} & \partial_{y'} \\ \partial_x & \partial_x \partial_{x'} & \partial_x \partial_{y'} \\ \partial_y & \partial_y \partial_{x'} & \partial_y \partial_{y'} \end{bmatrix} \left[\check{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]. \quad (4.22)$$

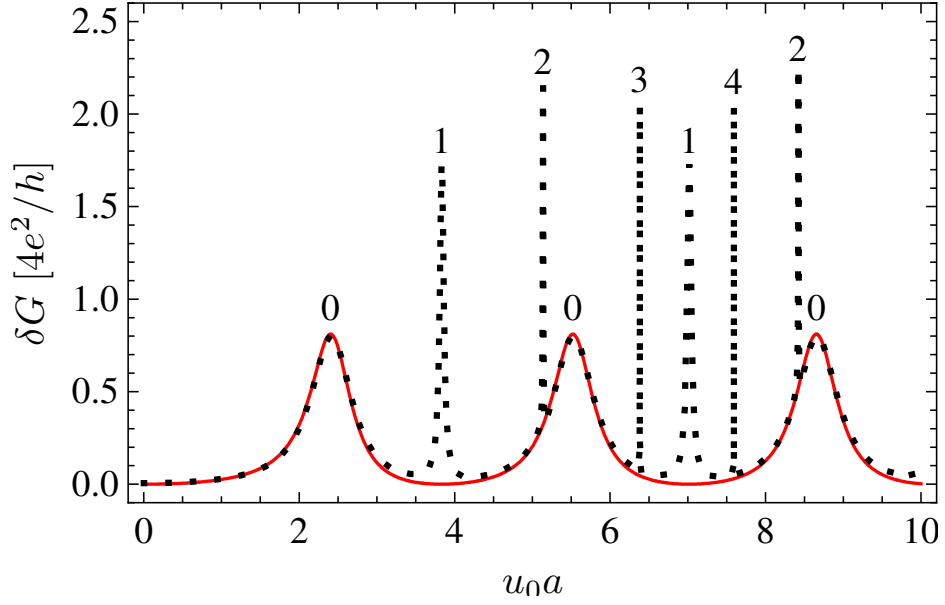


Рис. 4.2 — Поправка к кондактансу от круглой потенциальной примеси, расположенной в центре образца, как функция $u_0 a$. Сплошная линия: аналитический результат (4.20), (4.18), пунктирная линия: численный результат [245] с параметрами $a/L = 0.2$, $W/L = 6$. Цифрами обозначены номера резонансных каналов. В частности, 0 отмечает резонансы в s -канале, а 1 соответствует p резонансам.

Чтобы отличать введенную таким образом структуру от пространств RA и подрешеток, мы будем пользоваться обозначениями матриц в квадратных, а не круглых скобках. Элемент [1,1] матрицы $\check{\mathbb{G}}_{\text{reg}}$ совпадает с регуляризованной функцией Грина \check{G}_{reg} определенной в (4.7).

Для описания рассеяния в s -канале мы использовали проинтегрированную T -матрицу и обозначили ее \mathbb{T} . Для высших гармоник рассеяния нам понадобится более подробная информация о форме примесей. Поэтому мы введем следующий интеграл от T -матрицы:

$$\mathbb{T} = \int d^2 r d^2 r' \begin{bmatrix} 1 & x' - x_0 & y' - y_0 \\ x - x_0 & (x - x_0)(x' - x_0) & (x - x_0)(y' - y_0) \\ y - y_0 & (y - y_0)(x' - x_0) & (y - y_0)(y' - y_0) \end{bmatrix} T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (4.23)$$

Эта матрица также выделяется квадратными скобками и действует в том же пространстве, что и $\check{\mathbb{G}}_{\text{reg}}$. Элемент [1,1] матрицы \mathbb{T} совпадает с использованной выше проинтегрированной T -матрицей.

С введенными таким образом обозначениями мы можем более точно выразить поправку (4.6) к свободной энергии от рассеяния на примеси.

$$\delta\Omega = -\ln \det [1 - \mathbb{T}\check{\mathbb{G}}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_0)]. \quad (4.24)$$

Это выражение включает в себя произведение [1,1] компонент $\check{\mathbb{G}}_{\text{reg}}$ и \mathbb{T} , воспроизводящее предыдущий результат, а также первые члены разложения $\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в ряд в непосредственной близости от центра примеси \mathbf{r}_0 .

Вычислим матрицу $\check{\mathbb{G}}_{\text{reg}}$. Взяв производные от $\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ из формулы (3.69), мы обнаруживаем следующую внутреннюю структуру:

$$\check{\mathbb{G}}_{\text{reg}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_y \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{G}_{\text{reg}}(x) & \check{G}_{\text{reg}}^v(x) \\ \check{G}_{\text{reg}}^v(x) & \check{G}_{\text{reg}}^t(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \sigma_x \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Здесь элемент \check{G}_{reg} дается уравнением (4.7), а два другие элемента

$$\check{G}_{\text{reg}}^v(x) = \frac{\pi}{8L} V(x) \begin{pmatrix} \sigma_z \frac{3\phi^2 - \pi^2}{6\pi^2} - i\sigma_y \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin^3 \frac{\pi x}{L}} & -i\sigma_y \frac{\phi}{\pi \sin \frac{\pi x}{L}} \\ -i\sigma_y \frac{\phi}{\pi \sin \frac{\pi x}{L}} & \sigma_z \frac{3\phi^2 - \pi^2}{6\pi^2} + i\sigma_y \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin^3 \frac{\pi x}{L}} \end{pmatrix}_{RA} V^{-1}(x), \quad (4.26)$$

$$\check{G}_{\text{reg}}^t(x) = \frac{i}{8L^2} V(x) \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{\sin^3 \frac{\pi x}{L}} - \frac{\pi^2 + \phi^2}{2 \sin \frac{\pi x}{L}} & \frac{\pi \phi \cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} - \sigma_x \phi \frac{\pi^2 - \phi^2}{6\pi} \\ \frac{\pi \phi \cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} + \sigma_x \phi \frac{\pi^2 - \phi^2}{6\pi} & -\frac{\pi^2}{\sin^3 \frac{\pi x}{L}} + \frac{\pi^2 + \phi^2}{2 \sin \frac{\pi x}{L}} \end{pmatrix}_{RA} V^{-1}(x). \quad (4.27)$$

Пользуясь преимуществом представления (4.25), мы можем уменьшить размер матрицы \mathbb{T} , вводя новое обозначение

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \sigma_x \end{bmatrix} \mathbb{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_y \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Теперь поправка к свободной энергии принимает более простой вид

$$\delta\Omega = -\ln \det \left\{ 1 - \mathbf{T} \begin{bmatrix} \check{G}_{\text{reg}}(x_0) & \check{G}_{\text{reg}}^v(x_0) \\ \check{G}_{\text{reg}}^v(x_0) & \check{G}_{\text{reg}}^t(x_0) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.29)$$

Чтобы получить окончательный результат, нам нужно выразить элементы матрицы \mathbf{T} через амплитуду рассеяния. Вернемся к тождеству (4.15) и разложим его до второго порядка по ϵ вблизи дираковской точки. Разложение подынтегрального выражения генерирует произведения $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ с линейными и квадратичными многочленами от компонент \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Это позволяет нам установить следующее соотношение:

$$\mathbf{T} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\varphi'}{2\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\varphi'} \\ e^{i\varphi} & e^{i(\varphi-\varphi')} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4i \sin(2\varphi') \partial_\epsilon \\ 4i \sin(2\varphi) \partial_\epsilon & 8 \sin(2\varphi) \sin(2\varphi') \partial_\epsilon^2 \end{bmatrix} f_\epsilon(\varphi, \varphi'). \quad (4.30)$$

Тем самым мы выразили \mathbf{T} через амплитуду рассеяния и ее производные по энергии.

В случае вращательно симметричной примеси амплитуда рассеяния зависит только от разности $\varphi - \varphi'$ и уравнение (4.30) упрощается

$$\mathbf{T} = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \cos(2\varphi) \partial_\epsilon^2 \end{bmatrix} f_\epsilon(\varphi). \quad (4.31)$$

Удобно выразить этот результат через фазы рассеяния δ_m , где m принимает полуцелые значения, соответствующие z проекции полного момента (суммы орбитального и спинового)

дираковского электрона. Амплитуда рассеяния раскладывается в ряд Фурье следующим образом:

$$f_\epsilon(\varphi) = \frac{i}{\epsilon} \sum_m (e^{2i\delta_m} - 1) e^{i(m-1/2)\varphi}. \quad (4.32)$$

Такая связь коэффициентов с фазами диктуется требованием унитарности рассеяния: величины $e^{2i\delta_m}$ являются собственными значениями унитарной матрицы рассеяния, которая диагональна в базисе полного момента. В случае потенциальной примеси, которая сохраняет симметрию по обращению времени, фазы рассеяния четны: $\delta_m = \delta_{-m}$. При низких энергиях они убывают по закону $\delta_m = O(\epsilon^{2|m|})$. Используя эти свойства, мы подставляем (4.32) в (4.31) и находим

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \ell & 0 \\ 0 & \ell_1 \end{bmatrix}, \quad \ell = -4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_{1/2}}{\epsilon}, \quad \ell_1 = -16 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_{3/2}}{\epsilon^3}. \quad (4.33)$$

Эта формула воспроизводит выражение (4.16) для длины рассеяния ℓ . Отметим, что, в отличие от ℓ , параметр ℓ_1 имеет размерность куба длины. Для потенциальной примеси круглого профиля (4.17) формула (4.33) дает

$$\ell_1 = 2\pi a^3 \frac{J_2(u_0 a)}{J_1(u_0 a)}. \quad (4.34)$$

При условии $J_1(u_0 a) = 0$ параметр ℓ_1 расходится, что означает резонансное рассеяние в p -канале.

Теперь вычислим определитель в (4.29) и найдем поправку к свободной энергии в явном виде:

$$\delta\Omega = -2 \ln \left\{ 1 - \frac{\ell^2}{16L^2} \left(\frac{\phi^2}{\pi^2} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x_0}{L}} \right) - \frac{\pi^4 \ell_1^2}{256L^6} \left[\left(\frac{\phi^2}{\pi^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\phi^2}{9\pi^2} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x_0}{L}} \right) - \frac{4 \cos^2 \frac{\pi x_0}{L}}{\sin^6 \frac{\pi x_0}{L}} \right] - \frac{\pi^2 \ell \ell_1}{128L^4} \left[\left(\frac{\phi^2}{\pi^2} - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{\sin^2 \frac{\pi x_0}{L}} \left(\frac{\phi^2}{\pi^2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{L} \right) \right] + O(\ell^2 \ell_1^2) \right\}. \quad (4.35)$$

Здесь мы опустили член $\sim \ell^2 \ell_1^2$, поскольку он всегда мал по сравнению с членом $\sim \ell \ell_1$. Поправка к кондактансу вычисляется по формуле (3.61). Ее зависимость от силы примеси $u_0 a$ показана на рис. 4.3. Мы наблюдаем великолепное совпадение нашей формулы с результатами численного моделирования [245], с точностью до s - и p -резонансов.

Когда примесь находится в условиях p -резонанса $\ell_1 \rightarrow \infty$, поправка к свободной энергии принимает вид

$$\delta\Omega = -2 \ln \left[\left(\frac{\phi^2}{\pi^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\phi^2}{9\pi^2} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x_0}{L}} \right) - \frac{4 \cos^2 \frac{\pi x_0}{L}}{\sin^6 \frac{\pi x_0}{L}} \right]. \quad (4.36)$$

Из нее можно получить поправку к кондактансу по формуле (3.61)

$$\delta G = \frac{32e^2}{9\pi^2 h} \frac{18 + \sin^2(\pi x_0/L) \sin^4(\pi x_0/L)}{(2 - \sin^2(\pi x_0/L))^2}. \quad (4.37)$$

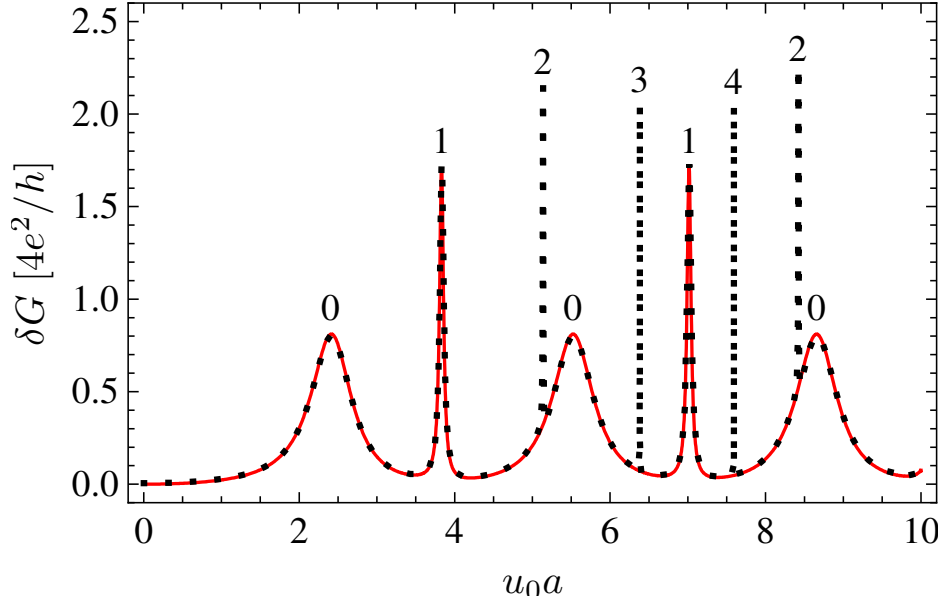


Рис. 4.3 — Поправка к кондактансу от круглой потенциальной примеси, расположенной в центре образца, как функция u_0a . Сплошная линия: аналитический результат на основе (4.35) с учетом рассеяния в s - и p -каналах, пунктирная линия: численный результат [245] с параметрами $a/L = 0.2$, $W/L = 6$, ср. рис. 4.2.

Если резонансная примесь находится в центре образца $x_0 = L/2$, она увеличивает кондактанс на величину

$$\delta G_{\max} = \frac{608e^2}{9\pi^2h} \approx 6.84 \frac{e^2}{h}. \quad (4.38)$$

Именно такой получается высота p -резонансов на рис. 4.3.

4.1.4 Вириальное разложение

Теперь рассмотрим случай неупорядоченного графена с небольшой концентрацией примесей, случайно распределенных по образцу. Среднюю свободную энергию $\bar{\Omega}$ можно вычислить в линейном порядке по n_{imp} , интегрируя уравнение (4.19) по площади образца,

$$\bar{\Omega} = \frac{W\phi^2}{4\pi L} - 4n_{\text{imp}}WL \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16L^2}{\ell^2} - \frac{\phi^2}{\pi^2}} \right). \quad (4.39)$$

Из этого результата мы получаем кондактанс, пользуясь формулами (3.61), с точностью до линейных членов по n_{imp}

$$\begin{aligned} G &= \frac{4e^2W}{\pi hL} \left[1 + \frac{n_{\text{imp}}\ell^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{16L^2 + \ell^2}} \right) \right] \\ &= \frac{4e^2W}{\pi hL} + \frac{4e^2}{\pi h} n_{\text{imp}}WL \begin{cases} \frac{\ell^2}{2\pi L^2} - \frac{\ell^3}{8\pi L^3} + \dots, & \ell \ll L, \\ \frac{4}{\pi} - \frac{48L^2}{\pi\ell^2} + \dots, & \ell \gg L, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Такое же выражение для кондактанса можно найти и с помощью непосредственного усреднения поправки (4.20) по положению примеси x_0 . Для фактора Фано из (4.39) и (3.61) получаем

$$F = \frac{1}{3} - \frac{n_{\text{imp}}\ell^4}{8\pi^3 L^2} \left[1 - \frac{\ell(24L^2 + \ell^2)}{(16L^2 + \ell^2)^{3/2}} \right] = \frac{1}{3} - n_{\text{imp}}L^2 \begin{cases} \frac{\ell^4}{8\pi^3 L^4} - \frac{3\ell^5}{64\pi^3 L^5}, & \ell \ll L, \\ \frac{12}{\pi^3} - \frac{320L^2}{\pi^3 \ell^2}, & \ell \gg L. \end{cases} \quad (4.41)$$

Слабые примеси $\ell \ll L$ можно описывать в рамках борновского приближения, как обсуждалось в предыдущей главе. Для этого нужно разложить свободную энергию (4.39) по малому параметру ℓ/L . Результат совпадает с (3.87), если в качестве амплитуды гауссового беспорядка использовать $\alpha_0 = n_{\text{imp}}\ell^2/2\pi$. Мы также можем уточнить результат, перенормировав силу беспорядка согласно (2.17). Для кондактанса получается выражение

$$G = \frac{4e^2 W}{\pi h L} \left(1 + \frac{n_{\text{imp}}\ell^2}{2[\pi - n_{\text{imp}}\ell^2 \ln(L/\ell)]} \right). \quad (4.42)$$

Поправка к фактору Фано в линейном порядке по $n_{\text{imp}}\ell^2$ отсутствует. Это видно из (4.41) и также совпадает с выводами предыдущей главы.

Обсудим теперь предел резонансных примесей $\ell \rightarrow \infty$. Из собственной энергии (4.39) с помощью (3.60) получается функция распределения прозрачностей в терминах ляпуновских экспонент

$$P(\lambda) = \frac{W}{\pi L} [1 + n_{\text{imp}}L^2 p_s(\lambda)], \quad (4.43)$$

$$p_s(\lambda) = -\frac{8\pi}{4\lambda^2 + \pi^2} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{Re} \frac{\pi - 2i\lambda}{\sqrt{\lambda - i\pi}} \right] = \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{\pi\lambda}} - \frac{8}{\pi} + \dots, & \lambda \ll 1, \\ -\frac{2\pi}{\lambda^2} + \frac{2\pi^2}{\lambda^3} + \dots, & \lambda \gg 1. \end{cases} \quad (4.44)$$

Поправка к функции распределения показана на рис. 4.4.

Мы видим, что количество каналов с хорошей прозрачностью (маленькие λ) возрастает за счет снижения числа плохо проводящих каналов (большие λ). Это также совпадает с результатами для кондактанса и фактора Фано (4.40) и (4.41), которые в пределе резонансных примесей принимают вид

$$G = \frac{4e^2 W}{\pi h L} \left(1 + \frac{4}{\pi} n_{\text{imp}}L^2 \right), \quad F = \frac{1}{3} - \frac{12}{\pi^3} n_{\text{imp}}L^2. \quad (4.45)$$

Действительно, маленькая концентрация примесей приводит к увеличению кондактанса и ослаблению шума. Такое же поведение мы наблюдали и в предыдущей главе в случае слабого гауссового беспорядка. Подчеркнем еще раз, что подобная зависимость прямо противоположна тому, что происходит в обычных металлах, где с ростом силы беспорядка проводимость понижается, а шум усиливается. Также отметим, что поправка к кондактансу составляет ровно $16e^2/\pi^2 h$ в расчете на одну резонансную примесь. Иными словами, каждая такая примесь вносит универсальный вклад в кондактанс всего образца.

Отметим, что примеси, которые резонансно рассеивают в p -канале, также увеличивают кондактанс и подавляют шум. Поправка к функции распределения ляпуновских экспонент за

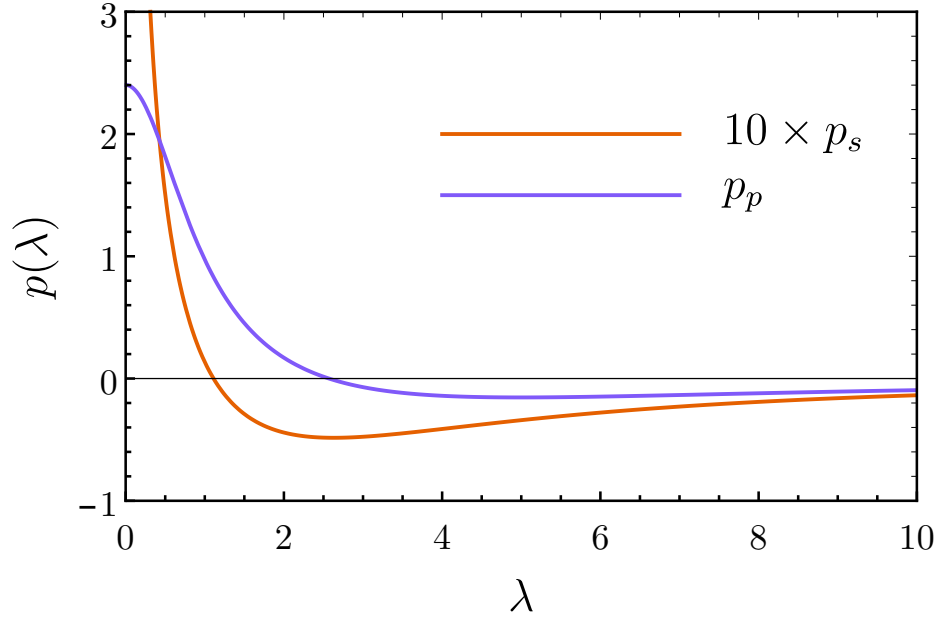


Рис. 4.4 — Поправка к функции распределения ляпуновских экспонент за счет малой концентрации резонансных примесей в s -канале (4.44) и p -канале (4.46). Для наглядности мы увеличили масштаб первой из этих функций в десять раз.

счет p -резонансных примесей получается из (4.36) и (3.60). В предельных случаях больших и малых λ усреднение (4.36) по положению примеси x_0 дает⁴

$$P(\lambda) = \frac{W}{\pi L} [1 + n_{\text{imp}} L^2 p_p(\lambda)], \quad p_p(\lambda) = \begin{cases} \frac{16\sqrt{2}}{3\pi^2} - \frac{2268 + 1909\sqrt{2}}{54\pi^3} \lambda^2 + \dots, & \lambda \ll 1, \\ -\frac{6\pi}{\lambda^2} + \frac{97.5}{\lambda^3} + \dots, & \lambda \gg 1. \end{cases} \quad (4.46)$$

Эта функция изображена на рис. 4.4. Соответствующие поправки к кондактансу и фактору Фано также получаются из (4.36) с помощью (3.61) и усреднения по положению примеси

$$G = \frac{4e^2 W}{\pi h L} \left(1 + \frac{4}{3\pi} (15 - 8\sqrt{2}) n_{\text{imp}} L^2 \right), \quad F = \frac{1}{3} - \frac{4}{81\pi^3} (2803 - 1888\sqrt{2}) n_{\text{imp}} L^2. \quad (4.47)$$

Как и прежде, каждая примесь дает универсальный вклад в кондактанс $\approx 2e^2/h$. Это значение оказывается больше, чем в случае s -резонанса.

Как было установлено выше, вклад малой концентрации резонансных примесей можно учесть в рамках вириального разложения. Для случая s -волновых резонансов первый (линейный) член разложения кондактанса (4.45) проиллюстрирован на рис. 4.5, где схематически показан рост кондактанса с увеличением размеров образца. Чтобы установить пределы применимости вириального разложения (4.39), оценим вклад следующего порядка n_{imp}^2 . Для этого нужно вычислить поправку к свободной энергии от когерентного рассеяния на двух примесях. Такой вклад соответствует редким «столкновениям», когда две примеси оказываются на нетипично малом расстоянии $\lesssim L$.

⁴Коэффициент при λ^{-3} в пределе $\lambda \gg 1$ можно выразить аналитически через корень многочлена четвертой степени с постоянными коэффициентами. Вместо такого громоздкого выражения мы привели численное значение 97.5, которое отличается от точного меньше чем на 10^{-4} .

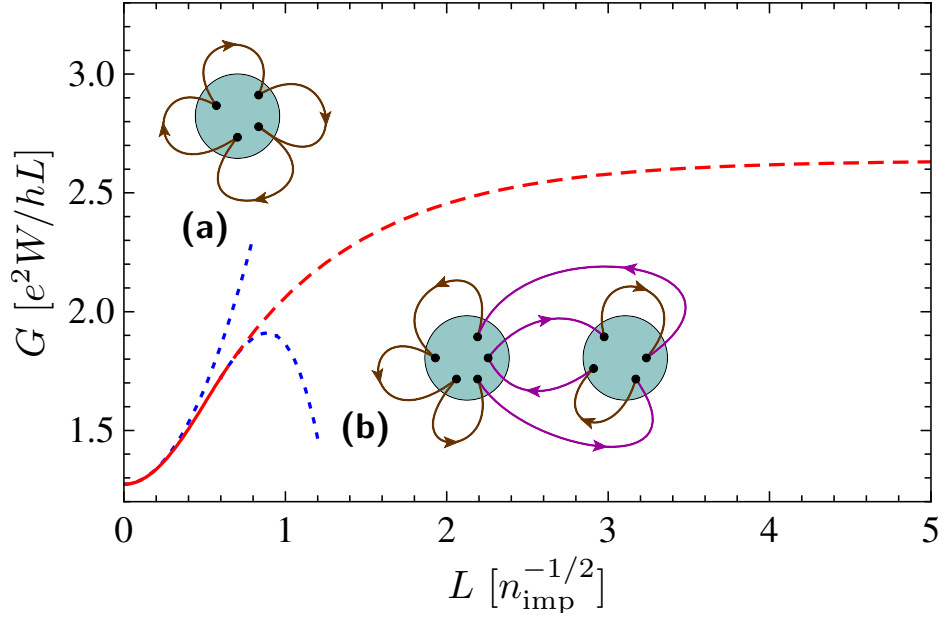


Рис. 4.5 — Кондуктанс графена с резонансными потенциальными примесями как функция L . Пунктирные линии соответствуют баллистическому вириальному разложению (а) первого и (б) второго порядка, (4.45) и (4.54). На вставке изображены типичные диаграммы для рассеяния на одной примеси и на комплексе из двух примесей. Штриховая линия качественно показывает кроссовер в диффузный режим.

Предположим, что центры двух примесей находятся в точках $\mathbf{r}_{1,2}$. Тогда свободную энергию можно представить в виде

$$\Omega = \Omega_0 - \mathbf{Tr} \ln [1 - U_1 \check{G} - U_2 \check{G}]. \quad (4.48)$$

Чтобы отделить индивидуальные вклады каждой примеси от интерференционного вклада, применим к аргументу логарифма следующее тождество:

$$1 - U_1 \check{G} - U_2 \check{G} = (1 - U_1 \check{G}) \left[1 - (1 - U_1 \check{G})^{-1} U_1 \check{G} (1 - U_2 \check{G})^{-1} U_2 \check{G} \right] (1 - U_2 \check{G}). \quad (4.49)$$

Подставляя это выражение в (4.48), мы видим, что первый и последний множитель в правой части приводят к вкладам первой и второй примеси, уже учтенным в линейном члене вириального разложения, см. (4.3). Средний множитель в правой части (4.49) описывает интерференцию при рассеянии на двух примесях. Его можно выразить через T -матрицы примесей с помощью равенства

$$(1 - U \check{G})^{-1} U = [1 - T(\check{G} - g)]^{-1} T. \quad (4.50)$$

Мы возьмем предел малого радиуса для обеих примесей и получим интерференционный вклад в свободную энергию в терминах регуляризованной функции Грина (4.7)

$$\delta^{(2)} \Omega = - \ln \det \left\{ 1 - [1 - \ell \check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_1)]^{-1} \ell \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) [1 - \ell \check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_2)]^{-1} \ell \check{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \right\}. \quad (4.51)$$

Таким образом, нам удалось свести выражение для собственной энергии в образце с двумя примесями к детерминанту конечной матрицы. В резонансном случае $\ell \rightarrow \infty$, поправка

второго порядка принимает вид

$$\delta^{(2)}\Omega = -\ln \det \left[1 - \check{G}_{\text{reg}}^{-1}(\mathbf{r}_1)\check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\check{G}_{\text{reg}}^{-1}(\mathbf{r}_2)\check{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \right]. \quad (4.52)$$

Чтобы найти соответствующий вклад в вириальное разложение, нужно усреднить полученное выражение по положениям обеих примесей. Мы выполним интегрирование по координатам численно, а предварительно разложим свободную энергию до четвертого порядка по ϕ , чтобы получить результаты для кондактанса и фактора Фано. Вириальное разложение свободной энергии с точностью до членов порядка n_{imp}^2 принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{W\phi^2}{4\pi L} - 4n_{\text{imp}}WL \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 - \phi^2}) + \frac{n_{\text{imp}}^2 W}{2} \int_0^L dx dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta^{(2)}\Omega \\ &= \frac{W}{L} \left[\frac{\phi^2}{4\pi} + n_{\text{imp}}L^2 \left(\frac{\phi^2}{\pi^2} + \frac{3\phi^4}{8\pi^4} + \dots \right) - n_{\text{imp}}^2 L^4 \left(0.1290 \frac{\phi^2}{2} + 0.08823 \frac{\phi^4}{24} + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Кондактанс и фактор Фано получаются отсюда по формулам (3.61)

$$G = \frac{4e^2 W}{\pi h L} \left[1 + \frac{4}{\pi} n_{\text{imp}}L^2 - 0.811 n_{\text{imp}}^2 L^4 \right], \quad F = \frac{1}{3} - \frac{12}{\pi^3} n_{\text{imp}}L^2 + 0.8623 n_{\text{imp}}^2 L^4. \quad (4.54)$$

Тем самым мы уточнили формулы (4.45) и продемонстрировали, что вириальное разложение работает в пределе $n_{\text{imp}}L^2 \ll 1$. Отметим, что две близко расположенные сильные примеси нарушают условие резонансности друг для друга. Поэтому поправка к кондактансу оказывается отрицательной в порядке n_{imp}^2 . Мы схематически изобразили зависимость $G(L)$ с учетом поправки первого и второго порядка по n_{imp} на рис. 4.5.

По мере увеличения размеров образца (или концентрации примесей) параметр $n_{\text{imp}}L^2$ становится порядка единицы, и баллистическое вириальное разложение перестает работать. Это означает, что система переходит в диффузный режим. Замечательно, что в случае резонансных примесей кроссовер к диффузии происходит уже при в среднем одной примеси на квадрат $L \times L$. Действительно, длина свободного пробега в графене с резонансными примесями определяется типичным расстоянием между ними: $l \sim n_{\text{imp}}^{-1/2}$. Поведение графена в диффузном пределе $L \gg l$ будет изучено в следующем разделе.

4.1.5 Диффузный режим

В этом разделе мы рассмотрим предел большой концентрации примесей или, что то же самое, большого размера образца, когда динамика дираковских электронов приобретает диффузный характер. Полное выражение для свободной энергии (3.58) можно представить в виде

$$\Omega = -\mathbf{Tr} \ln[\check{G}^{-1} - U] = \frac{W\phi^2}{2\pi L} + \delta\Omega, \quad \delta\Omega = -\mathbf{Tr} \ln[1 - U\check{G}], \quad (4.55)$$

где U обозначает полный потенциал всех примесей (4.1).

Мы предположим, что различные примеси не перекрываются в реальном пространстве, и воспользуемся этим фактом, чтобы свести функциональный детерминант в выражении для свободной энергии к детерминанту конечной матрицы. Функция U равна нулю почти всюду в образце, кроме малых областей, в которых расположены примеси. Как видно из (4.55), в свободную энергию входят только функции Грина, начинающиеся и заканчивающиеся в пределах таких областей. Чтобы воспользоваться этим свойством, введем дополнительное N -мерное пространство, где N — полное количество примесей, и построим диагональную матрицу

$$\hat{U} = \text{diag}\left\{u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \dots, u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N)\right\}. \quad (4.56)$$

В таком представлении можно переписать выражение для Ω в виде

$$\delta\Omega = -\text{Tr} \ln[1 - \hat{U}\hat{G}]. \quad (4.57)$$

Здесь мы ввели обозначение \hat{G} для матрицы размера $N \times N$, каждый элемент которой равен \check{G} :

$$\hat{G} = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{N \text{ раз}}^T \check{G} \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{N \text{ раз}}. \quad (4.58)$$

В справедливости выражения (4.57) для Ω легко убедиться. Благодаря проекционной структуре матрицы \hat{G} можно совершить циклическую перестановку под знаком следа в (4.57). После этого след в N -мерном пространстве берется явно, \hat{U} сворачивается в U , и формула (4.57) сводится к (4.55).

Введем также T -матрицы для отдельных примесей и составим из них диагональную матрицу

$$\hat{T} = \text{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_N\} \quad (4.59)$$

по аналогии с \hat{U} . Свободную энергию можно выразить через T -матрицы примесей так же, как это было сделано для случая одной примеси (4.6)

$$\delta\Omega = \text{Tr} \ln(1 + \hat{T}g) - \text{Tr} \ln[1 - \hat{T}(\hat{G} - g)]. \quad (4.60)$$

В этой формуле g обозначает функцию Грина в бесконечном образце графена (4.4); она умножается на единичную матрицу в N -мерном пространстве примесей, поэтому мы не снабжаем обозначение g «шляпкой». В формуле (4.60) можно отбросить первое слагаемое, поскольку оно не зависит от источника ϕ .

Теперь мы можем использовать тот факт, что в выражение (4.60) входят только функции Грина, начинающиеся и заканчивающиеся на примесях. Пренебрегая медленной зависимостью $\hat{G} - g$ от координат на масштабе размера примеси и заменяя T -матрицы их проинтегрированными значениями, получаем

$$\delta\Omega = -\ln \det[1 - \hat{\ell}\hat{G}_{\text{reg}}], \quad (\hat{G}_{\text{reg}})_{mn} = \begin{cases} \check{G}_{\text{reg}}(\mathbf{r}_m), & m = n, \\ \check{G}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n), & m \neq n. \end{cases} \quad (4.61)$$

Здесь $\hat{\ell}$ — диагональная матрица размера N , содержащая длины рассеяния (4.16) отдельных примесей.

Мы свели задачу о вычислении функционального детерминанта (4.55) к обычному детерминанту матрицы размера $4N$ (фактор 4 соответствует размеру одной матричной функции Грина \check{G}). В выражение (4.61) входят только матричные элементы \check{G} между центрами различных примесей и \check{G}_{reg} на диагонали также в центрах индивидуальных примесей. Мы будем называть построенную таким образом матрицу \hat{G}_{reg} «развернутой» регуляризованной функцией Грина. Отметим, что формула (4.51), выведенная в предыдущем разделе для вклада двух примесей, является частным случаем общей формулы (4.61).

«Развернутое» представление чрезвычайно удобно для численного моделирования неупорядоченного графена. Вычисление детерминанта размера N дает все транспортные характеристики образца с заданным расположением примесей всего за $O(N^3)$ операций. Для сравнения, широко используемые методы точного решения микроскопической модели на шестиугольной решетке, например, метод рекурсивных функций Грина [246–248], требуют обращения матрицы размера W/a и повторяют эту операцию L/a раз, где a — период решетки. Кроме того отметим, что единственная информация, необходимая для применения нашего метода развернутых функций Грина, заключена в T -матрицах отдельных примесей. Для примесей сложной структуры, например, молекул, высаженных на поверхность графена, такая информация может быть получена с помощью хорошо развитых методов квантовой химии.

Применим метод развернутых функций Грина к образцу графена со случайно распределенными резонансными примесями. В пределе $\hat{\ell} \rightarrow \infty$ можно пренебречь единицей в детерминанте (4.61). Это позволяет дополнительно упростить матрицу под знаком детерминанта. Надлежащим поворотом ее можно привести к блочно антидиагональному виду в пространстве RA. Кроме того, нам будет удобнее переопределить источник и, соответственно, поменять знак в выражении для кондактанса

$$\phi \mapsto i\phi, \quad G = -\frac{2e^2}{h} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0}. \quad (4.62)$$

При таких определениях выражение для свободной энергии принимает вид

$$\delta\Omega = -\ln \det \left[\hat{M}(\phi) \hat{M}(-\phi) \right]. \quad (4.63)$$

Множители $\hat{M}(\pm\phi)$ соответствуют антидиагональным блокам в RA пространстве и имеют размер $2N$. Для компактной записи матрицы \hat{M} удобно ввести безразмерные комплексные координаты $z = (\pi/2L)(x + iy)$, тогда ее можно составить из 2×2 блоков

$$M_{mn}(\phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin^{-1}(z_m + z_n^*) & \sin^{-1}(z_m - z_n) \\ -\sin^{-1}(z_m^* - z_n^*) & -\sin^{-1}(z_m^* + z_n) \end{pmatrix}, & m \neq n, \\ \begin{pmatrix} \sin^{-1}(2 \operatorname{Re} z_m) & -\phi/\pi \\ -\phi/\pi & -\sin^{-1}(2 \operatorname{Re} z_m) \end{pmatrix}, & m = n. \end{cases} \quad (4.64)$$

Мы выбрали представление так, чтобы матрица \hat{M} была эрмитовой (именно для этого понадобилась замена источника (4.62)). Кроме того она обладает дополнительной симметрией $\hat{M}(\phi) = -\sigma_x M^T(-\phi) \sigma_x$. Источник ϕ входит в \hat{M} очень простым образом: линейно и только в

диагональных блоках. Пользуясь этими свойствами, мы можем записать кондактанс (4.62) в виде

$$G = \frac{4e^2}{\pi h} \frac{W}{L} + \frac{16e^2}{\pi^2 h} \text{Tr}(\hat{M}^{-1} \hat{M}^{-T})_{\phi=0}. \quad (4.65)$$

Полученное выражение позволяет очень эффективно находить кондактанс численно. Для каждой реализации нужно обратить матрицу размера $2N$, для чего требуется $O(N^3)$ операций. Скорость вычисления можно еще улучшить, если добавлять случайно расположенные примеси по одной и использовать \hat{M}^{-1} , найденную на предыдущем шаге, для обращения новой матрицы \hat{M} , дополненной парой строк и столбцов. Это дает кондактанс сразу для разных значений n_{imp} и снижает сложность до $O(N^2)$ операций в среднем на одну реализацию. Детали алгоритма обращения матриц описаны в приложении Б.1. Мы повторяем вычисление много раз, выбирая случайные положения примесей в полосе ширины W для разных значений W , а затем экстраполируем результат в пределе $W \rightarrow \infty$, чтобы избавиться от неуниверсальных граничных эффектов.

Вычисленная таким способом зависимость проводимости $\sigma = GL/W$ от концентрации примесей в пределе $W \gg L$ показана на рис. 4.6. Мы видим, что проводимость растет с увеличением концентрации примесей. Чтобы понять такое поведение, проанализируем симметрию исходного гамильтониана. Матрица \hat{M} , определенная в (4.64), при $\phi = 0$ подчиняется особой симметрии $\sigma_x \hat{M}^T \sigma_x = -\hat{M}$ и попадает в сверхпроводящий класс D [131]. Симметрия матрицы \hat{M} однозначно связана с симметрией гамильтониана [197], причем эта связь такая же, как между трансфер-матрицей и гамильтонианом. Используя эту эквивалентность, мы находим, что гамильтониан графена с резонансными потенциальными примесями принадлежит к сверхпроводящему симплектическому классу DIII. Отметим, что такой тип симметрии возникает только в пределе резонансных примесей. В случае потенциальных примесей конечной силы получается обычный симплектический класс AII, как обсуждалось в разделе 2.2.

Чтобы понять поведение проводимости в диффузном режиме, нужно учесть интерференционные эффекты. Для этого рассмотрим перенормировку соответствующей сигма-модели. Для гамильтониана класса DIII сигма-модель определена на ортогональной группе [131]. Топология этой группы позволяет включить член Весса-Зумино в двумерной теории. Такой член действительно возникает для случая неупорядоченного дираковского гамильтониана из-за специфической топологии (фазы Берри) спектра (по аналогии с \mathbb{Z}_2 топологическим членом в классе AII для нерезонансных потенциальных примесей, см. раздел 2.2). Член Весса-Зумино приводит к появлению фиксированной точки с проводимостью⁵ $\sigma_0 = 4e^2/\pi h$. Однако замечательным свойством класса DIII является то, что эта фиксированная точка неустойчива: если проводимость превышает значение σ_0 , антилокализационные поправки приводят к ее неограниченному росту. Поэтому эффектом члена Весса-Зумино можно пренебречь и воспользоваться известным [131] двухпетлевым выражением для перенормировки проводимости в классе DIII

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d \ln L} = 1 - \frac{1}{2\bar{\sigma}} + O(\bar{\sigma}^{-2}), \quad \bar{\sigma} \equiv \frac{\pi h}{8e^2} \sigma, \quad (4.66)$$

⁵Здесь мы учли множитель 4, отвечающий за спиновое и долинное вырождение, в выражении для σ_0 .

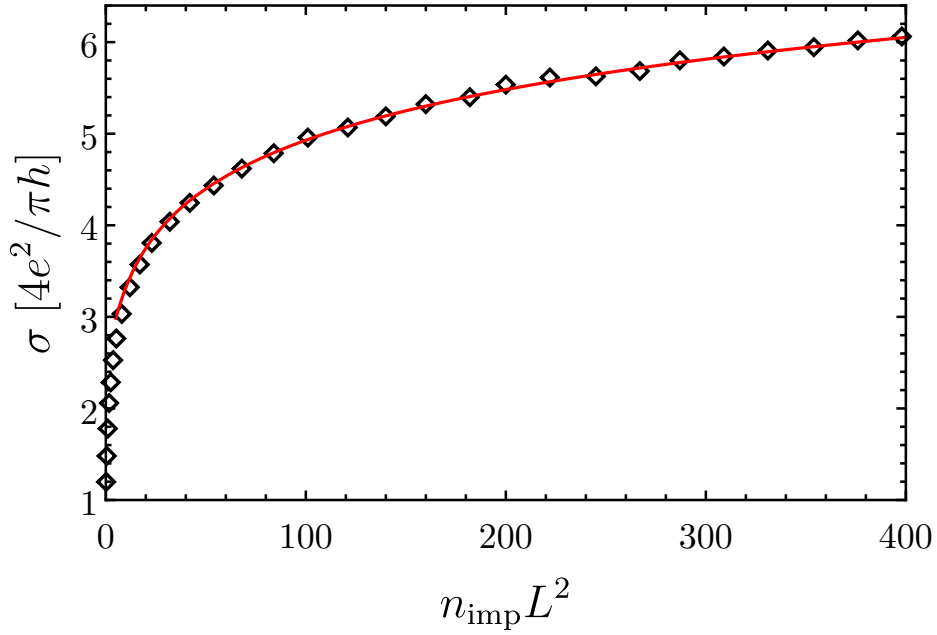


Рис. 4.6 — Средняя проводимость графена как функция концентрации резонансных потенциальных примесей. Черными ромбами показаны численные результаты, полученные по формулам (4.64), (4.65) (см. также приложение Б.1). Сплошная красная линия показывает зависимость (4.67), полученную перенормировкой сигма-модели класса DIII.

справедливым в пределе $\bar{\sigma} \gg 1$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma = \frac{4e^2}{\pi h} \left(\ln n_{\text{imp}} L^2 - \ln \ln n_{\text{imp}} L^2 \right). \quad (4.67)$$

Наши численные результаты (рис. 4.6) прекрасно согласуются с этим решением в пределе большой концентрации примесей. Это вовсе не тривиальное утверждение, поскольку сигма-модель работает только при большой проводимости, в то время как безразмерная баллистическая проводимость в нашей модели $\bar{\sigma} \approx 1/2$. Таким образом мы показали, что, несмотря на маленькую затравочную проводимость, модель графена с резонансными потенциальными примесями течет в фиксированную точку $\sigma \rightarrow \infty$ в рамках сигма-модели класса DIII.

4.2 Вакансии

В предыдущих разделах мы показали, что проводимость коротких и широких образцов графена (см. рис. 4.1) принимает минимальное значение $4e^2/\pi h$ (множитель 4 связан с вырождением по спину и долинам), в дираковской точке и при отсутствии примесей. По мере добавления потенциальных примесей проводимость растет [202; 207] сначала за счет баллистических поправок, а при переходе в диффузный режим — за счет антилокализации. Такое поведение наблюдается как для слабых примесей (симплектический класс AII), так и в случае резонансных рассеивателей (класс DIII).

Однако экспериментально наблюдаемая проводимость графена очень слабо зависит от температуры, что находится в противоречии с теорией антилокализации. Такое поведение указывает на то, что доминирующий тип беспорядка должен сохранять определенную киральную симметрию гамильтониана, как обсуждалось в разделе 2.1. В то же время поведение проводимости вдали от дираковской точки согласуется с моделью сильных примесей, см. раздел 1.4. В этом разделе мы рассмотрим особый тип примесей, которые одновременно являются резонансно сильными и не нарушают киральность,— вакансии.

Резонансные примеси создают почти локализованные состояния вблизи дираковской точки и таким образом сильно влияют на проводимость. Естественным примером резонансного рассеяния является сильный потенциал, приложенный к одному узлу шестиугольной решетки графена. Такая примесь эквивалентна удалению узла из решетки, то есть вакансии. Поэтому под термином «вакансия» мы будем подразумевать не только физическое отсутствие атома углерода, а также любые локальные примеси, которые создают сильный потенциал на одном узле. Типичными примерами служат атомы водорода, фтора или метильные группы (CH_3), которые могут химически присоединиться к одному атому углерода в графене и изменить структуру его валентных электронов с sp^2 типа на sp^3 . Резонансный характер атомов водорода на поверхности графена был численно подтвержден в [55; 211—213]. В экспериментальных работах [228; 230; 231] было показано, что небольшая концентрация водорода не изменяет характерные черты проводимости графена, и представлены аргументы в пользу того, что подвижность электронов ограничивается резонансными примесями.

4.2.1 Цветовая классификация вакансий

Для описания вакансий в графене мы вернемся к микроскопической модели сильной связи на шестиугольной решетке и проделаем более детальный вывод эффективного гамильтониана. Это позволит нам аккуратно включить приложенный к отдельным узлам решетки потенциал в непрерывную дираковскую модель.

Уравнение Шредингера для модели идеальной шестиугольной решетки с прыжками между соседними узлами можно записать следующим образом:

$$-t \sum_{s=0,1,2} \Psi(\mathbf{r} + \zeta_{\mathbf{r}} \boldsymbol{\delta}_s) = \epsilon \Psi(\mathbf{r}). \quad (4.68)$$

Здесь \mathbf{r} принимает дискретные значения, соответствующие узлам решетки, множитель $\zeta_{\mathbf{r}} = \pm 1$ обозначает подрешетку, к которой принадлежит узел \mathbf{r} (+/− соответствует A/B), амплитуда прыжка $t \approx 2.7$ эВ. Индекс s принимает одно из трех значений (0, 1 или 2), а векторы $\boldsymbol{\delta}_s$ соединяют узел подрешетки A с тремя ближайшими соседями, см. рис. 4.7.

Мы выберем ось x в направлении тока и будем считать, что кристаллические оси шестиугольной решетки расположены под произвольным углом α к этому направлению, как

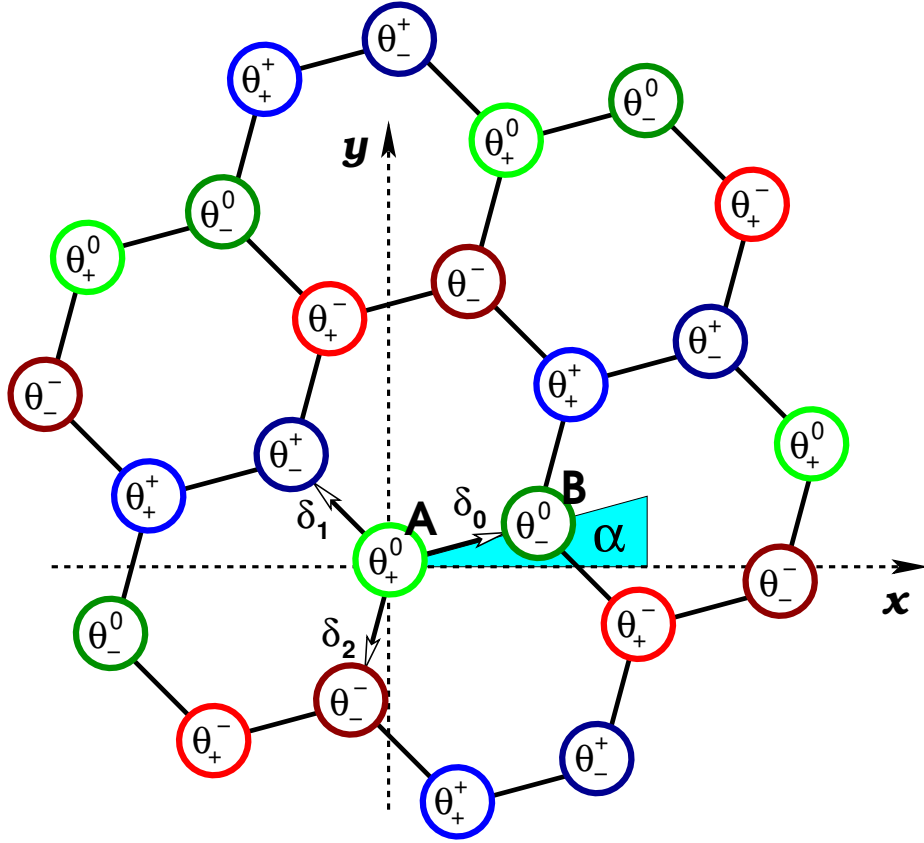


Рис. 4.7 — «Цветовая» классификация узлов шестиугольной решетки. Каждый узел характеризуется фазой $\theta_{\pm}^c = \pm\alpha + 2\pi c/3$, которая может принимать одно из шести значений. Знак \pm определяется подрешеткой (A или B), а $c = -1, 0, 1$ различает три типа узлов в каждой подрешетке. Цветовая схема зависит от положения кристалла относительно направления оси x . Если графен ориентирован под углом $\alpha = 0$, фазы на узлах подрешеток A и B совпадают и остается только три разных цвета.

показано на рис. 4.7. При этих условиях векторы δ_s можно выписать явно

$$\delta_s = a \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\pi s/3) \\ \sin(\alpha + 2\pi s/3) \end{pmatrix}, \quad s = 0, 1, 2. \quad (4.69)$$

Здесь a — расстояние между соседними узлами. Две дираковские точки (долины) в обратном пространстве имеют импульсы $\pm\mathbf{K}$ с вектором

$$\mathbf{K} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} (\sin \alpha, -\cos \alpha). \quad (4.70)$$

Волновую функцию, сконцентрированную в импульсном пространстве вблизи двух дираковских точек, можно описать следующим выражением:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{A} \left[e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} \phi_{\zeta_{\mathbf{r}}} + e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}} \phi'_{\zeta_{\mathbf{r}}} \right]. \quad (4.71)$$

В этой формуле осциллирующие на масштабе периода решетки функции $e^{\pm i\mathbf{K}\mathbf{r}}$ умножаются на плавные огибающие ϕ_{\pm} и ϕ'_{\pm} . Индексы \pm соответствуют подрешетке, в которую попадает узел \mathbf{r} . Мы также ввели для удобства нормировочный фактор \sqrt{A} , где $A = (3\sqrt{3}/2)a^2$ — площадь

элементарной ячейки. Четыре медленные функции можно скомпоновать в один вектор

$$|\Phi\rangle = \left(e^{-\frac{i\alpha}{2}} \phi_+, -ie^{\frac{i\alpha}{2}} \phi_-, -ie^{-\frac{i\alpha}{2}} \phi'_-, e^{\frac{i\alpha}{2}} \phi'_+ \right)^T. \quad (4.72)$$

Подставляя (4.71) в уравнение (4.68) и раскладывая функции ϕ_{\pm} и ϕ'_{\pm} по малым градиентам, мы находим, что вектор $|\Phi\rangle$ удовлетворяет уравнению Дирака:

$$-iv_0 \boldsymbol{\sigma} \nabla |\Phi\rangle = \epsilon |\Phi\rangle, \quad v_0 = \frac{3ta}{2}. \quad (4.73)$$

Этим и объясняется выбор формы вектора $|\Phi\rangle$: первая/вторая пара его компонент соответствует долинам K/K' .

Связь между волновой функцией $\Psi(\mathbf{r})$ микроскопической модели на решетке и вектором $|\Phi\rangle$, подчиняющимся дираковскому гамильтониану, можно выразить следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \langle u(\mathbf{r}) | \Phi \rangle, \quad \langle u(\mathbf{r}) | = \sqrt{A} \begin{cases} \left(e^{\frac{i\alpha}{2} + i\mathbf{K}\mathbf{r}}, 0, 0, e^{-\frac{i\alpha}{2} - i\mathbf{K}\mathbf{r}} \right), & \mathbf{r} \in A, \\ \left(0, ie^{-\frac{i\alpha}{2} + i\mathbf{K}\mathbf{r}}, ie^{\frac{i\alpha}{2} - i\mathbf{K}\mathbf{r}}, 0 \right), & \mathbf{r} \in B. \end{cases} \quad (4.74)$$

Мы видим, что вектор $\langle u |$ не только имеет разный вид в двух подрешетках, но также содержит фазовые множители, которые могут принимать три различных значения в зависимости от выбора узла в пределах одной подрешетки. Поэтому нам нужно различать три типа узлов помимо двух подрешеток. Мы будем обозначать эти типы узлов цветами, как показано на рис. 4.7.

Предположим, что к некоторому узлу i приложен внешний потенциал V . T -матрицу такой примеси можно выразить обычным способом в виде ряда $T = V + V g_{ii} V + V g_{ii} V g_{ii} V + \dots$. В этой формуле g_{ii} обозначает функцию Грина микроскопической решеточной модели, взятую в совпадающих точках. На малых энергиях такая функция Грина ведет себя как $g_{ii} \propto \epsilon \ln \epsilon$ и зануляется в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Благодаря этому свойству T -матрица принимает особенно простой вид: $T = V$. Этот результат можно «перевести на дираковский язык» при помощи тождества (4.74). Та же самая T -матрица, действующая на волновые функции $|\Phi\rangle$, записывается как

$$T(\mathbf{r}) = |u(\mathbf{r})\rangle V \langle u(\mathbf{r})|. \quad (4.75)$$

Здесь \mathbf{r} соответствует узлу, к которому приложен потенциал. Наличие векторов $\langle u |$ и $|u\rangle$ в этой формуле говорит о том, что T -матрица зависит как от подрешетки, так и от «цвета» узла \mathbf{r} . Мы будем различать шесть подрешеток, и, соответственно, шесть возможных T -матриц, при помощи фазовых множителей⁶

$$e^{i\theta(\mathbf{r})} = e^{i\zeta_{\mathbf{r}}\alpha + 2i\mathbf{K}\mathbf{r}} = e^{i\zeta_{\mathbf{r}}\alpha - i\mathbf{K}\mathbf{r}} = e^{\pm i\alpha + 2i\pi c/3}, \quad c = -1, 0, 1. \quad (4.76)$$

Эти множители соответствуют разности фаз у двух ненулевых элементов вектора $\langle u |$ или, что то же самое, фазам недиагональных элементов T -матрицы. Распределение фазовых множителей по узлам решетки проиллюстрировано на рис. 4.7. В частности, если решетка

⁶Мы предполагаем, что начало координат $\mathbf{r} = 0$ совпадает с одним из узлов шестиугольной решетки и используем тождество $e^{3i\mathbf{K}\mathbf{r}} = 1$, справедливое для любых \mathbf{r} , также принадлежащих решетке.

ориентирована так, что $\alpha = 0$, фазовые множители в двух подрешетках совпадают, тем самым оставляя только три различных «цвета».

Для графена с N вакансиями, расположенными в узлах \mathbf{r}_i , можно применить метод развернутой функции Грина, описанный в предыдущем разделе, и написать поправку к свободной энергии по аналогии с (4.61)

$$\delta\Omega = -\ln \det [1 - \hat{T}\hat{G}_{\text{reg}}]. \quad (4.77)$$

Здесь \hat{T} — диагональная матрица, содержащая T -матрицы (4.75) отдельных примесей. Пользуясь проекционной структурой оператора T , перепишем это выражение в виде

$$\delta\Omega = -\ln \det [1 - \hat{V}\hat{G}], \quad \hat{G}_{mn} = \langle u(\mathbf{r}_m) | \check{G}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) | u(\mathbf{r}_n) \rangle. \quad (4.78)$$

Тем самым мы уменьшили размер матрицы до $2N$. Также обратим внимание, что диагональный матричный элемент \hat{G}_{mm} не имеет сингулярности в совпадающих точках, поэтому функцию Грина не нужно регуляризовать.

Теперь мы возьмем предел $V \rightarrow \infty$, соответствующий удалению узлов из решетки, и пренебрежем единицей в аргументе детерминанта (4.78). Пользуясь формулами (3.69), (4.74), мы можем привести матрицу \hat{G} к блочно антидиагональному виду в пространстве RA и представить свободную энергию в виде (ср. (4.63)) детерминанта произведения этих блоков

$$\delta\Omega = -\ln \det [\hat{M}(\phi)\hat{M}(-\phi)]. \quad (4.79)$$

Здесь матрица \hat{M} имеет размер $N \times N$ и состоит из элементов

$$M_{mn} = \text{Re} \frac{\exp [i(\theta_m - \theta_n)/2 + i\phi(y_m - y_n)/2L]}{\sin [\pi(\zeta_m x_m + \zeta_n x_n + iy_m - iy_n)/2L]}. \quad (4.80)$$

В этой формуле фазы $\theta_i = \theta(\mathbf{r}_i)$ принимают одно из шести значений (4.76). Мы также сделали замену источника (4.62), чтобы привести матрицу \hat{M} к эрмитовому виду. Кондактанс образца графена с заданным расположением вакансий вычисляется по формуле (4.62)

$$G = \frac{8e^2}{h} \left\{ \frac{W}{2\pi L} + \text{Tr} \left[M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \phi^2} - \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \phi} \right)^2 \right]_{\phi=0} \right\}. \quad (4.81)$$

Как и в случае резонансных потенциальных примесей, эта формула позволяет чрезвычайно эффективно находить проводимость графена с заданным расположением вакансий.

4.2.2 Баллистический режим

В этом разделе мы изучим свойства графена с малой концентрации вакансий. Мы проведем детальное сравнение результатов, полученных с применением формулы (4.81), с результатами микроскопического численного моделирования графена методом рекурсивных

функций Грина [246–249]. В частности, будет продемонстрирована высокая чувствительность кондактанса к «цветам» вакансий. Мы также построим первые члены вириального разложения кондактанса по степеням концентрации вакансий.

Рассмотрим прямоугольный образец графена размера $L \times W$, см. рис. 4.1, с двумя идеальными металлическими контактами. Как и раньше, будем предполагать $W \gg L$. В общем случае произвольного набора вакансий кондактанс определяется по формулам (4.80), (4.81). В частности, если в образце есть единственная вакансия, она не дает вклада в кондактанс, поскольку диагональные элементы матрицы \hat{M} не зависят от ϕ . Будем рассматривать случай двух вакансий, расположенных в точках $\mathbf{r}_{1,2}$. Тогда, в соответствии с (4.81), поправка к кондактансу чистого графена имеет вид

$$\delta G = \frac{4e^2}{h} \frac{\bar{y}^2}{L^2} \frac{\rho_{11}\rho_{22} \operatorname{Re}(\rho_{12}^2) - |\rho_{12}|^2 (\operatorname{Re} \rho_{12})^2}{[(\operatorname{Re} \rho_{12})^2 - \rho_{11}\rho_{22}]^2}, \quad (4.82)$$

где $\bar{y} = y_1 - y_2$ расстояние между вакансиями в направлении оси y . Здесь мы ввели обозначение

$$\rho_{ij} = \frac{e^{i(\theta_i - \theta_j)/2}}{\sin [\pi(\zeta_i x_i + \zeta_j x_j + iy_i - iy_j)/2L]}. \quad (4.83)$$

Фазы $\theta_i = \zeta_i \alpha - \mathbf{K} \mathbf{r}_i$ определяются подрешетками и «цветами» вакансий, см. (4.76) и рис. 4.7, и могут принимать одно из шести значений. Поправка к кондактансу зависит от разности фаз $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_2$.

Для сравнения мы также находим кондактанс микроскопическим численным методом рекурсивных функций Грина с параметрами $L \approx 50a$ и $W \approx 600a$. Будем рассматривать две ориентации решетки: $\alpha = 0$ («зубчатая») и $\alpha = \pi/2$ («зигзаг»). В металлических контактах при $x < 0$ и $x > L$ положим химический потенциал, $\mu = 0.3t \approx 10v_0/L$. Внутри образца ($0 < x < L$) выберем уровень Ферми $\epsilon = 0.001t \approx 0.033v_0/L$. Ненулевая величина энергии необходима для устойчивости метода рекурсивных функций Грина. Без примесей относительное отклонение вычисленного кондактанса от величины $G_0 = 4e^2W/\pi hL$ оказывается меньше 1%. Мы убедились, что одна вакансия дает пренебрежимо малую поправку, в то время как две вакансии приводят к поправке $\delta G \sim e^2/h$. Зафиксируем одну вакансию в центре образца и будем следить за изменением кондактанса как функции положения второй вакансии.

На рис. 4.8 показан набор данных для $\alpha = 0$ и для вакансий из разных подрешеток: вакансия подрешетки А находится в центре $\mathbf{r}_1 = (L/2, 0)$, а вакансия подрешетки В — в точке $\mathbf{r}_2 = (2L/3, -\bar{y})$. Зависимость поправки δG от \bar{y} показана на рис. 4.8 цветными точками. Кондактанс перескакивает между тремя различными гладкими кривыми, соответствующими трем значениям $\bar{\theta} = 0$ и $\pm 2\pi/3$, по мере изменения \bar{y} . Аналогичные данные показаны на рис. 4.9а для ориентации $\alpha = \pi/2$ и для положения вакансии В на линии $x_2 \approx 0.45L$. В этом случае возникают другие три фазы: $\bar{\theta} = \pi$ и $\bar{\theta} = \pm\pi/3$. На рис. 4.9b обе вакансии берутся в подрешетке А, и полагается $x_2 \approx L/3$. В этом случае также получается три возможные разности фаз: $\bar{\theta} = 0$ и $\bar{\theta} = \pm 2\pi/3$, в согласии с классификацией цветов на рис. 4.7.

Мы наблюдаем хорошее согласие между численными данными рис. 4.8 и 4.9, полученными методом рекурсивной функции Грина, и аналитическим результатом (4.82), показанным на тех же рисунках непрерывными кривыми. Небольшие расхождения обусловлены конечным

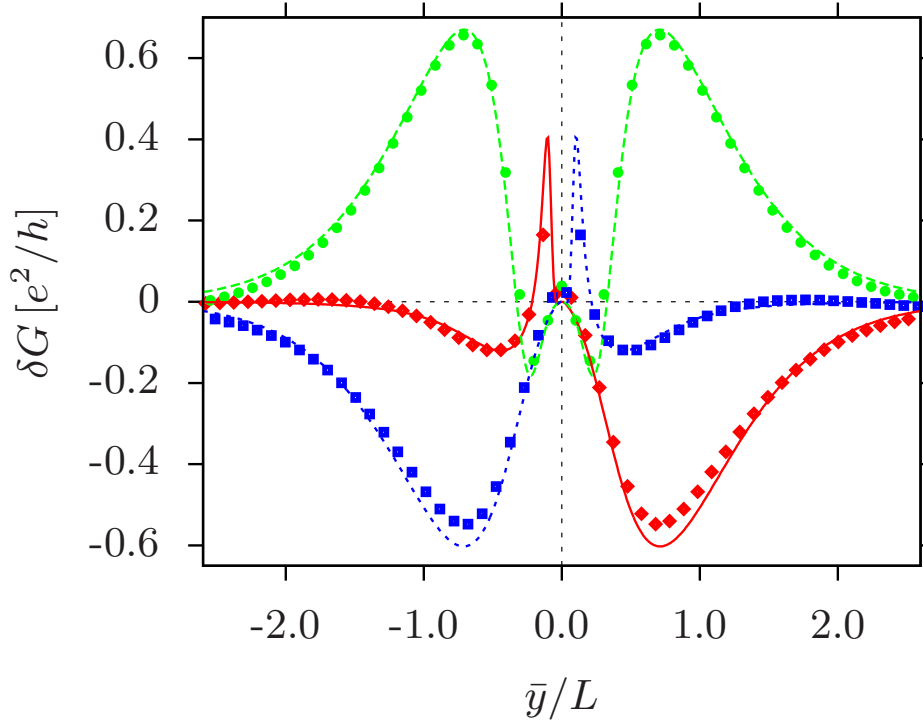


Рис. 4.8 — Кондуктанс «зубчатого» образца ($\alpha = 0$) с двумя вакансиями (А и В). С изменением расстояния \bar{y} кондуктанс переключается на масштабе периода решетки между тремя гладкими кривыми, соответствующими $\bar{\theta} = 0$ (зеленые круги), $\bar{\theta} = 2\pi/3$ (синие квадраты) и $\bar{\theta} = -2\pi/3$ (красные ромбы). Численные данные, полученные методом рекурсивных функций Грина, хорошо согласуются с формулой (4.82), показанной цветными кривыми.

соотношением W/L и конечной величиной химического потенциала в контактах. Маленькое отклонение энергии от дираковской точки внутри образца, введенное для обеспечения устойчивости алгоритма, также может играть свою роль в небольшом отличии численного и аналитического результатов.

Теперь рассмотрим кондуктанс графена с малой концентрацией вакансий. Как и в случае резонансных потенциальных примесей, мы можем построить вириальное разложение проводимости в геометрии $W \gg L$ по степеням концентрации примесей. Поскольку одна вакансия не дает вклада в кондуктанс, в этом вириальном разложении отсутствует линейный член. Член второго порядка можно получить, усредняя (4.82) по положениям двух вакансий. Такое усреднение приводит к следующему результату:

$$\sigma = \frac{4e^2}{\pi h} \left\{ 1 + L^4 \sum_{c_1, c_2} \left[\gamma_{\frac{2\pi}{3}(c_1 - c_2)} (n_{Ac_1} n_{Ac_2} + n_{Bc_1} n_{Bc_2}) + 2\bar{\gamma}_{2\alpha + \frac{2\pi}{3}(c_1 - c_2)} n_{Ac_1} n_{Bc_2} \right] + O(n^3 L^6) \right\}. \quad (4.84)$$

Здесь введено шесть концентраций примесей n_{Ac} и n_{Bc} , распределенных по двум подрешеткам и трем «цветам»; цвета нумеруются индексом $c = -1, 0, 1$, как показано на рис. 4.7. Параметры γ_χ и $\bar{\gamma}_\chi$ являются четными и периодическими функциями своего индекса χ . В аргумент первой функции не входит угол ориентации α , поэтому в (4.84) возникают только значения $\gamma_0 \approx 0.2653$ и $\gamma_{\pm 2\pi/3} \approx -0.1197$. Индекс у второго параметра $\bar{\gamma}_\chi$ может принимать любые значения в зависимости от α . Среднее значение $\bar{\gamma}_\chi$ на периоде равно нулю. В образце с «зубчатой»

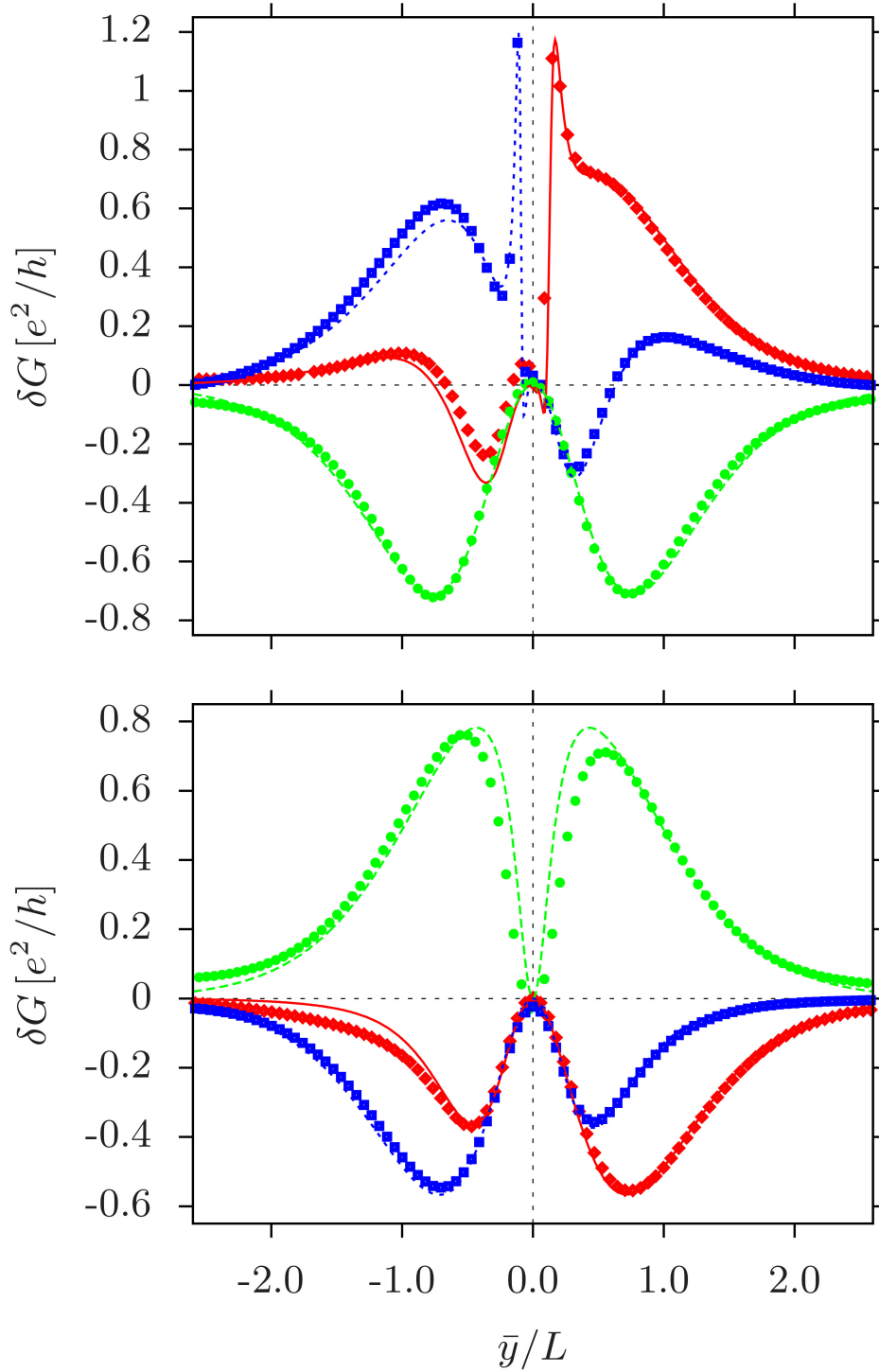


Рис. 4.9 — Кондуктанс образца с ориентацией «зигзаг» ($\alpha = \pi/2$) с двумя вакансиями. Верхний график соответствует случаю, когда вакансии находятся в разных подрешетках. С изменением расстояния \bar{y} кондуктанс переключается на масштабе периода решетки между тремя гладкими кривыми, соответствующими $\bar{\theta} = \pi$ (зеленые круги), $\bar{\theta} = \pi/3$ (синие квадраты) и $\bar{\theta} = -\pi/3$ (красные ромбы). Нижний график показывает результат для обеих вакансий в подрешетке A. Разность фаз принимает значения $\bar{\theta} = 0$ (зеленые круги), $\bar{\theta} = 2\pi/3$ (синие квадраты) и $\bar{\theta} = -2\pi/3$ (красные ромбы). Результат (4.82) показан цветными кривыми.

ориентацией ($\alpha = 0$) в формулу (4.84) входят значения $\bar{\gamma}_0 \approx 0.1700$ и $\bar{\gamma}_{\pm 2\pi/3} \approx -0.0850$. В случае ориентации «зигзаг» ($\alpha = \pi/2$), получаем $\bar{\gamma}_{\pm\pi/3} \approx 0.0843$ и $\bar{\gamma}_\pi \approx -0.1686$. В каждом из этих случаев сумма трех значений $\bar{\gamma}$ оказывается очень маленькой $\sim 10^{-5}$. Если вакансии равномерно распределены по всем подрешеткам и «цветам», средняя проводимость дается выражением

$$\sigma = \frac{4e^2}{\pi h} \left[1 + \kappa n^2 L^4 + O(n^3 L^6) \right], \quad (4.85)$$

где n — полная концентрация вакансий и $\kappa \approx (\gamma_0 + \gamma_{2\pi/3} + \gamma_{-2\pi/3})/6 \approx 0.0043$ с точностью до очень малых ($\sim 10^{-5}$) периодических вариаций в зависимости от α , происходящих из членов с $\bar{\gamma}$.

Как мы только что показали, проводимость графена существенно зависит от распределения вакансий (или любых других сильных примесей атомного размера) по «цветам». Неравномерное распределение примесей на узлах разных «цветов» может возникать естественным образом из-за взаимодействия между примесями. «Цвета» узлов решетки определяются различными фазами блоховских состояний в дираковской точке. Поэтому, например, РККИ взаимодействие между примесями [250–252] осциллирует в пространстве в точном соответствии с цветовой схемой рис. 4.7, а значит расположение примесей в узлах одного цвета оказывается энергетически выгодно.

4.2.3 Диффузный режим

Теперь рассмотрим диффузный режим в графене с вакансиями, предполагая, что их концентраций велика $n_{\text{imp}} L^2 \gg 1$. При удалении узлов из шестиугольной решетки сохраняется киральная симметрия, потому что гамильтониан по-прежнему содержит только прыжки между подрешетками А и В. Такая модель принадлежит к киральному ортогональному классу BDI, который уже обсуждался в разделе 2.1.2. Как было показано в работах Гаде и Вегнера [72; 73], благодаря киральной симметрии полностью сокращаются все локализационные поправки в пределе большой металлической проводимости. Поэтому мы ожидаем, что по мере роста концентрации вакансий проводимость графена должна насыщаться и принимать некоторое универсальное значение порядка e^2/h .

Чтобы это проверить, мы проведем численное усреднение проводимости, пользуясь представлением развернутой функции Грина (4.80), (4.81). Эффективный численный алгоритм обращения матрицы \hat{M} описан в приложении Б.2. Сначала предположим, что вакансии распределены равномерно по подрешеткам и «цветам». В таком режиме оказывается очень трудно получить какой-то ощутимый эффект беспорядка. На рис. 4.10 показана зависимость средней проводимости от концентрации вакансий. Как видно, средняя проводимость все время остается близка к $4e^2/\pi h$ в пределах погрешности $1 \div 2$ %. Это согласуется с очень маленьким коэффициентом $\kappa \approx 0.0043$ в вириальном разложении (4.85). Таким образом мы

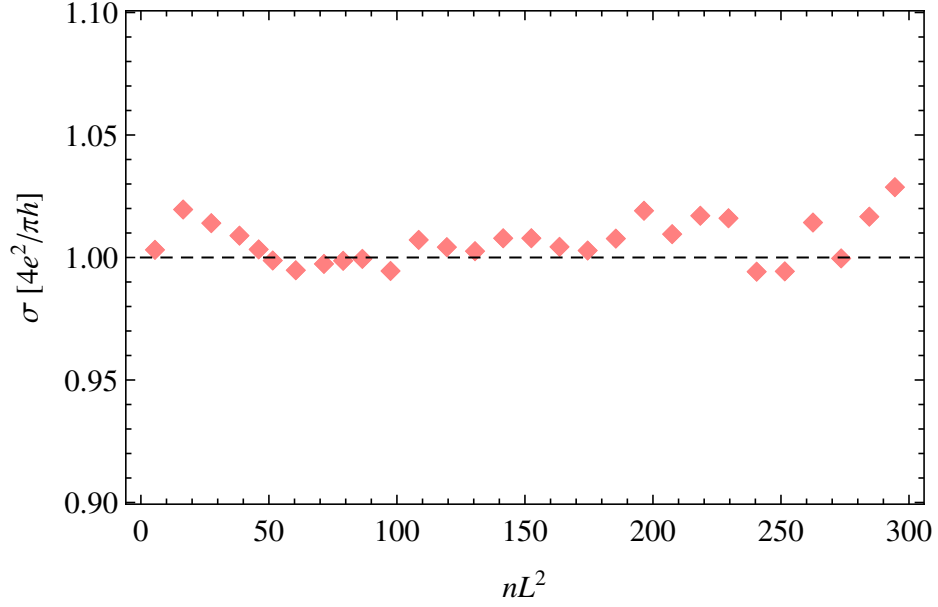


Рис. 4.10 — Средняя проводимость в графене с равномерно распределенными вакансиями близка к $4e^2/\pi h$ при любых концентрациях примесей.

зключаем, что проводимость графена с равномерно распределенными вакансиями остается близка к чистому значению $4e^2/\pi h$ при любых концентрациях примесей.

Гораздо более интересное поведение наблюдается в случае, когда все вакансии расположены в узлах одного цвета. Для определенности предположим «зубчатую» ориентацию образца $\alpha = 0$ и опустим фазовые множители $\theta(\mathbf{r})$ в (4.80). Результат вычисления средней проводимости как функции концентрации вакансий показан на рис. 4.11 (верхний график). Мы видим что существуют две разные фиксированные точки для проводимости в пределе больших концентраций. В случае, когда вакансии равномерно распределены по двум подрешеткам, $n_A = n_B$, мы получаем предельное значение $\sigma^* \simeq 1.6 \times 4e^2/\pi h$. Если же концентрации в подрешетках различны, $n_A \neq n_B$, проводимость поначалу растет с концентрацией, а потом падает в диффузном режиме до очень близкого к $4e^2/\pi h$ предельного значения.

Мы заключаем, что фиксированная точка для $n_A = n_B$ с проводимостью $\sigma^* \simeq 1.6 \times 4e^2/\pi h$ неустойчива относительно дисбаланса $n_A - n_B$. При малом отклонении от равенства $n_A = n_B$ система сначала долго эволюционирует как в сбалансированном случае, а затем происходит кроссовер к устойчивой точке $n_A \neq n_B$. Если изобразить кривые кроссовера в логарифмическом масштабе, то надлежащим сдвигом можно добиться их наложения друг на друга, рис. 4.11 (нижний график). Вблизи неустойчивой фиксированной точки проводимость оказывается универсальной функцией параметра L/ξ , с некоторой корреляционной длиной ξ . Из численных данных мы получаем скейлинг этой корреляционной длины

$$\xi \propto |n_A - n_B|^{-0.36}. \quad (4.86)$$

Таким образом мы обнаружили нетривиальное скейлинговое поведение проводимости в системе с киральной симметрией в режиме сильной связи, которое выходит за пределы применимости сигма-модели Гаде и Вегнера.

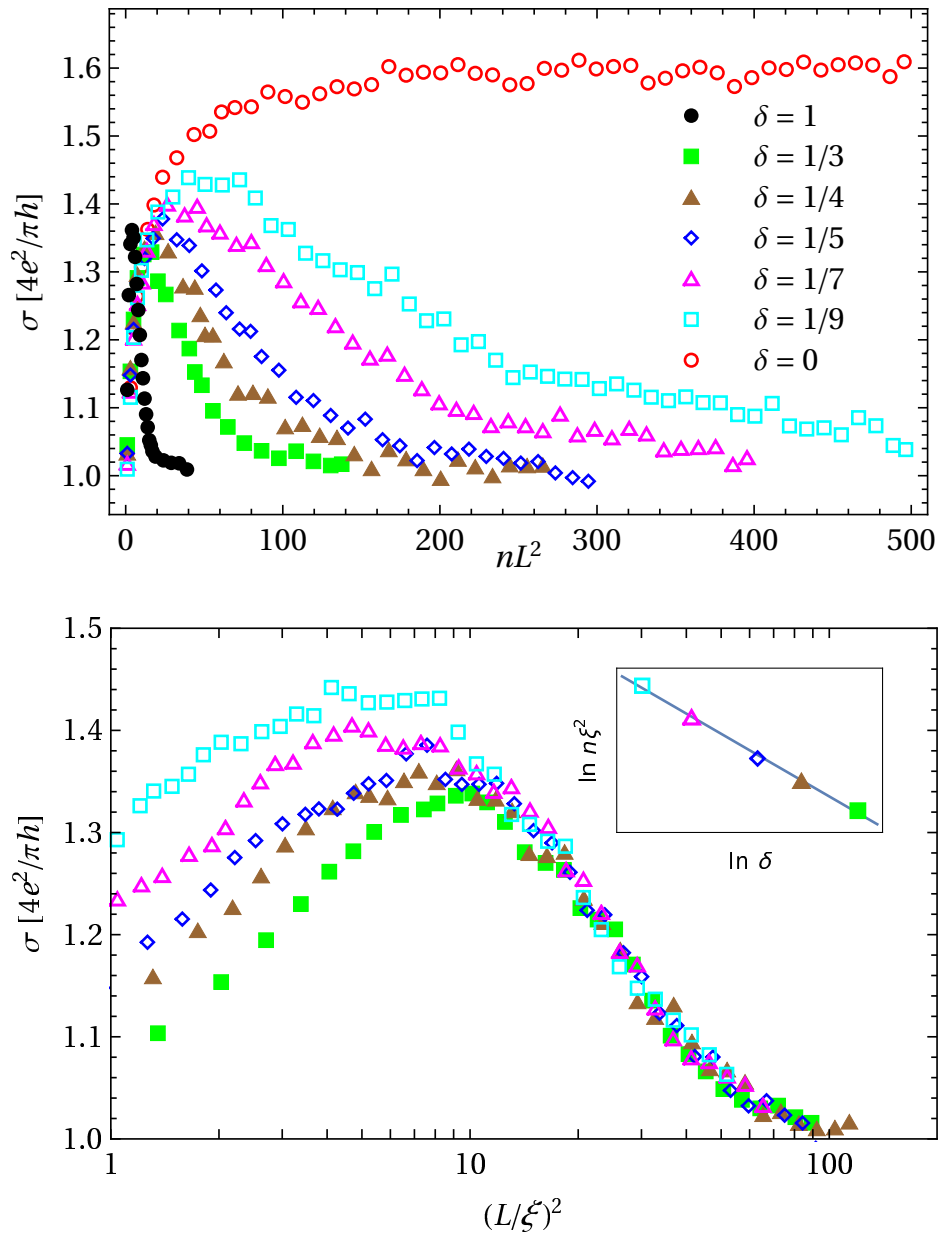


Рис. 4.11 — Верхний график: средняя проводимость, вычисленная при помощи (4.81), как функция полной концентрации вакансий $n = n_A + n_B$. Различные символы отвечают разным значениям дисбаланса $\delta = (n_A - n_B)/n$. Предполагается, что все вакансии расположены в узлах одного «цвета». Нижний график: те же данные в логарифмическом масштабе, сдвинутые так, чтобы лечь на одну универсальную кривую. Вставка: корреляционная длина расходуется степенным образом при малых значениях дисбаланса δ .

Если в графене с резонансными потенциальными примесями имеется также небольшая концентрация вакансий, будет наблюдаться кроссовер от класса DIII к классу BDI. Этот кроссовер произойдет при большом значении проводимости и будет выражаться в том, что логарифмический рост, показанный на рис. 4.6, остановится в полном соответствии с предсказанием Гаде и Вегнера.

До сих пор мы предполагали, что расстояние между примесями велико по сравнению с периодом решетки. При очень большой концентрации вакансий, когда их количество станет сравнимым с числом узлов решетки, произойдет классический перколяционный переход и проводимость обратится в ноль. Возможно, эффекты квантовой интерференции приведут к переходу металл-изолятор еще до этого, при меньшей концентрации вакансий. Такая задача квантовой перколяции представляется очень интересной и требует отдельного изучения.

4.3 Сильные примеси в магнитном поле

В этом разделе мы рассмотрим транспортные свойства графена с сильными примесями во внешнем магнитном поле. Как уже обсуждалось ранее в разделе 2.3, дираковские электроны проявляют ряд необычных свойств в магнитное поле. Из-за низкой плотности состояний расстояния между уровнями Ландау оказываются гораздо больше, чем в металлах, что позволяет наблюдать квантовый эффект Холла даже при комнатной температуре [9]. Кроме того, благодаря топологическим свойствам спектра, в дираковской точке возникает особый нулевой уровень Ландау, который одновременно имеет черты электронного и дырочного типа [3; 4; 170]. Недавние эксперименты в сильных магнитных полях [253–257] продемонстрировали дробный квантовый эффект Холла, а также возникновение фазы изолятора в дираковской точке, что свидетельствует о расщеплении критического состояния.

Мы будем рассматривать два типа беспорядка: «скалярные» потенциальные примеси, действующие в пределах одной долины, как в разделе 4.1, и точечные дефекты, сводящиеся к локальному потенциалу на шестиугольной решетке, как в разделе 4.2. В обоих случаях мы будем учитывать конечную длину рассеяния, то есть рассматривать не только резонансный, но и обычный режим рассеяния.

Магнитное поле включается в дираковский гамильтониан стандартным способом (ср. (2.37)).

$$H = \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (4.87)$$

Здесь мы, как и прежде, полагаем $\hbar = v_0 = 1$ для упрощения формул. В однородном магнитном поле возникают уровни Ландау, один из которых находится ровно на нулевой энергии. Как уже обсуждалось в разделе 2.3.3, неоднородное магнитное поле не снимает вырождение нулевого уровня Ландау [182–186]. Это одна из удивительных особенностей дираковского гамильтониана, связанная с его скрытой суперсимметрией. Она позволяет исключить произвольное

магнитное поле из гамильтониана с помощью неунитарного калибровочного преобразования:

$$H = e^{\chi\sigma_z} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} e^{\chi\sigma_z}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = \frac{eA_x}{c}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial x} = -\frac{eA_y}{c}. \quad (4.88)$$

Уравнения на χ совместны при условии $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Кроме того, мы потребуем $\chi = 0$ на границах образца, чтобы преобразование не повлияло на граничные условия. Такое требование означает отсутствие нормальной компоненты \mathbf{A} на границе. В итоге мы приходим к выводу, что для использования представления (4.88) нужно выбрать векторный потенциал в лондоновской калибровке.

Для прямоугольного образца графена (рис. 4.1) в однородном магнитном поле получается

$$\mathbf{A} = \{0, B(x - L/2)\}, \quad \chi = \frac{x(L - x)}{2\ell_B^2}, \quad \ell_B = \sqrt{\frac{c}{eB}}. \quad (4.89)$$

Здесь мы ввели стандартное обозначение для магнитной длины. Описанный способ исключения магнитного поля позволяет нам сразу получить выражение для матричной функции Грина графена в поле

$$\check{G}_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-\sigma_z\chi(\mathbf{r})} \check{G}_{B=0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-\sigma_z\chi(\mathbf{r}')}. \quad (4.90)$$

Функция $\check{G}_{B=0}$ определяется уравнением (3.69).

Мы будем случайным образом распределять примеси по образцу и вычислять поправку к свободной энергии по формулам (4.61) и (4.78), а затем кондактанс из (3.61). Проинтегрированные T -матрицы скалярных примесей сводятся к длине рассеяния (4.16), которую мы по-прежнему обозначаем ℓ . Будем считать примеси настолько малыми, что влиянием магнитного поля на T -матрицу можно пренебречь. Для точечных примесей T -матрицы принимают вид проекторов (4.75) и явно зависят от подрешетки и «цвета» узла, к которому приложен потенциал. Силу таких примесей мы тоже будем характеризовать длиной $\ell_a = AV$, где A — площадь элементарной ячейки решетки графена.

Продольная проводимость определяется по кондактансу как $\sigma_{xx} = GL/W$ в пределе $W \gg L$. Для численного анализа мы выбираем $W = 4L$ и строим зависимость σ_{xx} от размера образца L , сохраняя при этом магнитную длину ℓ_B и среднее расстояние между примесями $\ell_{\text{imp}} = n_{\text{imp}}^{-1/2}$ фиксированными.

Начнем изложение результатов со случая нулевого магнитного поля. На рис. 4.12 показана проводимость графена со скалярными и точечными примесями для различных значений силы примесей. В случае скалярных примесей в пределе $\ell/\ell_{\text{imp}} \rightarrow \infty$ система попадает в сверхпроводящий симплектический класс DIII, см. раздел 4.1.5, и демонстрирует логарифмический рост проводимости в направлении «суперметаллической» фиксированной точки. Конечное значение длины рассеяния ℓ нарушает киральную симметрию и переводит систему в обычный симплектический класс AII (с топологическим членом, раздел 2.2). При этом поведение проводимости практически не изменяется: она продолжает логарифмически расти за счет антилокализации.

Кроссовер из-за нарушения симметрии происходит также и для точечных примесей, см. рис. 4.12, но поведение проводимости существенно отличается. Как и должно быть, на самых

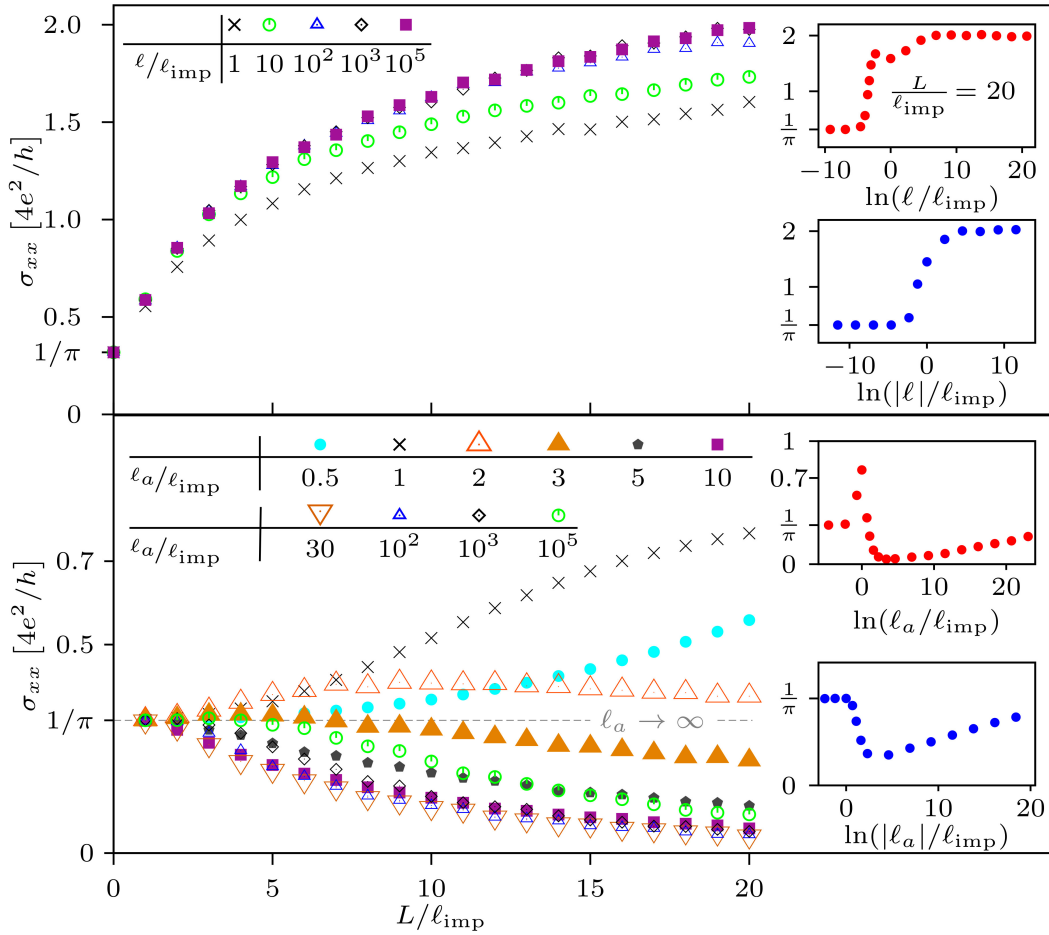


Рис. 4.12 — Проводимость графена со «скалярными» (верхний график) и точечными (нижний график) примесями в нулевом магнитном поле как функция размера образца L . Вставки показывают зависимость σ от силы примесей ℓ_a и ℓ для фиксированного размера $L = 20\ell_{\text{imp}}$. На верхних вставках потенциал всех примесей имеет одинаковый знак, на нижних вставках знак потенциала случайный.

больших масштабах наблюдается локализация, поскольку система принадлежит к обычному ортогональному классу симметрии AI. Однако при фиксированной концентрации длина локализации является немонотонной функцией силы примесей ℓ_a . В пределе $\ell_a \ll \ell_{\text{imp}}$ средняя длина свободного пробега велика, так что система остается баллистической на достаточно больших расстояниях. Противоположный предел $\ell_a/\ell_{\text{imp}} \rightarrow \infty$ соответствует случаю вакансий, которые сохраняют киральную симметрию и относятся к киральному ортогональному классу BDI. В этом случае длина локализации расходуется, а проводимость остается конечной при $L \rightarrow \infty$. Таким образом, существует промежуточное значение соотношения ℓ_a/ℓ_{imp} , для которого локализация наиболее сильна. При больших (но конечных) значениях ℓ_a/ℓ_{imp} поведение системы соответствует киральной симметрии до определенного масштаба из-за близости к фиксированной точке класса BDI, а затем притягивается в фиксированную точку класса AI, соответствующую полной локализации. В дальнейшем мы зафиксируем значение $\ell_a/\ell_{\text{imp}} = 50$.

Теперь обсудим случай сильных магнитных полей. Для скалярных примесей произвольного знака центр нулевого уровня Ландау остается в дираковской точке. Различные кривые на рис. 4.13 соответствуют разной величине магнитного поля (в терминах магнитной

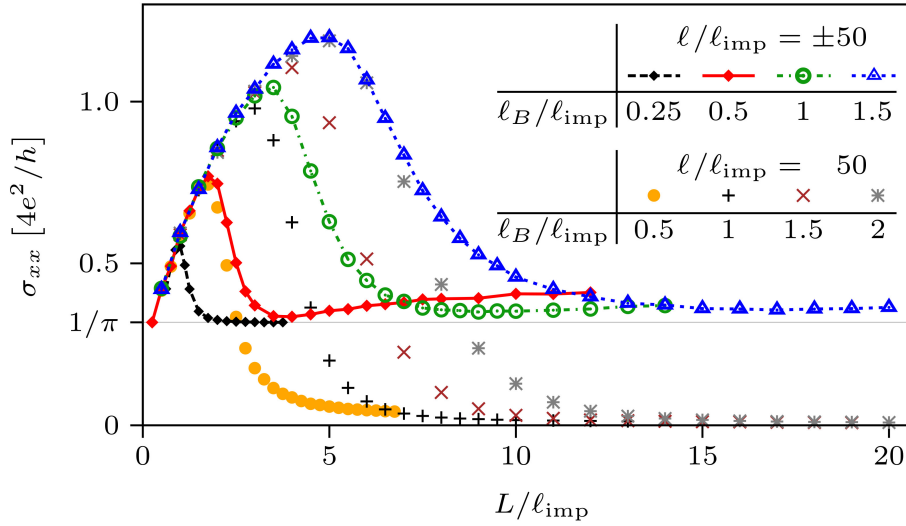


Рис. 4.13 — Проводимость графена со скалярными примесями в дираковской точке как функция длины образца при различных значениях магнитного поля.

длины ℓ_B). Пока размер системы L не слишком велик, все кривые следуют закону антилокализации, справедливому для нулевого магнитного поля (сверхпроводящий симплектический класс DIII, см. рис. 4.6). На больших длинах становится важным как магнитное поле, так и конечная сила примесей. В первом случае (например, для резонансных примесей) происходит кроссовер в киральный унитарный класс AIII (с членом Весса-Зумино). Если же более важным фактором нарушения симметрии является конечная сила примесей ℓ , то сначала произойдет кроссовер в симплектический класс AII (с топологическим членом, см. раздел 2.2). В любом случае, на самых больших длинах обе симметрии будут нарушены и система окажется в унитарном классе A с топологическим членом $\theta = \pi$. Это подразумевает, что ренорм-групповой поток попадает в критическую точку квантового эффекта Холла. В нашем вычислении соответствующая предельная проводимость (см. рис. 4.13) оказывается порядка $\sigma_* \simeq 0.4e^2/h$. Замечательно, что в графене это значение достигается снизу! Близкая величина проводимости была получена в работе [258] для модели сильной связи на шестиугольной решетке со случайным потенциалом на всех узлах. Свидетельства в пользу критического состояния типа перехода квантового эффекта Холла были также обнаружены в численной работе [259] для графена с плавным беспорядком.

Если все скалярные примеси имеют потенциал одного знака, это приводит к эффективному сдвигу нулевого уровня Ландау из дираковской точки. В этом случае топологический угол θ отличается от π , и должна произойти полная локализация, как в области плато квантового эффекта Холла. Это действительно видно на рис. 4.13, причем оказывается, что такая локализация в магнитном поле гораздо эффективнее, чем без него, как на рис. 4.12.

Поведение проводимости с увеличением размера образца в случае точечных примесей показано на рис. 4.14. В пределе бесконечной силы примесей (то есть вакансий, $\ell_a \rightarrow \infty$) система относится к киральному унитарному классу AIII, который характеризуется постоянным значением σ , близким к $4e^2/\pi h$. Такое поведение действительно наблюдается при не слишком большом L . Для образцов большего размера происходит нарушение киральной симметрии

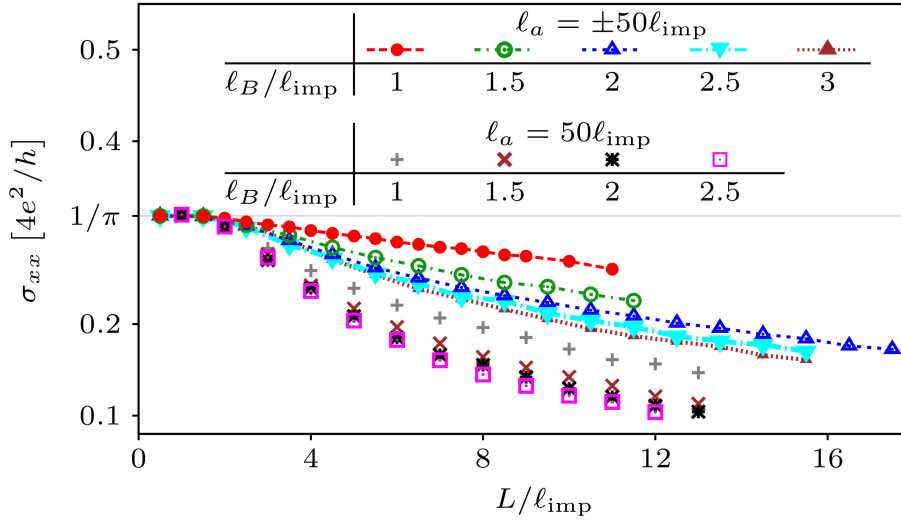


Рис. 4.14 — Проводимость графена с точечными примесями в дираковской точке как функция длины образца при различных значениях магнитного поля.

из-за конечности l_a , и система попадает в обычный унитарный класс А с топологическим членом. В отличие от скалярных примесей, это приводит к локализации (так как $\theta \neq \pi$) как для симметричного, так и для несимметричного распределения знаков потенциала. Это происходит потому, что междолинное рассеяние расщепляет критическое делокализованное состояние в центре нулевого уровня Ландау (см. раздел 2.3). В итоге состояния на нулевой энергии оказываются в центре плато, как на рис. 2.3, и полностью локализуются.

Отметим еще одну особенность графена в сильном магнитном поле со скалярными примесями. Когда магнитное поле настолько велико, что количество квантов потока N_Φ через образец превышает $4N$, где N — количество примесей, проводимость принимает баллистическое значение $\sigma = 4e^2/\pi h$ независимо от положения примесей, см. рис. 4.15 (левый график). Условие $N_\Phi > 4N$ или, что то же самое, $l_B < l_{\text{imp}}/2\sqrt{2\pi}$ можно обосновать следующим образом. Размер скалярной примеси считается очень малым, поэтому одна примесь не может снять вырождение всего уровня Ландау, а отщепляет всего четыре состояния [260–263]. Волновые функции вырожденного уровня Ландау можно выбрать таким образом, что их значения в точке расположения примеси будут равны нулю. Для этого нужно удовлетворить четырем условиям обнуления всех четырех компонент волновой функции (две долины и две подрешетки). Поэтому каждая скалярная примесь отщепляет ровно четыре состояния от уровня Ландау. Таким образом, для $N < N_\Phi/4$, вырождение уровня Ландау снимается не полностью. В результате, вместо локализации или критической точки квантового эффекта Холла, система по существу остается баллистической. В пределе $N \ll N_\Phi$ мы наблюдаем баллистическую проводимость $\sigma = 4e^2/\pi h$ с экспоненциально подавленными мезоскопическими флуктуациями.

Аналогичное поведение с баллистической проводимостью $\sigma = 4e^2/\pi h$ и практическим отсутствием мезоскопических флуктуаций наблюдается и в случае точечных примесей, как показано на рис. 4.15 (правый график). Единственное отличие от случая скалярных примесей — условие баллистики принимает вид $N < N_\Phi$ без коэффициента 4 или $l_B/l_{\text{imp}} < 1/\sqrt{2\pi}$. Это отличие легко объяснить тем, что T -матрица точечной примеси (4.75) имеет форму проектора,

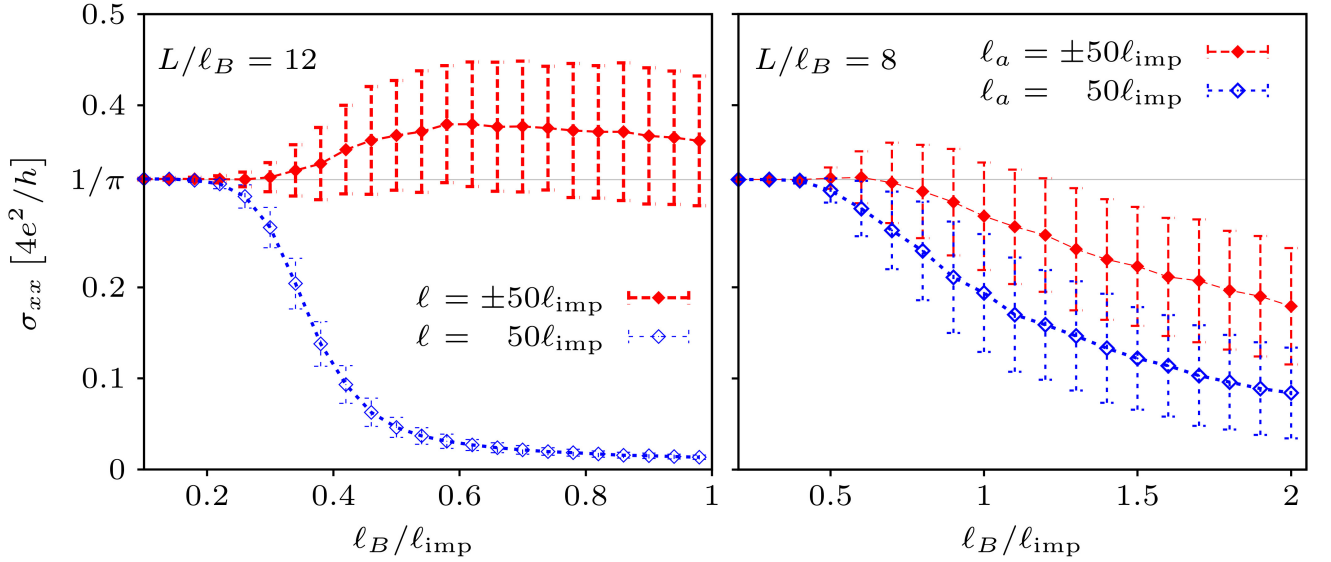


Рис. 4.15 — Проводимость графена как функция l_B/l_{imp} при фиксированном и большом L/l_B для скалярных (левый график) и точечных (правый график) примесей. В умеренно сильных полях наблюдается критическое поведение типа квантового эффекта Холла либо локализация. В более сильных полях проводимость принимает баллистическое значение $\sigma = 4e^2/\pi h$. Столбики показывают величину мезоскопических флуктуаций.

и поэтому отщепляет только одно состояние от вырожденного уровня Ландау. По-другому это утверждение можно сформулировать на решетке. Волновые функции уровня Ландау, которые обращаются в ноль на данном узле, удовлетворяют всего одному дополнительному линейному условию, поэтому точечная примесь отщепляет ровно одно состояние.

4.4 Анизотропное распределение примесей

В последнем разделе главы про сильные примеси мы изучим проводимость графена с особенным, анизотропным распределением беспорядка. Такая ситуация возникает, когда точечные примеси находятся в узлах решетки одного цвета по классификации раздела 4.2.1. Оказывается, что в этом случае примеси располагаются вдоль параллельных полос в решетке (см. рис. 4.16), а электронный транспорт в направлении этих полос приобретает супердиффузный характер.

Подобные явления известны в теории стохастических процессов и называются полетами Леви [264]. Они представляют собой случайные блуждания с очень широким распределением длин прыжков между последовательными событиями рассеяния. Аналогичное поведение в теории одномерного квантового транспорта наблюдается в модели случайных матриц с затуханием элементов при удалении от диагонали [265]. В квазиклассическом пределе такая теория также обладает супердиффузными свойствами, а при квантовом описании, несмотря

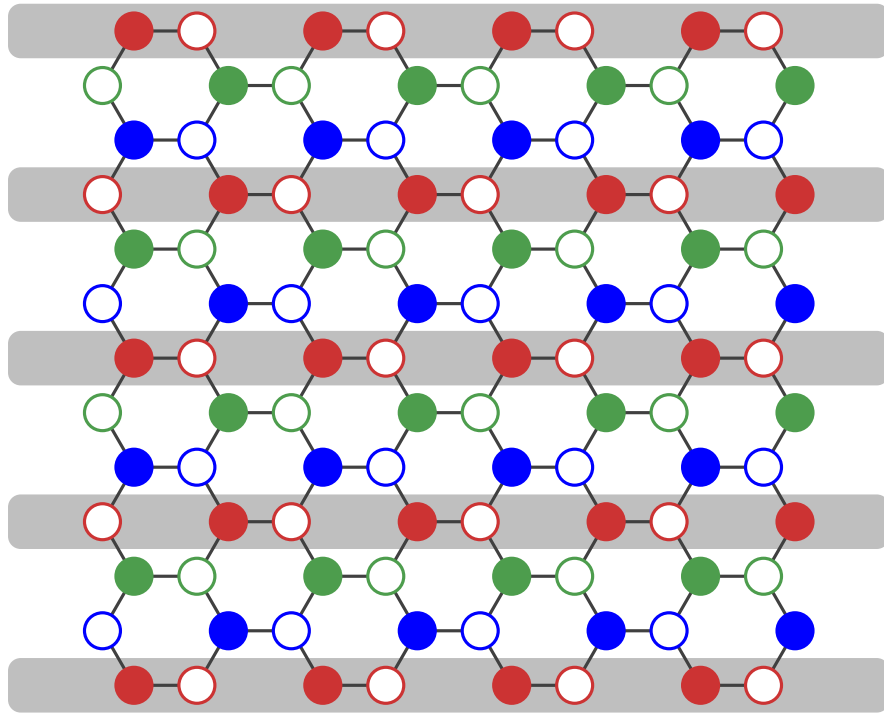


Рис. 4.16 — Модель анизотропного беспорядка предполагает, что примеси расположены в узлах, обозначенных серыми горизонтальными полосами. Эти узлы имеют одинаковый цвет (красный) по классификации раздела 4.2.1. Вероятности найти примесь в подрешетках А и В (сплошные круги и пустые окружности) считаются при этом одинаковыми.

на одномерную геометрию, в ней возможен локализационный переход по степени затухания матричных элементов.

Обычно полеты Леви не встречаются в неупорядоченных системах с беспорядком конечного радиуса корреляции. Вместо этого наблюдается классическая диффузия с возможностью квантовой локализации. Заметным исключением из этого правила является задача о квазиодномерной системе с поверхностным беспорядком, в которой возможны полеты Леви на квазиклассическом уровне [266]. Однако они приводят лишь к логарифмическому ускорению диффузии и не влияют на характеристики локализационного перехода. Мы же обсудим пример двумерной неупорядоченной системы, в которой анизотропность беспорядка гораздо сильнее меняет транспортные свойства. Она приводит к подавлению локализации и росту контактанса пропорционально квадратному корню из размера системы.

Рассмотрим шестиугольную решетку графена, в которой точечные сильные примеси расположены случайным образом вдоль каждой третьей линии углеродных связей, как показано на рис. 4.16. В остальном распределение полностью случайно и равновероятно в обеих подрешетках. Эта ситуация соответствует помещению примесей в узлы только одного цвета, см. раздел 4.2.1, так что фазы блоховских волн на всех таких узлах одинаковы. Предполагается, что примеси имеют конечный потенциал V_0 , который является параметром задачи и, при желании, может быть сделан сильным.

Мы изучили кондактанс графена с таким беспорядком численно с помощью пакета программ «Kwant» [267], предназначенного для моделирования квантового транспорта методом рекурсивных функций Грина [246—248]. Использовалась модель со следующими характеристиками:

- шестиугольная решетка с периодом $a \approx 1.42 \text{ \AA}$;
- прыжки между соседними узлами с амплитудой $t \approx 2.7 \text{ эВ}$;
- металлические контакты: такая же решетка с высоким уровнем Ферми;
- уровень Ферми в графене $\epsilon = 0.01t$ или $\epsilon = 0.3t$;
- точечные примеси с потенциалом $V_0 = t$ или $V_0 = 10t$;
- случайное распределение примесей в узлах одного цвета или по всем узлам.

Найденные численно значения кондактанса G_{\parallel} вдоль полос беспорядка и G_{\perp} поперек полос пересчитывались в проводимость по стандартной формуле $\sigma = GL/W$. Полученные результаты показаны на рис. 4.17.

По своей симметрии модель принадлежит к обычному ортогональному классу, поэтому можно было бы ожидать стандартное локализационное поведение — убывание проводимости (экспоненциально быстрое в режиме сильной локализации) с ростом длины образца. Для контроля был также сделан расчет в случае, когда примеси равномерно распределены по всем узлам решетки без учета их цветов. В последнем случае действительно наблюдается обычный диффузный транспорт и локализация. Соответствующие данные показаны на рис. 4.17 белыми треугольниками. Численные данные на верхней панели соответствуют относительно слабым примесям ($V_0 = t$). В этом случае квазиклассическая проводимость велика, поэтому длина локализации (которая в двумерной системе экспоненциально растет с проводимостью) заведомо больше, чем размер изучаемой системы. Поэтому на рисунке видна практически не зависящая от длины квазиклассическая диффузная проводимость. На нижней панели представлены данные для сильных примесей. В этом случае проводимость гораздо ниже e^2/h , и наблюдается сильная локализация.

В случае анизотропного распределения примесей результаты получаются совершенно другими. Изменение проводимости σ_{\parallel} системы по мере увеличения длины образца L показано на рис. 4.17 красными кружками для энергий вблизи дираковской точки⁷ ($\epsilon = 0.01t$) и черными треугольниками — вдали от дираковской точки ($\epsilon = 0.3t$). Во вставках приведены такие же результаты для поперечной проводимости σ_{\perp} .

Верхняя панель рис. 4.17 содержит данные для относительно слабых примесей $V_0 = t$. При не очень большом размере системы $L = 100 a$ проводимость близка к своему значению в чистом графене. Это видно из того, что первый черный треугольник почти совпадает с белым (который соответствует полностью случайному распределению примесей), то есть

⁷Сделать энергию в точности нулевой невозможно из-за численной неустойчивости алгоритма рекурсивных функций Грина в этом пределе.

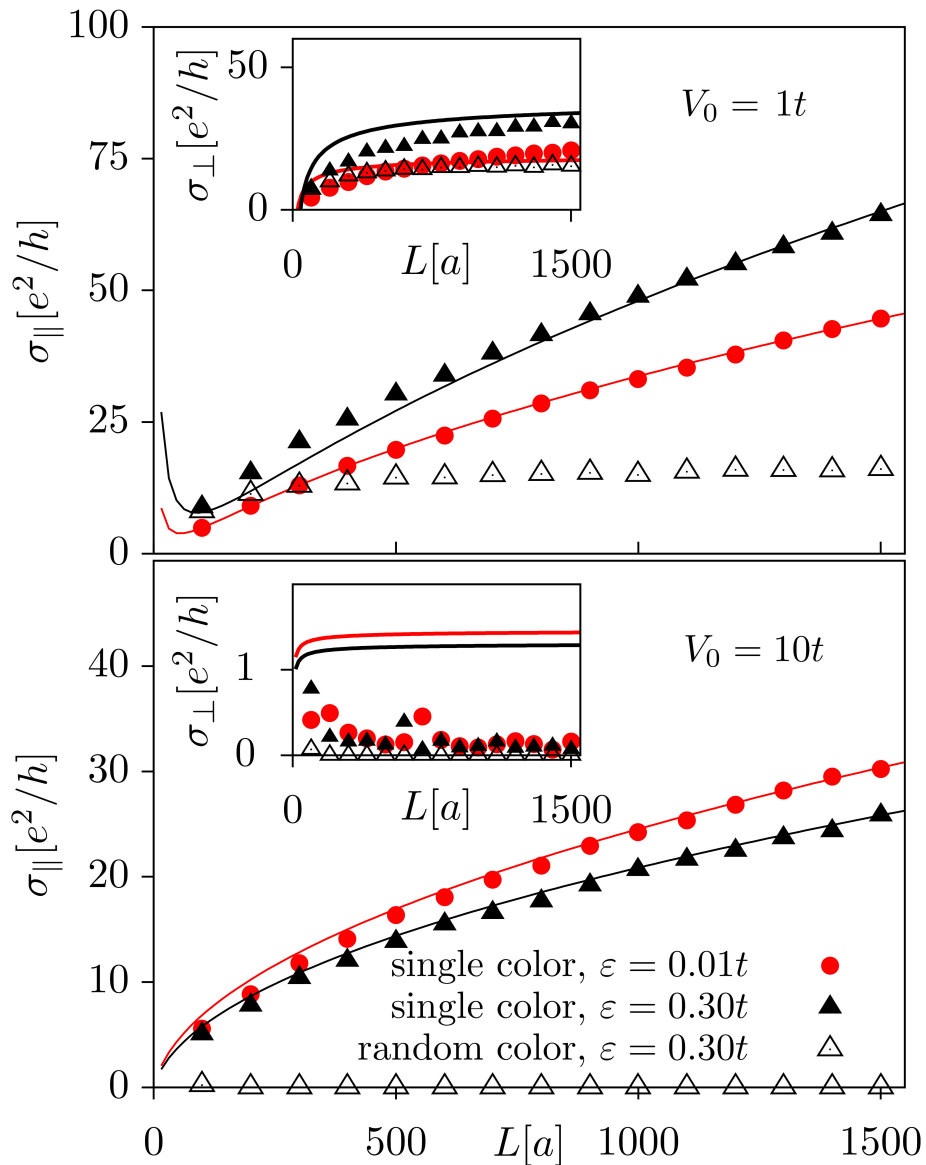


Рис. 4.17 — Проводимость графена с точечными примесями в зависимости от длины образца L при фиксированной концентрации примесей $n_{\text{imp}} = 0.1/a^2$. Черные треугольники и красные кружки соответствуют случаям, когда все примеси расположены в узлах одного цвета. Продольная проводимость σ_{\parallel} возрастает по закону \sqrt{L} в соответствии с предсказанием квазиклассической теории (4.96), показанным сплошными линиями, как в случае слабых (верхняя панель), так и сильных (нижняя панель) примесей. Во вставках показано поведение поперечной проводимости σ_{\perp} . Она не зависит от длины образца, что также согласуется с квазиклассической теорией, однако величина σ_{\perp} в случае сильных примесей оказывается заметно меньше предсказанной. Для сравнения белыми треугольниками показаны данные для примесей, распределенных по всем узлам решетки без учета цветов. В этом случае наблюдается хорошо известное поведение: диффузия (слабые примеси, верхняя панель) и локализация (сильные примеси, нижняя панель).

проводимость не чувствительна к беспорядку в этом случае. Однако с ростом L ситуация меняется: в то время как система с полностью случайным распределением примесей (белые треугольники) находится в обычном диффузном режиме, проводимость для анизотропного распределения беспорядка растет $\sigma_{\parallel} \propto \sqrt{L}$.

Различие между полностью случайным «разноцветным» и анизотропным «одноцветным» распределением примесей становится еще более существенным в пределе сильных примесей, как показано на нижней панели рис. 4.17. Модель со случайными цветами оказывается в режиме сильной локализации в этом случае. В то же время проводимость модели с анизотропным распределением примесей по-прежнему растет с длиной системы по супердиффузному закону $\sigma_{\parallel} \propto \sqrt{L}$. Такое аномальное поведение наблюдается для любого значения энергии как вблизи дираковской точки, так и далеко от нее. Поэтому можно сделать вывод, что корневой рост проводимости является общим свойством решеточной модели и не основан на свойствах линеаризованного дираковского гамильтониана, который справедлив только для малых энергий.

Отметим, что найденное необычное поведение проводимости изменится вблизи дираковской точки в пределе бесконечного потенциала примесей, когда они эффективно становятся вакансиями⁸. В этом случае модель приобретает киральную симметрию и ее проводимость оказывается не зависящей от размера, как обсуждалось в разделе 4.2.3.

Наблюдаемое супердиффузное поведение проводимости $\sigma \propto \sqrt{L}$ можно объяснить в рамках дираковского гамильтониана и квазиклассического приближения в духе главы 1. Для этого достаточно вычислить самосогласованную T -матрицу сильных примесей в узлах одного цвета. Воспользуемся векторами $|u\rangle$, определенными в (4.74). Наша ситуация (см. рис. 4.16) соответствует $\alpha = 0$, а все фазовые множители $e^{\pm i\mathbf{K}\mathbf{r}}$ равны единице для узлов выбранного цвета. В итоге средняя T -матрица, а значит и самосогласованная (запаздывающая) собственная энергия, приобретает форму проектора

$$\Sigma^R = (\epsilon_0 - i\gamma)(1 + \sigma_x \tau_x) \propto |u_A\rangle\langle u_A| + |u_B\rangle\langle u_B|. \quad (4.91)$$

Замечательно, что эта матрица полностью коммутирует с частью дираковского гамильтониана $\sigma_x p_x$, но не коммутирует с $\sigma_y p_y$. Как мы увидим ниже, такая структура означает, что при малых значениях p_y беспорядок практически не рассеивает электроны, и длина свободного пробега оказывается сильно анизотропной.

Мы не будем решать уравнение самосогласования для собственной энергии явно. Вместо этого предположим, что ее вещественная и мнимая части ϵ_0 и γ уже известны, и найдем квазиклассическую проводимость по обычной формуле Кубо⁹ (1.20)

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\sigma_{\alpha} \text{Im} G^R(\epsilon, \mathbf{p}) \right]^2. \quad (4.92)$$

Обратим внимание, что единственным источником перемешивания долин является матрица $\sigma_x \tau_x$ в структуре собственной энергии (4.91). Мы можем сделать поворот в пространстве

⁸Чтобы сильная примесь эффективно стала вакансией, ее потенциал должен удовлетворять условию $V_0 \gg t^2/\epsilon$. То есть по мере приближения к дираковской точке потенциал примеси нужно увеличивать.

⁹В модели с собственной энергией (4.91) вершинная поправка оказывается нулевой.

долин и диагонализировать эту матрицу $\tau_x \mapsto \tau_z$. В таком базисе средняя функция Грина оказывается диагональной по долинам и может быть записана в виде

$$G^R(\epsilon, \mathbf{p}) = \left[\epsilon - \Sigma^R - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \right]^{-1} = \frac{\tilde{\epsilon} + [p_x + (\epsilon - \tilde{\epsilon})\tau_z]\sigma_x + p_y\sigma_y}{\tilde{\epsilon}^2 - [p_x + (\epsilon - \tilde{\epsilon})\tau_z]^2 - p_y^2}, \quad \text{где } \tilde{\epsilon} = \epsilon - \epsilon_0 + i\gamma. \quad (4.93)$$

Как и ожидалось, знаменатель этой функции обращается в ноль при $p_x = \pm\epsilon$ и $p_y = 0$, причем мнимая часть собственной энергии γ не сдвигает этот полюс с вещественной оси. Чтобы изучить окрестность сингулярности, мы сдвинем ее в начало координат при помощи замены переменной $p_x \mapsto -\tau_z(p_x + \epsilon)$. (Матрица τ_z здесь просто означает, что замена переменной имеет разный знак в двух долинах.) После этого сдвига импульса можно также опустить величину ϵ_0 , включив ее в переопределение химического потенциала $\epsilon \mapsto \epsilon + \epsilon_0$. В итоге мнимая часть функции Грина приобретает вид

$$\text{Im } G^R(\epsilon, \mathbf{p}) = \gamma \frac{-p_x^2 - p_y^2 + (p_x^2 - p_y^2)\sigma_x\tau_z + 2p_x p_y\sigma_y}{|p_x^2 + p_y^2 + 2p_x(\epsilon + i\gamma)|^2}. \quad (4.94)$$

Чтобы воспользоваться формулой Кубо (4.92), нужно каким-то образом устранить расходимость при $p_x = 0$. Единственная физическая причина такой инфракрасной регуляризации — конечный размер образца в направлении x . Будем считать, что минимальное допустимое значение импульса p_x определяется величиной κ/L , где κ — неизвестное число порядка единицы. Тогда проводимости в продольном и поперечном направлении выразятся формулами

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{xx} = \frac{2\gamma^2}{\pi^3} \int_{|p_x| > \kappa/L} d^2 p \frac{(p_x^2 - p_y^2)^2}{|p_x^2 + p_y^2 + 2p_x(\epsilon + i\gamma)|^4}, \quad (4.95a)$$

$$\sigma_{\perp} = \sigma_{yy} = \frac{2\gamma^2}{\pi^3} \int_{|p_x| > \kappa/L} d^2 p \frac{4p_x^2 p_y^2}{|p_x^2 + p_y^2 + 2p_x(\epsilon + i\gamma)|^4}. \quad (4.95b)$$

Интегралы по импульсам можно взять точно, хотя при этом получаются очень громоздкие выражения. Нас, однако, интересует предел больших длин $L \gg \gamma^{-1}$. В этом пределе можно разложить интегралы в ряд и записать результат в виде¹⁰

$$\sigma_{\parallel} = \frac{4e^2}{\pi h} \left[\frac{A}{2} \sqrt{\frac{\gamma L}{\kappa}} - B + \frac{7C}{8} \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma L}} + O[(\gamma/L)^{-3/2}] \right], \quad (4.96)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{4e^2}{\pi h} \left[B - C \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma L}} + O[(\gamma/L)^{-3/2}] \right]. \quad (4.97)$$

Коэффициенты разложения являются простыми функциями безразмерного параметра $z = \epsilon/\gamma$:

$$A(z) = \text{Re}[(1 - 2iz)\sqrt{1 + iz}], \quad B(z) = 1 + z \arctg z, \quad C(z) = \text{Re} \frac{1 + 2iz}{\sqrt{1 + iz}}. \quad (4.98)$$

Вблизи дираковской точки параметр z мал, что дает

$$\sigma_{\parallel} = \frac{4e^2}{\pi h} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma L}{\kappa}} - 1 \right], \quad \sigma_{\perp} = \frac{4e^2}{\pi h}. \quad (4.99)$$

¹⁰Здесь мы добавили множитель $2e^2/\hbar$, который восстанавливает размерность проводимости и учитывает спиновое вырождение.

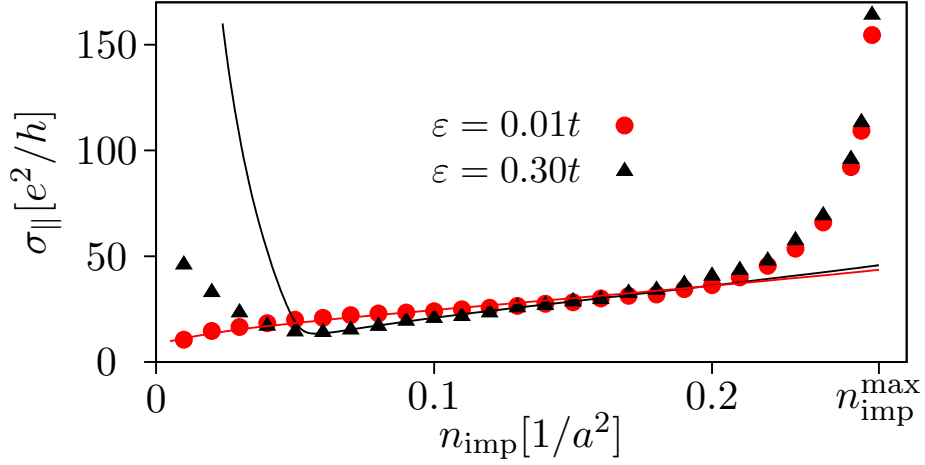


Рис. 4.18 — Продольная проводимость σ_{\parallel} в графене с примесями в узлах одного цвета как функция концентрации примесей. Черные треугольники показывают результат на относительно большой энергии $\epsilon = 0.3t$, в то время как красные кружки соответствуют вычислению вблизи дираковской точки, $\epsilon = 0.01t$. Сила примесей $V_0 = 10t$, длина образца $L = 1000a$. Максимальная концентрация примесей $n_{\text{imp}}^{\text{max}} \simeq 0.26/a^2$ соответствует пределу, когда все узлы данного цвета заняты примесями. Сплошными линиями показана аналитическая зависимость (4.96) с параметрами ϵ и γ из численного решения уравнений самосогласования.

Далеко от дираковской точки, при $\epsilon \gg \gamma$, результат также принимает простой вид

$$\sigma_{\parallel} = \frac{4e^2}{\pi h} \frac{\epsilon}{\gamma} \left[\sqrt{\frac{\epsilon L}{2\kappa}} - \frac{\pi}{2} \right], \quad \sigma_{\perp} = \frac{2e^2}{h} \frac{\epsilon}{\gamma}. \quad (4.100)$$

Как и предполагалось, продольная проводимость растет с длиной образца корневым образом при любой энергии. Наши квазиклассические результаты хорошо согласуются с численным счетом, как показано на рис. 4.17 сплошными линиями. Для построения этих линий также проводилось численное решение уравнений самосогласования для собственной энергии, поэтому единственным подгоночным параметром является величина κ , которая устанавливает масштаб инфракрасного обрезания.

Для поперечной проводимости квазиклассический расчет предсказывает не зависящий от длины результат. Это поведение также качественно согласуется с численными данными, приведенными во вставках на рис. 4.17. Однако в случае сильных примесей (нижняя панель) значение σ_{\perp} получается на порядок ниже, чем результат квазиклассической теории. Такое различие, скорее всего, связано с квантовой поправкой, поскольку квазиклассическая величина σ_{\perp} оказалась порядка e^2/h .

Чтобы оценить эффект квантовой интерференции, мы используем результат Вельфле и Батта [123] для слабой локализации в анизотропном случае. В нашей модели продольная проводимость растет с длиной системы $\sim \sqrt{L}$. Пользуясь соотношением Эйнштейна, мы можем сопоставить такое поведение с аномальной анизотропной диффузией, для которой собственные значения тензора коэффициентов диффузии имеют вид $D_{yy} = \text{const}$ и $D_{xx} \propto q_x^{-1/2}$.

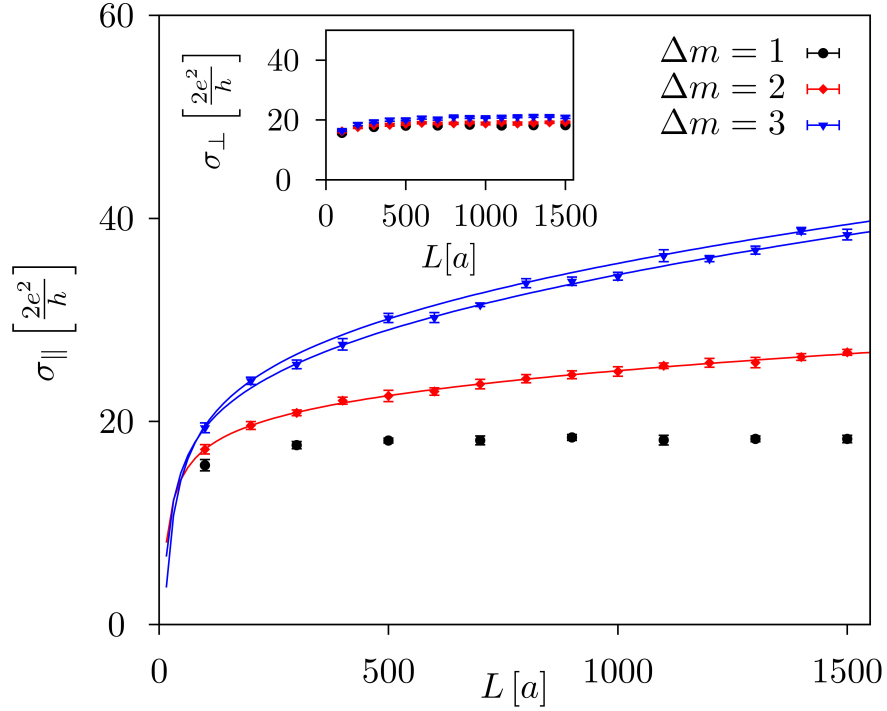


Рис. 4.19 — Продольная проводимость σ_{\parallel} как функция длины образца для модели на квадратной решетке с примесями, распределенными случайно только в рядах с интервалом Δm . Сила примесей и уровень Ферми соответствуют $V_0 = 1t$ и $\epsilon = 0.3t$. Моделируется квадратный образец ($W = L$) с концентрацией примесей 10 %. В случае $\Delta m = 3$ два немного разных набора данных соответствуют двум разным вариантам граничных условий. Сплошными линиями показана подгонка данных к функции $A\sqrt{L} + B + C/\sqrt{L}$. Во вставке показана поперечная проводимость. Она не зависит от длины образца при любом Δm .

В таком случае квантовая поправка к тензору проводимости определяется формулой

$$\Delta\sigma_{\alpha\alpha} = -\frac{4e^2}{h} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{D_{\alpha\alpha}(q)}{D_{xx}(q_x)q_x^2 + D_{yy}q_y^2}. \quad (4.101)$$

В этом интеграле нужно сделать такое же инфракрасное обрезание, как и в формулах Кубо (4.95). То есть интеграл берется по всем значениям q_y , а затем интегрирование по q_x ограничивается условием $|q_x| \gtrsim 1/L$. Из простой оценки размерностей получается, что квантовая поправка к продольной проводимости ведет себя как $\Delta\sigma_{xx} \propto L^{1/4}$. То есть она также инфракрасно расходится, но медленнее, чем квазиклассический результат. Поэтому в продольной проводимости супердиффузной системы квантовую поправку можно не учитывать. В то же время для поперечной проводимости получается сходящийся интеграл, как и в квазиклассической формуле (4.95b). Значит квантовая поправка может изменить квазиклассический ответ на величину порядка e^2/h . Скорее всего, именно такая поправка и является причиной расхождения численного и аналитического результатов для поперечной проводимости в случае сильных примесей (вставка на нижней панели рис. 4.17). Тем не менее, довольно неожиданно, что этот эффект изменил значение проводимости почти на порядок.

Для полноты приведем также зависимость проводимости от концентрации примесей. В решетке конечного размера существует предельно допустимая концентрация $n_{\text{imp}}^{\text{max}} \simeq 0.26/a^2$, которая соответствует размещению примесей на всех узлах заданного цвета. Если при этом все примеси имеют одинаковый потенциал V_0 (как в нашей модели), получится полностью периодическая структура. Это значит, что транспорт в таком пределе будет баллистическим, кондактанс не зависит от длины, а проводимость растет с длиной линейно. Хотя такое поведение, очевидно, выходит за рамки эффективной квазиклассической модели, рассмотренной выше, его можно легко наблюдать в численном эксперименте, как показано на рис. 4.18. С приближением концентрации примесей к максимальной проводимость демонстрирует резкий рост.

Наконец, следует отметить, что обнаруженный нами супердиффузный тип транспорта может возникать не только на шестиугольной решетке графена, но также и в моделях другой симметрии. Например, аналогичное поведение наблюдается на квадратной решетке, в которой примеси распределены случайно в горизонтальных рядах с интервалом Δm . На рис. 4.19 показаны численные результаты для примесей во всех узлах ($\Delta m = 1$), только в четных рядах ($\Delta m = 2$) и только в каждом третьем ряду ($\Delta m = 3$). В первом случае наблюдается обычный диффузный транспорт с постоянной проводимостью. В двух других случаях продольная проводимость растет $\propto \sqrt{L}$, как и в графене с примесями одного цвета. Квазиклассическая теория на основе самосогласованной T -матрицы также воспроизводит этот результат для модели на квадратной решетке.

Глава 5

Локализация в двумерных киральных металлах

Две последние главы диссертации посвящены общим вопросам физики двумерных киральных металлов. Этим термином называются любые системы, гамильтониан которых обладает киральной симметрией. Графен представляет собой лишь один из частных случаев киральных металлов. В этой главе мы изучим возможные механизмы локализации в таких системах, а в следующей главе рассмотрим плотность состояний, когда основным типом беспорядка являются вакансии.

Полная классификация неупорядоченных систем по их симметрии [70; 71; 131] включает десять классов, которые можно разбить на три семейства: обычные (три класса Вигнера—Дайсона), киральные (три класса) и сверхпроводящие (четыре класса). В этой главе мы рассмотрим локализационные свойства двумерных киральных моделей. Характерной особенностью этих систем является киральная симметрия гамильтониана $H = -CHC^{-1}$, где $C^2 = 1$. Удобно выбрать представление так, чтобы матрица C была диагональной. Тогда киральный гамильтониан приобретает блочно антидиагональный вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Одномерные неупорядоченные системы с киральной симметрией изучались в работах [268–273]. Эффективная теория поля (нелинейная сигма-модель) для киральных гамильтонианов была развита в [72; 73; 274–277]. Спектральные свойства случайных киральных матриц также рассматривались в контексте квантовой хромодинамики [278–280] и мезоскопической физики [281].

Стандартная модель с киральной симметрией строится на решетке, которую можно разбить на две подрешетки, и предполагает случайные амплитуды прыжков между подрешетками и полное отсутствие диагональных матричных элементов. Гамильтониан такой модели в центре зоны принимает явную блочно антидиагональную форму в пространстве подрешеток. По аналогии с классами Вигнера—Дайсона существует три киральных класса симметрии: киральный унитарный (AIII), киральный ортогональный (BDI) и киральный симплектический (CII). Класс AIII описывает киральные системы с нарушенной симметрией по обращению времени, например, из-за магнитного поля (случайного или однородного), приложенного к решетке. Классы BDI и CII характеризуются, в дополнение к киральной симметрии, также инвариантностью по обращению времени $H = KH^*K^{-1}$, где унитарная матрица K удовлетворяет $K^2 = \pm 1$. Для кирального ортогонального класса BDI $K^2 = 1$; в

стандартном представлении можно выбрать $K = 1$. Для кирального симплектического класса СИ, который соответствует нарушенной симметрии спина (обычно из-за спин-орбитального взаимодействия), $K^2 = -1$; в стандартном представлении $K = i\sigma_y$, где σ_y — вторая матрица Паули в спиновом пространстве. Таким образом, в стандартном базисе случайные гамильтонианы киральных классов имеют блочно антидиагональный вид и содержат комплексные или вещественные матричные элементы для классов АIII и BDI либо вещественные кватернионы для класса СИ.

Двумерные киральные классы возникают естественным образом в модели неупорядоченного графена в дираковской точке, см. раздел 2.1. В частности, киральная симметрия играет определяющую роль, если доминирующий тип беспорядка связан со случайностью в амплитудах прыжков на шестиугольной решетке. Важным примером является истинное или эффективное (из-за искривлений решетки) случайное магнитное поле. В этом случае система относится к киральному унитарному классу АIII. Еще одна возможная реализация кирального беспорядка в графене — вакансии, см. раздел 4.2. Вакансию можно смоделировать, удалив все ребра решетки, которые прилегают к заданному узлу. Тем самым, вакансии представляют особый тип беспорядка на связях. Эта модель попадает в киральный ортогональный класс BDI. Если к графену с вакансиями приложить внешнее магнитное поле, см. раздел 4.3, симметрия по обращению времени будет нарушена, что приведет к киральному унитарному классу АIII. С учетом спин-орбитального взаимодействия (при отсутствии магнитного поля) система попадает в киральный симплектический класс СИ.

Такой симметричный анализ применим не только к графену (шестиугольной решетке), но также и к любой другой двухподрешеточной модели (например, на квадратной решетке) со случайными амплитудами прыжка в центре зоны. В этой главе мы проведем общий анализ андерсоновской локализации в киральных классах, в равной степени применимый ко всем таким моделям.

Замечательным свойством двумерных металлов с киральной симметрией является точное отсутствие локализационных поправок к проводимости во всех порядках теории возмущений [72; 73]. В то же время, когда беспорядок достаточно сильный, переход в состояние изолятора неизбежен. Действительно, рассмотрим модель сильной связи на двумерной решетке с двумя подрешетками (например, квадратной или шестиугольной). Будем вводить беспорядок, удаляя случайным образом ребра решетки. Как объяснялось выше, такая модель относится к киральному ортогональному классу BDI. На классическом уровне это стандартная модель перколяции со случайными связями. Когда концентрация удаленных связей достигает критического значения ($1/2$ для квадратной решетки и $1 - 2\sin(\pi/18) \approx 0.65$ для шестиугольной решетки [282]), система теряет связность и происходит классический перколяционный переход в состояние изолятора. Очевидно, что проводимость в этом случае (определенная в пределе бесконечного размера) равна нулю. Хорошо известно, что в классах симметрии Вигнера—Дайсона такому классическому переходу перколяции предшествует андерсоновский переход металл-изолятор. В частности, из-за квантовой интерференции проводимость обращается в ноль в точке, где классическая проводимость все еще конечна (связность системы до конца не нарушена). Происходит ли такой же эффект в моделях с

киральной симметрией? Точное отсутствие поправок слабой локализации во всех порядках [72; 73] предполагает, что ответ отрицательный. Однако численное моделирование [283] киральных классов демонстрирует локализационный переход при достаточной силе беспорядка. В этих численных работах изучались модели с непрерывным беспорядком, когда связи не разрушаются полностью и классической перколяции не происходит, но, тем не менее, переход металл-изолятор наблюдается. Таким образом, существует очевидное противоречие между отсутствием локализации при анализе сигма-модели [72; 73] и численными результатами. Разрешению этого противоречия и посвящена настоящая глава.

Мы покажем, что, хотя анализ [72; 73] является полностью правильным во всех порядках теории возмущений, непертурбативные эффекты могут играть существенную роль в поведении эффективной теории поля. Эти эффекты связаны с топологическими возбуждениями типа вихрей. Для описания локализации в киральных классах в рамках сигма-модели требуется систематический учет таких топологических возбуждений.

Непертурбативные эффекты, связанные с вихрями, рассматривались в работах Березинского [105] и Костерлица и Таулесса [106; 107] для моделей двумерного планарного ферромагнетика (XY модель) и двумерного сверхтекучего потока. Эти системы характеризуются $U(1)$ параметром порядка (направление намагниченности и фаза волновой функции сверхтекучего конденсата) и демонстрируют фазовый переход по температуре между квазиупорядоченным (ферромагнитным или сверхтекучим) и неупорядоченным (парамагнитным или вязким) состоянием. Этот переход связан с распариванием вихрей и называется переходом Березинского—Костерлица—Таулесса (БКТ). Анализ ренорм-группы для такого фазового перехода был впервые проделан Костерлицем [108]. Альтернативное описание систем с вихрями возможно в рамках моделей кулоновского газа [284] и синус-Гордона. Уравнения ренорм-группы для модели синус-Гордона, эквивалентные ренорм-группе Костерлица, были получены Вигманом [285] в однопетлевом порядке, а затем в [286] с точностью до двух петель. Мы покажем, что, по аналогии с физикой перехода БКТ, вихри в сигма-моделях киральных классов приводят к переходу металл-изолятор. Однако теория оказывается более сложной, и характер перехода существенно отличается от БКТ, так как группа симметрии задачи локализации отличается от $U(1)$. Более того, сигма-модель кирального унитарного или симплектического классов (AIII и CII) обладает особыми топологическими свойствами и может включать дополнительные топологические члены, которые также существенно влияют на критические свойства.

5.1 Предварительные замечания

Квантовую локализацию в неупорядоченных системах удобно изучать в рамках нелинейной сигма-модели. Мы будем использовать фермионную (компактную) репличную версию теории. (Такие же результаты можно получить и с помощью альтернативной суперсимметричной модели, однако мы выбрали репличную версию, потому что она более наглядна с

Таблица 2 — Киральные классы симметрии. В столбцах перечислены названия классов, соответствующие компактные пространства сигма-модели, условия на унитарную матрицу Q и размерность D соответствующего пространства. Параметр s в последнем столбце используется для нормировки проводимости в формуле (5.3).

Киральный класс	Пространство	Условия	D	s
AIII (унитарный)	$U(N)$	нет ограничений	N^2	1
CII (симплектический)	$U(N)/O(N)$	$Q = Q^T$	$N(N + 1)/2$	2
BDI (ортогональный)	$U(N)/Sp(N)$	$Q = CQ^T C$	$N(N - 1)/2$	2

физической точки зрения.) Сигма-модель определена на компактном симметрическом пространстве, см. [131]. Для трех киральных классов поле $Q(\mathbf{r})$ является унитарной матрицей, принимающей значения в симметрических пространствах, перечисленных в таблице 2. Размер матрицы Q определяется количеством реплик N ; в конце вычисления предполагается репличный предел $N \rightarrow 0$. В классах CII и BDI унитарная матрица Q подчиняется дополнительному линейному условию. Это условие можно представить в виде $Q = \bar{Q}$, где операция зарядового сопряжения «черта» определяется следующим образом:

$$\bar{Q} = \begin{cases} Q^T, & \text{CII,} \\ CQ^T C, & \text{BDI.} \end{cases} \quad (5.2)$$

В классе BDI матрица C антисимметрична и удовлетворяет условию $C^2 = 1$. В стандартной параметризации модели количество реплик N четно и включает в себя спиновую степень свободы, а матрица C равна σ_y и действует в спиновом пространстве.

Отличительной особенностью трех пространств сигма-модели киральных классов является наличие единичного генератора, который коммутирует со всеми остальными (бесследовыми) генераторами. Этот единичный генератор соответствует $U(1)$ части соответствующего симметрического пространства. Наличие такого специального генератора позволяет добавить в действие модели особый член Гаде [72; 73]:

$$S[Q] = - \int \frac{d^2 r}{8\pi s} [\sigma \text{Tr}(Q^{-1} \nabla Q)^2 + c(\text{Tr} Q^{-1} \nabla Q)^2]. \quad (5.3)$$

Здесь параметр σ соответствует безразмерной проводимости образца (измеренной в единицах $e^2/\pi h$), а член Гаде имеет амплитуду c . В хороших киральных металлах $\sigma \gg 1$, в то время как затравочное значение c порядка единицы. Нормировочный коэффициент s компенсирует удвоение переменных при наличии инвариантности по обращению времени, его значение указано в таблице 2.

Выделим из унитарной матрицы Q фазовый множитель $Q = e^{i\phi} U$, так что $\det U = 1$. Общая фаза ϕ и представляет $U(1)$ степень свободы, характерную для сигма-моделей киральных классов. Действие (5.3) можно представить в виде

$$S[Q] = \int \frac{d^2 r}{8\pi s} [N(\sigma + Nc)(\nabla\phi)^2 + \sigma \text{Tr}(\nabla U^{-1} \nabla U)]. \quad (5.4)$$

Мы видим, что переменные ϕ и U разделяются, и что действие квадратично по ϕ . Это означает, что коэффициент $\sigma + Nc$ перед членом $(\nabla\phi)^2$ не перенормируется. В репличном пределе $N \rightarrow 0$ отсюда следует отсутствие локализационных поправок к σ , что и является результатом Гаде и Вегнера [72; 73].

Приведенное выше доказательство отсутствия перенормировки проводимости имеет, однако, дефект. На самом деле, действие для переменной ϕ не является строго гауссовым из-за компактного характера $U(1)$ степени свободы. Группа $U(1)$ не односвязна, а значит возможно появление топологических возбуждений — вихрей. Флуктуации матрицы Q с учетом разных вихревых конфигураций могут давать поправки к $\sigma + Nc$ по механизму БКТ [105–107]. Если такие поправки нарушают репличную симметрию, они могут выжить в репличном пределе и испортить аргумент Гаде и Вегнера. Наша цель — проанализировать влияние вихрей на перенормировку сигма-моделей киральных классов. Сначала мы сформулируем общий подход к перенормировке с использованием метода фонового поля, а затем рассмотрим как пертурбативные, так и непертурбативные (связанные с вихрями) вклады в уравнения ренорм-группы.

5.2 Метод фонового поля

Мы будем перенормировать сигма-модель в рамках подхода фонового поля [287; 288]. Следуя этому методу, сначала разделим медленные и быстрые степени свободы в матрице Q ; медленные степени свободы и будут служить фоновым полем для быстрых. Затем проинтегрируем статистическую сумму по быстрой части Q и получим эффективное действие для фонового поля. Это эффективное действие имеет такую же структуру сигма-модели, но с перенормированными параметрами σ и c .

Чтобы перенормировать действие (5.3), представим Q в виде $Q = \bar{V}\tilde{Q}V$, где \tilde{Q} — быстрое поле той же симметрии что Q , а унитарные матрицы V и \bar{V} представляют собой медленное фоновое поле. В классе симметрии AIII матрицы V и \bar{V} независимы, а в двух других киральных классах они подчиняются условию (5.2). После интегрирования по \tilde{Q} эффективное действие должно зависеть только от калибровочно инвариантной комбинации медленных полей $Q' = \bar{V}V$. Введем следующие обозначения для градиентов медленного поля:

$$\mathbf{A} = \nabla V V^{-1}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \bar{V}^{-1} \nabla \bar{V}. \quad (5.5)$$

Матрицы \mathbf{A} и $\bar{\mathbf{A}}$ также связаны тождеством (5.2) в классах CII и BDI.

Вывод ренорм-группы начинается с действия $S_0[Q]$, которое определяется уравнением (5.3) с затравочными параметрами σ_0 и c_0 . Подставляя $Q = \bar{V}\tilde{Q}V$, мы разбиваем действие на четыре слагаемых:

$$S_0[Q] = S_0[Q'] + S_L[\tilde{Q}] + S_{\text{int}}^{(1)}[\bar{V}, V, \tilde{Q}] + S_{\text{int}}^{(2)}[\bar{V}, V, \tilde{Q}]. \quad (5.6)$$

Первый член $S_0[Q']$ представляет собой затравочное действие для медленного фонового поля $Q' = \bar{V}V$. Он может быть представлен в виде

$$S_0[Q'] = - \int \frac{d^2r}{8\pi s} \left\{ \sigma_0 \text{Tr} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A})^2 + c_0 [\text{Tr} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A})]^2 \right\}. \quad (5.7)$$

Действие для быстрого поля $S_L[\tilde{Q}]$ дается таким же выражением (5.3) с затравочными параметрами σ_0 и c_0 , но включает также и массовый член,

$$S_L[\tilde{Q}] = S_0[\tilde{Q}] - \frac{\sigma_0}{8\pi s L^2} \int d^2r \text{Tr} (2 - \tilde{Q} - \tilde{Q}^{-1}). \quad (5.8)$$

Масса $\sim 1/L$ добавлена для того, чтобы оставить в матрице \tilde{Q} только быстрые степени свободы. В то же время мы будем считать, что медленные поля V и \bar{V} изменяются мало на расстояниях порядка L . Важно, чтобы массовый член был симметричным на многообразии \tilde{Q} ; это гарантирует, что перенормированное действие будет зависеть только от инвариантной комбинации $\bar{V}V$ и сохранит полную симметрию сигма-модели. Наконец, два последних члена в действии отвечают за взаимодействие между медленными и быстрыми модами

$$S_{\text{int}}^{(1)} = - \int \frac{d^2r}{4\pi s} \left[\sigma_0 \text{Tr} (\nabla \tilde{Q} \tilde{Q}^{-1} \bar{\mathbf{A}} + \tilde{Q}^{-1} \nabla \tilde{Q} \mathbf{A}) + c_0 \text{Tr} \tilde{Q}^{-1} \nabla \tilde{Q} \text{Tr} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}) \right], \quad (5.9)$$

$$S_{\text{int}}^{(2)} = \sigma_0 \int \frac{d^2r}{4\pi s} \text{Tr} [\bar{\mathbf{A}} \mathbf{A} - \tilde{Q}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \tilde{Q} \mathbf{A}]. \quad (5.10)$$

Мы интегрируем $e^{-S[Q]}$ по быстрыми переменным \tilde{Q} , берем логарифм от этого интеграла, выполняем градиентное разложение, и удерживаем только члены с не более чем двумя градиентами (квадратичные по \mathbf{A} и $\bar{\mathbf{A}}$). В итоге получается эффективное действие для медленного поля:

$$S[Q'] = S_0[Q'] + \langle S_{\text{int}}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \langle [S_{\text{int}}^{(1)}]^2 \rangle. \quad (5.11)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по \tilde{Q} с весом $e^{-S_L[\tilde{Q}]}$. Обратим внимание, что среднее $\langle S_{\text{int}}^{(1)} \rangle$ линейно по градиентам медленных переменных и, следовательно, обращается в ноль. Перенормируемость сигма-модели подразумевает, что эффективное действие для медленного поля Q' имеет вид (5.7), в котором затравочные параметры σ_0 и c_0 заменяются перенормированными значениями σ и c . Используя этот факт, мы рассмотрим три специальные формы фонового поля и таким образом установим перенормированные параметры в виде интегралов по \tilde{Q} для всех трех киральных классов симметрии.

Генераторы D -мерного пространства сигма-модели состоят из $D - 1$ бесследовой эрмитовой матрицы и одного специального генератора, пропорционального единичной матрице. В классах CII и BDI эти генераторы подчиняются дополнительному условию симметрии $T = \bar{T}$. Мы нормируем генераторы условием $\text{Tr} T^a T^b = \delta^{ab}$. Бесследовые генераторы многообразия сигма-модели подчиняются следующим тождествам Фирца:

$$\sum_a T_{ij}^a T_{kl}^a = \begin{cases} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{AIII,} \\ \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{CII,} \\ \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jk} + C_{ik} C_{jl}) - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{BDI.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Предположим, что фоновое поле имеет вид $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = i\mathbf{J}T$, где \mathbf{J} — некоторый постоянный вектор, а T — один из $D - 1$ бесследовых генераторов многообразия сигма-модели. Подставляя такое фоновое поле в (5.11), усредняя по направлениям \mathbf{J} , и сравнивая коэффициенты перед \mathbf{J}^2 в левой и правой части уравнения, мы находим перенормированную проводимость

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\sigma_0}{4A} \int d^2r \operatorname{Tr} \langle [\tilde{Q}, T] [\tilde{Q}^{-1}, T] \rangle + \frac{\sigma_0^2}{32\pi s A} \left\langle \left[\int d^2r \operatorname{Tr} \{ \nabla \tilde{Q}, \tilde{Q}^{-1} \} T \right]^2 \right\rangle. \quad (5.13)$$

Теперь предположим, что фоновое поле имеет вид чистой калибровки $\mathbf{A} = -\bar{\mathbf{A}} = i\mathbf{J}t$. Матрица t в этом выражении является одним из генераторов стационарной подгруппы $U(N)$, $O(N)$ и $\operatorname{Sp}(N)$, для классов АIII, СII и BDI, соответственно. Эти генераторы подчиняются второму набору тождеств Фирца

$$\sum_a t_{ij}^a t_{kl}^a = \begin{cases} \delta_{il} \delta_{jk}, & \text{АIII,} \\ \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}), & \text{СII,} \\ \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jk} - C_{ik} C_{jl}), & \text{BDI.} \end{cases} \quad (5.14)$$

Такое чисто калибровочное фоновое поле соответствует $Q' = 1$ и, следовательно, левая часть (5.11) обращается в ноль. Усредняя по направлениям \mathbf{J} , мы получим следующее тождество Уорда:

$$0 = \frac{\sigma_0}{4A} \int d^2r \operatorname{Tr} \langle [\tilde{Q}, t] [\tilde{Q}^{-1}, t] \rangle + \frac{\sigma_0^2}{32\pi s A} \left\langle \left[\int d^2r \operatorname{Tr} [\nabla \tilde{Q}, \tilde{Q}^{-1}] t \right]^2 \right\rangle. \quad (5.15)$$

Просуммируем тождества (5.13) по всеми генераторами T и прибавим (5.15) со всеми возможными матрицами t . С помощью тождеств Фирца (5.12) и (5.14), а также пользуясь свойством $Q = \bar{Q}$ в классах СII и BDI, мы получим перенормированную проводимость

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma_0^2}{D-1} \left(B_1 - \frac{B_2}{N} \right). \quad (5.16)$$

Здесь мы ввели обозначения для средних

$$B_1 = \int \frac{d^2(r-r')}{8\pi s} \left\langle \operatorname{Tr} (\tilde{Q}^{-1} \nabla \tilde{Q})_r (\tilde{Q}^{-1} \nabla \tilde{Q})_{r'} \right\rangle, \quad (5.17)$$

$$B_2 = \int \frac{d^2(r-r')}{8\pi s} \left\langle \operatorname{Tr} (\tilde{Q}^{-1} \nabla \tilde{Q})_r \operatorname{Tr} (\tilde{Q}^{-1} \nabla \tilde{Q})_{r'} \right\rangle. \quad (5.18)$$

Наконец, рассмотрим фоновое поле вида $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = i\mathbf{J}\mathbb{1}/\sqrt{N}$, которое генерируется единичной матрицей. Такая конфигурация поля войдет не только в кинетический член действия, но также и в член Гаде. После усреднения по направлениям \mathbf{J} , мы получим

$$\sigma + Nc = \sigma_0 + Nc_0 + \frac{(\sigma_0 + Nc_0)^2}{N} B_2. \quad (5.19)$$

Подставляя σ из уравнения (5.16), приходим к следующему выражению для перенормировки c :

$$c = c_0 - \frac{\sigma_0^2 B_1}{N(D-1)} + \left[\frac{\sigma_0^2}{D-1} + (\sigma_0 + Nc_0)^2 \right] \frac{B_2}{N^2}. \quad (5.20)$$

Уравнения (5.16) и (5.20) выражают перенормировку σ и c в самом общем виде. Средние величины $B_{1,2}$ неявно зависят от инфракрасного масштаба L , который определяется массовым членом в действии быстрых переменных (5.8). Уравнения ренорм-группы получаются стандартным способом при помощи дифференцирования уравнений (5.16) и (5.20) по $\ln L$ и замены σ_0 и c_0 в правой части этих уравнений текущими (зависящими от L) значениями σ и c .

5.3 Пертурбативная перенормировка

В предыдущем разделе мы использовали метод фонового поля и выразили перенормировку параметров сигма-модели киральных классов через корреляторы (5.17) и (5.18). Матрица \tilde{Q} принадлежит многообразию сигма-модели соответствующего класса, и усреднение выполняется со статистическим весом, определяемым действием (5.8). Теперь мы сделаем это усреднение в седловом приближении, которое оправдано в пределе $\sigma_0 \gg 1$. Начнем с пространственно однородной седловой точки $\tilde{Q} = 1$. Обратим внимание, что массовый член в действии (5.8) минимизируется именно при таком значении \tilde{Q} . Разложение в окрестности этой седловой точки дает пертурбативные вклады в перенормированные параметры действия. Такие пертурбативные поправки к σ обращаются в ноль в репличном пределе $N \rightarrow 0$ во всех порядках теории возмущений для всех трех киральных классов. Позже мы добавим непертурбативные вклады от неоднородных седловых конфигураций \tilde{Q} , содержащих диполи вихрь-антивихрь, и покажем, что это приводит к конечной перенормировке σ .

Мы параметризуем быстрое поле $\tilde{Q} = 1 + iW - W^2/2 + O(W^3)$ эрмитовой матрицей W , которая подчиняется линейному условию $W = \bar{W}$ в классах СII и BDI. Представим W в виде суммы генераторов соответствующего симметрического пространства: $W = w_0 \mathbb{1}/\sqrt{N} + \sum_a w_a T^a$. Раскладывая (5.8) до второго порядка по W , получим квадратичное действие

$$S_L[W] = \int \frac{d^2r}{8\pi s} \left\{ (\sigma_0 + Nc_0)(\nabla w_0)^2 + \sigma_0 L^{-2} w_0^2 + \sigma_0 \sum_a [(\nabla w_a)^2 + L^{-2} w_a^2] \right\}, \quad (5.21)$$

которое дает следующие средние для компонент W :

$$\langle w_0(\mathbf{q}) w_0(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{4\pi s}{(\sigma_0 + Nc_0)q^2 + \sigma_0 L^{-2}}, \quad \langle w_a(\mathbf{q}) w_a(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{4\pi s}{\sigma_0(q^2 + L^{-2})}. \quad (5.22)$$

В рамках пертурбативного вычисления среднее B_2 равно нулю, так как оно включает только U(1) компоненту матрицы \tilde{Q} . Действительно, поскольку $\text{Tr} \tilde{Q}^{-1} \nabla \tilde{Q} = i\sqrt{N} \nabla w_0$, мы получаем $B_2 \propto q^2 \langle w_0(\mathbf{q}) w_0(-\mathbf{q}) \rangle_{q \rightarrow 0} = 0$, а значит $\sigma + Nc$ не перенормируется, см. (5.19). Зануление B_2 представляет собой суть аргумента Гаде—Вегнера [72; 73] для отсутствия локализационных поправок к проводимости. Позже мы увидим, что седловые точки с участием вихрей дают неисчезающий вклад в B_2 .

В отличие от B_2 , среднее B_1 не равно нулю уже на пертурбативном уровне. Мы вычислим его в рамках однопетлевого приближения. Перепиывая (5.17) в импульсном представлении,

раскладывая по компонентам W и применяя теорему Вика, получаем

$$B_1 = \int \frac{q^2 d^2 q}{32\pi^3 s} \left[\langle W_{ij}(\mathbf{q}) W_{kl}(-\mathbf{q}) \rangle \langle W_{jk}(\mathbf{q}) W_{li}(-\mathbf{q}) \rangle - \langle W_{ij}(\mathbf{q}) W_{jk}(-\mathbf{q}) \rangle \langle W_{kl}(\mathbf{q}) W_{li}(-\mathbf{q}) \rangle \right]. \quad (5.23)$$

В этом выражении мы отбросили член $\sim q^2 \langle W^2 \rangle|_{q \rightarrow 0}$, который обращается в ноль так же, как и величина B_2 . Используя разложение W по генераторам T и пропагаторы (5.22), выразим B_1 в виде

$$B_1 = \int^\Lambda \frac{s q^3 dq}{2\sigma_0^2 (q^2 + L^{-2})^2} \sum_{a,b} \text{Tr} [T^a, T^b]^2. \quad (5.24)$$

Отметим, что пропагатор $\langle w_0 w_0 \rangle$ полностью выпал из этого выражения для B_1 . Интеграл по импульсу логарифмически расходится, поэтому мы также ввели ультрафиолетовое обрезание Λ .

Используя подходящее тождество Фирца (5.12), можно вычислить след от произведения четырех генераторов в (5.24). Это приводит к

$$B_1 \simeq N(1 - D) \frac{\ln(\Lambda L)}{\sigma_0^2}. \quad (5.25)$$

Подставляя это выражение и $B_2 = 0$ в (5.16) и (5.20), мы получаем логарифмические поправки к σ и c , которые можно представить в виде уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln L} = -N + NO(1/\sigma), \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \ln L} = 1 + O(1/\sigma). \quad (5.27)$$

Эти ренорм-групповые уравнения описывают изменение параметров сигма-модели в зависимости от инфракрасного масштаба L . Вклады более высоких петель дают члены порядка $1/\sigma$. В репличном пределе $N \rightarrow 0$ перенормировка σ исчезает в полном согласии с аргументом Гаде и Вегнера [72; 73].

Замечательной особенностью ренорм-группы в классе АIII является тот факт, что правая сторона уравнения (5.27) в точности равна 1 в репличном пределе. Вклады более высоких петель в бета-функцию для c пропорциональны N и исчезают при $N \rightarrow 0$ [122; 289]. Два других киральных класса не обладают подобным свойством; точные уравнения пертурбативной ренорм-группы для них не известны. Мы воспользуемся знанием точных уравнений в классе АIII ниже, когда будем строить ренорм-групповой поток при наличии вихрей.

5.4 Непертурбативная перенормировка

Чтобы найти конечную поправку к проводимости в пределе $N \rightarrow 0$, мы должны учесть седловые конфигурации, отличающиеся от константы $\tilde{Q} = 1$. Эти конфигурации будут

включать вихри — особые точки матрицы Q такие, что общая фаза ϕ изменяется на 2π при обходе вокруг вихря по любому замкнутому пути.

Приближение малых градиентов Q , используемое в сигма-модели, нарушается на расстояниях порядка длины свободного пробега от центра вихря. Эта область, называемая ядром вихря, должна быть исключена из действия (5.3). Вклад ядра вихря в общее действие мы обозначим S_v . Он неуниверсален и зависит от деталей баллистической динамики электронов внутри ядра. В типичных металлах $S_v \propto \sigma_0$. Действие ядра вихря определяет новый параметр в нашей теории, который мы будем называть летучестью¹. Он соответствует статистическому весу $y_0 = e^{-S_v}$, связанному с вихревым ядром.

5.4.1 Структура вихрей

Построим явно вихревую конфигурацию в трех киральных классах. Минимальная модель классов АIII и СИ с одной репликой сводится к абелевой U(1) модели с $\tilde{Q} = e^{i\phi}$. Такая же ситуация возникает в классе BDI при минимальном количестве реплик $N = 2$. В последнем случае матрица \tilde{Q} сохраняет 2×2 структуру в спиновом пространстве: $\tilde{Q} = e^{i\phi} \mathbb{1}$. Во всех трех моделях действие (5.8) имеет вид (для простоты мы пренебрегаем массовым членом)

$$S[\tilde{Q}] = \frac{K}{2\pi} \int d^2r (\nabla\phi)^2, \quad (5.28)$$

где мы ввели параметр жесткости

$$K = \begin{cases} (\sigma + c)/4, & \text{АIII,} \\ (\sigma + c)/8, & \text{СИ,} \\ (\sigma + 2c)/4, & \text{BDI.} \end{cases} \quad (5.29)$$

Рассмотрим набор вихрей с координатами \mathbf{r}_i и зарядами (завихренностями) $n_i = \pm 1$. Такая конфигурация создает градиент ϕ , который можно представить в виде

$$\nabla_\mu \phi(\mathbf{r}) = \epsilon_{\mu\nu} \sum_i n_i \nabla_\nu \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|. \quad (5.30)$$

Действительно, такое поле ϕ удовлетворяет классическому уравнению движения, минимизирующему действие, $\nabla^2 \phi = 0$, и при этом изменяется на $2\pi n_i$ при обходе каждого вихря с зарядом n_i . Массовый член в действии (5.8), которым мы временно пренебрегли в (5.28), накладывает условие $\phi = 0$ на бесконечности. Это возможно только в том случае, если система вихрей в целом нейтральна: $\sum_i n_i = 0$. При этом простейшей допустимой конфигурацией вихрей будет пара вихрь-антивихрь, то есть диполь. Конфигурации с более чем двумя вихрями или вихри с более высокими зарядами имеют меньший статистический вес, поэтому ими можно пренебречь.

¹В русском языке нет устоявшегося названия для этого параметра. В англоязычной литературе он называется «fugacity».

Таблица 3 — Проективные пространства, соответствующие возможным конфигурациям вихревого диполя. Объемы этих пространств V_p указаны в третьем столбце.

Класс симметрии	Многообразие диполей	V_p
АIII	$\mathbb{C}P^{N-1} = U(N)/U(N-1) \times U(1)$	$\pi^{N-1}/\Gamma(N)$
СИ	$\mathbb{R}P^{N-1} = O(N)/O(N-1) \times O(1)$	$\pi^{N/2-1}/\Gamma(N/2)$
BDI	$\mathbb{H}P^{N/2-1} = Sp(N)/Sp(N-2) \times Sp(2)$	$\pi^{N-2}/\Gamma(N)$

Рассмотрим одиночный диполь с вихрем и антивихрем в точках $\mathbf{r}_{1,2}$. Расстояние между этими точками $\mathbf{m} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ будем называть дипольным моментом. Подставляя (5.30) в (5.28), найдем действие для диполя:

$$S_m = 2S_v + 2K \ln(\Lambda|\mathbf{m}|). \quad (5.31)$$

Здесь Λ — ультрафиолетовое обрезание порядка обратного радиуса вихревого ядра. Кроме того мы явно добавили действие $2S_v$, связанное с двумя вихревыми ядрами. Действие диполя логарифмически растет с увеличением m . Это верно при условии, что размер диполя меньше инфракрасной длины L . Для диполей большего размера массовый член исказит конфигурацию поля ϕ , и действие будет расти линейно с m . Таким образом мы заключаем, что инфракрасное обрезание L в действии для \tilde{Q} эффективно ограничивает максимально допустимый размер диполей $m \lesssim L$.

Теперь рассмотрим общую ситуацию с произвольным количеством реплик. В классе АIII мы поместим диполь в первую реплику и представим матрицу \tilde{Q} в виде

$$\tilde{Q}_m = \mathbb{1} + |p\rangle(e^{i\phi} - 1)\langle p|. \quad (5.32)$$

Здесь $|p\rangle = \{1, 0, 0, \dots\}$ — N -компонентный вектор в пространстве реплики. Мы можем создать другие дипольные конфигурации с тем же действием (5.31) путем сдвигов и поворотов диполя в реальном пространстве, что изменяет только функцию ϕ , а также вращениями $\tilde{Q}_m \mapsto \bar{V}\tilde{Q}_m V$ в пространстве реплик унитарными матрицами V и \bar{V} . Массовый член в (5.8) требует $\tilde{Q}_m = \mathbb{1}$ на бесконечности и тем самым накладывает ограничение $\bar{V}V = 1$. Такие унитарные вращения ведут к тому же выражению (5.32) для \tilde{Q}_m , но с произвольным N -мерным комплексным единичным вектором $|p\rangle$. Таким образом, эквивалентные конфигурации диполей в пространстве реплик принадлежат комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^{N-1} = U(N)/U(N-1) \times U(1) = S^{2N-1}/S^1$.

В классе СИ накладывается дополнительное ограничение $\bar{V} = V^T$, см. (5.2). В результате разрешенные вращения генерируют произвольный единичный N -компонентный вещественный вектор $|p\rangle$. Он принадлежит соответствующему вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^{N-1} = O(N)/O(N-1) \times O(1) = S^{N-1}/S^0$. Наконец, в классе BDI ограничение (5.2) приводит к единичному вектору $|p\rangle$, который состоит из $N/2$ вещественных кватернионов и принадлежит симплектическому проективному пространству $\mathbb{H}P^{N/2-1} = Sp(N)/Sp(N-2) \times Sp(2) = S^{2N-1}/S^3$. Пространства эквивалентных конфигураций диполей перечислены в

таблице 3 вместе с их объемами V_p . Отметим важный факт: во всех трех киральных классах $V_p = O(N)$ в репличном пределе $N \rightarrow 0$.

5.4.2 Уравнения ренорм-группы

Вклад вихревого диполя в корреляционные функции $B_{1,2}$ быстрого поля \tilde{Q} находится путем подстановки $\tilde{Q} = \tilde{Q}_m$ из (5.32) в (5.17) и (5.18) и вычисления интеграла по флуктуациям около точки дипольного седла. Результат имеет вид

$$B_{1,2}^{\text{dip}} = \Lambda^4 \int d^2 R d^2 m \frac{Z'_{\text{dip}}}{Z_0} V_p \tilde{B}_{1,2}^{\text{dip}} e^{-S_m}. \quad (5.33)$$

Здесь S_m — действие (5.31) для диполя, а Z'_{dip} и Z_0 — детерминанты квадратичных флуктуаций вблизи дипольного и обычного однородного минимума действия соответственно. Нулевые моды, соответствующие вращениям диполя в репличном пространстве, исключены из определителя Z'_{dip} ; они дают объем V_p пространства эквивалентных дипольных конфигураций, см. таблицу 3. Нулевые моды, связанные с положением \mathbf{R} центра диполя и почти нулевые моды, связанные с величиной m также исключены из Z'_{dip} и учитываются в (5.33) в виде явных интегралов по соответствующим коллективным координатам. Множитель Λ^4 возникает из-за замены суммы по положениям вихря и антивихря с размером ядра $\sim 1/\Lambda$ непрерывными интегралами по \mathbf{R} и \mathbf{m} . (Появление этого множителя можно объяснить соображениями размерности.) Наконец, множители $\tilde{B}_{1,2}^{\text{dip}}$ даются выражениями внутри угловых скобок в уравнениях (5.17) и (5.18) с полем \tilde{Q}_m из (5.32).

Два вихря, образующие диполь, расположены в точках $\mathbf{R} \pm \mathbf{m}/2$. Из уравнений (5.30) и (5.32) получаем

$$\tilde{Q}_m^{-1} \nabla_\mu \tilde{Q}_m = -i \nabla_\mu \phi(\mathbf{r}) |p\rangle \langle p| = -i \epsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \ln \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{m}/2}{\mathbf{r} - \mathbf{R} + \mathbf{m}/2} \right| |p\rangle \langle p|. \quad (5.34)$$

Чтобы вычислить $\tilde{B}_{1,2}^{\text{dip}}$, подставим это выражение в (5.17) и (5.18). После этого $B_{1,2}^{\text{dip}}$ находится из (5.33). Проекционная форма матрицы (5.34) и структура следов в (5.17) и (5.18) приводят к соотношению

$$B_2^{\text{dip}} = u B_1^{\text{dip}}, \quad (5.35)$$

где мы ввели обозначение $u = \text{Tr}|p\rangle \langle p|$. В классах АIII и CII $u = 1$, в то время как в классе VDI мы имеем $u = 2$. Величину u можно понимать как минимальное значение числа реплик N , допускаемое симметрией.

Благодаря тождеству (5.35), достаточно вычислить B_1^{dip} . При фиксированном положении вихрей подынтегральное выражение в (5.17) явно зависит от векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' , а не только от их разности. Однородность восстанавливается после интегрирования по положению диполя \mathbf{R} в (5.33), поэтому мы выполним это интегрирование в первую очередь.

Из уравнений (5.17), (5.33) и (5.34) получаем

$$B_1^{\text{dip}} = -\frac{u V_p}{8\pi s} \Lambda^4 \int d^2 p \frac{Z'_{\text{dip}}(p)}{Z_0} e^{-S_m} \int d^2(r - r') d^2 R \nabla \ln \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R} - \frac{\mathbf{m}}{2}}{\mathbf{r} - \mathbf{R} + \frac{\mathbf{m}}{2}} \right| \nabla' \ln \left| \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{R} - \frac{\mathbf{m}}{2}}{\mathbf{r}' - \mathbf{R} + \frac{\mathbf{m}}{2}} \right|. \quad (5.36)$$

По построению, градиенты в (5.36) действуют на \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Однако результат будет тем же, если считать, что оба градиента действуют на \mathbf{R} . Интегрируя по частям и учитывая тождество $\nabla^2 \ln|\mathbf{R}| = 2\pi\delta(\mathbf{R})$, мы можем избавиться от интеграла по \mathbf{R} . После этого интегрирование по $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ дает

$$B_1^{\text{dip}} = -\frac{u\pi^2}{2s} V_p \Lambda^4 \int_{\Lambda^{-1}}^L dm m^3 \frac{Z'_{\text{dip}}(p)}{Z_0} e^{-S_m}. \quad (5.37)$$

Теперь проанализируем множитель Z'_{dip}/Z_0 . Большая часть возбуждений около минимума действия имеют длину волны в интервале между Λ^{-1} и m . Эти моды, живущие в относительно медленном «фоновом поле» вихрей, приводят к пертурбативной перенормировке параметров, входящих в действие S_m , в соответствии с уравнениями (5.26) и (5.27). Оставшаяся часть определителя Z'_{dip}/Z_0 обеспечивает неуниверсальный множитель, зависящий от деталей ультрафиолетового обрезания или, что то же самое, от внутренней структуры вихревого ядра. Мы будем включать все подобные неуниверсальные множители в определении летучести вихря y . Используя уравнение (5.31), представим вклад B_1 в следующем виде:

$$B_1^{\text{dip}} \propto -V_p e^{-2S_v} \Lambda \int_{\Lambda^{-1}}^L dm (\Lambda m)^{3-2K(m)}. \quad (5.38)$$

Все численные множители, опущенные в этом выражении, остаются конечными в репличном пределе $N \rightarrow 0$.

Чтобы найти вклад диполя в уравнения ренорм-группы для σ и c , мы выразим производную B_1^{dip} через летучесть,

$$\frac{\partial B_1^{\text{dip}}}{\partial \ln L} = -\frac{Ny^2}{u\sigma}. \quad (5.39)$$

Все неконтролируемые численные множители теперь скрыты в определении y :

$$y(L) \propto \sqrt{V_p/N} e^{-S_v} (\Lambda L)^{2-K(L)}. \quad (5.40)$$

Отметим, что отношение V_p/N остается конечным в репличном пределе. Дифференцируя уравнения (5.16) и (5.20) и используя тождество (5.35), мы получаем вклад диполя в уравнения ренорм-группы в терминах летучести y . Добавляя пертурбативную поправку из (5.26) и (5.27), приходим к результату

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln L} = -N - \begin{cases} \frac{\sigma y^2}{1+N}, & \text{AIII, BDI,} \\ \frac{\sigma y^2}{1+N/2}, & \text{CII,} \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \ln L} = 1 - cy^2 \left(2 + \frac{Nc}{\sigma} \right) - \begin{cases} \frac{\sigma y^2}{1+N}, & \text{AIII, BDI,} \\ \frac{\sigma y^2}{2+N}, & \text{CII.} \end{cases} \quad (5.42)$$

Перенормировка летучести следует из (5.40). Продифференцировав по $\ln L$ и взяв предел $\Lambda L \rightarrow 1$, мы получаем

$$\frac{\partial y}{\partial \ln L} = (2 - K)y. \quad (5.43)$$

Это уравнение выражено через параметр жесткости K , который определен в (5.29). Перенормировка K следует из двух других уравнений ренорм-группы (5.41) и (5.42). В репличном пределе $N \rightarrow 0$ уравнения для σ и K приобретают вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln L} = -\sigma y^2, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \ln L} = \begin{cases} \frac{1}{4} - 2Ky^2, & \text{AIII,} \\ \frac{1}{8} - 2Ky^2 + \frac{\sigma y^2}{16}, & \text{CII,} \\ \frac{1}{2} - 2Ky^2 - \frac{\sigma y^2}{4}, & \text{BDI.} \end{cases} \quad (5.45)$$

Из этого результата мы заключаем, что вихри обеспечивают отрицательную локализационную поправку к проводимости. В хорошем металлическом образце с $\sigma \gg 1$ и экспоненциально малой (по σ) летучестью y , вихри связываются в маленькие диполи. Полная отрицательная поправка к проводимости остается конечной на больших масштабах, потому что летучесть быстро убывает в процессе перенормировки. С понижением затравочного значения проводимости и увеличением летучести в игру вступают более крупные диполи и отрицательные поправки к σ становятся более значимыми. Когда обе величины σ и y порядка единицы, происходит фазовый переход. Наши уравнения ренорм-группы не являются количественно точными в этом пределе, но могут быть использованы для качественного описания этого перехода.

5.5 Локализация при наличии вихрей

Рассмотрим более подробно уравнения ренорм-группы в классе AIII. Как уже упоминалось в конце раздела 5.3, уравнения (5.26) и (5.27) верны во всех порядках петлевого разложения по $1/\sigma$ в репличном пределе. Поэтому уравнения (5.43), (5.44) и (5.45), учитывающие вклад вихрей в перенормировку, точны для класса AIII при единственном условии $y \ll 1$. Давайте на время отбросим это предположение и будем рассматривать уравнения ренорм-группы как полностью точные. Еще одной особенностью класса AIII является частичное разделение переменных: перенормировка K и y не зависит от σ . Это позволяет нам изучать двумерный поток ренорм-группы в плоскости K – y , как показано на рис. 5.1. Такой поток содержит одну неустойчивую фиксированную точку $K = 2$, $y = 1/4$. Черная линия, проходящая через эту точку, отделяет две стабильные фазы системы. Ниже этой линии поток направлен к $y = 0$ и $K \rightarrow \infty$. Эта часть пространства параметров соответствует металлической фазе.

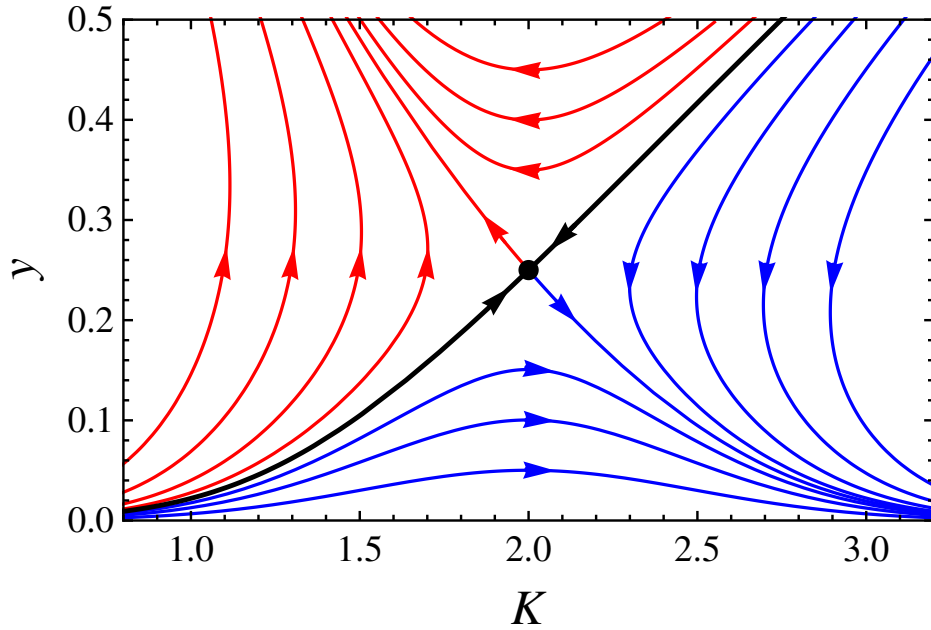


Рис. 5.1 — Схематическое изображение потока ренорм-группы около перехода металл-изолятор в киральном унитарном классе АIII согласно уравнениям (5.43) и (5.45).

При убывающей летучести, перенормировка проводимости останавливается на некотором конечном значении, в то время как жесткость K продолжает расти исключительно за счет перенормировки параметра Гаде s . В металлической фазе система быстро приближается к режиму, описываемому сигма-моделью Гаде без вихрей. Конечный вклад диполей может быть включен в затравочные параметры этой сигма-модели.

Над критической линией летучесть y неограниченно растет, что означает распаривание вихрей. Эта фаза аналогична высокотемпературной или неупорядоченной фазе БКТ и соответствует состоянию изолятора. Действительно, в соответствии с уравнением (5.44), проводимость убывает до нуля вместе с ростом y . Уравнения пертурбативной ренорм-группы быстро становятся неточными в этом пределе и не могут применяться глубоко в фазе изолятора. Тем не менее, используя аналогию с переходом БКТ, мы заключаем, что наличие фазового перехода между состояниями металла и изолятора надежно установлено.

Уравнения ренорм-группы (5.43), (5.44) и (5.45) были получены в предположении малого значения летучести (и большой величины проводимости σ в классах СII и BDI). Это означает, что фиксированная точка перехода металл-изолятор находится на границе области применимости этих уравнений. Теория не является количественно контролируемой в непосредственной близости от фиксированной точки, но общая качественная картина ренорм-группового потока и, в частности, само наличие нестабильной фиксированной точки должны оставаться справедливыми. Численное моделирование электронного транспорта в двумерных киральных неупорядоченных системах может обеспечить количественную оценку критических свойств локализационного перехода.

Мы обнаружили фиксированную точку перехода металл-изолятор при $\sigma = 0$. Из этого следует отсутствие минимальной металлической проводимости в рассматриваемой задаче. В

реалистичных неупорядоченных киральных металлах затравочное значение летучести связано с квазиклассической проводимостью экспоненциальным соотношением $y \propto e^{-\sigma}$. Это значит, что критическое состояние достигается, когда оба параметра y и σ порядка единицы. Поэтому переход Андерсона, как правило, будет происходить при $\sigma \sim 1$. Точное критическое значение σ зависит от микроскопических деталей конкретной реализации неупорядоченной системы.

5.6 Дуальное представление для класса АIII

В этом разделе мы представим альтернативный способ вывода уравнений ренорм-группы для кирального класса АIII, основанный на модели кулоновского газа и обобщенного уравнения синус-Гордона [284]. Для этого нам понадобится дуальное представление сигма-модели.

5.6.1 Дуальное действие

В качестве начального замечания укажем, что для любого поля $Q(\mathbf{r})$ унитарных матриц можно определить двухкомпонентное векторное поле

$$\mathbf{h} = -iQ^{-1}\nabla Q. \quad (5.46)$$

Компонентами \mathbf{h} являются эрмитовы матрицы размера $N \times N$. Наоборот, по известному векторному полю \mathbf{h} , составленному из эрмитовых матриц, и значению унитарной матрицы Q в одной точке можно восстановить Q на всей плоскости, проинтегрировав систему уравнений

$$\nabla_\mu Q = iQh_\mu. \quad (5.47)$$

Если решение уравнений (5.47) существует, оно автоматически является полем унитарных матриц. Сравнивая смешанные производные Q , мы находим условие совместности для системы (5.47)

$$F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu h_\nu - \nabla_\nu h_\mu + i[h_\mu, h_\nu] = 0. \quad (5.48)$$

Замечательно, что это условие означает зануление тензора напряженности поля для небелевого векторного потенциала \mathbf{h} .

Таким образом, мы пришли к выводу, что поле матриц Q находится в однозначном соответствии с векторным полем \mathbf{h} , подчиняющимся условию интегрируемости (5.48). В частности, статистическая сумма сигма-модели может быть записана в виде

$$Z = \int DQ e^{-S[Q]} = \int D^2h \delta[F_{xy}(\mathbf{r})] e^{-S[\mathbf{h}]}. \quad (5.49)$$

В подынтегральное выражение входит функциональная дельта-функция, которая обеспечивает выполнение условия (5.48), а действие, в соответствии с (5.3), является квадратичным функционалом от \mathbf{h} :

$$S[\mathbf{h}] = \int \frac{d^2r}{8\pi} [\sigma \text{Tr} \mathbf{h}^2 + c(\text{Tr} \mathbf{h})^2]. \quad (5.50)$$

Мера интегрирования по \mathbf{h} в уравнении (5.49) оказывается плоской. Функциональную дельта-функцию можно представить интегралом по вспомогательному полю эрмитовых матриц Θ также с плоской мерой:

$$Z = \int D^2h D\Theta e^{-S[\mathbf{h}, \Theta]}, \quad S[\mathbf{h}, \Theta] = S[\mathbf{h}] + i \int d^2r \text{Tr}(\Theta F_{xy}). \quad (5.51)$$

Действие $S[\mathbf{h}, \Theta]$ квадратично по \mathbf{h} . Чтобы вычислить гауссов интеграл, удобно разложить поля \mathbf{h} и Θ по генераторам группы $U(N)$:

$$h^{x,y} = \frac{h_0^{x,y}}{\sqrt{N}} + \sum_{a=1}^{N^2-1} h_a^{x,y} T^a, \quad \Theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{N}} + \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a T^a. \quad (5.52)$$

В таких обозначениях действие принимает вид

$$S = \int d^2r \left\{ \frac{\sigma + Nc}{8\pi} \mathbf{h}_0^2 + \frac{\sigma}{8\pi} \sum_{a,b=1}^{N^2-1} (h_a^x, h_a^y) \mathbb{M}_{ab} \begin{pmatrix} h_b^x \\ h_b^y \end{pmatrix} + i \sum_{a=0}^{N^2-1} (h_a^x, h_a^y) \begin{pmatrix} \nabla_y \theta_a \\ -\nabla_x \theta_a \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.53)$$

$$\mathbb{M}_{ab} = \begin{pmatrix} \delta_{ab} & -\frac{4\pi i}{\sigma} \mathbb{Y}_{ab}(\theta) \\ \frac{4\pi i}{\sigma} \mathbb{Y}_{ab}(\theta) & \delta_{ab} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Y}_{ab}(\theta) = \sum_{c=1}^{N^2-1} f_{abc} \theta_c, \quad f_{abc} = -i \text{Tr}([T^a, T^b] T^c). \quad (5.54)$$

Здесь возникает антисимметричная матрица \mathbb{Y} , которая представляет собой коммутатор с Θ в присоединенном представлении: $\mathbb{Y}(\theta) = i[\Theta, \cdot]$. Она непосредственно выражается через структурные константы f_{abc} алгебры $\mathfrak{su}(N)$.

Для вычисления интеграла по \mathbf{h} нужно обратить матрицу \mathbb{M} и вычислить ее детерминант. Обе величины можно выразить через одну матрицу g следующим образом:

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g + g^T & i(g - g^T) \\ i(g^T - g) & g + g^T \end{pmatrix}, \quad \det \mathbb{M} = \det^{-2} g, \quad g = \left[1 - \frac{4\pi \mathbb{Y}}{\sigma} \right]^{-1}. \quad (5.55)$$

После интегрирования по \mathbf{h} получается дуальное действие для сигма-модели класса АШ в терминах матрицы Θ :

$$S[\Theta] = \frac{2\pi}{\sigma + Nc} \int d^2r (\nabla \theta_0)^2 + \frac{2\pi}{\sigma} (\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu}) \int d^2r (\nabla_\mu \theta_a) g_{ab}(\theta) (\nabla_\nu \theta_b). \quad (5.56)$$

Мера функционального интегрирования по Θ в статистической сумме выражается непосредственно через g

$$Z = \int D\mu(\Theta) e^{-S[\Theta]}, \quad D\mu(\Theta) = \prod_{\mathbf{r}} \det g[\Theta(\mathbf{r})] d\Theta(\mathbf{r}). \quad (5.57)$$

Благодаря антисимметричности \mathbb{Y} , матрица g удовлетворяет тождеству $g + g^T = 2g^T g$. Это означает, что теорию с действием (5.56) можно рассматривать как сигма-модель в римановом пространстве (с кручением) с метрическим тензором $g^T g$, причем мера интегрирования согласована с метрикой.

5.6.2 Пертурбативная перенормировка

Модель, определенная уравнениями (5.56), (5.57), полностью эквивалентна исходной сигма-модели класса АIII. В частности, обе теории должны подчиняться одной и той же пертурбативной ренорм-группе. Продемонстрируем этот факт в рамках однопетлевого приближения.

Мы можем отбросить компоненту θ_0 в уравнении (5.56), поскольку гауссово действие в этом секторе не перенормируется, и сосредоточиться на перенормировки неабелевой части теории с полями θ_a , где $a = 1, \dots, N^2 - 1$. Поскольку петлевое разложение контролируется параметром $\sigma \gg 1$, нам будет удобнее перемасштабировать θ_a множителем $\sigma/4\pi$. Тогда неабелева часть действия приобретает вид

$$S[\theta] = \frac{\sigma}{8\pi} (\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu}) \int d^2r (\nabla_\mu \theta_a) g_{ab}(\theta) (\nabla_\nu \theta_b), \quad g(\theta) = [1 - \mathbb{Y}(\theta)]^{-1}. \quad (5.58)$$

Будем выводить перенормировку теории обычным способом: разделим поля θ на быстрые и медленные компоненты, $\theta = \theta_< + \tilde{\theta}_>$, разложим действие по быстрым полям до второго порядка и проинтегрируем по ним. Оказывается удобным сделать замену быстрых переменных $\theta_> = g(\theta_<) \tilde{\theta}_>$, так что разложение θ на быструю и медленную часть принимает вид

$$\theta = \theta_< + (1 - \mathbb{Y}_<) \theta_>. \quad (5.59)$$

Здесь мы для краткости обозначили $\mathbb{Y}_< = \mathbb{Y}(\theta_<)$. Такая замена сокращает вклад нетривиальной меры (5.57) в уравнения ренорм-группы и гарантирует отсутствие линейно расходящихся диаграмм в однопетлевом вычислении. Обозначим также $\mathbb{Y}(\theta_>) = \mathbb{Y}_>$ и запишем

$$\nabla \theta = (1 + \mathbb{Y}_>) \nabla \theta_< + (1 - \mathbb{Y}_<) \nabla \theta_>, \quad \mathbb{Y}(\theta) = \mathbb{Y}_< + \mathbb{Y}_> + [\mathbb{Y}_>, \mathbb{Y}_<]. \quad (5.60)$$

При выводе последнего равенства мы воспользовались тождеством Якоби для структурных констант.

Полное действие (5.58), разложенное до второго порядка по быстрым полям, можно представить в виде суммы нескольких слагаемых:

$$S[\theta] = S[\theta_<] + S_2^{(0)}[\theta_>] + S_2^{(1)}[\theta_<, \theta_>] + S_2^{(2)}[\theta_<, \theta_>], \quad (5.61)$$

где

$$S_2^{(0)} = \frac{\sigma}{8\pi} \int d^2r \nabla \theta_>^T \nabla \theta_>, \quad (5.62)$$

$$S_2^{(1)} = \frac{\sigma}{8\pi} \int d^2r \left\{ i\epsilon_{\mu\nu} \nabla_\mu \theta_<^T \mathbb{Y}_> \nabla_\nu \theta_> + (\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu}) \left[\nabla_\mu \theta_<^T g_< \mathbb{Y}_> \mathbb{Y}_< \nabla_\nu \theta_> + \nabla_\mu \theta_>^T (1 + \mathbb{Y}_<) g_< (2 - \mathbb{Y}_<) \mathbb{Y}_> g_< \nabla_\nu \theta_< \right] \right\}, \quad (5.63)$$

$$S_2^{(2)} = \frac{\sigma(\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu})}{8\pi} \int d^2r \nabla_\mu \theta_<^T g_< \mathbb{Y}_> \mathbb{Y}_< g_< (2 - \mathbb{Y}_<) \mathbb{Y}_> g_< \nabla_\nu \theta_<. \quad (5.64)$$

Мы собрали все вклады с одним и двумя градиентами медленного поля $\theta_<$ в $S_2^{(1)}$ и $S_2^{(2)}$ соответственно. Перенормировка получается разложением статистической суммы в ряд по

$S_2^{(1,2)}$ и усреднением по флуктуациям быстрых полей в полосе импульсов $\Lambda < q < \Lambda'$. При помощи тождеств Якоби можно свести получающееся выражение для поправки к действию к следующему простому виду:

$$\Delta S[\theta_<] = -\frac{1}{2} \left\langle\left\langle [S_2^{(1)}]^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle S_2^{(2)} \right\rangle = \frac{N}{8\pi} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int d^2r (\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu}) \nabla_\mu \theta_<^T [2g_< + 3g_<^2] \nabla_\nu \theta_<. \quad (5.65)$$

Мы видим, что поправка не имеет буквально такой же структуры, как затравочное действие (5.58), однако ее можно скорректировать, если переопределить медленные поля

$$\tilde{\theta}_< = \theta_< \left(1 + \frac{3N}{\sigma} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \right) \quad (5.66)$$

и переразложить $g_<$ до линейных членов по $1/\sigma$. Это приводит к сокращению вклада $g_<^2$ в формуле (5.65), а вся поправка к действию сводится к перенормировке проводимости

$$\tilde{\sigma} = \sigma \left(1 - \frac{N}{\sigma} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \right). \quad (5.67)$$

Итак, мы показали, что дуальная модель класса АШ, определенная уравнениями (5.56), (5.57), является перенормируемой теорией причем с единственной константой связи. Она воспроизводит ренорм-групповое уравнение для проводимости в однопетлевом приближении в согласии с (5.26). Комбинация $\sigma + Nc$ в дуальной теории не перенормируется, поскольку стоит перед квадратичным членом в действии (5.56). Поэтому поправка к c непосредственно следует из только что выведенной поправки к σ и также совпадает с (5.27).

5.6.3 Дуальное действие с вихрями

До сих пор мы полностью игнорировали вихревые возбуждения. Чтобы включить их в дуальную теорию, нужно ослабить условие интегрируемости (5.48). Действительно, как обсуждалось выше, одиночный вихрь с центром в начале координат описывается конфигурацией

$$Q = \mathbb{1} + |p\rangle (e^{i\phi} - 1) \langle p|. \quad (5.68)$$

Здесь ϕ — полярный угол, а $|p\rangle \langle p|$ проектирует на некоторый комплексный единичный вектор $|p\rangle$ в пространстве реплик. Соответствующее поле \mathbf{h} имеет только азимутальную компоненту $h_\phi = |p\rangle \langle p|/r$, а тензор напряженности поля принимает вид

$$F_{xy}(\mathbf{r}) = 2\pi \delta(\mathbf{r}) |p\rangle \langle p|. \quad (5.69)$$

Таким образом, вихрь представляет собой точечный дефект, который локально нарушает условие интегрируемости и сводится к дельта-функции в F_{xy} . Нетрудно написать общее выражение для тензора напряженности в случае произвольного набора вихрей и антивихрей, расположенных в точках \mathbf{r}_i и характеризующихся проекторами $|p_i\rangle \langle p_i|$,

$$F_{xy}(\mathbf{r}) = 2\pi \sum_i n_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) |p_i\rangle \langle p_i|, \quad n_i = \pm 1. \quad (5.70)$$

Мы можем повторить вывод дуального представления сигма-модели (5.56), (5.57), но на этот раз с учетом вихревых конфигураций, то есть вместо $F_{xy} = 0$ используем (5.70). Это дает

$$Z = \int D\mu(\Theta) e^{-S[\Theta]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Lambda^2 y)^k}{k!} \sum_{n_i=\pm 1} \prod_{i=1}^k \int d^2 r_i d|p_i\rangle \exp[2\pi i n_i \langle p_i | \theta(\mathbf{r}_i) | p_i \rangle] \\ = \int D\mu(\Theta) e^{-S[\Theta] - S_y[\Theta]}. \quad (5.71)$$

Здесь $y = e^{-S_v}$ обозначает летучесть, интегрирование по $|p_i\rangle$ выполняется по всем комплексным единичным векторам с естественной мерой, а вихревая поправка к действию приобретает вид

$$S_y[\Theta] = -2y\Lambda^2 \int d^2 r d|p\rangle \cos[2\pi \langle p | \Theta(\mathbf{r}) | p \rangle]. \quad (5.72)$$

Действие дуальной теории с вихрями определяется суммой (5.56) и (5.72) и представляет собой обобщение модели синус-Гордона. Из этого действия можно вывести уравнения ренорм-группы, включая непертурбативные вклады, для сигма-модели класса АIII.

5.6.4 Вклад вихрей в перенормировку

Минимальная сигма-модель класса АIII с одной репликой эквивалентна U(1) модели. Уравнения (5.56) и (5.72) сводятся при этом к стандартному действию синус-Гордона [284]

$$S[\Theta] + S_y[\Theta] = \int d^2 r \left[\frac{2\pi}{\sigma + c} (\nabla\theta_0)^2 - 2y\Lambda^2 \cos(2\pi\theta_0) \right] \quad (5.73)$$

и воспроизводят ренорм-группу БКТ [108; 286]. Рассмотрим вклад вихрей в уравнения ренорм-группы в общем случае $N \neq 1$. Как и в теории БКТ, будем делать это пертурбативно по малому параметру летучести вихря y . На время пренебрежем неквадратичными членами в $S[\Theta]$ и запишем безвихревую часть действия в гауссовом виде

$$S_0[\Theta] = 2\pi \int d^2 r \left[\frac{(\nabla\theta_0)^2}{\sigma + Nc} + \sum_a \frac{(\nabla\theta_a)^2}{\sigma} \right]. \quad (5.74)$$

Следуя стандартной процедуре, разобьем поле Θ на быструю и медленную часть $\Theta = \Theta_{<} + \Theta_{>}$, считая, что быстрые моды $\Theta_{>}$ находятся в тонком слое импульсного пространства $\Lambda' = \Lambda - \Delta\Lambda < q < \Lambda$. Полный функционал действия раскладывается в сумму

$$S[\Theta_{>} + \Theta_{<}] = S_0[\Theta_{<}] + S_0[\Theta_{>}] + S_y[\Theta_{<}] + S_1[\Theta_{>}, \Theta_{<}]. \quad (5.75)$$

Член, отвечающий за взаимодействие быстрых и медленных мод, возникает из вихревого действия S_y и разбивается еще на два слагаемых:

$$S_1[\Theta_>, \Theta_<] = S_c[\Theta_>, \Theta_<] + S_s[\Theta_>, \Theta_<], \quad (5.76)$$

$$S_{c,s}[\Theta_>, \Theta_<] = -2\Lambda^2 y \int d^2r d|p\rangle U_{c,s}(\mathbf{r}, |p\rangle), \quad (5.77)$$

$$U_c(\mathbf{r}, |p\rangle) = \left(\cos[2\pi\langle p|\Theta_>(\mathbf{r})|p\rangle] - 1 \right) \cos[2\pi\langle p|\Theta_<(\mathbf{r})|p\rangle], \quad (5.78)$$

$$U_s(\mathbf{r}, |p\rangle) = -\sin[2\pi\langle p|\Theta_>(\mathbf{r})|p\rangle] \sin[2\pi\langle p|\Theta_<(\mathbf{r})|p\rangle]. \quad (5.79)$$

В первом порядке по малой летучести y член с взаимодействием S_1 генерирует поправку к ней же. Для вычисления поправки нужно усреднить S_c по флуктуациям $\Theta_>$. Результат можно представить в виде ренорм-группового уравнения, которое полностью аналогично (5.43):

$$\frac{\partial y}{\partial \ln(\Lambda/\Lambda')} = (2 - K)y. \quad (5.80)$$

Параметр жесткости K был определен в (5.29).

Теперь рассмотрим вклады второго порядка по параметру летучести. Оказывается, что, строго говоря, действие модели не сохраняет свою форму в процессе перенормировки. Например, рассмотрим вклад в действие от квадратичного по S_c члена:

$$\Delta S[\Theta_<] = -\frac{1}{2} \langle\langle S_c^2 \rangle\rangle = -2\Lambda^4 y^2 \int d^2R d^2m d|p_1\rangle d|p_2\rangle \langle\langle U_c(\mathbf{R}_+, |p_1\rangle) U_c(\mathbf{R}_-, |p_2\rangle) \rangle\rangle. \quad (5.81)$$

Здесь $\mathbf{R}_\pm = \mathbf{R} \pm \mathbf{m}/2$ обозначают положения вихрей в диполе с центром \mathbf{R} и дипольным моментом \mathbf{m} . Разложение по градиентам медленных полей приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Delta S[\Theta_<] = & -\Lambda^4 y^2 \int d^2R d^2m d|p_1\rangle d|p_2\rangle (X_+ + X_-) \\ & \times \langle\langle \cos[2\pi\langle p_1|\Theta_>(\mathbf{R}_+)|p_1\rangle] \cos[2\pi\langle p_2|\Theta_>(\mathbf{R}_-)|p_2\rangle] \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (5.82)$$

где

$$X_\pm = \cos[2\pi\langle p_1|\Theta_<(\mathbf{R})|p_1\rangle \pm 2\pi\langle p_2|\Theta_<(\mathbf{R})|p_2\rangle] \left[1 \pm \frac{m^2}{4} \langle p_1|\nabla\Theta_<(\mathbf{R})|p_1\rangle \langle p_2|\nabla\Theta_<(\mathbf{R})|p_2\rangle \right]. \quad (5.83)$$

Мы видим, что перенормировка приводит к появлению слагаемых вида $\cos[2\pi\langle p_1|\Theta_<(\mathbf{R})|p_1\rangle \pm 2\pi\langle p_2|\Theta_<(\mathbf{R})|p_2\rangle]$, соответствующих созданию двух вихрей (для знака плюс) или вихря и антивихря (для знака минус), находящихся в одной и той же точке и имеющих проекторы $|p_1\rangle\langle p_1|$ и $|p_2\rangle\langle p_2|$. В то время как первый из этих вкладов нерелевантен в смысле ренорм-группы, последний может быть даже более релевантным возмущением, чем исходный член $\cos[2\pi\langle p|\Theta_<|p\rangle]$, если векторы $|p_1\rangle$ и $|p_2\rangle$ достаточно близки. Но эти слагаемые подавлены дополнительной степенью летучести $y \ll 1$ по сравнению с затравочным вихревым членом, поэтому мы будем ими пренебрегать. Очевидно, что такое пренебрежение не оправдано в области $y \sim 1$, где находится фиксированная точка перехода металл-изолятор. В то же время разрабатываемая нами теория количественно верна только в пределе $y \ll 1$. Отбрасывание

вышеуказанных членов не должно приводить к каким-либо качественным изменениям ренорм-группового потока.

Нас интересуют только самые важные члены в порядке y^2 , то есть те, которые дают вклад в перенормировку σ и K и таким образом приводят к локализационному переходу. Чтобы получить такие вклады, мы приближенно представим поправку (5.82) к действию медленных полей в виде

$$\begin{aligned} \Delta S[\Theta_{<}] &= 2\pi\kappa\Lambda^4 y^2 \int d^2 R d|p\rangle \langle p|\nabla\Theta_{<}(R)|p\rangle^2 \\ &\quad \times \int d^2 m m^2 \langle\langle \cos[2\pi\langle p|\Theta_{>}(\mathbf{R}_+)|p\rangle] \cos[2\pi\langle p|\Theta_{>}(\mathbf{R}_-)|p\rangle] \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Мы собрали несущественные численные множители в параметр κ . После усреднения по быстрыми полями и выделения вкладов первого порядка по $\Delta\Lambda$ получаем

$$\Delta S[\Theta_{<}] = 2\pi\kappa \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} K^2 y^2 \int d^2 R d|p\rangle \langle p|\nabla\Theta_{<}(\mathbf{R})|p\rangle^2. \quad (5.85)$$

В этом выражении мы включили еще один численный множитель в κ . Для произвольных матриц A и B справедливо тождество

$$\int d|p\rangle \langle p|A|p\rangle \langle p|B|p\rangle = \frac{V_p}{N(N+1)} (\text{Tr } A \text{ Tr } B + \text{Tr } AB), \quad (5.86)$$

с помощью которого мы находим

$$\Delta S[\Theta_{<}] = 2\pi\kappa \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} \frac{V_p}{N(N+1)} K^2 y^2 \left[(N+1)(\nabla\theta_{<}^0)^2 + \sum_{a=1}^{N^2-1} (\nabla\theta_{<}^a)^2 \right]. \quad (5.87)$$

Сравнивая этот результат с квадратичным действием (5.74), мы заключаем, что интегрирование по быстрым переменным приводит к поправкам в σ и c следующего вида:

$$\Delta\sigma = -\kappa \frac{y^2 K^2 \sigma^2}{\Gamma(N+2)} \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda}, \quad (5.88)$$

$$\Delta c = -\kappa \frac{y^2 K^2}{\Gamma(N+1)} \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} \left[\frac{\sigma^2}{N+1} + 2\sigma c + Nc^2 \right]. \quad (5.89)$$

В этом вычислении мы пренебрегли негауссовыми членами в действии $S[\Theta]$. Их учет приводит к пертурбативной перенормировке параметров модели и, в частности, к появлению текущих (зависящих от масштаба) значений σ и c в уравнениях (5.88) и (5.89). Кроме того, прямым вычислением можно проверить, что член ΔS_s не дает поправок в порядке y^2 в нашем приближении. Из соотношений (5.80), (5.88) и (5.89) мы окончательно получаем систему уравнений ренорм-группы для сигма-модели класса АIII

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\ln L} = -N - \frac{y^2 K^2 \sigma^2}{\Gamma(N+2)}, \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial K}{\partial\ln L} = \frac{1-N}{4} - \frac{y^2 K^2}{\Gamma(N+1)} \left(\frac{2\sigma^2}{N+1} + 2\sigma c + Nc^2 \right), \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial y}{\partial\ln L} = (2-K)y. \quad (5.92)$$

Эти уравнения эквивалентны тем, что мы вывели в предыдущем разделе, с точностью до сублидирующих вкладов. Чтобы сделать эту эквивалентность явной, мы переопределим параметр летучести по формуле $y \mapsto (y/K)\sqrt{\Gamma(N+1)/\sigma}$. Это равносильно изменению (в любом случае, произвольного) предэкспоненциального множителя в экспоненциально малой величине y . После такого переопределения уравнения ренорм-группы (5.41), (5.42) и (5.43) полностью воспроизводятся.

5.7 Топологические члены

В предыдущих разделах мы обсудили локализацию в рамках обычной сигма-модели Гаде—Вегнера (5.3) для трех киральных классов симметрии. Теперь рассмотрим ситуации, когда к действию сигма-модели добавляется топологический член. Топология многообразий сигма-модели в двух измерениях (см. таблицу 2) позволяет добавить член Весса—Зумино к действию для класса АIII и \mathbb{Z}_2 топологический член (θ -член) в классе СИ. В этом разделе мы покажем, что такие дополнительные вклады, возникающие, например, в моделях случайных дираковских фермионов соответствующей симметрии, решающим образом влияют на локализационные свойства. А именно, при наличии топологических членов вихревые возбуждения не возникают, механизм локализации, основанный на динамике вихрей, не работает, а система всегда остается в металлическом состоянии.

5.7.1 Член Весса—Зумино в классе АIII

Начнем с сигма-модели класса АIII, которая определена на группе унитарных матриц $Q(\mathbf{r}) \in U(N)$, а вектор \mathbf{r} принадлежит двумерному реальному пространству. Мы будем рассматривать только конфигурации матрицы Q с фиксированным значением на бесконечности; в противном случае действие сигма-модели оказывается неограниченно большим из-за градиентных членов. Это позволяет компактифицировать реальное пространство, отождествив его с обычной двумерной сферой. Такое компактное пространство S^2 можно рассматривать как поверхность трехмерного шара. Введем радиальную координату в этом шаре так, что $\tau = 1$ соответствует поверхности (то есть физическому двумерному пространству), а $\tau = 0$ — центру шара. Матрицу Q можно непрерывно распространить на весь внутренний объем шара:

$$Q(\mathbf{r}, \tau) = \begin{cases} Q(\mathbf{r}), & \tau = 1, \\ \text{const}, & \tau = 0. \end{cases} \quad (5.93)$$

Такое продолжение всегда возможно, поскольку вторая гомотопическая группа унитарной группы тривиальна, $\pi_2(U) = 0$. Иными словами, любое отображение $S^2 \mapsto U(N)$ можно

непрерывным образом стянуть в одну точку. Именно такое стягивание исходной конфигурации $Q(\mathbf{r})$ с параметром τ и описывается выражением (5.93).

В терминах продолженной матрицы $Q(\tau)$ член Весса—Зумино записывается в виде

$$S_{\text{WZ}}[Q] = \frac{ik}{12\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \int d\tau d^2r \text{Tr} \left(Q^{-1} \nabla_\mu Q Q^{-1} \nabla_\nu Q Q^{-1} \nabla_\lambda Q \right). \quad (5.94)$$

Здесь греческие индексы принимают три значения, соответствующие компонентам \mathbf{r} и τ . Подынтегральное выражение явно зависит от Q при $\tau \neq 1$, то есть вне физического двумерного пространства. Однако вариацию действия Весса—Зумино можно представить как интеграл от полной трехмерной дивергенции и свести к интегралу по поверхности:

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{WZ}}[Q] &= \frac{ik}{4\pi} \int d\tau d^2r \nabla_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} \left(Q^{-1} \delta Q Q^{-1} \nabla_\nu Q Q^{-1} \nabla_\lambda Q \right) \\ &= \frac{ik}{4\pi} \int d^2r \text{Tr} \left(Q^{-1} \delta Q [Q^{-1} \nabla_x Q, Q^{-1} \nabla_y Q] \right). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Поэтому фактическое значение члена Весса—Зумино определяется только физическими значениями Q при $\tau = 1$ с точностью до константы. Эта константа не изменяется при малых вариациях Q вне физического двумерного пространства, но может принимать различные значения для топологических разных продолжений Q в третьем измерении. Такие неэквивалентные продолжения классифицируются третьей гомотопической группой $\pi_3(U) = \mathbb{Z}$. Для любых двух продолжений Q значения члена Весса—Зумино отличаются на целое кратное $2\pi ik$. Таким образом, теория с членом Весса—Зумино хорошо определена при любом целом значении k .

Включение вихрей в теорию с членом Весса—Зумино представляет определенную трудность. Чтобы избавиться от сингулярности в центре вихря, мы должны исключить малую область вихревого ядра из физического пространства сигма-модели. При этом появляется граница вокруг этой области, причем матрица Q не остается постоянной вдоль этой границы. В результате физическое пространство не может быть компактифицировано в двумерную сферу, поэтому конструкция члена Весса—Зумино, использующая продолжение в третье измерение, становится плохо определенной.

Наивная попытка преодолеть эту трудность может основываться на использовании локального двумерного представления члена Весса—Зумино [290]. Как отмечалось выше, фактически член Весса—Зумино зависит только от значений Q в физическом пространстве. Для любой явной параметризации унитарной матрицы Q набором N^2 координат ψ_i член Весса—Зумино можно записать в виде двумерного интеграла от соответствующей антисимметричной дифференциальной формы λ_{ij} :

$$S_{\text{WZ}}[Q] = ik \epsilon_{\mu\nu} \int d^2r \lambda_{ij}[\psi(\mathbf{r})] \nabla_\mu \psi_i \nabla_\nu \psi_j. \quad (5.96)$$

В таком локальном представлении можно проинтегрировать дифференциальную форму по конечной области физического пространства с границей. Однако эта конструкция неудовлетворительна, поскольку она нарушает глобальную калибровочную симметрию. Действие

Весса—Зумино (5.94) обладает явной инвариантностью относительно глобального преобразования $Q \mapsto U_L Q U_R$, параметризованного двумя постоянными в пространстве унитарными матрицами $U_{L,R}$. При этом плотность действия Весса—Зумино (5.96), не инвариантна при таком вращении полей. Вместо этого, λ_{ij} преобразуется по закону

$$\lambda_{ij} \mapsto \lambda_{ij} + \frac{\partial \beta_j}{\partial \psi_i} - \frac{\partial \beta_i}{\partial \psi_j}, \quad (5.97)$$

где набор функций $\beta(\psi)$ содержит информацию об U_L и U_R . Локальное выражение для члена Весса—Зумино изменяется на интеграл от полной производной:

$$S_{WZ} \mapsto S_{WZ} + 2ik \epsilon_{\mu\nu} \int d^2r \nabla_\mu (\beta_j \nabla_\nu \psi_j). \quad (5.98)$$

Если модель рассматривается на многообразии без границы, такой интеграл зануляется, поэтому член Весса—Зумино действительно инвариантен при калибровочных преобразованиях. Если, однако, интегрирование в реальном пространстве выполняется по ограниченной области, то интеграл (5.98) дает циркуляцию $\beta_j \nabla \psi_j$ вдоль границы и может не обратиться в ноль. Это означает нарушение калибровочной симметрии на границе.

Чтобы лучше понять граничные эффекты в теории Весса—Зумино, рассмотрим задачу о фермионах с беспорядком, которая сводится к сигма-модели класса АIII с членом Весса—Зумино. Типичным примером такой системы могут быть дираковские фермионы в случайном векторном потенциале. Гамильтониан этой задачи имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y + a \\ p_x + ip_y + a^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.99)$$

Здесь a представляет собой случайную комплексную матрицу, действующую в некотором дополнительном пространстве, например долин (подобную ситуацию мы рассматривали в разделе 3.5.1). Единственной симметрией гамильтониана является киральная симметрия $H = -\sigma_z H \sigma_z$. Поскольку спектр гамильтониана не ограничен снизу, представляется невозможным ввести граничные условия (создать классически запрещенную область для безмассовых дираковских фермионов), сохраняя киральную симметрию. Чтобы смоделировать отверстие в образце, необходимо добавить дополнительный массовый член $m\sigma_z$ и рассмотреть предел большого m в запрещенной области (именно так выводилась сигма-модель в разделе 2.2). Подобный член явно нарушает киральную симметрию внутри запрещенной области, а значит и на ее границе. В соответствующей сигма-модели матрица Q на границе отверстия будет ограничена на многообразии $\mathcal{M}_A = U(N)/U(N/2) \times U(N/2)$ обычного унитарного класса А. Такое граничное условие сохранит только диагональную часть глобальной калибровочной симметрии $U_L = U_R^{-1}$. Это также означает отсутствие вихревых возбуждений внутри отверстия, поскольку многообразие \mathcal{M}_A односвязно. Таким образом, мы видим, что ультрафиолетовая регуляризация (создание малого отверстия), необходимая для введения вихря в сигма-модель, нарушает киральную симметрию и, на самом деле, делает создание вихрей невозможным. Мы заключаем, что вихри несовместимы с членом Весса—Зумино в действии класса АIII.

Модель безмассовых дираковских фермионов в произвольном магнитном поле, описываемая гамильтонианом (5.99), точно решается. Константа связи, характеризующая силу

случайного векторного потенциала, в точности маргинальна, поэтому модель обладает целой линией фиксированных точек [91; 92; 94; 133; 134]. Замечательным свойством этой задачи является то, что система никогда не локализуется, даже при очень сильном беспорядке. В частности, проводимость в точности равна² $ne^2/\pi h$ для беспорядка произвольной силы, как было показано в разделе 2.1.1. Поэтому отсутствие вихревого вклада и связанных с ним локализационных поправок в соответствующей сигма-модели согласуется с известным точным решением исходной фермионной задачи.

Проиллюстрируем несовместимость вихрей и члена Весса—Зумино более явным образом. Построим такое расширение многообразия сигма-модели, что теория будет хорошо определена внутри вихревого ядра и, в то же время, сохранит все симметрии. Увеличим размер матрицы Q на одну строку и один столбец так, что группа $U(N)$ естественно вложится в $SU(N+1)$. Мы также введем массу M , которая будет подавлять дополнительные степени свободы вдали от вихревого ядра. Это приводит к следующему действию для расширенной специальной унитарной матрицы \underline{Q} :

$$S[\underline{Q}] = - \int \frac{d^2r}{8\pi} \left[\sigma \text{Tr}(\underline{Q}^{-1} \nabla \underline{Q})^2 + M^2 \text{Tr}(\underline{Q} R \underline{Q}^{-1} R) + \frac{c - \sigma}{4} (\text{Tr} R \underline{Q}^{-1} \nabla \underline{Q})^2 \right] + S_{\text{WZ}}[\underline{Q}]. \quad (5.100)$$

Здесь введена матрица

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{N \times N} \end{pmatrix}, \quad (5.101)$$

чтобы выделить недиагональные элементы в первой строке и первом столбце матрицы \underline{Q} . Именно эти элементы приобретают массу за счет второго члена в действии (5.100).

Вдали от вихрей матрица \underline{Q} содержит только мягкие моды и принимает вид

$$\underline{Q}_{\text{soft}} = \begin{pmatrix} \det Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}. \quad (5.102)$$

Второй блок в этой матрице — не что иное, как исходная унитарная матрица Q , а в верхнем правом элементе просто находится число, которое фиксирует полный детерминант $\det \underline{Q} = 1$. С матрицей \underline{Q} такого вида действие (5.100) совпадает со стандартным действием сигма-модели класса АШ (5.3) с дополнительным членом Весса—Зумино. В то же время, группа $SU(N+1)$ односвязна, поэтому вихри являются топологически тривиальными конфигурациями с точки зрения расширенной модели. Внутри вихревого ядра массивные элементы \underline{Q} становятся ненулевыми и обеспечивают общую гладкую конфигурацию поля. Размер ядра определяется конкуренцией между ростом действия из-за массы M и снижением действия за счет исключения слишком больших градиентов. Это позволяет оценить размер ядра $\sim \sqrt{\sigma}/M$.

В рамках расширенной модели мы можем исследовать внутреннюю структуру вихревого ядра. Предположим для простоты, что вихрь помещен в первую реплику, то есть соответствующий единичный вектор $|p\rangle = \{1, 0, \dots, 0\}$. Вся конфигурация вихря, включая ядро, будет

²Здесь n — количество долин, перемешанных случайным неабелевым векторным потенциалом в гамильтониане (5.99).

сконцентрирована в верхнем левом 2×2 блоке матрицы \underline{Q} . Этот блок сам по себе является матрицей $SU(2)$, которую мы можем явным образом параметризовать тремя углами:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{-i\phi} & i \sin \theta e^{-i\chi} & 0 \\ i \sin \theta e^{i\chi} & \cos \theta e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{N-1 \times N-1} \end{pmatrix}. \quad (5.103)$$

Вдали от вихревого ядра угол θ обращается в ноль, а матрица \underline{Q} приобретает вид (5.102) и не зависит от χ . При обходе вокруг вихря угол ϕ поворачивается на 2π . В центре вихря $\theta = \pi/2$, поэтому \underline{Q} не зависит от ϕ , но явно зависит от χ . Используя представление (5.103), мы можем минимизировать действие (5.100). Симметрия вихря позволяет нам зафиксировать ϕ равным полярному углу, а χ — произвольной постоянной. Минимум действия достигается выбором подходящей зависимости $\theta(r)$. Мы видим, что вихревое ядро приобретает внутреннюю $U(1)$ степень свободы χ , которая не имеет аналога в исходной сигма-модели и возникает только в расширенной теории.

Член Весса—Зумино обеспечивает мнимую часть действия. Мы можем вычислить эту мнимую часть, даже не зная в явном виде зависимость $\theta(r)$. Рассмотрим вариацию члена Весса—Зумино по постоянному в пространстве углу χ . Подставляя (5.103) в (5.95), получим

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{WZ}}[\underline{Q}] &= \frac{ik\delta\chi}{2\pi} \int d^2r \sin 2\theta (\nabla_x \theta \nabla_y \phi - \nabla_y \theta \nabla_x \phi) \\ &= ik\delta\chi \left[\sin^2 \theta(r = \infty) - \sin^2 \theta(r = 0) \right] = -ik\delta\chi. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Таким образом, значение члена Весса—Зумино явно зависит от χ .

Мнимая часть действия приводит к тому, что статистический вес (летучесть) вихря становится комплексным. Параметр χ , который определяет фазу комплексной летучести, является внутренней степенью свободы вихревого ядра. Вычисляя статистическую сумму системы, мы должны проинтегрировать по χ в каждом вихре. Если действие содержит член Весса—Зумино, то есть $k \neq 0$, такое интегрирование будет в точности занулять статистический вес каждого вихря, делая летучесть эффективно нулевой. Это еще раз демонстрирует, что модель Весса—Зумино класса АIII не допускает вихревых возбуждений.

5.7.2 \mathbb{Z}_2 топологический член в классе СИ

Теперь рассмотрим систему симплектического кирального класса СИ. Сигма-модель этого класса определена на множестве симметричных унитарных матриц $U(N)/O(N)$, см. таблицу 2. Такое многообразие допускает топологический член типа \mathbb{Z}_2 , аналогично обычному симплектическому классу АII, который мы рассмотрели в разделе 2.2. Это обеспечивается гомотопической группой $\pi_2(U/O) = \mathbb{Z}_2$. Сигма-модель кирального симплектического класса СИ можно реализовать, например, в системе с неупорядоченным безмассовым дираковским

гамильтонианом [289; 291] вида (5.1), в котором

$$h = \begin{pmatrix} p_x - ip_y & a \\ -a^* & p_x + ip_y \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

Здесь a является случайной $n \times n$ комплексной матрицей. Блок h подчиняется симплектическому условию $h^* = \tau_y h \tau_y$. Иными словами, h является $n \times n$ матрицей вещественных кватернионов, поэтому гамильтониан, построенный из блоков h , действительно принадлежит классу СИ.

Вывод сигма-модели для неупорядоченной системы с гамильтонианом (5.1), (5.105) можно проделать по аналогии с классом АИ, как объяснялось в разделе 2.2. Действие имеет стандартный вид (5.3) с дополнительным \mathbb{Z}_2 топологическим членом, в случае когда n нечетно. Такой топологический член можно представить явно с помощью конструкции Весса—Зумино (5.94). А именно, если продолжить матрицу Q в третье измерение τ согласно уравнению (5.93), то выражение (5.94) с $k = n$ будет играть роль \mathbb{Z}_2 топологического члена. Поскольку вторая гомотопическая группа π_2 нетривиальна, продолжение (5.93) не всегда возможно в пределах многообразия класса СИ. На самом деле, такое продолжение возможно только для топологически тривиальных конфигураций $Q(\mathbf{r})$. Чтобы применить конструкцию Весса—Зумино к произвольной конфигурации поля, мы будем считать, что вне физического двумерного пространства, то есть при $\tau \neq 1$, матрица Q может быть любой унитарной матрицей $U(N)$, в то время как при $\tau = 1$, она должна быть симметричной унитарной матрицей, принадлежащей многообразию $U(N)/O(N)$ класса СИ.

Аналогично классу АИИ, значение члена Весса—Зумино определяется только физической частью Q при $\tau = 1$, то есть симметричной унитарной матрицей. Вариация действия Весса—Зумино по Q дается уравнением (5.95). Используя свойство $Q = Q^T$ и транспонируя аргумент следа в последней строке (5.95), мы видим, что вариация меняет знак и, следовательно, равна нулю. Это доказывает, что такой член Весса—Зумино в классе СИ обладает главным свойством топологического θ -члена: он зависит только от топологии конфигурации поля и принимает дискретные значения.

Помимо топологически тривиальных конфигураций, существует еще только один дополнительный нетривиальный сектор. Иными словами, гомотопическая группа $\pi_2 = \mathbb{Z}_2$ подразумевает существование локализованных топологических возбуждений типа \mathbb{Z}_2 инстантонов. Эти возбуждения являются своими собственными античастицами. Конфигурация с двумя такими инстантонами топологически тривиальна, то есть их можно подвести близко друг к другу и устранить подходящим непрерывным преобразованием Q . Чтобы доказать, что член Весса—Зумино (5.94), который принимает постоянное значение внутри каждого топологического сектора, может эти сектора различать, достаточно вычислить его для одной конкретной нетривиальной конфигурации.

Рассмотрим минимальную модель³ $Q \in U(2)/O(2)$. На самом деле, достаточно рассмотреть еще меньшее многообразие $SU(2)/O(2)$, поскольку член Весса—Зумино (5.94) не может

³На самом деле, в этом случае гомотопическая группа $\pi_2 = \mathbb{Z}$ богаче, чем в общем случае $N > 2$, и теория обладает обычными \mathbb{Z} инстантонами, как, например, векторная $O(3)$ сигма-модель.

зависеть от детерминанта Q . Мы параметризуем матрицу $SU(2)$ тремя углами следующим образом:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \chi e^{-i\phi} & i \sin \theta \cos \chi + \sin \chi \\ i \sin \theta \cos \chi - \sin \chi & \cos \theta \cos \chi e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (5.106)$$

Условие симметричности $Q = Q^T$ фиксирует $\chi = 0$ в физическом пространстве. Для инстантона мы можем положить ϕ равным полярному углу и считать, что θ зависит только от радиальной координаты и непрерывно изменяется от $-\pi/2$ в центре инстантона до $\pi/2$ на бесконечности. Продолжая в третье измерение, мы предположим, что χ изменяется от 0 при $\tau = 1$ до $\pi/2$ или $-\pi/2$ при $\tau = 0$. Любое из этих двух значений однозначно фиксирует всю матрицу $Q(\tau = 0)$.

Действие Весса—Зумино (5.94) можно явно записать в параметризация (5.106) в виде

$$S_{WZ}[Q] = \frac{ik}{\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \int d^2r d\tau \cos \theta \cos^2 \chi \nabla_\mu \theta \nabla_\nu \phi \nabla_\lambda \chi. \quad (5.107)$$

Для инстантонной конфигурации параметры θ и χ зависят от r и τ соответственно, в то время как ϕ равно полярному углу. Вычисляя интеграл, мы получим

$$S_{WZ}[Q] = \mp \frac{i\pi k}{2} \left[\sin \theta(r = \infty) - \sin \theta(r = 0) \right] = \mp i\pi k. \quad (5.108)$$

Два знака в этом выражении соответствуют двум возможным продолжениям $\chi(\tau = 0) = \pm\pi/2$. Для нечетного k действие инстантона приобретает нетривиальную мнимую часть. Таким образом, член Весса—Зумино действительно играет роль θ -члена и равен топологическому заряду конфигурации поля, умноженному на $i\pi k$.

После того как явная форма \mathbb{Z}_2 θ -члена установлена, мы можем обсудить его взаимодействие с вихрями. Мы уже показали, что член Весса—Зумино в сигма-модели класса АIII подавляет вихревые возбуждения. Аналогичное рассуждение можно применить и к классу СИ с θ -членом, поскольку он имеет ту же структуру, что и член Весса—Зумино. Единственное отличие для класса СИ состоит в дополнительном ограничении, связанном с симметрией по обращению времени. А именно, статистический вес любой полевой конфигурации сигма-модели класса СИ должен быть вещественным. Иными словами, мнимая часть действия сигма-модели должна быть целым кратным $i\pi$. Именно θ -член обеспечивает эту мнимую часть. Рассмотрим расширение модели из $U(N)/O(N)$ до $SU(N+1)/O(N+1)$. Такое расширение дается тем же уравнением (5.100), что и в классе АIII, с дополнительным ограничением $Q = Q^T$. Вихревая конфигурация в этой расширенной модели имеет вид (5.103), где угол χ может принимать только значения 0 или π . Таким образом, внутренний $U(1)$ параметр, связанный с вихрем в классе АIII, становится \mathbb{Z}_2 степенью свободы в классе СИ. Две вихревые конфигурации с $\chi = 0$ и $\chi = \pi$ отличаются вкладом $i\pi$ в действие, как следует из формулы (5.104). Суммирование по двум значениям этой внутренней степени свободы эффективно сокращает вклад вихря в полную статистическую сумму.

Вышеприведенное рассуждение было основано на конкретной форме расширенной модели (5.100), описывающей вихревое ядро. На самом деле, мы можем снять это ограничение и показать, что вихрь обладает внутренней \mathbb{Z}_2 степенью свободы, не предполагая какой-либо

конкретной структуры ядра. Рассмотрим вихрь в сигма-модели класса СII. Мы полагаем, что некоторые дополнительные массивные степени свободы становятся важны в ядре вихря и, после того как они учтены, конфигурация поля становится непрерывной. Расширенная модель должна обладать симметрией по обращению времени, характерной для класса СII. Следовательно, статистический вес расширенной модели вещественный, а действие вещественно с точностью до целого кратного $i\pi$. Теперь создадим небольшой инстантон вдали от центра вихря. Это изменит мнимую часть действия на π . В рамках расширенной теории, мы можем поднести инстантон близко к центру вихря и «спрятать» его внутри ядра, делая только непрерывные преобразования поля. Поскольку мнимая часть действия принимает дискретные значения, такое непрерывное преобразование ее не изменит. Таким образом мы продемонстрировали существование двух топологически различных вихревых решений в расширенной теории с противоположными знаками статистического веса. Поскольку никакого другого отличия (в области вне ядра вихря) между этими двумя решениями нет, вещественные части их действий должны быть равны. Это еще раз показывает, что суммарный статистический вес вихревой конфигурации равен нулю, если действие исходной сигма-модели содержит \mathbb{Z}_2 топологический член.

Подводя итог, дополнительные топологические члены в сигма-модели классов АIII и СII подавляют образование вихрей и тем самым препятствуют локализации, основанной на механизме БКТ.

5.8 Заключительные комментарии

Сделаем еще несколько общих замечаний о предложенном в этой главе механизме локализации в киральных металлах.

1. Было бы очень интересно численно исследовать переход металл-изолятор в киральных классах и связанное с ним критическое поведение. На данный момент существует очень мало работ на эту тему, хотя локализация в обычных классах симметрии (например, переход металл-изолятор в симплектическом классе, переход между плато квантового эффекта Холла, обычный переход Андерсона в ортогональном классе в трехмерных образцах и т.п.) изучена очень детально.

Было бы также интересно попытаться численно решить сигма-модель напрямую. Это позволит убедиться в важности топологических возбуждений для локализации и проверить наши предсказания. Такой подход может быть реализован в рамках суперсимметричной версии сигма-модели. Грассмановы переменные можно проинтегрировать аналитически [292], после чего модель вполне пригодна для численного счета. При этом пространство должно быть дискретизовано, а значит вихри смогут возникать в такой модели естественным образом.

2. Остается неизученным вопрос о дуальной теории типа синус-Гордона, аналогичной той, которая представлена в разделе 5.6 для класса АIII, в двух других киральных классах BDI и CII. Поскольку многообразие сигма-модели в этих классах не имеет групповой структуры, для построения такой дуальной теории нужно будет стартовать с более общей модели, определенной на группе симметрии исходного многообразия. Такая модель будет, помимо необходимых, содержать также излишние калибровочные степени свободы и иметь форму теории Янга–Миллса.
3. Возникает естественный вопрос о переходе металл-изолятор в киральных классах в трехмерном случае. Мы ожидаем, что и этот переход также будет обусловлен топологическими возбуждениями в виде петель вихревых линий.
4. Из всех классов симметрии существует еще два, кроме киральных, многообразия которых неодносвязны. Это симплектические классы AII и DIII (обычный и сверхпроводящий) с фундаментальной группой $\pi_1 = \mathbb{Z}_2$. В таких классах также можно создавать вихри. Существенная разница заключается в том, что в этих двух классах есть обычные эффекты квантовой интерференции — слабая антилокализация. Поэтому, в отличие от киральных классов, вихри в классах AII и DIII не будут единственным источником квантовых поправок. Тем не менее наличие вихрей может существенно изменить поведение системы вблизи перехода металл-изолятор. Например, существует гипотеза [293], что именно благодаря вихрям происходит локализация в симплектическом классе при сильном беспорядке. И напротив, если вихри исключить (при помощи очень специального типа примесей), локализации не будет даже при очень сильном беспорядке. Такая модель может использоваться для описания критического состояния в переходе между плато квантового спин-Холл эффекта [293].
5. Эффекты взаимодействия играют важную роль в низкоразмерных системах и могут сильно повлиять на природу перехода металл-изолятор. Например, взаимодействующие двумерные дираковские фермионы могут испытывать моттовский переход [42; 294]. Было бы очень интересно исследовать взаимное влияние взаимодействия и вихрей в системах с киральной симметрией.

Глава 6

Плотность состояний в киральном металле с вакансиями

В предыдущей главе мы подробно изучили транспортные свойства киральных металлов при помощи нелинейной сигма-модели. Несмотря на то, что обычные поправки слабой локализации в таких системах отсутствуют во все порядках по обратной проводимости, мы показали, что пертурбативные эффекты, связанные с вихрями в сигма-модели, могут приводить к локализации и переходу металл-изолятор по механизму, аналогичному БКТ переходу. Важной особенностью киральных классов, ответственной как за отсутствие пертурбативных поправок, так и за возможность создания вихрей, является особая $U(1)$ степень свободы, соответствующая фазе детерминанта матрицы Q .

В этой главе мы рассмотрим другое проявление этой специальной степени свободы в задаче о плотности состояний в киральном металле. Мы уже упоминали ранее в разделе 2.1, что плотность состояний в киральном металле расходится при нулевой энергии [72; 73]. Такая особенность связана с интерференционными эффектами, аналогичными обычной слабой локализации в стандартных классах Вигнера—Дайсона. Несколько упрощая, можно сказать, что сингулярная положительная поправка к плотности состояний в киральном металле компенсируется точно такой же отрицательной локализирующей поправкой к коэффициенту диффузии. Поэтому проводимость, которая определяется произведением этих двух величин, не изменяется на пертурбативном уровне. Поправки к плотности состояний в киральном металле связаны с неограниченным ростом параметра s в действии сигма-модели (5.3) в процессе перенормировки (5.27).

Особый случай представляют киральные металлы с вакансиями. Как уже подробно обсуждалось в разделах 2.1 и 4.2, вакансии не нарушают киральную симметрию, но при этом являются очень специальным типом беспорядка, который может приводить к необычным критическим явлениям в графене. В этом разделе мы изучим общую задачу о плотности состояний в киральном металле с вакансиями. Оказывается, что при таком беспорядке результаты Гаде и Вегнера [72; 73] неприменимы. Вакансии кардинально меняют характер интерференционных процессов вблизи центра зоны (дираковской точки в случае графена), что приводит к еще большему росту плотности состояний и уменьшению длины локализации по сравнению с другими типами кирального беспорядка. Эти эффекты тесно связаны с конечной плотностью нулевых мод, возникающих в двухподрешеточных моделях с неодинаковым количеством узлов в подрешетках. Мы построим нелинейную сигма-модель для кирального

металла с вакансиями и продемонстрируем, как наличие нулевых мод влияет на плотность состояний.

6.1 Модель кирального металла

В качестве прототипа кирального металла будем рассматривать модель сильной связи на двухслойной квадратной решетке, как показано на рис. 6.1. Две идентичные двумерные квадратные решетки описываются моделью с амплитудой прыжка между ближайшими соседями t . Эти решетки расположены точно одна над другой, и каждый узел первой решетки соединен с эквивалентным узлом второй решетки связью со средней амплитудой прыжка t' . Такая модель естественным образом разбивается на две подрешетки, которые соответствуют раскрашиванию узлов каждого слоя в «шахматном» порядке, причем в двух слоях эта раскраска противоположна, см. рис. 6.1. Обозначим подрешетки, как и в графене, А и В. Поскольку все связи соединяют узлы из разных подрешеток, модель обладает очевидной киральной симметрией. Добавим в эту модель два типа беспорядка. Во-первых, будем считать, что амплитуды вертикальных связей между слоями имеют небольшие случайные комплексные вариации и равны $t' + h(\mathbf{r})$. Во-вторых, добавим случайно распределенные вакансии со средними плотностями $n_{A,B}$ в двух подрешетках.

Элементарная ячейка двухслойной квадратной решетки содержит два узла: по одному в каждом слое. Эти узлы относятся к двум разным подрешеткам, причем индексы подрешеток чередуются в смежных ячейках. Мы будем использовать киральное представление, когда первая/вторая компонента волновой функции всегда относится к подрешетке А/В. В таком представлении гамильтониан модели сильной связи имеет вид $H = H_0 + H_{\text{dis}}$, где

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & f(\mathbf{p}) \\ f^\dagger(\mathbf{p}) & 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{p}) = t' - t[\cos(p_x a) + \cos(p_y a)], \quad H_{\text{dis}} = \begin{pmatrix} V_A(\mathbf{r}) & h(\mathbf{r}) \\ h^*(\mathbf{r}) & V_B(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Здесь a обозначает период решетки, а квазиимпульс лежит в пределах первой зоны Бриллюэна, $-\pi/a < p_{x,y} < \pi/a$. Вакансии, как и в разделе 4.2, моделируются с помощью внешнего потенциала V , который приложен к случайно выбранным узлам. Эти внешние потенциалы собраны в функции $V_{A,B}$. Они стоят на диагонали в пространстве подрешеток и явным образом нарушают киральную симметрию. Позже мы возьмем предел $V \rightarrow \infty$, что сделает соответствующие узлы недоступными для электронов и восстановит киральную симметрию.

Предположим, что t' немного меньше $2t$. Благодаря этому предположению состояния с малой энергией оказываются близко к центру зоны Бриллюэна. Это позволяет нам разложить гамильтониан H_0 по малым импульсам до второго порядка

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi(p) = \frac{p^2}{2m} - \mu, \quad m = \frac{1}{ta^2}, \quad \mu = 2t - t'. \quad (6.2)$$

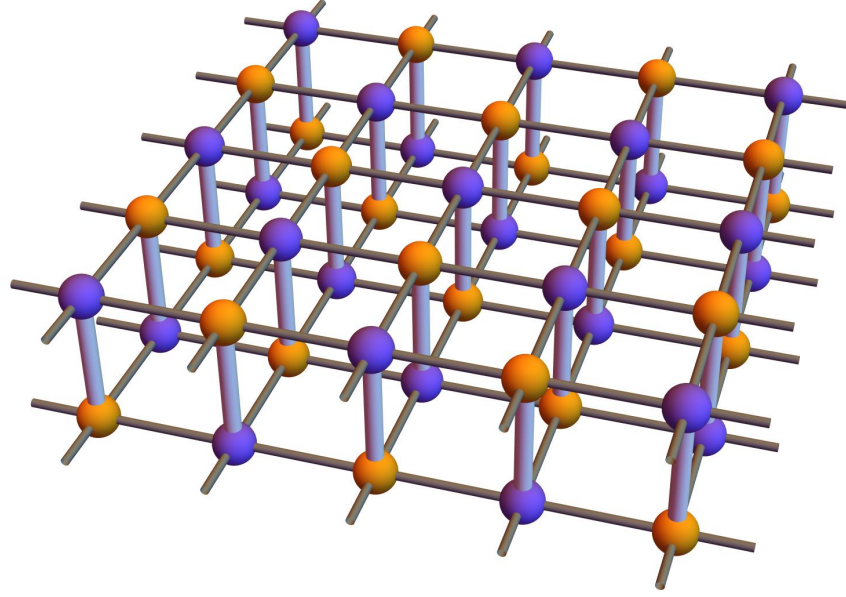


Рис. 6.1 — Фрагмент двухслойной квадратной решетки. Цвета узлов соответствуют двум подрешеткам. В рассматриваемой нами модели сильной связи предполагается, что амплитуда прыжков между ближайшими соседями внутри слоев t отличается от средней амплитуды вертикальных прыжков между слоями t' . Мы также предполагаем, что амплитуда вертикальных связей между слоями имеет небольшую случайную комплексную часть $h(\mathbf{r})$.

Для случайной части амплитуды прыжка между подрешетками мы предполагаем гауссово распределение с нулевым средним и корреляционной функцией

$$\langle h(\mathbf{r})h^*(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi\nu\tau}. \quad (6.3)$$

Здесь $\nu = m/2\pi$ — плотность состояний на уровне Ферми (в расчете на одну подзону), τ — среднее время свободного пробега за счет беспорядка на связях.

6.2 Квазиклассическое приближение

Рассмотрим эффекты беспорядка в рамках самосогласованного приближения для вакансий, как в разделе 1.2, и в борновском приближении для случайных амплитуд вертикальных связей. Такое приближение оправдано в металлическом пределе $\mu\tau \gg 1$ и обеспечивает затравочные параметры для нелинейной сигма-модели.

Поскольку концентрация вакансий в двух подрешетках может различаться, $n_A \neq n_B$, собственная энергия представляет собой двухкомпонентную диагональную матрицу $\Sigma = \text{diag}\{\Sigma_A, \Sigma_B\}$. Во втором порядке по случайной вариации амплитуды прыжка h и в первом порядке по концентрации вакансий $n_{A,B}$ компоненты собственной энергии определяются

уравнениями

$$\Sigma_A = \frac{n_A V}{1 - V g_{AA}(0)} + \frac{g_{BB}(0)}{2\pi\nu\tau}, \quad \Sigma_B = \frac{n_B V}{1 - V g_{BB}(0)} + \frac{g_{AA}(0)}{2\pi\nu\tau}. \quad (6.4)$$

Здесь $g_{AA}(0)$ и $g_{BB}(0)$ — диагональные элементы средней функции Грина в совпадающих точках.

Для заданной мацубаровской энергии¹ ϵ определим два энергетических параметра $\epsilon_{A,B} = \epsilon + i\Sigma_{A,B}$. Через эти параметры удобно выразить функцию Грина в совпадающих точках

$$g(0) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} i\epsilon_A & -\xi(p) \\ -\xi(p) & i\epsilon_B \end{pmatrix}^{-1} = - \int \frac{\nu d\xi}{\epsilon_A \epsilon_B + \xi^2} \begin{pmatrix} i\epsilon_B & \xi \\ \xi & i\epsilon_A \end{pmatrix} = - \frac{\pi\nu}{\sqrt{\epsilon_A \epsilon_B}} \begin{pmatrix} i\epsilon_B & 0 \\ 0 & i\epsilon_A \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Вместе с (6.4) это дает замкнутую систему уравнений самосогласования для $\epsilon_{A,B}$. В пределе $V \rightarrow \infty$, уравнения самосогласования принимают вид

$$\epsilon = \epsilon_A - \left(\frac{n_A}{\pi\nu} + \frac{1}{2\tau} \right) \sqrt{\frac{\epsilon_A}{\epsilon_B}}, \quad \epsilon = \epsilon_B - \left(\frac{n_B}{\pi\nu} + \frac{1}{2\tau} \right) \sqrt{\frac{\epsilon_B}{\epsilon_A}}. \quad (6.6)$$

Их решение должно удовлетворять требованию причинности, которое в мацубаровской технике означает $\text{sign } \epsilon_A = \text{sign } \epsilon_B = \text{sign } \epsilon$. Такое решение легко найти в явном виде

$$\epsilon_A = \epsilon + \left(\frac{n_A}{\pi\nu} + \frac{1}{2\tau} \right) \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} + \Delta}{\epsilon}, \quad \epsilon_B = \epsilon + \left(\frac{n_B}{\pi\nu} + \frac{1}{2\tau} \right) \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} - \Delta}{\epsilon}, \quad (6.7)$$

$$\Delta = \frac{n_A - n_B}{2\pi\nu}. \quad (6.8)$$

В рамках приближения самосогласованной T -матрицы можно вычислить среднюю плотность состояний. Она дается выражением

$$\rho = -\frac{1}{\pi} \text{Im Tr } g(0) \Big|_{i\epsilon \rightarrow E+i0} = 2\nu \text{Re} \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{\epsilon} \Big|_{i\epsilon \rightarrow E+i0} = 2\nu \left[\pi |\Delta| \delta(E) + \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{E^2}} \right]. \quad (6.9)$$

Ниже мы увидим, что такой же результат можно получить, взяв минимум действия сигма-модели.

Средняя плотность состояний показана на рис. 6.2. В этом результате для плотности состояний проявляется главная отличительная особенность беспорядка, связанного с вакансиями: при неравном количестве вакансий в двух подрешетках возникает конечная плотность нулевых мод, которая выражается дельта-функцией в формуле (6.9). Такое свойство киральных систем непосредственно следует из антидиагональной формы гамильтониана. Когда две подрешетки имеют разное количество узлов $N_A \neq N_B$, блоки в матрице (5.1) становятся прямоугольными, что приводит в точности к $|N_A - N_B|$ нулевым собственным значениям. В квазиклассическом приближении самосогласованной T -матрицы (6.9) воспроизводится именно такая средняя плотность нулевых состояний, а также возникает жёсткая щель вокруг нулевой энергии. Также обратим внимание, что параметр τ (соответствующий силе гауссового беспорядка на связях) полностью выпадает из результата для плотности состояний. В

¹В этой главе, в отличие от остального текста диссертации, ϵ соответствует мацубаровской, а не реальной энергии. Для последней мы будем использовать обозначение E .

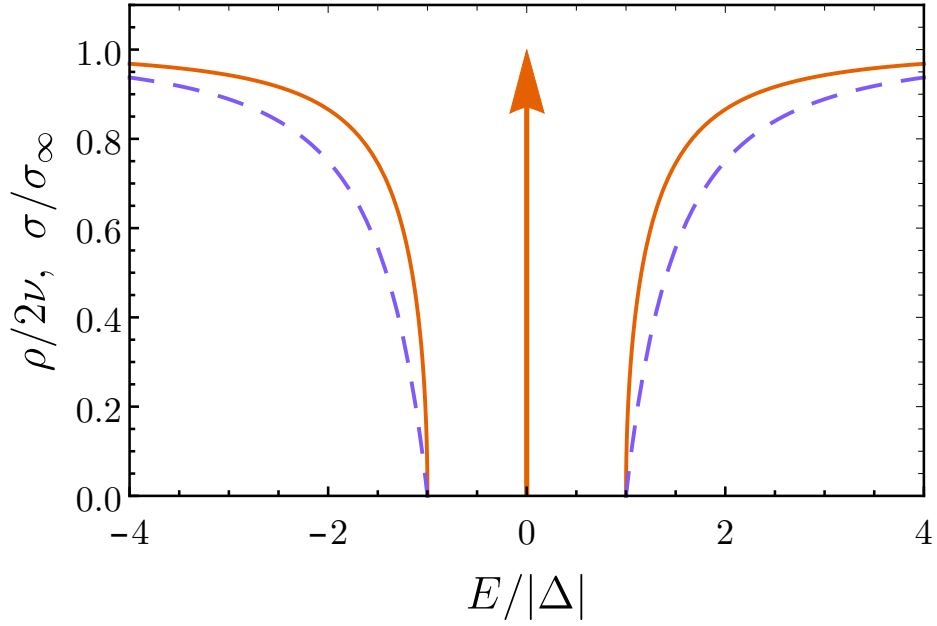


Рис. 6.2 — Квазиклассическая плотность состояний (сплошная линия) и проводимость (штриховая линия) в киральном металле с вакансиями. Средняя плотность состояний (6.9) имеет дельта-функционный пик в нуле и щель Δ по обе стороны от этого пика в несбалансированном случае $n_A \neq n_B$. Квазиклассическая проводимость (6.11) также обращается в ноль в области щели, а на больших энергиях достигает значения $\sigma_\infty = e^2 \nu v_0^2 \tau_{\text{total}}$.

сбалансированном случае $n_A = n_B = n/2$, плотность состояний постоянна и не зависит от беспорядка в квазиклассическом приближении, как и в случае обычных металлов.

Беспорядок рассеивает электроны и создает конечное время свободного пробега. Из мнимой части собственной энергии мы можем оценить скорость рассеяния

$$\frac{1}{\tau_{\text{total}}} = \frac{1}{\tau} + \frac{n}{\pi \nu}. \quad (6.10)$$

Из этого выражения следует, что беспорядок на связях будет доминирующим, если концентрация вакансий мала $n \ll \nu/\tau$. Мы будем предполагать, что это условие выполнено. Также отметим, что сечение рассеяния на вакансии равно λ_F/π , где λ_F — фермиевская длина волны.

В квазиклассическом приближении мы также можем вычислить проводимость на энергиях² $E > \Delta$. Используя формулу Кубо, получаем

$$\sigma = \frac{e^2}{2\pi m^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & p_x \\ p_x & 0 \end{pmatrix} g_R(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 & p_x \\ p_x & 0 \end{pmatrix} g_A(\mathbf{p}) \right] = e^2 \nu v_0^2 \tau_{\text{total}} (1 - \Delta^2/E^2). \quad (6.11)$$

Здесь $v_0 = \sqrt{2\mu/m}$ — скорость на ферми-поверхности. Этот результат также показан на рис. 6.2. В области щели $E < \Delta$, где отсутствуют проводящие состояния, квазиклассическая проводимость обращается в ноль. Кроме того, проводимость выражается только через полное время свободного пробега τ_{total} , определенное в (6.10). В сбалансированном случае $n_A = n_B$ щель в спектре не возникает, проводимость не зависит от энергии и принимает значение, соответствующее классической формуле Друде.

²Здесь и в дальнейшем мы будем для простоты полагать $E, \Delta > 0$.

6.3 Вывод сигма-модели

Чтобы вычислить интерференционные поправки к квазиклассической плотности состояний, мы будем, как и в предыдущей главе, использовать фермионную (компактную) репличную нелинейную сигма-модель. При наличии вакансий действие сигма-модели приобретает дополнительные члены, поэтому мы кратко изложим ее вывод. Начнем с действия для электронов

$$S = -i \int d^2r \psi^\dagger \begin{pmatrix} E + i0 - V_A(\mathbf{r}) & -\xi - h(\mathbf{r}) \\ -\xi - h^*(\mathbf{r}) & E + i0 - V_B(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \psi. \quad (6.12)$$

Здесь ψ представляет собой $2N$ -компонентный вектор грассмановых переменных. Он принадлежит N -мерному пространству реплик и также имеет структуру в пространстве подрешеток. Предполагая, что доминирующим беспорядком является случайность в амплитудах вертикальных (межслойных) прыжков, мы сначала выполним усреднение по h , считая положения вакансий, а значит и потенциалы $V_{A,B}$, фиксированными. Усреднение приводит к члену четвертой степени по фермионным полям

$$S = -i \int d^2r \psi^\dagger \begin{pmatrix} E + i0 - V_A(\mathbf{r}) & -\xi \\ -\xi & E + i0 - V_B(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \psi + \int \frac{d^2r}{2\pi\nu\tau} \text{Tr}(\psi_A \psi_A^\dagger)(\psi_B \psi_B^\dagger). \quad (6.13)$$

Этот член можно расцепить, введя интегрирование по вспомогательной комплексной матрице Q размера N . После этого взятие гауссового интеграла по ψ дает действие для Q

$$S = \frac{\pi\nu}{2\tau} \int d^2r \text{Tr} Q Q^\dagger - \mathbf{Tr} \ln \begin{pmatrix} E + i0 - V_A(\mathbf{r}) + \frac{iQ}{2\tau} & -\xi \\ -\xi & E + i0 - V_B(\mathbf{r}) + \frac{iQ^\dagger}{2\tau} \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Здесь, как и раньше, символ ' \mathbf{Tr} ' обозначает полный операторный след в пространстве реплик и подрешеток, а также в реальном пространстве.

Пренебрежем на время энергией E и потенциалом вакансий $V_{A,B}$ и найдем минимум действия. Вариация (6.14) по Q и Q^\dagger дает уравнения

$$Q^\dagger = \frac{i}{\pi\nu} g_{AA}^Q(0), \quad Q = \frac{i}{\pi\nu} g_{BB}^Q(0). \quad (6.15)$$

Здесь $g^Q(0)$ — функция Грина в совпадающих точках, вычисленная при наличии поля Q . Если матрица Q постоянна в пространстве, такую функцию Грина можно найти явно

$$g^Q(0) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} \frac{iQ}{2\tau} & -\xi \\ -\xi & \frac{iQ^\dagger}{2\tau} \end{pmatrix}^{-1} = -i\pi\nu \begin{pmatrix} Q^\dagger(QQ^\dagger)^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q(Q^\dagger Q)^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Уравнения (6.15) на минимум действия удовлетворяются любой унитарной матрицей $QQ^\dagger = Q^\dagger Q = 1$. Таким образом получается многообразие сигма-модели кирального унитарного класса АIII. Ограничивая действие (6.14) на это многообразие, получим

$$S = \mathbf{Tr} \ln g^Q - \mathbf{Tr} \ln \left[1 + g^Q \begin{pmatrix} E - V_A & 0 \\ 0 & E - V_B \end{pmatrix} \right]. \quad (6.17)$$

Раскладывая первый член по малым градиентам, находим кинетический член действия

$$S_\sigma = \frac{\pi\nu v_0^2 \tau}{4} \int d^2r \operatorname{Tr}(\nabla Q^\dagger \nabla Q). \quad (6.18)$$

Разложение второго члена в (6.17) до линейного порядка по E дает

$$S_E = -E \int d^2r \operatorname{Tr} g^Q(0) = i\pi\nu E \int d^2r \operatorname{Tr}(Q + Q^\dagger). \quad (6.19)$$

После этого остается часть действия, связанная с вакансиями,

$$S_V = -\mathbf{Tr} \ln \left[1 - g^Q \begin{pmatrix} V_A & 0 \\ 0 & V_B \end{pmatrix} \right]. \quad (6.20)$$

Усредним e^{-S_V} по распределению вакансий. Предполагая, что их концентрация мала, мы используем вириальное разложение, пренебрегая редкими событиями «столкновения» вакансий. Поскольку функция Грина g^Q экспоненциально убывает на длине свободного пробега $l = v_0\tau$, мы отбросим все вклады, где g^Q соединяет разные вакансии, и оставим только $g^Q(0)$. Для заданного набора вакансий в позициях $\{\mathbf{r}_{A,B}\}$ такое приближение дает

$$\begin{aligned} S_V &= -\sum_{\mathbf{r}_A} \ln \det [1 - g_{AA}^Q(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A)V] - \sum_{\mathbf{r}_B} \ln \det [1 - g_{BB}^Q(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_B)V] \\ &= -\sum_{\mathbf{r}_A} \ln \det [1 + i\pi\nu V Q_{\mathbf{r}_A}^\dagger] - \sum_{\mathbf{r}_B} \ln \det [1 - i\pi\nu V Q_{\mathbf{r}_B}] \\ &\xrightarrow{V \rightarrow \infty} -\sum_{\mathbf{r}_A} \ln \det Q_{\mathbf{r}_A}^\dagger - \sum_{\mathbf{r}_B} \ln \det Q_{\mathbf{r}_B}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Здесь мы использовали тождества (6.15), а в последнем выражении взяли предел $V \rightarrow \infty$ и отбросили не зависящие от Q вклады. Усреднение по пуассоновскому распределению теперь легко выполняется. В каждой ячейке решетки вероятность найти вакансию А или В равна $n_{A,B}a^2 \ll 1$. Собирая вклады отдельных ячеек в общую статистическую сумму, получаем

$$\langle e^{-S_V} \rangle = \prod_{\mathbf{r}} [1 - na^2 + n_A a^2 \det Q_{\mathbf{r}}^\dagger + n_B a^2 \det Q_{\mathbf{r}}] = \exp \int d^2r [n_A (\det Q^\dagger - 1) + n_B (\det Q - 1)]. \quad (6.22)$$

В последнем выражении мы заменили сумму по ячейками на непрерывный интеграл по \mathbf{r} . Следующие члены вириального разложения, которые учитывают редкие события, когда две или больше вакансий расположены близко в пространстве, малы по параметру $n\tau/\nu \ll 1$.

Поле сигма-модели Q медленно меняется в пространстве на длине свободного пробега l . В пределе $nl^2 \gg 1$ мы можем упростить действие, разложив его по степеням $\ln \det Q$ до второго порядка³. Это эквивалентно замене распределения Пуассона с большим параметром эффективным распределением Гаусса.

³Отметим, что предположение $nl^2 \gg 1$ совместимо с условием $n \ll \nu/\tau \sim 1/l\lambda_F$, когда $\lambda_F \ll l$.

Собирая все вклады, мы получаем действие сигма-модели в виде $S = S_\sigma + S_E + S_V$, где

$$S_\sigma = \int \frac{d^2r}{8\pi} \left[\sigma \text{Tr}(\nabla Q^\dagger \nabla Q) - c (\text{Tr} Q^\dagger \nabla Q)^2 \right], \quad (6.23a)$$

$$S_E = i\pi\nu E \int d^2r \text{Tr}(Q^\dagger + Q), \quad (6.23b)$$

$$S_V = \int d^2r \left[2\pi\nu\Delta \ln \det Q - \frac{n}{2} (\ln \det Q)^2 \right]. \quad (6.23c)$$

В кинетической части действия S_σ параметр $\sigma = 2\pi^2\nu v_0^2 \tau_{\text{total}}$ соответствует безразмерной квазиклассической проводимости в единицах $e^2/\pi h$, см. (6.18) и (6.11). Член Гаде (второе слагаемое в S_σ) не получается из квазиклассической теории. Мы добавили его, потому что он, в любом случае, сгенерируется в процессе перенормировки сигма-модели. На данном этапе можно считать, что затравочное значение c равно нулю. Средняя плотность состояний в рамках репличной сигма-модели определяется интегралом

$$\rho(E) = -\text{Im} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{\pi N} \frac{\partial}{\partial E} \int DQ e^{-S[Q]}. \quad (6.24)$$

Усреднение по случайному распределению вакансий привело к третьему члену действия S_V , в котором n — полная концентрация вакансий, а Δ — дисбаланс вакансий между подрешетками, см. (6.8). Такой член ранее почти не рассматривался в сигма-модели, поэтому мы дадим некоторые дополнительные пояснения. Мысленно разобьем образец на гранулы, размер которых порядка длины свободного пробега l . Каждая такая гранула содержит в среднем $N_{A,B} = n_{A,B} l^2 \gg 1$ вакансий в двух подрешетках. Матрица Q медленно меняется на длине l , поэтому можно считать, что внутри каждой гранулы Q постоянна. Если мы забудем о градиентных членах S_σ , отдельные гранулы окажутся не скоррелированы, и каждую из них можно будет описывать нульмерной сигма-моделью. Такая ситуация рассматривалась в работах [280; 281], посвященных задаче о спектре случайных киральных матриц с дисбалансом и нулевыми уровнями. Было показано, что фиксированный дисбаланс приводит к дополнительному члену $(N_A - N_B) \ln \det Q$ в действии нульмерной сигма-модели. Это не что иное, как первый член (6.23c), проинтегрированный по области l^2 . Таким образом, параметр Δ играет роль средней плотности дисбаланса. Фактическое локальное значение дисбаланса (в области размера l) испытывает мезоскопические флуктуации благодаря случайному расположению вакансий $\langle (N_A - N_B)^2 \rangle^{1/2} = nl^2$. Эти флуктуации учитываются вторым членом в (6.23c).

При выводе сигма-модели мы использовали беспорядок $h(\mathbf{r})$ на связях. На самом деле, такая же сигма-модель может быть получена и в случае, когда единственным беспорядком в системе являются вакансии. Нужно сделать лишь одно существенное предположение о том, что типичное расстояние между вакансиями велико по сравнению с фермиевской длиной волны $n\lambda_F^2 \ll 1$. Этого условия достаточно, чтобы обеспечить большое значение безразмерной проводимости, а также для вириального разложения S_V . Однако промежуточные шаги вывода сигма-модели будут в таком случае гораздо сложнее. В частности, преобразование Хаббарда—Стратоновича, нужно будет заменить на более общее преобразование Фурье функции матричного аргумента. Для вывода сигма-модели можно также использовать альтернативный метод супербозонизации [295—297], который приводит к такому же результату.

Сделаем еще одно замечание о симметрии действия сигма-модели. Кинетическая часть действия S_σ полностью инвариантна относительно глобальных левых и правых вращений $Q \mapsto U_L^\dagger Q U_R$ с любыми постоянными в пространстве унитарными матрицами $U_{L,R}$. Эта симметрия унаследована от исходного фермионного действия (6.12). Действительно, замена переменных $\psi_{A,B} \mapsto U_{L,R} \psi_{A,B}$, $\psi_{A,B}^\dagger \mapsto \psi_{A,B}^\dagger U_{R,L}^\dagger$, оставляет действие инвариантным при условии $E = 0$ и $V_{A,B} = 0$, то есть когда киральная симметрия не нарушена. Несмотря на то, что вакансии сохраняют киральную симметрию гамильтониана, действие S_V частично нарушает полную группу $U(N) \times U(N)$ глобальной симметрии сигма-модели. Это происходит по следующей причине. Когда количество узлов в двух подрешетках отличается (например, из-за дисбаланса вакансий), количество полей ψ_A и ψ_B также разное. Хотя исходное действие (6.12) сохраняет при этом свою полную симметрию, инвариантность соответствующего функционального интеграла по ψ и ψ^\dagger может быть нарушена за счет якобиана калибровочного преобразования. Условие единичности этого якобиана сводится к $\det U_L = \det U_R$. Поэтому только преобразования, сохраняющие $\det Q$, являются истинными симметриями функционального интеграла с действием S_V . Мы делаем вывод, что вакансии эффективно понижают симметрию сигма-модели⁴ кирального унитарного класса АIII, уменьшая ее многообразие с $U(N)$ до $SU(N)$.

6.4 Нульмерный предел

Прежде чем изучать полную двумерную сигма-модель (6.23) для кирального металла с вакансиями, мы обсудим более подробно нульмерный случай. Результаты этого анализа понадобятся нам в дальнейшем при перенормировке двумерной модели. Рассмотрим образец конечного размера L при достаточно низкой энергии $E \ll \sigma/\nu L^2$, так что кинетическую часть действия S_σ можно полностью отбросить. В среднем такой образец содержит $N_{A,B} = n_{A,B} L^2 \gg 1$ вакансий в двух подрешетках. Для фиксированного значения дисбаланса $N_A - N_B$, нульмерная сигма-модель была решена точно в работах [280; 281]. Нам, в виду большой величины $N_{A,B}$, будет вполне достаточно квазиклассического решения.

Нульмерная модель описывается действием $S_E + S_V$. В образце размера L такое действие принимает вид

$$S_{0D} = -i\pi\nu EL^2 \text{Tr}(Q + Q^\dagger) - 2\pi\nu\Delta L^2 \ln \det Q - \frac{nL^2}{2} (\ln \det Q)^2. \quad (6.25)$$

В квазиклассическом приближении плотность состояний дается симметричным по репликам минимумом этого действия. Будем искать минимум в виде $Q = e^{i\phi}$. Подставляя такой анзац в действие, находим

$$S_{0D} = -2i\pi\nu L^2 N(E \cos \phi + \Delta \phi) + \frac{nL^2}{2} N^2 \phi^2. \quad (6.26)$$

⁴Совершенно аналогичное понижение симметрии будет происходить и в двух других киральных классах BDI и CII, что приведет к моделям на многообразиях $SU(2N)/\text{Sp}(2N)$ и $SU(N)/O(N)$.

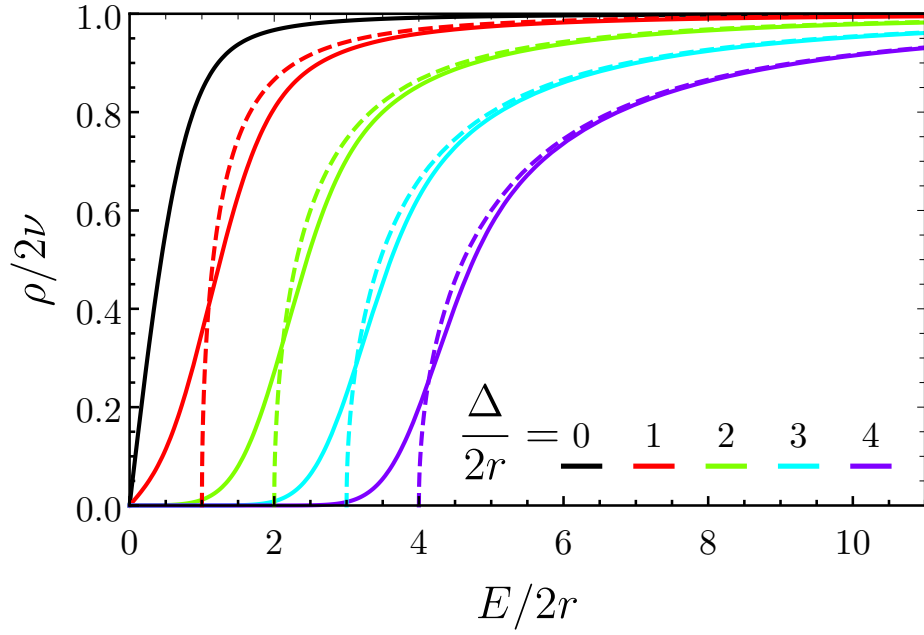


Рис. 6.3 — Средняя плотность состояний в нульмерной киральной системе с флуктуирующим дисбалансом (6.30). Кривые разных цветов соответствуют разным значениям среднего дисбаланса. Штриховые линии показывают квазиклассический результат (6.9) без учета флуктуаций.

Минимум достигается при $\phi_* = \arcsin(\Delta/E)$. Последний член в действии можно при этом не учитывать, поскольку он быстро убывает в репличном пределе $N \rightarrow 0$. В итоге, квазиклассическая плотность состояний определяется по формуле (6.24) и совпадает с результатом (6.9).

Как мы уже обсуждали, последнее слагаемое в (6.25) описывает гауссовы флуктуации дисбаланса со средним значением Δ и дисперсией

$$r = \frac{\sqrt{n}}{2\pi\nu L}. \quad (6.27)$$

В явном виде среднее по этим флуктуациям можно представить интегралом

$$e^{-S_{\text{OD}}} = \int d\tilde{\Delta} \mathcal{P}(\tilde{\Delta}) \exp \left\{ \pi\nu L^2 \text{Tr} [iE(Q + Q^\dagger) + 2\tilde{\Delta} \ln Q] \right\}, \quad (6.28)$$

где

$$\mathcal{P}(\tilde{\Delta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp \left(-\frac{(\tilde{\Delta} - \Delta)^2}{2r^2} \right). \quad (6.29)$$

Мы можем непосредственно усреднить квазиклассическую плотность состояний (6.9) по этим флуктуациям:

$$\langle \rho \rangle = 2\nu \int_{-E}^E d\tilde{\Delta} \mathcal{P}(\tilde{\Delta}) \sqrt{1 - \frac{\tilde{\Delta}^2}{E^2}} = \sqrt{\frac{2\nu E}{\pi r}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \cos^2 t \exp \left(-\frac{(E \sin t - \Delta)^2}{2r^2} \right). \quad (6.30)$$

Здесь мы отбросили дельта-функцию на нулевой энергии и сделали замену переменной интегрирования $\tilde{\Delta} = E \sin t$. Результат численного интегрирования (6.30) показан на рис. 6.3.

Проанализируем различные асимптотики этого интеграла. При нулевом среднем дисбалансе $\Delta = 0$, интеграл (6.30) можно вычислить явно

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu E}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \cos^2 t \exp\left(-\frac{E^2 \sin^2 t}{2r^2}\right) = \sqrt{2\pi} \nu y e^{-y^2} [I_0(y^2) + I_1(y^2)], \quad y = \frac{E}{2r}. \quad (6.31)$$

Эта формула описывает черную кривую на рис. 6.3. Другое упрощение происходит при низких энергиях $E \ll r$,

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu E}{r} e^{-\Delta^2/2r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \cos^2 t \exp\left(-\frac{E\Delta \sin t}{r^2}\right) = \sqrt{2\pi} \frac{\nu r}{\Delta} e^{-\Delta^2/2r^2} I_1\left(\frac{E\Delta}{r^2}\right). \quad (6.32)$$

При относительно сильном дисбалансе $\Delta \gg r$ средняя плотность состояний близка к квазиклассическому результату (6.9). Слабые флуктуации размывают границу жесткой щели в области энергий $|E - \Delta| \lesssim r$. В этом пределе интеграл (6.30) набирается в основном в окрестности верхнего предела. Мы можем сделать подстановку $t = \pi/2 - \tau$ и разложить показатель экспоненты в ряд по малым τ . Это позволяет выразить поведение средней плотности состояний в окрестности $E \approx \Delta$ через функцию параболического цилиндра

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu E}{r} \int_0^\infty d\tau \tau^2 \exp\left(-\frac{(E(1 - \tau^2/2) - \Delta)^2}{2r^2}\right) \\ &= \nu \sqrt{\frac{r}{\Delta}} e^{-c^2/4} D_{-3/2}(c) = \nu \sqrt{\frac{r}{\Delta}} \begin{cases} \sqrt{8|c|}, & c \ll -1, \\ c^{-3/2} e^{-c^2/2}, & c \gg 1, \end{cases} \quad c = \frac{\Delta - E}{r}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Асимптотики этого выражения соответствуют квазиклассической корневой зависимости над щелью и экспоненциально маленькому «хвосту» при $E < \Delta$. Кривые на рис. 6.3 иллюстрируют кроссовер от (6.31) к (6.33) с увеличением Δ . Асимптотика на низких энергиях для всех кривых дается формулой (6.32).

Для полноты укажем также среднюю амплитуду дельта-функции в (6.9) при нулевой энергии

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_{E \rightarrow 0} &= 2\pi\nu\delta(E) \int d\tilde{\Delta} |\tilde{\Delta}| \mathcal{P}(\tilde{\Delta}) = 2\pi\nu\delta(E) \left[\Delta \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}r}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} r e^{-\Delta^2/2r^2} \right] \\ &= \delta(E) \begin{cases} \sqrt{8\pi}\nu r, & \Delta \ll r, \\ 2\pi\nu\Delta, & \Delta \gg r. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.34)$$

В дальнейшем при анализе двумерной задачи нам понадобится нульмерная средняя плотность состояний при низких энергиях и малом дисбалансе $E, \Delta \ll r$. Ее можно вывести из (6.31) или (6.32)

$$\rho_{0D}(E, L) \simeq \sqrt{2\pi}\nu [2r\delta(E) + E/r]. \quad (6.35)$$

6.5 Перенормировка модели с вакансиями

Теперь рассмотрим полную двумерную задачу и учтем градиентные члены в действии. Пространственные флуктуации матрицы Q можно проинтегрировать при помощи ренорм-группы, которую мы построим в этом разделе. На последнем шаге, после того как действие перенормировано, мы сможем применить нульмерный результат из предыдущего раздела. Ренорм-группа для сигма-модели кирального класса без вакансий была построена Гаде и Вегнером [72; 73] и подробно обсуждалась в предыдущей главе. Уравнения ренорм-группы (5.26), (5.27) имеют очень простой вид в репличном пределе:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln L} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \ln L} = 1. \quad (6.36)$$

В рамках этой ренорм-группы проводимость не перенормируется во всех порядках теории возмущений по $1/\sigma \ll 1$. В то же время, новый параметр c , который стоит перед членом Гаде в (6.23a), неограниченно возрастает. Второе уравнение также является точным во всех порядках по $1/\sigma$ в киральном унитарном классе АП, который мы сейчас рассматриваем.

Новые параметры действия Δ и n , которые возникли из-за вакансий, см. (6.23c), также не перенормируются. Чтобы показать это, мы, как и раньше, разобьем матрицу $Q = e^{i\phi}U$ на фазовый множитель и специальную унитарную матрицу, $\det U = 1$. Переменные ϕ и U полностью разделяются при $E = 0$, так же как в (5.4),

$$S_\sigma + S_V = \int d^2r \left\{ \frac{\sigma}{8\pi} \text{Tr}(\nabla U^\dagger \nabla U) + N \left[\frac{\sigma + Nc}{8\pi} (\nabla \phi)^2 + 2i\pi\nu \Delta \phi + \frac{nN}{2} \phi^2 \right] \right\}. \quad (6.37)$$

Действие для ϕ по-прежнему остается квадратичным, поэтому его параметры не будут перенормироваться. В частности, как уже обсуждалось раньше, отсюда следует отсутствие пертурбативных поправок к σ в репличном пределе. Из действия (6.37) мы также видим, что концентрация вакансий n действительно обеспечивает появление массы у поля ϕ , нарушая таким образом симметрию $U(N) \mapsto SU(N)$.

Конечная энергия E полностью нарушает киральную симметрию и приводит к взаимодействию переменных ϕ и U . Чтобы найти перенормировку энергии, мы разделяем быстрые и медленные переменные⁵ $Q = Q_{\text{slow}}Q_{\text{fast}}$ и раскладываем $Q_{\text{fast}} = 1 + iW - W^2/2$. Динамика быстрой части Q_{fast} определяется действием $S_\sigma + S_V$ и может быть описана пропагатором

$$\langle W_{-\mathbf{q}} W_{\mathbf{q}} \rangle = \frac{4\pi}{\sigma q^2} \left[N - \frac{cq^2 + 4\pi n}{\sigma q^2 + N(cq^2 + 4\pi n)} \right]. \quad (6.38)$$

В левой части этого равенства стоит произведение двух матриц W , которое после усреднения оказывается пропорционально единичной матрице. При отсутствии вакансий, $n = 0$, такой пропагатор можно вывести из формул (5.22) предыдущей главы.

⁵Такое разделение возможно только в классе АП, когда многообразие сигма-модели имеет групповую структуру. В предыдущей главе мы пользовались более общим методом фонового поля, который применим к любым классам.

Поправка к энергии за счет быстрых флуктуаций W может быть выражена в виде интеграла по тонкому слою $L < q^{-1} < L + \Delta L$ в импульсном пространстве

$$\Delta E = -\frac{E}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \langle W_{-\mathbf{q}} W_{\mathbf{q}} \rangle = -\frac{E}{\sigma} \left[N - \frac{c + 4\pi n L^2}{\sigma + N(c + 4\pi n L^2)} \right] \frac{\Delta L}{L}. \quad (6.39)$$

Эту поправку можно переписать в виде уравнения ренорм-группы⁶

$$\frac{\partial \ln E}{\partial \ln L} = -\frac{1}{\sigma} \left[N - \frac{c + 4\pi n L^2}{\sigma + N(c + 4\pi n L^2)} \right] \xrightarrow{N \rightarrow 0} \frac{c + 4\pi n L^2}{\sigma^2}. \quad (6.40)$$

В последнем выражении мы взяли репличный предел.

При отсутствии вакансий ($n = 0$) это уравнение воспроизводит результат Гаде и Вегнера [72; 73]. Перенормировка энергии с учетом (6.36) дает

$$\tilde{E} = E \exp \left(\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{L}{l} \right). \quad (6.41)$$

Ренорм-группу нужно остановить на масштабе $L = L_c$, когда масса, связанная с перенормированной энергией, оказывается сравнима с градиентными членами в действии $\tilde{E} \sim \sigma/\nu L_c^2$. Из уравнения (6.41) следует оценка для этого масштаба на самых маленьких энергиях

$$L_c = l \exp \left(\sigma \sqrt{2|\ln(E\tau)|} \right). \quad (6.42)$$

Параметр L_c играет роль длины локализации. Плотность состояний находится из соотношения

$$\rho = \frac{\nu \tilde{E}}{E} \sim \frac{\sigma}{E L_c^2} \sim \frac{\nu}{E\tau} \exp \left(-2\sigma \sqrt{2|\ln(E\tau)|} \right). \quad (6.43)$$

Множитель \tilde{E}/E в самом первом выражении появляется из-за перенормировки энергии в производной в уравнении (6.24). Таким образом мы воспроизвели результат [72; 73].

Когда в образце есть вакансии, $n \neq 0$, перенормировка энергии, согласно уравнению (6.40), существенно ускоряется. Параметр c растет всего лишь как $\ln L$, в соответствии с (6.36), поэтому мы будем пренебрегать c по сравнению с nL^2 и получим перенормированную энергию

$$\tilde{E} = E e^{2\pi n L^2/\sigma^2}. \quad (6.44)$$

Поток ренорм-группы нужно остановить на критическом масштабе L_c , когда выполнится условие $\sigma/\nu L_c^2 \sim \max\{\tilde{E}, \Delta\}$. Здесь мы учли возможность того, что масса может обеспечиваться не только конечной энергией \tilde{E} , но и конечной щелью за счет среднего дисбаланса вакансий Δ . После того как ренорм-группа остановлена, мы должны применить нульмерный результат из предыдущего раздела

$$\rho(E) = \rho_{0D}(\tilde{E}, L_c) \frac{\tilde{E}}{E}. \quad (6.45)$$

⁶Строго говоря, правая часть уравнения ренорм-группы не должна явно зависеть от масштаба L . Однако этот недостаток легко исправить, если ввести безразмерный параметр плотности вакансий $s = 4\pi n L^2$. Тогда правая часть уравнения (6.40) выразится через s , и добавится еще одно ренорм-групповое уравнение $\partial \ln s / \partial \ln L = 2$.

В сбалансированном случае $\Delta = 0$ находим корреляционную длину

$$L_c \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{|\ln(E\tau)|}. \quad (6.46)$$

Используя уравнения (6.45), (6.35) и (6.27), получаем окончательный результат для плотности состояний

$$\rho(E) = \frac{\nu \tilde{E}^2}{rE} \sim \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}EL_c^3} \sim \frac{\nu}{E\tau_n} |\ln(E\tau)|^{-3/2}, \quad \tau_n = \frac{\nu\sigma}{n}. \quad (6.47)$$

Здесь мы ввели масштаб времени τ_n , связанный с вакансиями. Мы видим, что при наличии вакансий результат для плотности состояний изменяется в двух местах. Во-первых, корреляционная длина L_c расходится гораздо медленнее на малых энергиях из-за дополнительного члена в ренорм-групповом уравнении (6.40). Во-вторых, появляется дополнительный множитель $\tilde{E}/r \sim \sigma/\sqrt{n}L_c$ из формулы (6.35). Этот множитель оценивает вероятностью того, что в образце размера L_c , где дисбаланс имеет дисперсию $r \sim \sqrt{n}/L_c$, квазиклассическая щель меньше, чем \tilde{E} . Отметим, что этот второй множитель необходим, поскольку без него интеграл от плотности состояний по энергии был бы расходящимся.

Зависимость корреляционной длины (6.46) и плотности состояний (6.47) от энергии существенно отличаются от случая обычного кирального металла без вакансий (6.42), (6.43). Эти предсказания можно непосредственно проверить в численном эксперименте. Такое масштабное численное моделирование действительно было проделано для модели сильной связи на шестиугольной решетке (то есть для графена) с вакансиями [298]. Несмотря на то, что графен обладает квазиклассической проводимостью $\sigma \sim e^2/h$ и в случае вакансий относится к киральному ортогональному классу BDI (в то время как наш вывод был выполнен в предположении $\sigma \gg e^2/h$ и для класса AIII), наши результаты (6.46) и (6.47) великолепно согласуются с численными данными.

При выводе (6.47) мы воспользовались нульмерным результатом (6.35), справедливым на маленьких энергиях $\tilde{E} \ll r$. Проверим, что это условие выполняется. Действительно,

$$\frac{\tilde{E}}{r} \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}L_c} \sim |\ln(E\tau)|^{-1/2} \ll 1. \quad (6.48)$$

Теперь предположим, что в образце есть слабый средний дисбаланс Δ . Он определяет максимально допустимый масштаб корреляционной длины $L_c = \sqrt{\sigma/\nu\Delta}$. При настолько маленьких энергиях, что $\tilde{E}(L_c) < \Delta$, ренорм-группа будет останавливаться именно на этом масштабе. Плотность состояний по-прежнему определяется выражением (6.45), которое в этом случае принимает вид

$$\rho \sim \nu \left[r \delta(E) + \frac{\tilde{E}^2}{rE} \right] \sim \nu \left[\frac{\sqrt{n}}{\nu L_c} \delta(E) + E \frac{\nu L_c}{\sqrt{n}} e^{4\pi n L_c^2 / \sigma^2} \right] \propto \nu \left[\sqrt{\frac{\Delta}{\tau_n}} \delta(E) + E \sqrt{\frac{\tau_n}{\Delta}} e^{1/\tau_n \Delta} \right]. \quad (6.49)$$

Здесь амплитуда дельта-функции определена с точностью до численного множителя порядка единицы, в то время как второй член содержит аналогичный неизвестный множитель в экспоненте.

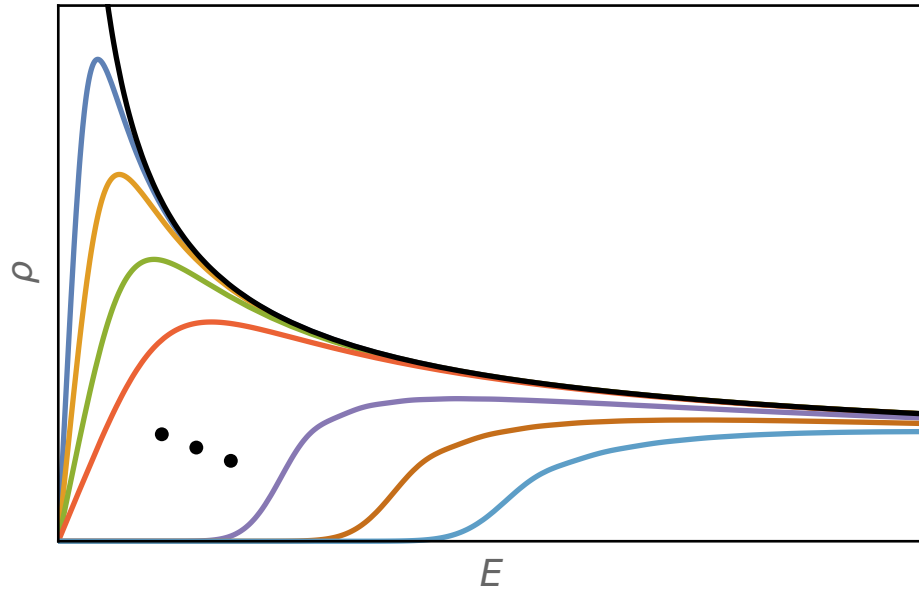


Рис. 6.4 — Схематическое изображение плотности состояний кирального металла с вакансиями как функции энергии при разных значениях дисбаланса Δ . Черная линия иллюстрирует зависимость (6.47), когда $\Delta = 0$. В случае слабого дисбаланса $\Delta\tau_n \ll 1$ быстрый линейный рост (6.49) сменяется убыванием по закону (6.47) при энергии (6.50). При сильном дисбалансе $\Delta\tau_n \gg 1$ в плотности состояний возникает щель с экспоненциально убывающим «хвостом» (6.66) внутри.

Плотность состояний растет линейно на очень маленьких энергиях (6.49). Чтобы найти предел такого линейного роста, нужно сравнить $\tilde{E}(L_c)$ с Δ . Это определяет энергию, при которой плотность состояний достигает максимума:

$$E_{\max} \propto \Delta e^{1/\tau_n \Delta}. \quad (6.50)$$

При $E > E_{\max}$ ренорм-группа останавливается за счет E . В этом случае можно пренебречь дисбалансом, поэтому плотность состояний будет определяться формулой (6.47). Кроссовер между этими режимами проиллюстрирован на рис. 6.4.

Нам нужно еще раз убедиться, что при выводе формулы (6.49) были выполнены условия применимости (6.35). Это действительно так, если

$$\frac{\Delta}{r} \sim \frac{\nu \Delta L_c}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{\tau_n \Delta} \ll 1. \quad (6.51)$$

Тем самым, мы количественно определили понятие «слабый дисбаланс». Рассмотрим теперь противоположный предел.

6.6 Предел сильного дисбаланса

В случае сильного дисбаланса $\Delta\tau_n \gg 1$ перенормировка энергии (6.44) оказывается несущественной, а плотность состояний дается квазиклассическим результатом (6.9). Редкие

флуктуации беспорядка создают экспоненциально слабый «хвост» плотности состояний при $E < \Delta$. Мы вычислим этот «хвост» методом оптимальной флуктуации. На языке сигма-модели такие эффекты описываются вкладом нестандартной седловой точки действия (инстантона), которая нарушает репличную симметрию. Задача схожа с вычислением подщелевой плотности состояний в сверхпроводнике с флуктуирующим параметром порядка [299–301].

Будем искать инстантон в виде диагональной матрицы $Q = e^{i\phi_{1,2}}$ с фазой ϕ_1 в одной реплике и ϕ_2 — в остальных $N - 1$ реплике. Полное действие $S_\sigma + S_E + S_V$ (без члена Гаде) будет иметь следующий вид в репличном пределе

$$S = \int d^2r \left\{ \frac{\sigma}{8\pi} [(\nabla\phi_1)^2 - (\nabla\phi_2)^2] + U(\phi_1) - U(\phi_2) + \frac{n}{2}(\phi_1 - \phi_2)^2 \right\}, \quad (6.52)$$

$$U(\phi) = 2i\pi\nu(\Delta\phi + E\cos\phi). \quad (6.53)$$

Предполагая, что концентрация n достаточно велика, сделаем подстановку $\phi_{1,2} = \phi \pm \chi/2$ и разложим действие в пределе маленького χ

$$S = \int d^2r \left[-\frac{\sigma}{4\pi} \chi \nabla^2 \phi + U'(\phi)\chi + \frac{n\chi^2}{2} \right]. \quad (6.54)$$

Вариация этого действия дает два связанных уравнения для ϕ и χ :

$$\frac{\sigma}{4\pi} \nabla^2 \phi - U'(\phi) = n\chi, \quad (6.55)$$

$$\frac{\sigma}{4\pi} \nabla^2 \chi - U''(\phi)\chi = 0. \quad (6.56)$$

Мы можем исключить χ и получить одно уравнение четвертого порядка на ϕ

$$\left[\frac{\sigma}{4\pi} \nabla^2 - U''(\phi) \right] \left[\frac{\sigma}{4\pi} \nabla^2 \phi - U'(\phi) \right] = 0. \quad (6.57)$$

Одно из решений этого уравнения получится, если потребовать зануления второго сомножителя. Однако это будет означать также $\chi = 0$, поэтому такое решение не нарушает репличную симметрию и воспроизводит квазиклассический результат (6.9) со щелью.

Чтобы найти другое, менее тривиальное решение (6.57), предположим, что инстантон обладает вращательной симметрией и функция ϕ зависит только от радиальной координаты r . Тогда мы можем воспользоваться замечательным тождеством [300; 301]

$$\left[\Delta^{(d)} - F'(\phi) \right] \left[\Delta^{(d)} \phi - F(\phi) \right] = \left[\Delta^{(d+2)} - F'(\phi) \right] \left[\Delta^{(d-2)} \phi - F(\phi) \right], \quad (6.58)$$

где

$$\Delta^{(d)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (6.59)$$

имеет смысл радиального оператора Лапласа в d измерениях. Равенство (6.58) справедливо для произвольной функции F и произвольного значения d . С его помощью мы можем разложить (6.57) в произведение двух операторов другим способом и потребовать зануления второго сомножителя. Это приводит к уравнению второго порядка

$$\frac{\sigma}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - U'(\phi) = 0. \quad (6.60)$$

Дифференциальная часть уравнения имеет вид «нульмерного» радиального оператора Лапласа. Преобразование (6.58), которое позволило свести задачу к (6.60), связано со скрытой суперсимметрией задачи [302].

Хотя нелинейное уравнение (6.60) с потенциалом (6.53) не имеет аналитического решения, мы тем не менее можем найти действие инстантона в явном виде. Выразим $U'(\phi)$ из (6.55) и подставим в (6.54). Это дает очень простое выражение для действия инстантона:

$$S_{\text{inst}} = -\pi n \int_0^\infty dr r \chi^2. \quad (6.61)$$

Далее, исключая из уравнений (6.55) и (6.60) величину $U'(\phi)$, мы получаем следующие равенства:

$$\chi = -\frac{\sigma \phi'}{2\pi n r}, \quad S_{\text{inst}} = -\frac{\sigma^2}{4\pi n} \int_0^\infty \frac{dr}{r} (\phi')^2. \quad (6.62)$$

Теперь подставим одну из двух ϕ' в выражении для действия из уравнения (6.60). Это дает

$$S_{\text{inst}} = -\frac{\sigma}{n} \int_0^\infty dr \phi' \left[\frac{\sigma \phi''}{4\pi} - U'(\phi) \right] = \frac{\sigma}{n} [U(\phi_\infty) - U(\phi_0)]. \quad (6.63)$$

Здесь мы воспользовались тем, что ϕ' обращается в ноль как в центре инстантона, так и на бесконечности. В итоге действие выразилось только через значения ϕ в этих двух пределах. Из анализа уравнения (6.60) можно заключить, что эти два предельных значения ϕ удовлетворяют условию $U'(\phi) = 0$, что позволяет вычислить их явно:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_0 \\ \phi_\infty \end{array} \right\} = \frac{\pi}{2} \pm i \operatorname{arch} \frac{\Delta}{E}. \quad (6.64)$$

В итоге мы получаем замкнутое выражение для действия инстантона:

$$S_{\text{inst}} = 4\Delta\tau_n \left[\operatorname{arch}(\Delta/E) - \sqrt{1 - E^2/\Delta^2} \right]. \quad (6.65)$$

Подщелевая плотность состояний определяется найденным действием с экспоненциальной точностью

$$\rho \propto e^{-S_{\text{inst}}} \propto \begin{cases} \exp \left[-\frac{4}{3} \Delta\tau_n (2c)^{3/2} \right], & c = 1 - \frac{E}{\Delta} \ll 1, \\ (E/\Delta)^{4\Delta\tau_n}, & E \ll \Delta. \end{cases} \quad (6.66)$$

Этот результат имеет смысл при условии $S_{\text{inst}} \gg 1$, когда флуктуации вблизи инстантонного решения малы. Поэтому ближняя к Δ асимптотика применима, когда $(\Delta\tau_n)^{-2/3} \ll c \ll 1$. Такая зависимость плотности состояний характерна для распределения больших собственных значений случайной матрицы [303; 304]. Этот по сути нульмерный результат возникает в нашей задаче из-за размерной редукции [300; 301]. Предел малых энергий $E \ll \Delta$ аналогичен двумерному результату [305] для длинновременной асимптотики кондактанса из-за аномально локализованных состояний.

Напоследок отметим, что описанный в главе 5 механизм локализации в киральных металлах за счет распаривания вихрей не будет эффективным при наличии вакансий. Вакансии понижают симметрию сигма-модели, создавая массу для $U(1)$ степени свободы. Из-за этого

вихри просто не смогут возникнуть, а значит локализация не сможет произойти. Аналогичная ситуация была описана для классов D и DIII, в которых локализация происходит из-за доменных стенок [306], связанных с дискретной $O(1) = \mathbb{Z}_2$ степенью свободы $\det Q = \pm 1$. Эта степень свободы эффективно выключается, если в гамильтониане есть особые вихревые примеси [121; 307; 308], что приводит в итоге к невозможности локализации. Наши результаты для кирального металла показывают, что вакансии играют в нем такую же роль, как вихревые примеси в классах D и DIII.

Заключение

В диссертации представлены результаты исследования классических и квантовых электронных свойств неупорядоченного графена и киральных двумерных металлов. Основной материал опубликован в четырнадцати научных статьях, список которых приведен в приложении ниже. В заключение перечислим основные выводы проделанной работы.

1. Электронные свойства графена определяются типом беспорядка и симметрией неупорядоченного гамильтониана. Вдали от дираковской точки квазиклассическая проводимость графена логарифмически зависит от концентрации носителей в случае слабого беспорядка. Эта зависимость связана с особенностями баллистической динамики дираковских электронов; ее можно количественно описать при помощи уравнений ренорм-группы. В противоположном пределе сильных (неборновских) примесей зависимость проводимости от концентрации электронов оказывается практически линейной и хорошо согласуется с данными многочисленных экспериментов. Плотность состояний чистого графена является линейной функцией энергии. Слабые примеси обеспечивают небольшие логарифмические поправки к ней, которые также определяются ренорм-групповыми уравнениями, а в пределе сильных примесей поправка убывает по закону $E^{-1}(\ln E)^{-2}$.
2. Вблизи дираковской точки квазиклассическая проводимость графена принимает значение порядка e^2/h . Это означает, что эффекты квантовой локализации должны сильно влиять на транспортные свойства и приводить к существенной зависимости проводимости от температуры. Однако такой вывод не подтверждается экспериментальными результатами. Это необычное поведение можно объяснить, если предположить, что беспорядок не нарушает одну из киральных симметрий гамильтониана или не перемешивает долины дираковского спектра. Оказывается, что в случае киральной симметрии проводимость графена на нулевой энергии в точности равна $4e^2/\pi h$. Беспорядок дает экспоненциально малые поправки к проводимости, если сохраняется симметрия C_z , либо поправки квадратичной малости для симметрии C_0 .
3. В случае когда беспорядок не перемешивает долины дираковского спектра, локализация электронов также оказывается невозможной. В зависимости от симметрии внутри каждой долины такая неупорядоченная система описывается сигма-моделью одного из следующих пяти классов:

АII Сигма-модель симплектического класса в одной долине возникает в случае плавного потенциального беспорядка. Она характеризуется наличием особого топологического члена типа \mathbb{Z}_2 , который препятствует переходу металл-изолятор в пределе

сильного беспорядка. Когда беспорядок слабый, должна наблюдаться обычная антилокализация, как в металлах с сильным спин-орбитальным взаимодействием.

АIII Киральный унитарный класс описывает дираковский гамильтониан со случайным векторным потенциалом. Такая ситуация возникает в случае плавных искривлений плоскости графена, а также при наличии постоянного или случайного магнитного поля. Топология дираковского гамильтониана приводит к появлению дополнительного члена типа Весса–Зумино в действии сигма-модели. Система характеризуется линией фиксированных точек с неуниверсальной степенной зависимостью плотности состояний от энергии. Проводимость принимает баллистическое значение $4e^2/\pi h$ с точностью до экспоненциально малых поправок от беспорядка.

D Сверхпроводящий унитарный класс возникает в модели дираковских фермионов со случайной массой. Эта теория также описывает двумерную модель Изинга со случайной амплитудой связей. Слабый беспорядок оказывается нерелевантным уже на баллистическом уровне. Система ведет себя как чистая на больших масштабах и демонстрирует проводимость $4e^2/\pi h$.

A Унитарный класс описывает дираковские фермионы с беспорядком общего вида. Он возникает в графене с произвольным плавным беспорядком. Сигма-модель такой системы обладает дополнительным топологическим членом типа \mathbb{Z} с параметром $\theta = \pi$. На больших масштабах она оказывается в критической точке перехода между плато квантового эффекта Холла с проводимостью $\approx 0.5 \times 4e^2/h$.

DIII Сверхпроводящий симплектический класс обладает всеми симметриями чистого дираковского гамильтониана. Он возникает в графене с резонансными потенциальными примесями. В действии сигма-модели появляется дополнительный топологический член типа Весса–Зумино. Проводимость неограниченно возрастает благодаря эффектам антилокализации, так же как в случае симплектического класса АII.

4. В сильном внешнем магнитном поле в графене наблюдается квантовый эффект Холла только с нечетными плато холловской проводимости. Такое поведение объясняется тем, что беспорядок не рассеивает электроны между долинами дираковского спектра. Благодаря квантовой аномалии, в каждой долине возникает необычная связь между холловской проводимостью и топологическим углом θ , которая и отвечает за нечетное квантование. При наличии слабого междолинного рассеяния должны появляться плато с четными номерами, в том числе нулевое плато в дираковской точке. Размер этих четных плато будет параметрически мал по силе междолинного рассеяния, поэтому для их наблюдения требуются особенно низкие температуры.
5. Чистый образец графена демонстрирует необычное распределение коэффициентов прохождения при двухконтактных измерениях. В дираковской точке оно совпадает с дороховским распределением, характерным для одномерных диффузных металлических проволок, поэтому такой режим транспорта в графене называется псевдодиффузным. В

частности, мощность дробового шума в псевдодиффузном режиме определяется фактором Фано $F = 1/3$. Также наличие металлических контактов существенно модифицирует плотность состояний в графене. По мере приближения к контакту, плотность состояний возрастает по закону $(\pi\hbar v_0 x)^{-1}$ пока не сравняется с плотностью в металле.

6. Добавление слабых примесей к баллистическому образцу графена приводит к увеличению кондактанса уже в первом порядке теории возмущений, но поправки к форме функции распределения прозрачностей возникают только во втором порядке по силе беспорядка. Эти поправки обеспечивают снижение фактора Фано ниже значения $1/3$. С ростом концентрации примесей графен постепенно переходит в диффузный режим, где функция распределения также близка к дороховской, а поправки к ней определяются эффектами слабой антилокализации. Это также приводит к снижению мощности дробового шума. В итоге можно сделать вывод, что фактор Фано достигает минимального значения в области кроссовера между баллистическим и диффузным режимами.
7. Транспортные свойства баллистических образцов графена при двухконтактном измерении существенно меняются при наличии резонансных потенциальных примесей. Оказывается, что каждая такая примесь увеличивает кондактанс всего образца в среднем на величину $16e^2/\pi^2h$. По мере роста концентрации примесей графен переходит в диффузный режим, а его проводимость растет за счет эффектов антилокализации в соответствии с предсказанием сигма-модели класса DIII. Кроссовер из баллистического в диффузный режим можно изучать численно при помощи чрезвычайно эффективного алгоритма, основанного на представлении развернутых функций Грина. Этот метод позволяет вычислить любые транспортные характеристики образца с заданным расположением N примесей, обратив матрицу размера $2N$. Используя специально сконструированный алгоритм разложения матриц, можно довести сложность такого вычисления до величины $O(N^2)$ в среднем на одну реализацию беспорядка. Эффективность метода развернутых функций Грина существенно превосходит любые численные алгоритмы, основанные на моделировании микроскопического гамильтониана на решетке.
8. Вакансии в графене представляют собой очень специальный тип беспорядка, поскольку они обладают свойствами резонансных примесей и в то же время сохраняют киральную симметрию гамильтониана. Помимо собственно вакансий, аналогичные свойства проявляют любые точечные примеси, создающие сильный потенциал на отдельных узлах решетки графена, в том числе адсорбированные атомы водорода и фтора. Оказывается, что проводимость графена существенно зависит от распределения вакансий по шести подрешеткам. В баллистическом пределе кондактанс выражается при помощи виртуального разложения по степеням концентрации вакансий в этих подрешетках. Для изучения кроссовера в диффузный режим и возможных критических состояний при большой концентрации вакансий также применим метод развернутых функций Грина. В этом случае он позволяет вычислить проводимость заданной конфигурации N примесей при помощи обращения матрицы размера N . Киральная симметрия обеспечивает отсутствие

обычных квантовых поправок к проводимости при большой концентрации вакансий. Вместо этого наблюдаются различные фиксированные точки, которые характеризуются разными значениями проводимости, в зависимости от распределения вакансий между шестью подрешетками графена. Кроссовер между такими фиксированными точками описывается универсальными скейлинговыми законами.

9. Внешнее магнитное поле можно естественным образом включить в описание графена методом развернутых функций Грина. Это позволяет изучить транспортные свойства образцов со случайно распределенными потенциальными примесями как плавной, так и точечной формы. В полном согласии с предсказаниями теории локализации, основанной на соответствующей сигма-модели, наблюдаются различные типы транспортного поведения в зависимости от соотношения параметров: унитарная и ортогональная локализация, симплектическая антилокализация, критическое состояние квантового эффекта Холла, а также кроссоверы между этими режимами. В случае очень сильного магнитного поля, когда количество квантов магнитного потока в образце превышает количество примесей, можно также наблюдать баллистическое поведение проводимости в дираковской точке из-за сохраняющегося вырождения нулевого уровня Ландау. В этом пределе проводимость принимает универсальное значение $4e^2/\pi h$, а мезоскопические флуктуации оказываются экспоненциально подавленными.
10. Если точечные примеси в графене расположены в двух из шести подрешеток, возникает особый тип анизотропной супердиффузной проводимости. При таком распределении примеси оказываются лишь в каждом третьем ряду узлов шестиугольной решетки. Кондактанс в направлении вдоль этих рядов растет пропорционально квадратному корню из длины образца. В то же время проводимость перпендикулярно рядам имеет обычный омический характер и от размера не зависит. Подобное поведение напоминает полеты Леви, известные в теории стохастических процессов, но не наблюдавшиеся до сих пор в двумерных неупорядоченных системах. Супердиффузная проводимость в графене с анизотропным беспорядком хорошо описывается в рамках квазиклассической теории, а квантовые поправки оказываются несущественными. Подобный тип проводимости не является исключительной особенностью графена, а может также наблюдаться и в системах другой симметрии, например, на квадратной решетке.
11. Двумерные киральные металлы, и графен в том числе, обладают особыми локализационными свойствами. Отличительной чертой этих систем является точное сокращение квантовых поправок к проводимости во всех порядках теории возмущений. Тем не менее переход в состояние изолятора при сильном беспорядке все же происходит. В сигма-моделях киральных классов есть $U(1)$ степень свободы, соответствующая фазе детерминанта матрицы Q . Благодаря этой фазе могут возникать топологические возбуждения — вихри. При достаточно сильном беспорядке динамика вихрей приводит к фазовому переходу в состояние изолятора по аналогии с моделью Березинского—Костерлица—Таулесса. Если в действии сигма-модели кирального класса есть дополнительный

топологический член (типа Весса—Зумино в классе АIII или \mathbb{Z}_2 θ -член в классе СИ), он полностью подавляет вихри и локализация не происходит.

12. Свойства кирального металла при наличии вакансий существенно отличаются от случая обычного слабого беспорядка. Благодаря классическим статистическим флуктуациям распределения вакансий в пространстве, возникает конечная локальная плотность нулевых мод. На языке сигма-модели это соответствует появлению массы у $U(1)$ степени свободы и эффективному понижению симметрии модели. В итоге критические свойства кирального металла вблизи центра зоны радикально меняются: длина локализации растет на малых энергиях по закону $\propto |\ln E|^{1/2}$, а плотность состояний имеет особенность $\propto E^{-1} |\ln E|^{-3/2}$. В случае среднего дисбаланса в распределении вакансий (различные концентрации примесей в двух подрешетках) в плотности состояний появляется квазиклассическая щель. Квантовые флуктуации размывают край этой щели и приводят к появлению экспоненциально убывающего «хвоста» плотности состояний. При самых низких энергиях плотность состояний обращается в ноль степенным образом с показателем, который пропорционален среднему дисбалансу.

Приложение А

Двухпетлевая баллистическая перенормировка беспорядка

А.1 Универсальность перенормировки

В этом приложении мы выведем уравнение ренорм-группы (1.47) для случайного плавного потенциала с амплитудой¹ α . Прежде чем проводить явные вычисления, покажем, что уравнения перенормировки универсальны с двухпетлевой точностью, то есть инвариантны при малых изменениях в определении параметров. Точное значение затравочной силы беспорядка зависит от вида гамильтониана на высоких энергиях, где спектр нельзя считать линейным. Поэтому инвариантность ренорм-группы относительно переопределения параметров эквивалентна ее независимости от неконтролируемых ультрафиолетовых деталей задачи.

Когда в модели есть только один перенормируемый параметр, бета-функция универсальна с точностью до двух петель. Чтобы в этом убедиться, предположим, что уравнение ренорм-группы известно с точностью до третьего порядка:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \ln L} = A\alpha^2 + B\alpha^3 + C\alpha^4 \quad (\text{A.1})$$

с некоторыми константами A , B и C . Мы считаем $\alpha \ll 1$, поэтому правая часть уравнения имеет смысл разложения бета-функции в ряд. Определим новый параметр α' , который мало отличается от α , тоже в виде ряда

$$\alpha' = \alpha + M\alpha^2 + N\alpha^3. \quad (\text{A.2})$$

В терминах этого нового параметра уравнение (A.1) принимает вид

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \ln L} = A\alpha'^2 + B\alpha'^3 + (C - AM^2 + AN - BM)\alpha'^4. \quad (\text{A.3})$$

Мы видим, что члены первого и второго порядка не изменились, тогда как третий порядок (вклад трехпетлевых диаграмм) зависит от определения α' .

Если модель содержит более одного параметра, уже двухпетлевое приближение оказывается в общем случае неуниверсальным. Это можно продемонстрировать по аналогии

¹В основном тексте диссертации сила такого беспорядка обозначается α_0 . Поскольку другие типы беспорядка мы в этом приложении не рассматриваем, индекс 0 для краткости опустим.

со случаем одного параметра:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \ln L} = A_i^{kl} \alpha_k \alpha_l + B_i^{klm} \alpha_k \alpha_l \alpha_m, \quad \alpha'_i = \alpha_i + M_i^{kl} \alpha_k \alpha_l, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \alpha'_i}{\partial \ln \Lambda} = A_i^{kl} \alpha'_k \alpha'_l + \left(B_i^{klm} + 2A_j^{kl} M_i^{jm} - 2A_i^{kj} M_j^{lm} \right) \alpha'_k \alpha'_l \alpha'_m. \quad (\text{A.5})$$

В нашей модели перенормировка не порождает другие параметры, если исходно был только потенциальный беспорядок α . Поэтому имеет смысл найти уравнения ренорм-группы с точностью до двух петель.

А.2 Вычисление диаграмм

Для вычисления перенормировки нам нужно зафиксировать схему обрезания так, чтобы отдельные диаграммы были сходящимися. Наиболее удобной оказывается размерная регуляризация [137]. Как объяснялось выше, результат не будет зависеть от этого выбора. Будем рассматривать дираковский гамильтониан в пространстве произвольной размерности d . В случае $d < 2$ никаких ультрафиолетовых расходимостей в диаграммах не возникает, поэтому наше вычисление будет по сути обыкновенной теорией возмущений по силе беспорядка. В конце мы возьмем предел $d \rightarrow 2$. Чтобы исключить инфракрасные расходимости, введем также небольшую массу m . Она аналогична конечной мацубаровской энергии.

Логика перенормировки состоит в том, что нам из эксперимента известны наблюдаемые параметры системы: масса, фермиевская скорость, амплитуда беспорядка. Мы можем составить действие с этими параметрами, но при работе с таким действием возникают расходимости. Поэтому мы будем добавлять в действие поправочные слагаемые (они называются контрчленами) так, чтобы в итоге теория предсказывала именно то, что наблюдается. Если собрать вместе все такие поправочные слагаемые, получится истинное действие, которое также называют затравочным, причем оно будет выражено через наблюдаемые величины. Параметры затравочного действия не могут зависеть от условий эксперимента и, в частности, от масштаба измерений. Это требование формулируется в виде уравнения Каллана—Симанчика [137]. Из него можно непосредственно вывести зависимость от масштаба наблюдаемых величин, то есть ренорм-группу.

Исходное действие для дираковских фермионов в d измерениях с потенциальным беспорядком (модель Гросса—Неве [309; 310]) имеет вид

$$S[\psi] = \int d^d r \left[\bar{\psi} (m + i\sigma \mathbf{p}) \psi + \frac{\gamma}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 \right]. \quad (\text{A.6})$$

Здесь мы ввели немного другой параметр силы беспорядка γ . При $d = 2$ он оказывается безразмерным и связан с обычной величиной силы беспорядка соотношением $\gamma = 2\pi\alpha$. В произвольной размерности эта связь более сложная; мы зафиксируем ее в самом конце вычисления из соображений удобства. Предполагается, что параметры m и γ в действии имеют смысл наблюдаемых. Величина m при этом также определяет инфракрасный масштаб

эксперимента. Нашей целью будет восстановить исходное затравочное действие с помощью вычисления диаграмм и добавления контрчленов к (A.6).

В произвольном числе измерений вектор матриц Паули σ не имеет явного вида, и даже количество компонент в нем не является целым числом. Однако для всех последующих вычислений достаточно постулировать свойства антикоммутиации:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \mathbb{1}, \quad \sum_\alpha \sigma_\alpha \sigma_\alpha = d \mathbb{1}. \quad (\text{A.7})$$

Говорят, что матрицы σ_α являются генераторами d -мерной алгебры Клиффорда. Из этих тождеств можно вывести следствия

$$(\sigma \mathbf{p})^2 = p^2, \quad (\sigma \mathbf{p})(\sigma \mathbf{q}) + (\sigma \mathbf{q})(\sigma \mathbf{p}) = 2\mathbf{p}\mathbf{q}, \quad (\text{A.8})$$

$$(\sigma \mathbf{p})\sigma(\sigma \mathbf{q}) + (\sigma \mathbf{q})\sigma(\sigma \mathbf{p}) = 2(\sigma \mathbf{p})\mathbf{q} + 2(\sigma \mathbf{q})\mathbf{p} - 2(\mathbf{p}\mathbf{q})\sigma. \quad (\text{A.9})$$

Этих равенств оказывается достаточно для вычисления всех диаграмм с одной и двумя петлями.

Действие (A.6) определяет форму функции Грина

$$G(\mathbf{p}) = (im - \sigma \mathbf{p})^{-1} = -\frac{im + \sigma \mathbf{p}}{m^2 + p^2}. \quad (\text{A.10})$$

Здесь для обращения матрицы мы уже воспользовались тождеством (A.8). Такая функция Грина соответствует всем сплошным линиям на диаграммах. Коррелятор беспорядка (штриховая линия) просто соответствует числу γ .

Мы будем вычислять все диаграммы с одной и двумя петлями. При этом, как уже обсуждалось раньше, можно опустить диаграммы с замкнутыми фермионными линиями, поскольку мы имеем дело с беспорядком, а не взаимодействием. (Тот же результат можно получить с помощью метода реплик или суперсимметрии.)

A.2.1 Однопетлевые диаграммы

Мы включили в действие величину наблюдаемой массы m и фермиевской скорости (которая по нашему соглашению считается единицей). Но из-за беспорядка к этим величинам возникают поправки. Их можно вычислить из диаграмм собственной энергии, раскладывая ее в ряд по маленькому импульсу

$$\Sigma(\mathbf{k}) = -i\Delta m + \Delta v_0 \sigma \mathbf{k} + \dots \quad (\text{A.11})$$

В низшем порядке по γ имеется единственная борновская диаграмма (рис. 1.5а), которая уже вычислялась в разделе 1.3.2. Здесь мы проделаем это вычисление заново в произвольной размерности d .

Две другие вершинные диаграммы рис. 1.5d также выражаются через I_1 :

$$\Gamma^{(d)} = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} = 2\gamma^2 \int (d^d p) G(\mathbf{p})^2 = -2\gamma^2 \int (d^d p) \frac{m^2 - p^2}{(m^2 + p^2)^2} = 2\gamma^2 m^{d-2} (d-1) I_1. \quad (\text{A.18})$$

Собирая вместе вклады (A.17) и (A.18), мы можем найти поправку к силе беспорядка γ в соответствии с (A.15). Чтобы ее скомпенсировать, нужно добавить в действие контрчлен

$$\delta^{(1)}\gamma = -\Gamma^{(1)} = \gamma^2 m^{d-2} (4 - 3d) I_1. \quad (\text{A.19})$$

A.2.2 Двухпетлевые диаграммы

Теперь обсудим двухпетлевые диаграммы. При их вычислении помимо интеграла I_1 возникают также вклады, где импульсы двух петель перекрываются. Их все можно выразить через один безразмерный интеграл

$$I_2 = \int \frac{(d^d p d^d q)}{(1 + p^2)(1 + q^2)[1 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2]}. \quad (\text{A.20})$$

Результаты вычисления для диаграмм с одной и двумя петлями приведены в таблице 4. Обсудим их на примере диаграмм для собственной энергии.

Первая поправка к собственной энергии вычисляется по аналогии с однопетлевыми диаграммами, поскольку импульсы петель в ней не перекрываются

$$\Sigma^{(2a)} = \text{[diagram]} = \gamma^2 \int (d^d p d^d q) G^2(\mathbf{p}) G(\mathbf{q}) = -i\gamma^2 m^{2d-3} (d-1) I_1^2. \quad (\text{A.21})$$

Фактически это произведение интегралов (A.13) и (A.18). Сложнее обстоит дело с диаграммами, в которых примесные линии пересекаются. Например, вторая диаграмма для собственной энергии (с нулевым внешним импульсом) выражается интегралом

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2b)}(\mathbf{k} = 0) &= \text{[diagram]} = \gamma^2 \int (d^d p d^d q) G(\mathbf{p}) G(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G(\mathbf{q}) \\ &= i\gamma^2 m \int (d^d p d^d q) \frac{m^2 - p^2 - q^2 - 3\mathbf{p}\mathbf{q}}{(m^2 + p^2)(m^2 + q^2)[m^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2]} = -\frac{i}{2} \gamma^2 m^{2d-3} (I_1^2 - 3I_2). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Здесь мы сначала раскрыли скобки в числителе функций Грина и воспользовались симметрией интеграла относительно $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ и равенствами (A.8). Затем выделили полный квадрат $(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2$ и разбили подынтегральное выражение на слагаемые с меньшими степенями в знаменателе. В итоге все свелось к интегралам I_1 и I_2 .

Полная собственная энергия (на нулевом импульсе) второго порядка по γ складывается из (A.21) и (A.22), а также из однопетлевого вклада $\Sigma^{(1)}$, в котором нужно учесть контрчлены, добавленные ранее к γ и m . В итоге получаем

$$\Sigma^{(2)} = \Sigma^{(2a)} + \Sigma^{(2b)} + \delta^{(1)}\gamma \frac{\partial \Sigma^{(1)}}{\partial \gamma} + \delta^{(1)}m \frac{\partial \Sigma^{(1)}}{\partial m}. \quad (\text{A.23})$$

Таблица 4 — Двухпетлевые диаграммы для собственной энергии и неприводимой вершины, дающие поправки к массе, скорости и силе беспорядка. Значения диаграмм выражены в произвольной размерности d через два интеграла $I_{1,2}$, определенных формулами (A.12) и (A.20). Общие множители указаны в подзаголовках. Некоторые диаграммы собраны вместе, потому что по отдельности они порождают новые нефизические виды беспорядка, или из-за сходной структуры интегралов.

Диаграмма	Значение
Собственная энергия $\Sigma = -i\gamma^2 m^{2d-3} \times$	
	$(d-1)I_1^2$ $\frac{1}{2}(I_1^2 - 3I_2)$
Производная собственной энергии $\partial_{\mathbf{k}}\Sigma = \gamma^2 m^{2d-4} \boldsymbol{\sigma} \times$	
	$\frac{1}{2d} [(d+2)I_2 + (d-2)I_1^2]$
Неприводимая вершина $\Gamma = \gamma^3 m^{2d-4} \times$	
	$\frac{1}{2}(4 - 3d + d^2)I_1^2$
$2 \times$ $+ 2 \times$	$(1-d)(3I_2 + I_1^2)$
$2 \times$ $+ 2 \times$	$(d-2)^2 I_1^2$
$2 \times$ $+ 2 \times$	$4(1-d)I_2$
$4 \times$ $+ 4 \times$	$4[(d-2)I_1^2 + (4-d)I_2]$
$\frac{1}{2} \times$	$(d-1)^2 I_1^2$
$2 \times$ $+ 4 \times$	$2(2d-3)(d-1)I_1^2$
$2 \times$ $+ 4 \times$	$(2d-3)(I_1^2 - 3I_2)$

Собирая все вклады, находим поправку второго порядка к массе и компенсируем ее контрчленом

$$\delta^{(2)}m = -i\Sigma^{(2)} = \frac{3}{2}\gamma^2 m^{2d-3} \left[(2d-3)I_1^2 + I_2 \right]. \quad (\text{A.24})$$

Также во втором порядке по γ впервые возникает поправка к фермиевской скорости⁴. Она происходит от диаграммы собственной энергии с двумя пересекающимися примесными линиями, потому что именно в ней есть нужная зависимость от внешнего импульса. Дифференцируя $\Sigma^{(2b)}$ по \mathbf{k} , приходим к следующему интегралу:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}=0} &= \text{diagram} = \gamma^2 \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}=0} \int (d^d p d^d q) G(\mathbf{p}) G(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) G(\mathbf{q}) \\ &= -\gamma^2 \int (d^d p d^d q) G(\mathbf{p}) G(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma} G(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G(\mathbf{q}) = \frac{\gamma^2}{2d} m^{2d-4} \left[(d+2)I_2 + (d-2)I_1^2 \right] \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Здесь мы воспользовались простым тождеством $\partial G(\mathbf{k})/\partial \mathbf{k} = G(\mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma} G(\mathbf{k})$. Интегрирование по импульсам выполняется по такой же схеме, как раньше. Тождества (A.8) и (A.9) и усреднение по направлениям \mathbf{p} и \mathbf{q} позволяют упростить числитель и выделить векторный множитель $\boldsymbol{\sigma}$ в правой части. Затем подынтегральное выражение разбивается на отдельные вклады и сводится к I_1 и I_2 . Полученная поправка должна быть скомпенсирована контрчленом, который сделает скорость (временно) отличной от единицы

$$v_0 = 1 + \delta^{(2)}v_0, \quad \delta^{(2)}v_0 = -\frac{\gamma^2}{2d} m^{2d-4} \left[(d+2)I_2 + (d-2)I_1^2 \right]. \quad (\text{A.26})$$

Диаграммы третьего порядка для неприводимой вершины определяют двухпетлевую поправку к γ . Они вычисляются аналогично уже рассмотренным диаграммам и тоже выражаются через I_1 и I_2 . Результаты для всех двухпетлевых вкладов собраны в таблице 4. При вычислении контрчлена для γ нужно, как и прежде, учесть вклад контрчленов младшего порядка в однопетлевые диаграммы

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(\text{сумма диаграмм})} + \delta^{(1)}\gamma \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial \gamma} + \delta^{(1)}m \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial m}. \quad (\text{A.27})$$

Получающийся таким образом вклад в неприводимую вершину можно скомпенсировать контрчленом

$$\delta^{(2)}\gamma = \gamma^3 m^{2d-4} \left[\frac{1}{2}(29d^2 - 91d + 74)I_1^2 + (17d - 32)I_2 \right]. \quad (\text{A.28})$$

A.3 Уравнения ренорм-группы

Итак, мы вычислили все контрчлены до второго порядка по параметру γ в произвольной размерности d . Теперь мы можем образовать с их помощью затравочное действие, которое

⁴В нашей модели фермиевская скорость положена равной единице. На первый взгляд, поправка к ней нарушает это соглашение. Однако мы восстановим его позднее с помощью перенормировки поля в действии.

будет воспроизводить наблюдаемые величины с нужной точностью. Затравочное действие имеет такую же структуру, как и исходное действие (A.6)

$$\begin{aligned} S_B &= \int d^d r \left[\bar{\psi}_B (m_B + i\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\psi_B + \frac{\gamma_B}{2} (\bar{\psi}_B\psi_B)^2 \right] \\ &= \int d^d r \left\{ \bar{\psi} \left[m + \delta^{(1)}m + \delta^{(2)}m + i(1 + \delta^{(2)}v_0)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \right] \psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma + \delta^{(1)}\gamma + \delta^{(2)}\gamma) (\bar{\psi}\psi)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Его параметры можно явно выразить через наблюдаемые

$$\psi_B = \left(1 + \frac{\delta^{(2)}v_0}{2} \right) \psi, \quad (\text{A.30})$$

$$m_B = m + \delta^{(1)}m + \delta^{(2)}m - m\delta^{(2)}v_0, \quad (\text{A.31})$$

$$\gamma_B = \gamma + \delta^{(1)}\gamma + \delta^{(2)}\gamma - 2\gamma\delta^{(2)}v_0. \quad (\text{A.32})$$

Здесь мы перенормировали величину поля $\psi \mapsto \psi_B$ так, чтобы фермиевская скорость снова стала равна единице. При этом величина $\delta^{(2)}v_0$ дала вклад в остальные параметры модели.

Теперь мы вернемся от размерной величины γ к безразмерной α . Для этого из γ нужно выделить множитель m^{2-d} . Кроме того, нужно обеспечить связь $\gamma = 2\pi\alpha$ при $d = 2$. В остальном выбор численного коэффициента произволен. Мы сделаем его следующим

$$\gamma = \frac{(2\pi)^d}{S_{d-1}} m^{2-d} \alpha, \quad \text{где } S_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (\text{A.33})$$

Выбранный нами фактор с объемом $(d-1)$ -мерной сферы позволит в точности сократить аналогичный множитель в интегралах $I_{1,2}$. Поэтому мы также переопределим эти интегралы, введя

$$J_1 = \int \frac{p^{d-1} dp}{1+p^2} = \frac{\pi}{2 \sin(\pi d/2)}, \quad J_2 = \int \frac{p^{d-1} q^{d-1} dp dq}{(1+p^2)(1+q^2)[1+(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2]}. \quad (\text{A.34})$$

В этих новых обозначениях можно явно записать выражения для затравочных параметров через перенормированные

$$\gamma_B = \frac{(2\pi)^d}{S_{d-1}} m^{2-d} \left[\alpha + (4-3d)J_1\alpha^2 + \left[(29d^3 - 91d^2 + 76d - 4)J_1^2 + 2(17d^2 - 31d + 2)J_2 \right] \frac{\alpha^3}{2d} \right], \quad (\text{A.35})$$

$$m_B = m \left[1 - J_1\alpha + \left[(3d^2 - 4d - 1)J_1^2 + (2d + 1)J_2 \right] \frac{\alpha^2}{d} \right]. \quad (\text{A.36})$$

Ренорм-группа выводится из уравнений Каллана—Симанчика [137], которые выражают независимость затравочных параметров от текущего масштаба. Напомним, что масштаб измерения у нас определяется массой: $L \sim m^{-1}$. Таким образом находим

$$0 = \frac{d\gamma_B}{d \ln m} = (2-d)\gamma_B + \frac{\partial\gamma_B}{\partial\alpha} \frac{\partial\alpha}{\partial \ln m}. \quad (\text{A.37})$$

Отсюда получается уравнение для α

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \ln L} = \frac{(2-d)\gamma_B}{\partial \gamma_B / \partial \alpha} = (2-d) \left\{ \alpha + (3d-4)J_1 \alpha^2 - \left[(d-2)(11d^2 - 21d + 2)J_1^2 + 2(17d^2 - 31d + 2)J_2 \right] \frac{\alpha^3}{d} \right\}. \quad (\text{A.38})$$

Аналогичное уравнение для m мы приводить не будем, поскольку оно все равно не универсально, как обсуждалось выше в разделе [A.1](#).

Нам осталось только взять предел $d \rightarrow 2$. Множители $2-d$ компенсирует сингулярность в интеграле J_1 . Интеграл J_2 остается конечным при $d = 2$, поэтому он не даст вклад в ответ. Итоговое ренорм-групповое уравнение для силы беспорядка имеет вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \ln L} = 2\alpha^2 + 2\alpha^3. \quad (\text{A.39})$$

Именно этот результат мы использовали в разделе [1.3.2](#) (см. [\(1.47\)](#) и обсуждение длины свободного пробега).

Приложение Б

Алгоритмы обращения матриц

В этом приложении мы опишем эффективные алгоритмы вычисления кондактанса образца графена с резонансными потенциальными примесями и вакансиями. В главе 4 мы разработали метод развернутых функций Грина, с помощью которого выразили кондактанс при заданном расположении N дефектов в терминах обратной матрицы размера $2N$ для резонансных потенциальных примесей и N для вакансий. В обоих случаях матрицы обладают определенной симметрией, позволяющей разложить их в произведение треугольных матриц при помощи обобщения алгоритма Холецкого [311].

Стандартное разложение Холецкого представляет симметричную положительно определенную матрицу A в виде произведения $A = LL^T$, где L — нижнетреугольная матрица. Такая факторизация требует $O(N^3)$ операций для матриц размера N и используется в качестве первого шага во всех современных алгоритмах быстрого обращения матриц. Еще одной замечательной особенностью разложения Холецкого является тот факт, что первые k строк матрицы L определяются только блоком размера $k \times k$ в верхнем левом углу матрицы A . Поэтому при добавлении к A новых строк и столбцов не нужно пересчитывать все разложение заново, а можно использовать уже известную матрицу L , вычисленную ранее.

Мы адаптируем алгоритм разложения Холецкого с учетом симметрий матрицы M и будем добавлять примеси по одной, чтобы использовать найденное на предыдущем шаге разложение и обратную матрицу. В итоге вычисление методом развернутых функций Грина оказывается особенно эффективным и требует всего лишь $O(N^2)$ операций в среднем для каждой реализации беспорядка.

Б.1 Резонансные потенциальные примеси

Начнем со случая резонансных потенциальных примесей. При заданном расположении N таких рассеивателей кондактанс образца графена определяется по формуле (4.65)

$$G = \frac{4e^2 W}{\pi h} \frac{1}{L} + \frac{16e^2}{\pi^2 h} \text{Tr} (M^{-1} M^{-T}). \quad (\text{Б.1})$$

Матрица M имеет размер $2N \times 2N$ и определена выражением (4.64). Мы представим ее в эквивалентном блочном виде с элементами

$$M = \begin{pmatrix} B & A \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix}, \quad B_{mn} = \frac{1}{\sin(z_m + z_n^*)}, \quad A_{mn} = \frac{1 - \delta_{mn}}{\sin(z_m - z_n)}. \quad (\text{Б.2})$$

Положение примесей задано безразмерными комплексными координатами $z_n = (\pi/2L)(x_n + iy_n)$.

Матрица M обладает следующими свойствами, облегчающими ее обращение:

- M эрмитова.
- Сверхпроводящая симметрия: $M = -\sigma_x M^T \sigma_x$.
- Блок B эрмитовый и положительно определенный.

Будем обращаться матрицу M с помощью модифицированного алгоритма разложения Холецкого [311]. Основными преимуществами этого метода: учет всех симметрий и возможность итеративно добавлять новые примеси без пересчета полной обратной матрицы.

Обобщенное разложение Холецкого для матрицы M будем искать в виде

$$M = R^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R, \quad R = \begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.3})$$

где U — верхнетреугольная матрица, а V — строго верхнетреугольная (с нулевой диагональю). Существование и единственность такого разложения являются прямым следствием перечисленных выше свойств. Для блоков A и B разложение принимает вид

$$\begin{cases} B = U^\dagger U - V^T V^*, \\ A = U^\dagger V - V^T U^*. \end{cases} \quad (\text{Б.4})$$

Обратная сопряженная матрица $R^{-\dagger}$ имеет структуру, аналогичную R . Мы обозначим ее блоки как

$$R^{-\dagger} = \begin{pmatrix} T & S \\ S^* & T^* \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.5})$$

Матрицы T и S — нижнетреугольная и строго нижнетреугольная соответственно и связаны с U и V соотношениями

$$\begin{cases} TU^\dagger + SV^\dagger = 1, \\ TV^T + SU^T = 0. \end{cases} \quad (\text{Б.6})$$

Проводимость выражается через T и S следующим образом:

$$G = \frac{4e^2 W}{\pi h L} - \frac{16e^2}{\pi^2 h} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R^{-\dagger} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R^{-1} \right]^2 = \frac{4e^2 W}{\pi h L} + \frac{32e^2}{\pi^2 h} \sum_{ij} \text{Tr}(X X^\dagger - Y Y^\dagger), \quad (\text{Б.7})$$

$$X = TT^T + SS^T, \quad Y = TS^\dagger + ST^\dagger. \quad (\text{Б.8})$$

Предположим, что задача для заданного набора N примесей решена и матрицы T и S найдены. Добавление новой примеси с комплексной координатой z подразумевает увеличение матриц A и B , которое состоит в приписывании им дополнительной строки снизу и столбца справа:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & a \\ -a^T & 0 \end{pmatrix}, \quad B \mapsto \begin{pmatrix} B & b \\ b^\dagger & \beta \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.9})$$

$$a_m = \frac{1}{\sin(z - z_m^*)}, \quad b_m = \frac{1}{\sin(z + z_m^*)}, \quad \beta = \frac{1}{\sin 2 \operatorname{Re} z}. \quad (\text{Б.10})$$

Соответствующее расширение для матриц U и V обозначим

$$U \mapsto \begin{pmatrix} U & u \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad V \mapsto \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.11})$$

Подставляя расширенные матрицы (Б.9) и (Б.11) в (Б.4), мы получаем уравнения на u , v и ν :

$$\begin{cases} a = U^\dagger v - V^T u^*, \\ b = U^\dagger u - V^T v^*, \\ \beta = \nu^2 + u^\dagger u - v^\dagger v. \end{cases} \quad (\text{Б.12})$$

Первые два уравнения можно объединить в одно

$$\begin{pmatrix} a \\ -b^* \end{pmatrix} = R^\dagger \begin{pmatrix} v \\ -u^* \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.13})$$

Как видно, их решение выражается через матрицу $R^{-\dagger}$, а значит мы можем повторно использовать уже известные матрицы T и S ,

$$\begin{cases} u = Tb - Sa^*, \\ v = Ta - Sb^*, \\ \nu = \sqrt{\beta - u^\dagger u + v^\dagger v}. \end{cases} \quad (\text{Б.14})$$

Положительность величины $\beta - u^\dagger u + v^\dagger v$ обеспечивается положительной определенностью матрицы B .

После того как мы нашли расширенную версию матриц U и V , можно аналогичным образом поступить с матрицами T и S . Представим расширение этих матриц в виде

$$T \mapsto \begin{pmatrix} T & 0 \\ t^T & \tau \end{pmatrix}, \quad S \mapsto \begin{pmatrix} S & 0 \\ s^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.15})$$

Подставляя эти выражения вместе с (Б.11) в (Б.6), мы получаем уравнения на s , t и τ

$$\begin{cases} Vt + Us = -\tau v, \\ V^* s + U^* t = -\tau u^*, \\ \tau \nu = 1. \end{cases} \quad (\text{Б.16})$$

Последнее уравнение сразу же решается: $\tau = 1/\nu$. Первые два уравнения мы, как и раньше, объединяем в одно,

$$R \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = -\frac{1}{\nu} \begin{pmatrix} v \\ u^* \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.17})$$

и решаем его, используя уже известную обратную матрицу $R^{-\dagger}$ из (Б.5),

$$\begin{cases} \tau = 1/\nu, \\ s = -\tau(T^\dagger v + S^T u^*), \\ t = -\tau(S^\dagger v + T^T u^*), \end{cases} \quad (\text{Б.18})$$

Таким образом мы обновили матрицы T и S , добавив в них новую примесь.

Единственная оставшаяся задача — обновить значение проводимости. Для этого сначала вычислим расширенные матрицы X и Y , определенные в (Б.8),

$$X \mapsto \begin{pmatrix} X & x \\ x^T & \xi \end{pmatrix}, \quad Y \mapsto \begin{pmatrix} Y & y \\ y^\dagger & \gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.19})$$

$$x = Tt + Ss, \quad y = Ts^* + St^*, \quad \xi = \tau^2 + t^T t + s^T s, \quad \gamma = 2 \operatorname{Re} t^T s^*. \quad (\text{Б.20})$$

Наконец, новое значение проводимости с учетом добавленной примеси может быть найдено по формуле

$$G \mapsto G + \frac{32e^2}{\pi^2 h} \left[|\xi|^2 - \gamma^2 + 2 \sum_{i=1}^N (|x_i|^2 - |y_i|^2) \right]. \quad (\text{Б.21})$$

Алгоритм состоит в последовательном случайном добавлении примесей и циклическом вычислении по формулам (Б.10), (Б.14), (Б.18), (Б.20) и (Б.21). Именно таким способом были получены данные, показанные на рис. 4.6.

Отметим, что в процессе вычислений нужно сохранять только информацию о расположении всех примесей, а также матрицы T и S , поскольку именно они используются в формулах (Б.14), (Б.18) и (Б.20). В то же время матрицы A , B , U , V , X и Y хранить не нужно.

Б.2 Вакансии

Для образца графена с вакансиями кондактанс вычисляется по формуле (4.81) с матрицей M из (4.80). Чтобы сделать численное обращение матрицы более устойчивым, мы переопределим $M = \operatorname{Re} A$ с помощью матрицы

$$A_{mn} = \sqrt{\sin \frac{\pi x_n}{L} \sin \frac{\pi x_m}{L}} \frac{\exp[\frac{i\alpha}{2}(\zeta_m - \zeta_n) + i\mathbf{K}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n) + \frac{i\phi}{2L}(y_m - y_n)]}{\sin[\frac{\pi}{2L}(\zeta_m x_m + \zeta_n x_n + iy_m - iy_n)]}. \quad (\text{Б.22})$$

Здесь $\zeta_m = \pm 1$ определяет подрешетку, в которой находится m -ая вакансия. Это выражение эквивалентно (4.80) с точностью до множителя, который фиксирует диагональные элементы $A_{mm} = \zeta_m$ и тем самым балансирует матрицу A .

Выражение для кондактанса (4.81) можно переписать в виде

$$G = \frac{4e^2}{\pi h} \frac{W}{L} + \frac{2e^2}{hL^2} \text{Tr} \left\{ [Y, A] M^{-1} [Y, A]^T M^{-1} \right\}_{\phi=0}, \quad (\text{B.23})$$

где диагональная матрица Y содержит y -координаты вакансий: $Y = \text{diag}\{y_m\}$. В итоге, расчет проводимости сводится к обращению вещественной симметричной матрицы M размера $N \times N$ при $\phi = 0$.

Алгоритм обращения, как и в случае резонансных потенциальных примесей, основан на обобщении разложения Холецкого [311] для M . Однако из-за того, что M не является положительно определенной матрицей, мы введем в разложение диагональную матрицу $Z = \text{diag}\{\zeta_m\}$, которая соответствует сигнатуре M ,

$$M = V^T Z V. \quad (\text{B.24})$$

Здесь V — верхнетреугольная вещественная матрица. Для вычисления кондактанса по формуле (B.23) нам также понадобятся матрицы

$$W = V^{-1}, \quad S = [Y, A], \quad P = V^{-T} S V^{-1} = W^T S W. \quad (\text{B.25})$$

Матрица W вещественная верхнетреугольная, а матрицы S и P — антиэрмитовы, причем S имеет нулевую диагональ. Кондактанс выражается через Z и P следующим образом:

$$G = \frac{4e^2}{\pi h} \frac{W}{L} - \frac{2e^2}{hL^2} \text{Tr} [P Z P^T Z]. \quad (\text{B.26})$$

Как и в предыдущем разделе, мы построим алгоритм, который последовательно расширяет эти матрицы по мере добавления вакансий.

Предположим, что задача для заданного набора вакансий решена и матрицы W и P известны. Добавим новую вакансию с номером j в подрешетку с индексом ζ . Матрицы M , Z и S приобретают новую строку и столбец:

$$M \mapsto \begin{pmatrix} M & m \\ m^T & \zeta \end{pmatrix}, \quad Z \mapsto \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \quad S \mapsto \begin{pmatrix} S & s \\ -s^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Здесь $m_i = \text{Re} A_{ij}$ и $s_i = (y_i - y_j) A_{ij}$. Другие матрицы также увеличиваются:

$$V \mapsto \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad W \mapsto \begin{pmatrix} W & w \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad P \mapsto \begin{pmatrix} P & p \\ -p^\dagger & i\rho \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Переписывая уравнения (B.24), (B.25) и (B.26) с этими расширенными матрицами, мы получаем следующий набор тождеств:

$$\begin{pmatrix} M & m \\ m^T & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ v^T & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V Z V^T & V^T Z v \\ v^T Z V & v^T Z v + \zeta \nu^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & w \\ 0 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V W & V w + \omega v \\ 0 & \nu \omega \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{pmatrix} P & p \\ -p^\dagger & i\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^T & 0 \\ w^T & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & s \\ -s^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & w \\ 0 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^T S W & W^T S w + \omega W^T s \\ w^T S W - \omega s^\dagger W & w^T S w + \omega(w^T s - s^\dagger w) \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.31})$$

$$G = \frac{4e^2 W}{\pi h L} - \frac{2e^2}{hL^2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} P Z & p \zeta \\ -p^\dagger Z & i \rho \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^T Z & -p^* \zeta \\ p^T Z & i \rho \zeta \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{Б.32})$$

При добавлении вакансии обновленные матрицы M и S , то есть векторы m , s и число ζ , известны. Последовательно решая уравнения на все остальные параметры, мы находим

$$v = ZW^T m, \quad \nu = \sqrt{1 - \zeta v^T Z v}, \quad \omega = 1/\nu, \quad w = -\omega W v, \quad (\text{Б.33})$$

$$p = \omega(W^T s - P v), \quad i\rho = -\omega(v^T p + s^\dagger w). \quad (\text{Б.34})$$

Наконец, в соответствии с (Б.32), добавление вакансии дает поправку к кондактансу

$$\delta G = \frac{2e^2}{hL^2} \left[2\zeta \text{Re}(p^T Z p) - \rho^2 \right]. \quad (\text{Б.35})$$

Добавляя вакансии по одной, мы проделываем циклическое вычисление по формулам (Б.33), (Б.34) и (Б.35). С помощью этого алгоритма были получены данные для рис. 4.10 и 4.11.

Как и в случае резонансных потенциальных примесей, для работы алгоритма нужно сохранять лишь информацию о положении вакансий и матрицы W и P . Вычисленные значения матриц M , A , V и S хранить не нужно.

Список публикаций

1. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Electron transport in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 235443.
2. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Quantum criticality and minimal conductivity in graphene with long-range disorder](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, p. 256801.
3. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Conductivity of disordered graphene at half filling](#) // Eur. Phys. J. Spec. Top., 2007, vol. 148, pp. 63–72.
4. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Theory of anomalous quantum Hall effects in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 77, p. 195430.
5. *A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Analytic theory of ballistic transport in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2009, vol. 79, p. 075405.
6. *M. Titov, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. Schuessler, A. D. Mirlin*, [Charge transport in graphene with resonant scatterers](#) // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 104, p. 076802.
7. *M. Titov, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi*, [Metallic proximity effect in ballistic graphene with resonant scatterers](#) // Semicond. Sci. Technol., 2010, vol. 25, p. 034007.
8. *A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Full counting statistics in disordered graphene at the Dirac point: From ballistics to diffusion](#) // Phys. Rev. B, 2010, vol. 82, p. 085419.
9. *P. M. Ostrovsky, M. Titov, S. Bera, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Diffusion and criticality in undoped graphene with resonant scatterers](#) // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 105, p. 266803.
10. *J. Schelter, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, B. Trauzettel, M. Titov*, [Color-dependent conductance of graphene with adatoms](#) // Phys. Rev. Lett., 2011, vol. 106, p. 166806.
11. *E. J. König, P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, A. D. Mirlin*, [Metal-insulator transition in two-dimensional random fermion systems of chiral symmetry classes](#) // Phys. Rev. B, 2012, vol. 85, p. 195130.
12. *S. Gattenlöhner, W.-R. Hanne, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, M. Titov*, [Quantum Hall criticality and localization in graphene with short-range impurities at the Dirac point](#) // Phys. Rev. Lett., 2014, vol. 112, p. 026802.
13. *P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, E. J. König, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, M. A. Skvortsov*, [Density of states in a two-dimensional chiral metal with vacancies](#) // Phys. Rev. Lett., 2014, vol. 113, p. 186803.
14. *S. Gattenlöhner, I. V. Gornyi, P. M. Ostrovsky, B. Trauzettel, A. D. Mirlin, M. Titov*, [Lévy flights due to anisotropic disorder in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2016, vol. 117, p. 046603.

Литература

1. *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov*, **Electric field effect in atomically thin carbon films** // *Science*, 2004, vol. 306, pp. 666–669.
2. *K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, A. K. Geim*, **Two-dimensional atomic crystals** // *PNAS*, 2005, vol. 102, pp. 10451–10453.
3. *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov*, **Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene** // *Nature*, 2005, vol. 438, pp. 197–200.
4. *Y. B. Zhang, Y. W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim*, **Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene** // *Nature*, 2005, vol. 438, pp. 201–204.
5. *Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small, M. S. Purewal, Y. W. Tan, M. Fazlollahi, J. D. Chudow, J. A. Jaszczak, H. L. Stormer, P. Kim*, **Landau-level splitting in graphene in high magnetic fields** // *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, p. 136806.
6. *K. S. Novoselov, E. McCann, S. V. Morozov, V. I. Fal'ko, M. I. Katsnelson, U. Zeitler, D. Jiang, F. Schedin, A. K. Geim*, **Unconventional quantum Hall effect and Berry's phase of 2π in bilayer graphene** // *Nat. Phys.*, 2006, vol. 2, pp. 177–180.
7. *S. V. Morozov, K. S. Novoselov, M. I. Katsnelson, F. Schedin, L. A. Ponomarenko, D. Jiang, A. K. Geim*, **Strong suppression of weak localization in graphene** // *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97, p. 016801.
8. *Y.-W. Tan, Y. Zhang, H. L. Stormer, P. Kim*, **Temperature dependent electron transport in graphene** // *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2007, vol. 148, pp. 15–18.
9. *K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S. V. Morozov, H. L. Stormer, U. Zeitler, J. C. Maan, G. S. Boebinger, P. Kim, A. K. Geim*, **Room-temperature quantum Hall effect in graphene** // *Science*, 2007, vol. 315, p. 1379.
10. *V. P. Gusynin, S. G. Sharapov*, **Unconventional integer quantum Hall effect in graphene** // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, p. 146801.
11. *V. P. Gusynin, S. G. Sharapov*, **Transport of Dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities** // *Phys. Rev. B*, 2006, vol. 73, p. 245411.
12. *V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte*, **Unusual microwave response of Dirac quasiparticles in graphene** // *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, p. 256802.
13. *V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov, I. A. Shovkovy*, **Excitonic gap, phase transition, and quantum Hall effect in graphene** // *Phys. Rev. B*, 2006, vol. 74, p. 195429.

14. *V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte*, [Anomalous absorption line in the magneto-optical response of graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, p. 157402.
15. *C. L. Kane, E. J. Mele*, [Quantum spin Hall effect in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, p. 226801.
16. *M. I. Katsnelson*, [Zitterbewegung, chirality, and minimal conductivity in graphene](#) // Eur. Phys. J. B, 2006, vol. 51, pp. 157–160.
17. *M. I. Katsnelson*, [Minimal conductivity in bilayer graphene](#) // Eur. Phys. J. B, 2006, vol. 52, pp. 151–153.
18. *M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim*, [Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene](#) // Nat. Phys., 2006, vol. 2, pp. 620–625.
19. *M. I. Katsnelson*, [Nonlinear screening of charge impurities in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 201401.
20. *V. M. Pereira, F. Guinea, J. M. B. L. dos Santos, N. M. R. Peres, A. H. Castro Neto*, [Disorder induced localized states in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, p. 036801.
21. *N. M. R. Peres, F. Guinea, A. H. Castro Neto*, [Coulomb interactions and ferromagnetism in pure and doped graphene](#) // Phys. Rev. B, 2005, vol. 72, p. 174406.
22. *N. M. R. Peres, F. Guinea, A. H. Castro Neto*, [Electronic properties of disordered two-dimensional carbon](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 125411.
23. *N. M. R. Peres, A. H. Castro Neto, F. Guinea*, [Conductance quantization in mesoscopic graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 195411.
24. *N. M. R. Peres, A. H. Castro Neto, F. Guinea*, [Dirac fermion confinement in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 241403.
25. *A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres*, [Edge and surface states in the quantum Hall effect in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 205408.
26. *F. Guinea, A. H. Castro Neto, N. M. R. Peres*, [Electronic states and Landau levels in graphene stacks](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 245426.
27. *A. F. Morpurgo, F. Guinea*, [Intervalley scattering, long-range disorder, and effective time-reversal symmetry breaking in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 196804.
28. *L. Brey, H. A. Fertig*, [Edge states and the quantized Hall effect in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 195408.
29. *L. Brey, H. A. Fertig*, [Electronic states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 235411.
30. *D. A. Abanin, P. A. Lee, L. S. Levitov*, [Spin-filtered edge states and quantum Hall effect in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, p. 176803.
31. *Y. G. Pogorelov*, Anomalous impurity resonance in graphene, arXiv: [cond-mat/0603327](#).
32. *C. W. J. Beenakker*, [Specular Andreev reflection in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 067007.

33. *J. Tworzydło, B. Trauzettel, M. Titov, A. Rycerz, C. W. J. Beenakker*, [Sub-Poissonian shot noise in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, p. 246802.
34. *M. Titov, C. W. J. Beenakker*, [Josephson effect in ballistic graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 041401.
35. *E. McCann, V. I. Fal'ko*, [Landau-level degeneracy and quantum Hall effect in a graphite bilayer](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, p. 086805.
36. *E. McCann, K. Kechedzhi, V. I. Fal'ko, H. Suzuura, T. Ando, B. L. Altshuler*, [Weak-localization magnetoresistance and valley symmetry in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 146805.
37. *V. V. Cheianov, V. I. Fal'ko*, [Selective transmission of Dirac electrons and ballistic magnetoresistance of n-p junctions in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 041403.
38. *M. Koshino, T. Ando*, [Transport in bilayer graphene: Calculations within a self-consistent Born approximation](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 245403.
39. *T. Ando*, [Screening effect and impurity scattering in monolayer graphene](#) // J. Phys. Soc. Jpn, 2006, vol. 75, p. 074716.
40. *D. V. Khveshchenko*, [Electron localization properties in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 036802.
41. *D. V. Khveshchenko*, [Coulomb-interacting Dirac fermions in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 161402.
42. *M. S. Foster, A. W. W. Ludwig*, [Interaction effects on two-dimensional fermions with random hopping](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 155104.
43. *K. Nomura, A. H. MacDonald*, [Quantum Hall ferromagnetism in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, p. 256602.
44. *K. Nomura, A. H. MacDonald*, [Quantum transport of massless Dirac fermions](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, p. 076602.
45. *L. A. Falkovsky, A. A. Varlamov*, [Space-time dispersion of graphene conductivity](#) // Eur. Phys. J. B, 2007, vol. 56, pp. 281–284.
46. *V. V. Cheianov, V. I. Fal'ko*, [Friedel oscillations, impurity scattering, and temperature dependence of resistivity in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 226801.
47. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Electron transport in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 235443.
48. *I. L. Aleiner, K. B. Efetov*, [Effect of disorder on transport in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 236801.
49. *A. Altland*, [Low-energy theory of disordered graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 236802.
50. *E. McCann*, [Asymmetry gap in the electronic band structure of bilayer graphene](#) // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 161403.

51. *N. A. Sinitsyn, A. H. MacDonald, T. Jungwirth, V. K. Dugaev, J. Sinova*, **Anomalous Hall effect in a two-dimensional Dirac band: The link between the Kubo-Streda formula and the semiclassical Boltzmann equation approach** // Phys. Rev. B, 2007, vol. 75, p. 045315.
52. *I. A. Luk'yanchuk, Y. Kopelevich*, **Dirac and normal fermions in graphite and graphene: Implications of the quantum Hall effect** // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 256801.
53. *I. Snyman, C. W. J. Beenakker*, **Ballistic transmission through a graphene bilayer** // Phys. Rev. B, 2007, vol. 75, p. 045322.
54. *H. P. Dahal, Y. N. Joglekar, K. S. Bedell, A. V. Balatsky*, **Absence of Wigner crystallization in graphene** // Phys. Rev. B, 2006, vol. 74, p. 233405.
55. *T. O. Wehling, A. V. Balatsky, M. I. Katsnelson, A. I. Lichtenstein, K. Scharnberg, R. Wiesendanger*, **Local electronic signatures of impurity states in graphene** // Phys. Rev. B, 2007, vol. 75, p. 125425.
56. *P. R. Wallace*, **The band theory of graphite** // Phys. Rev., 1947, vol. 71, pp. 622–634.
57. *F. Schedin, A. K. Geim, S. V. Morozov, E. W. Hill, P. Blake, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov*, **Detection of individual gas molecules adsorbed on graphene** // Nat. Mater., 2007, vol. 6, pp. 652–655.
58. *A. K. Geim, K. S. Novoselov*, **The rise of graphene** // Nat. Mater., 2007, vol. 6, pp. 183–191.
59. *A. K. Geim*, **Graphene: Status and prospects** // Science, 2009, vol. 324, pp. 1530–1534.
60. *A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim*, **The electronic properties of graphene** // Rev. Mod. Phys., 2009, vol. 81, pp. 109–162.
61. *K. S. Novoselov*, **Nobel lecture: Graphene: Materials in the flatland** // Rev. Mod. Phys., 2011, vol. 83, pp. 837–849.
62. *A. K. Geim*, **Nobel lecture: Random walk to graphene** // Rev. Mod. Phys., 2011, vol. 83, pp. 851–862.
63. *P. W. Anderson*, **Absence of diffusion in certain random lattices** // Phys. Rev., 1958, vol. 109, pp. 1492–1505.
64. *N. F. Mott, W. D. Twose*, **The theory of impurity conduction** // Adv. Phys., 1961, vol. 10, pp. 107–163.
65. *D. J. Thouless*, **Maximum metallic resistance in thin wires** // Phys. Rev. Lett., 1977, vol. 39, pp. 1167–1169.
66. *E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, T. V. Ramakrishnan*, **Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions** // Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 42, pp. 673–676.
67. *Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий*, **Проводимость частицы в двумерном случайном потенциале** // Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 248–252.
68. *S. Hikami, A. I. Larkin, Y. Nagaoka*, **Spin-orbit interaction and magnetoresistance in the two-dimensional random system** // Prog. Theor. Phys., 1980, vol. 63, pp. 707–710.

69. *F. Wegner*, [The mobility edge problem: Continuous symmetry and a conjecture](#) // *Z. Phys. B: Condens. Mat.*, 1979, vol. 35, pp. 207–210.
70. *M. R. Zirnbauer*, [Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory](#) // *J. Math. Phys.*, 1996, vol. 37, pp. 4986–5018.
71. *A. Altland, M. R. Zirnbauer*, [Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures](#) // *Phys. Rev. B*, 1997, vol. 55, pp. 1142–1161.
72. *R. Gade, F. Wegner*, [The \$n = 0\$ replica limit of \$u\(n\)\$ and \$u\(n\)/so\(n\)\$ models](#) // *Nucl. Phys. B*, 1991, vol. 360, pp. 213–218.
73. *R. Gade*, [Anderson localization for sublattice models](#) // *Nucl. Phys. B*, 1993, vol. 398, pp. 499–515.
74. *K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper*, [New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance](#) // *Phys. Rev. Lett.*, 1980, vol. 45, pp. 494–497.
75. [The Quantum Hall Effect](#) / ed. by R. E. Prange, S. M. Girvin, New York: Springer, 1990.
76. *A. M. M. Pruisken*, [On localization in the theory of the quantized Hall effect: A two-dimensional realization of the \$\theta\$ -vacuum](#) // *Nucl. Phys. B*, 1984, vol. 235, pp. 277–298.
77. *D. E. Khmelnitskii*, [Quantum Hall effect and additional oscillations of conductivity in weak magnetic fields](#) // *Phys. Lett. A*, 1984, vol. 106, pp. 182–183.
78. *C. L. Kane, E. J. Mele*, [\$Z_2\$ topological order and the quantum spin Hall effect](#) // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, p. 146802.
79. *L. Sheng, D. N. Sheng, C. S. Ting, F. D. M. Haldane*, [Nondissipative spin Hall effect via quantized edge transport](#) // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, p. 136602.
80. *B. A. Bernevig, T. L. Hughes, S.-C. Zhang*, [Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells](#) // *Science*, 2006, vol. 314, pp. 1757–1761.
81. *M. Onoda, Y. Avishai, N. Nagaosa*, [Localization in a quantum spin Hall system](#) // *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 98, p. 076802.
82. *M. König, S. Wiedmann, C. Bruene, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, S.-C. Zhang*, [Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells](#) // *Science*, 2007, vol. 318, pp. 766–770.
83. *D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava, M. Z. Hasan*, [A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase](#) // *Nature*, 2008, vol. 452, p. 970.
84. *M. Z. Hasan, C. L. Kane*, [Colloquium: Topological insulators](#) // *Rev. Mod. Phys.*, 2010, vol. 82, pp. 3045–3067.
85. *X.-L. Qi, S.-C. Zhang*, [Topological insulators and superconductors](#) // *Rev. Mod. Phys.*, 2011, vol. 83, pp. 1057–1110.
86. *A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig*, [Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions](#) // *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 78, p. 195125.

87. *A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig*, [Classification of Topological Insulators and Superconductors](#) // AIP Conference Proceedings, vol. 1134 / ed. by V. Lebedev, M. Feigelman, 2009, pp. 10–21, Landau Memorial Conference on Advances in Theoretical Physics, Chernogolovka, Russia, June 22–26, 2008.
88. *A. Kitaev*, [Periodic table for topological insulators and superconductors](#) // AIP Conference Proceedings, vol. 1134 / ed. by V. Lebedev, M. Feigelman, 2009, pp. 22–30, Landau Memorial Conference on Advances in Theoretical Physics, Chernogolovka, Russia, June 22–26, 2008.
89. *V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven*, [Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices](#) // Science, 2012, vol. 336, pp. 1003–1007.
90. *A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, H. Shtrikman*, [Zero-bias peaks and splitting in an Al-InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions](#) // Nat. Phys., 2012, vol. 8, pp. 887–895.
91. *A. A. Nersesyan, A. M. Tsvetlik, F. Wenger*, [Disorder effects in two-dimensional \$d\$ -wave superconductors](#) // Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 72, pp. 2628–2631.
92. *A. A. Nersesyan, A. M. Tsvetlik, F. Wenger*, [Disorder effects in two-dimensional Fermi systems with conical spectrum: exact results for the density of states](#) // Nucl. Phys. B, 1995, vol. 438, pp. 561–588.
93. *A. M. Tsvetlik*, [Exactly solvable model of fermions with disorder](#) // Phys. Rev. B, 1995, vol. 51, pp. 9449–9454.
94. *A. Altland, B. D. Simons, M. R. Zirnbauer*, [Theories of low-energy quasi-particle states in disordered \$d\$ -wave superconductors](#) // Phys. Rep. Rev. Sec. Phys. Lett., 2002, vol. 359, pp. 283–354.
95. *P. J. Hirschfeld, P. Wölfle, D. Einzel*, [Consequences of resonant impurity scattering in anisotropic superconductors - thermal and spin relaxation properties](#) // Phys. Rev. B, 1988, vol. 37, pp. 83–97.
96. *A. C. Durst, P. A. Lee*, [Impurity-induced quasiparticle transport and universal-limit Wiedemann-Franz violation in \$d\$ -wave superconductors](#) // Phys. Rev. B, 2000, vol. 62, pp. 1270–1290.
97. *C. Chamon, C. Mudry*, [Density of states for dirty \$d\$ -wave superconductors: A unified and dual approach for different types of disorder](#) // Phys. Rev. B, 2001, vol. 63, p. 100503.
98. *C. Pepin, P. A. Lee*, [Density of states of a \$d\$ -wave superconductor in the presence of strong impurity scatterers: A nonperturbative result](#) // Phys. Rev. B, 2001, vol. 63, p. 054502.
99. *A. G. Yashenkin, W. A. Atkinson, I. V. Gornyi, P. J. Hirschfeld, D. V. Khveshchenko*, [Nesting symmetries and diffusion in disordered \$d\$ -wave superconductors](#) // Phys. Rev. Lett., 2001, vol. 86, pp. 5982–5985.
100. *P. J. Hirschfeld, W. A. Atkinson*, [Pi a la node: Disordered \$d\$ -wave superconductors in two dimensions for the random masses](#) // J. Low Temp. Phys., 2002, vol. 126, pp. 881–900.

101. *A. Altland*, [Spectral and transport properties of \$d\$ -wave superconductors with strong impurities](#) // Phys. Rev. B, 2002, vol. 65, p. 104525.
102. *V. M. Loktev, Y. G. Pogorelov*, [Validity of self-consistent \$T\$ -matrix for doped \$d\$ -wave superconductors](#) // Phys. Lett. A, 2004, vol. 320, pp. 307–311.
103. *A. V. Balatsky, I. Vekhter, J.-X. Zhu*, [Impurity-induced states in conventional and unconventional superconductors](#) // Rev. Mod. Phys., 2006, vol. 78, pp. 373–433.
104. *О. Н. Дорохов*, Локализация электрона в многоканальной проволоке // ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 1040–1058.
105. *В. Л. Березинский*, Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. II. Квантовые системы // ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1144.
106. *J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless*, [Long-range order and metastability in two-dimensional solids and superfluids](#) // J. Phys. C: Solid State Phys., 1972, vol. 5, p. L124.
107. *J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless*, [Ordering, metastability, and phase transitions in two-dimensional systems](#) // J. Phys. C: Solid State Phys., 1973, vol. 6, pp. 1181–1203.
108. *J. M. Kosterlitz*, [Critical properties of two-dimensional XY model](#) // J. Phys. C: Solid State Phys., 1974, vol. 7, pp. 1046–1060.
109. *N. H. Shon, T. Ando*, [Quantum transport in two-dimensional graphite system](#) // J. Phys. Soc. Jpn, 1998, vol. 67, pp. 2421–2429.
110. *J. Gonzalez, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano*, [Electron-electron interactions in graphene sheets](#) // Phys. Rev. B, 2001, vol. 63, p. 134421.
111. *T. Stauber, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano*, [Disorder and interaction effects in two-dimensional graphene sheets](#) // Phys. Rev. B, 2005, vol. 71, p. 041406.
112. *M. A. H. Vozmediano, F. Guinea, M. P. Lopez-Sancho*, [Interactions, disorder and local defects in graphite](#) // J. Phys. Chem. Solids, 2006, vol. 67, pp. 562–566.
113. *J. C. Meyer, A. K. Geim, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, T. J. Booth, S. Roth*, [The structure of suspended graphene sheets](#) // Nature, 2007, vol. 446, pp. 60–63.
114. *T. Ando, Y. S. Zheng, H. Suzuura*, [Dynamical conductivity and zero-mode anomaly in honeycomb lattices](#) // J. Phys. Soc. Jpn, 2002, vol. 71, pp. 1318–1324.
115. *Y. S. Zheng, T. Ando*, [Hall conductivity of a two-dimensional graphite system](#) // Phys. Rev. B, 2002, vol. 65, p. 245420.
116. *T. Ando*, [Theory of electronic states and transport in carbon nanotubes](#) // J. Phys. Soc. Jpn, 2005, vol. 74, pp. 777–817.
117. *Л. П. Горьков, П. А. Калугин*, [Необычная сверхпроводимость и дефекты](#) // Письма в ЖЭТФ, 1985, т. 41, с. 208–210.
118. *P. A. Lee*, [Localized states in a \$d\$ -wave superconductor](#) // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 71, pp. 1887–1890.

119. *V. S. Dotsenko, V. S. Dotsenko*, **Critical behavior of the phase transition in the 2D Ising model with impurities** // Adv. Phys., 1983, vol. 32, pp. 129–172.
120. *A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shankar, G. Grinstein*, **Integer quantum Hall transition: An alternative approach and exact results** // Phys. Rev. B, 1994, vol. 50, pp. 7526–7552.
121. *M. Bocquet, D. Serban, M. R. Zirnbauer*, **Disordered 2D quasiparticles in class D: Dirac fermions with random mass, and dirty superconductors** // Nucl. Phys. B, 2000, vol. 578, pp. 628–680.
122. *S. Guruswamy, A. LeClair, A. W. W. Ludwig*, **$gl(N|N)$ super-current algebras for disordered Dirac fermions in two dimensions** // Nucl. Phys. B, 2000, vol. 583, pp. 475–512.
123. *P. Wölfle, R. N. Bhatt*, **Electron localization in anisotropic systems** // Phys. Rev. B, 1984, vol. 30, pp. 3542–3544.
124. *R. N. Bhatt, P. Wölfle, T. V. Ramakrishnan*, **Localization and interaction effects in anisotropic disordered electronic systems** // Phys. Rev. B, 1985, vol. 32, pp. 569–574.
125. *T. Ando, T. Nakanishi, R. Saito*, **Berry’s phase and absence of back scattering in carbon nanotubes** // J. Phys. Soc. Jpn, 1998, vol. 67, pp. 2857–2862.
126. *H. Suzuura, T. Ando*, **Crossover from symplectic to orthogonal class in a two-dimensional honeycomb lattice** // Phys. Rev. Lett., 2002, vol. 89, p. 266603.
127. *O. Motrunich, K. Damle, D. A. Huse*, **Particle-hole symmetric localization in two dimensions** // Phys. Rev. B, 2002, vol. 65, p. 064206.
128. *C. Mudry, S. Ryu, A. Furusaki*, **Density of states for the π -flux state with bipartite real random hopping only: A weak disorder approach** // Phys. Rev. B, 2003, vol. 67, p. 064202.
129. *H. Yamada, T. Fukui*, **Random hopping fermions on bipartite lattices: Density of states, inverse participation ratios, and their correlations in a strong disorder regime** // Nucl. Phys. B, 2004, vol. 679, pp. 632–646.
130. *L. Dell’Anna*, **Anomalous dimensions of operators without derivatives in the non-linear sigma-model for disordered bipartite lattices** // Nucl. Phys. B, 2006, vol. 750, pp. 213–228.
131. *F. Evers, A. D. Mirlin*, **Anderson transitions** // Rev. Mod. Phys., 2008, vol. 80, pp. 1355–1417.
132. *D. Bernard, A. LeClair*, **A classification of 2D random Dirac fermions** // J. Phys. A: Math. Gen., 2002, vol. 35, pp. 2555–2567.
133. *P. Fendley, R. M. Konik*, **Phase transitions in two-dimensional disordered systems** // Phys. Rev. B, 2000, vol. 62, pp. 9359–9363.
134. *A. W. W. Ludwig*, **A free field representation of the $Osp(2|2)$ current algebra at level $k = -2$, and Dirac fermions in a random $SU(2)$ gauge potential**, arXiv: [cond-mat/0012189](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0012189).
135. *J. Schwinger*, **Gauge invariance and mass** // Phys. Rev., 1962, vol. 125, p. 397.
136. *J. Schwinger*, **Gauge invariance and mass II** // Phys. Rev., 1962, vol. 128, p. 2425.
137. *М. Е. Пескин, Д. В. Шредер*, **Введение в квантовую теорию поля**, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

138. *S. Hikami, M. Shirai, F. Wegner*, Anderson localization in the lowest Landau level for a two-subband model // Nucl. Phys. B, 1993, vol. 408, pp. 415–426.
139. *Y. Hatsugai, X. G. Wen, M. Kohmoto*, Disordered critical wave functions in random-bond models in two dimensions: Random-lattice fermions at $E=0$ without doubling // Phys. Rev. B, 1997, vol. 56, pp. 1061–1064.
140. *K. B. Efetov*, Supersymmetry in disorder and chaos, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
141. *F. D. M. Haldane*, Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the “parity anomaly” // Phys. Rev. Lett., 1988, vol. 61, pp. 2015–2018.
142. *K. Fujikawa*, Path integral for gauge theories with fermions // Phys. Rev. D, 1980, vol. 21, pp. 2848–2858.
143. *M. V. Berry, R. J. Mondragon*, Neutrino billiards: Time-reversal symmetry breaking without magnetic fields // Proc. R. Soc. London Ser. A: Math. Phys. Eng. Sci., 1987, vol. 412, pp. 53–74.
144. *Y. Huo, R. E. Hetzel, R. N. Bhatt*, Universal conductance in the lowest Landau level // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 70, pp. 481–484.
145. *B. M. Gammel, W. Brenig*, Scaling of the static conductivity in the quantum Hall effect // Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 73, pp. 3286–3289.
146. *Z. Q. Wang, B. Jovanovic, D. H. Lee*, Critical conductance and its fluctuations at integer hall plateau transitions // Phys. Rev. Lett., 1996, vol. 77, pp. 4426–4429.
147. *S. Cho, M. P. A. Fisher*, Conductance fluctuations at the integer quantum Hall plateau transition // Phys. Rev. B, 1997, vol. 55, pp. 1637–1641.
148. *L. Schweitzer, P. Markos*, Universal conductance and conductivity at critical points in integer quantum Hall systems // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, p. 256805.
149. *О. Я. Вуро, Д. Б. Фукс*, Введение в теорию гомотопий // Итоги науки и техники: Серия «Современная математика и ее приложения», т. 24, М.: ВИНТИ АН СССР, 1988, с. 6–121.
150. *P. Fendley*, Integrable sigma models with $\theta = \pi$ // Phys. Rev. B, 2001, vol. 63, p. 104429.
151. *P. Markos, L. Schweitzer*, Critical regime of two-dimensional Ando model: Relation between critical conductance and fractal dimension of electronic eigenstates // J. Phys. A: Math. Gen., 2006, vol. 39, pp. 3221–3230.
152. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, Interaction-induced criticality in Z_2 topological insulators // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 105, p. 036803.
153. *P. W. Brouwer, K. Frahm*, Quantum transport in disordered wires: Equivalence of the one-dimensional sigma model and the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar equation // Phys. Rev. B, 1996, vol. 53, pp. 1490–1501.

154. *T. Ando, H. Suzuura*, Presence of perfectly conducting channel in metallic carbon nanotubes // J. Phys. Soc. Jpn, 2002, vol. 71, pp. 2753–2760.
155. *Y. Takane*, Quantum electron transport in disordered wires with symplectic symmetry // J. Phys. Soc. Jpn, 2004, vol. 73, pp. 1430–1433.
156. *H. Sakai, Y. Takane*, Random-matrix theory of electron transport in disordered wires with symplectic symmetry // J. Phys. Soc. Jpn, 2006, vol. 75, p. 054711.
157. *E. Khalaf, M. A. Skvortsov, P. M. Ostrovsky*, Semiclassical electron transport at the edge of a two-dimensional topological insulator: Interplay of protected and unprotected modes // Phys. Rev. B, 2016, vol. 93, p. 125405.
158. *M. Koshino, T. Ando*, Splitting of the quantum Hall transition in disordered graphenes // Phys. Rev. B, 2007, vol. 75, p. 033412.
159. *J. H. Bardarson, J. Tworzydło, P. W. Brouwer, C. W. J. Beenakker*, One-parameter scaling at the Dirac point in graphene // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 99, p. 106801.
160. *A. Rycerz, J. Tworzydło, C. W. J. Beenakker*, Anomalously large conductance fluctuations in weakly disordered graphene // EPL, 2007, vol. 79, p. 57003.
161. *T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern*, Electronic properties of two-dimensional systems // Rev. Mod. Phys., 1982, vol. 54, pp. 437–672.
162. *R. B. Laughlin*, Levitation of extended-state bands in a strong magnetic field // Phys. Rev. Lett., 1984, vol. 52, p. 2304.
163. *B. Huckestein*, Scaling theory of the integer quantum Hall effect // Rev. Mod. Phys., 1995, vol. 67, pp. 357–396.
164. *I. F. Herbut*, Theory of integer quantum Hall effect in graphene // Phys. Rev. B, 2007, vol. 75, p. 165411.
165. *E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky*, Toward a theory of the quantum Hall effect in graphene // Low Temp. Phys., 2008, vol. 34, pp. 790–793.
166. *D. N. Sheng, L. Sheng, Z. Y. Weng*, Quantum Hall effect in graphene: Disorder effect and phase diagram // Phys. Rev. B, 2006, vol. 73, p. 233406.
167. *P. Goswami, X. Jia, S. Chakravarty*, Quantum Hall plateau transition in the lowest Landau level of disordered graphene // Phys. Rev. B, 2007, vol. 76, p. 205408.
168. *S. Ryu, C. Mudry, H. Obuse, A. Furusaki*, Z_2 topological term, the global anomaly, and the two-dimensional symplectic symmetry class of Anderson localization // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 99, p. 116601.
169. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, Quantum criticality and minimal conductivity in graphene with long-range disorder // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, p. 256801.
170. *D. A. Abanin, K. S. Novoselov, U. Zeitler, P. A. Lee, A. K. Geim, L. S. Levitov*, Dissipative quantum Hall effect in graphene near the Dirac point // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, p. 196806.

171. *Z. Q. Wang, M. P. A. Fisher, S. M. Girvin, J. T. Chalker*, [Short-range interactions and scaling near integer quantum Hall transitions](#) // Phys. Rev. B, 2000, vol. 61, pp. 8326–8333.
172. *A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov*, [The instanton vacuum of generalized \$CP^{N-1}\$ models](#) // Ann. Phys., 2005, vol. 316, pp. 285–356.
173. *L. W. Engel, D. Shahar, C. Kurdak, D. C. Tsui*, [Microwave frequency dependence of integer quantum Hall effect: Evidence for finite-frequency scaling](#) // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 71, pp. 2638–2641.
174. *D. E. Khmelnitskii*, Quantum Hall effect without Landau quantization // Helv. Phys. Acta, 1992, vol. 65, pp. 164–169.
175. *D. K. K. Lee, J. T. Chalker*, [Unified model for two localization problems: Electron states in spin-degenerate Landau levels and in a random magnetic field](#) // Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 72, pp. 1510–1513.
176. *P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Theory of anomalous quantum Hall effects in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 77, p. 195430.
177. *F. V. Tikhonenko, D. W. Horsell, R. V. Gorbachev, A. K. Savchenko*, [Weak localization in graphene flakes](#) // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 100, p. 056802.
178. *D. W. Horsell, A. K. Savchenko, F. V. Tikhonenko, K. Kechedzhi, I. V. Lerner, V. I. Fal'ko*, [Mesoscopic conductance fluctuations in graphene](#) // Solid State Commun., 2009, vol. 149, pp. 1041–1045.
179. *F. V. Tikhonenko, A. A. Kozikov, A. K. Savchenko, R. V. Gorbachev*, [Transition between electron localization and antilocalization in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2009, vol. 103, p. 226801.
180. *Z. Jiang, Y. Zhang, H. L. Stormer, P. Kim*, [Quantum Hall states near the charge-neutral Dirac point in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 99, p. 106802.
181. *L. Sheng, D. N. Sheng, F. D. M. Haldane, L. Balents*, [Odd-integer quantum Hall effect in graphene: Interaction and disorder effects](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 99, p. 196802.
182. *Y. Aharonov, A. Casher*, [Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field](#) // Phys. Rev. A, 1979, vol. 19, pp. 2461–2462.
183. *M. F. Atiyah, I. M. Singer*, [Index of elliptic operators I](#) // Ann. Math., 1968, vol. 87, pp. 484–530.
184. *M. F. Atiyah, G. B. Segal*, [Index of elliptic operators II](#) // Ann. Math., 1968, vol. 87, pp. 531–545.
185. *M. F. Atiyah, I. M. Singer*, [Index of elliptic operators III](#) // Ann. Math., 1968, vol. 87, pp. 546–604.
186. *M. F. Atiyah, I. M. Singer*, [Index of elliptic operators IV](#) // Ann. Math., 1971, vol. 93, pp. 119–138.

187. *J. S. Caux*, [Exact multifractality for disordered N-flavor Dirac fermions in two dimensions](#) // Phys. Rev. Lett., 1998, vol. 81, pp. 4196–4199.
188. *P. San-Jose, E. Prada, D. S. Golubev*, [Universal scaling of current fluctuations in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2007, vol. 76, p. 195445.
189. *C. H. Lewenkopf, E. R. Mucciolo, A. H. Castro Neto*, [Numerical studies of conductivity and Fano factor in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 77, p. 081410.
190. *H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. B. Oostinga, L. M. K. Vandersypen, A. F. Morpurgo*, [Bipolar supercurrent in graphene](#) // Nature, 2007, vol. 446, pp. 56–59.
191. *F. Miao, S. Wijeratne, Y. Zhang, U. C. Coskun, W. Bao, C. N. Lau*, [Phase-coherent transport in graphene quantum billiards](#) // Science, 2007, vol. 317, pp. 1530–1533.
192. *R. Danneau, F. Wu, M. F. Craciun, S. Russo, M. Y. Tomi, J. Salmilehto, A. F. Morpurgo, P. J. Hakonen*, [Shot noise in ballistic graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 100, p. 196802.
193. *R. Danneau, F. Wu, M. F. Craciun, S. Russo, M. Y. Tomi, J. Salmilehto, A. F. Morpurgo, P. J. Hakonen*, [Evanescent wave transport and shot noise in graphene: Ballistic regime and effect of disorder](#) // J. Low Temp. Phys., 2008, vol. 153, pp. 374–392.
194. *R. Danneau, F. Wu, M. F. Craciun, S. Russo, M. Y. Tomi, J. Salmilehto, A. F. Morpurgo, P. J. Hakonen*, [Shot noise measurements in graphene](#) // Solid State Commun., 2009, vol. 149, pp. 1050–1055.
195. *Л. С. Левитов, Г. Б. Лесовик*, [Распределение заряда в квантовом дробовом шуме](#) // Письма в ЖЭТФ, 1993, т. 58, с. 225–230.
196. *H.-W. Lee, L. S. Levitov, A. Y. Yakovets*, [Universal statistics of transport in disordered conductors](#) // Phys. Rev. B, 1995, vol. 51, pp. 4079–4083.
197. *C. W. J. Beenakker*, [Random-matrix theory of quantum transport](#) // Rev. Mod. Phys., 1997, vol. 69, pp. 731–808.
198. *S. Ryu, C. Mudry, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig*, [Landauer conductance and twisted boundary conditions for Dirac fermions in two space dimensions](#) // Phys. Rev. B, 2007, vol. 75, p. 205344.
199. *L. DiCarlo, J. R. Williams, Y. Zhang, D. T. McClure, C. M. Marcus*, [Shot noise in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 100, p. 156801.
200. *Y. V. Nazarov*, [Limits of universality in disordered conductors](#) // Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 73, pp. 134–137.
201. *Y. V. Nazarov*, [Weak-localization and the transmission matrix](#) // Phys. Rev. B, 1995, vol. 52, pp. 4720–4723.
202. *M. Titov*, [Impurity-assisted tunneling in graphene](#) // EPL, 2007, vol. 79, p. 17004.
203. *H. Schomerus*, [Effective contact model for transport through weakly-doped graphene](#) // Phys. Rev. B, 2007, vol. 76, p. 045433.

204. *Y. M. Blanter, I. Martin*, [Transport through normal-metal-graphene contacts](#) // Phys. Rev. B, 2007, vol. 76, p. 155433.
205. *M. Titov, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi*, [Metallic proximity effect in ballistic graphene with resonant scatterers](#) // Semicond. Sci. Technol., 2010, vol. 25, p. 034007.
206. *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский*, Методы квантовой теории поля в статистической физике, М.: Физматгиз, 1962.
207. *A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin*, [Analytic theory of ballistic transport in disordered graphene](#) // Phys. Rev. B, 2009, vol. 79, p. 075405.
208. *J. Tworzydło, C. W. Groth, C. W. J. Beenakker*, [Finite difference method for transport properties of massless Dirac fermions](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 78, p. 235438.
209. *C. W. J. Beenakker*, [Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene](#) // Rev. Mod. Phys., 2008, vol. 80, pp. 1337–1354.
210. *K. Nomura, M. Koshino, S. Ryu*, [Topological delocalization of two-dimensional massless Dirac fermions](#) // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 99, p. 146806.
211. *T. O. Wehling, M. I. Katsnelson, A. I. Lichtenstein*, [Impurities on graphene: Midgap states and migration barriers](#) // Phys. Rev. B, 2009, vol. 80, p. 085428.
212. *T. O. Wehling, S. Yuan, A. I. Lichtenstein, A. K. Geim, M. I. Katsnelson*, [Resonant scattering by realistic impurities in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 105, p. 056802.
213. *S. Yuan, H. De Raedt, M. I. Katsnelson*, [Modeling electronic structure and transport properties of graphene with resonant scattering centers](#) // Phys. Rev. B, 2010, vol. 82, p. 115448.
214. *T. Stauber, N. M. R. Peres, F. Guinea*, [Electronic transport in graphene: A semiclassical approach including midgap states](#) // Phys. Rev. B, 2007, vol. 76, p. 205423.
215. *J. P. Robinson, H. Schomerus, L. Oroszlány, V. I. Fal'ko*, [Adsorbate-limited conductivity of graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 101, p. 196803.
216. *V. M. Pereira, J. M. B. L. dos Santos, A. H. Castro Neto*, [Modeling disorder in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 77, p. 115109.
217. *S. Ryu, M. Y. Han, J. Maultzsch, T. F. Heinz, P. Kim, M. L. Steigerwald, L. E. Brus*, [Reversible basal plane hydrogenation of graphene](#) // Nano Lett., 2008, vol. 8, pp. 4597–4602.
218. *B. R. Matis, J. S. Burgess, F. A. Bulat, A. L. Friedman, B. H. Houston, J. W. Baldwin*, [Surface doping and band gap tunability in hydrogenated graphene](#) // ACS Nano, 2012, vol. 6, pp. 17–22.
219. *B. R. Matis, F. A. Bulat, A. L. Friedman, B. H. Houston, J. W. Baldwin*, [Giant negative magnetoresistance and a transition from strong to weak localization in hydrogenated graphene](#) // Phys. Rev. B, 2012, vol. 85, p. 195437.
220. *J. S. Burgess, B. R. Matis, J. T. Robinson, F. A. Bulat, F. K. Perkins, B. H. Houston, J. W. Baldwin*, [Tuning the electronic properties of graphene by hydrogenation in a plasma enhanced chemical vapor deposition reactor](#) // Carbon, 2011, vol. 49, pp. 4420–4426.

221. *L. Liu, S. Ryu, M. R. Tomasik, E. Stolyarova, N. Jung, M. S. Hybertsen, M. L. Steigerwald, L. E. Brus, G. W. Flynn*, **Graphene oxidation: Thickness-dependent etching and strong chemical doping** // *Nano Lett.*, 2008, vol. 8, pp. 1965–1970.
222. *J.-H. Chen, C. Jang, S. Adam, M. S. Fuhrer, E. D. Williams, M. Ishigami*, **Charged-impurity scattering in graphene** // *Nat. Phys.*, 2008, vol. 4, pp. 377–381.
223. *S. Y. Zhou, D. A. Siegel, A. V. Fedorov, A. Lanzara*, **Metal to insulator transition in epitaxial graphene induced by molecular doping** // *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, p. 086402.
224. *J.-H. Chen, W. G. Cullen, C. Jang, M. S. Fuhrer, E. D. Williams*, **Defect scattering in graphene** // *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 102, p. 236805.
225. *J.-H. Chen, L. Li, W. G. Cullen, E. D. Williams, M. S. Fuhrer*, **Tunable Kondo effect in graphene with defects** // *Nat. Phys.*, 2011, vol. 7, pp. 535–538.
226. *D. Teweldebrhan, A. A. Balandin*, **Modification of graphene properties due to electron-beam irradiation** // *Appl. Phys. Lett.*, 2009, vol. 94, p. 013101.
227. *G. Liu, D. Teweldebrhan, A. A. Balandin*, **Tuning of graphene properties via controlled exposure to electron beams** // *IEEE Trans. Nanotechnol.*, 2011, vol. 10, pp. 865–870.
228. *D. C. Elias, R. R. Nair, T. M. G. Mohiuddin, S. V. Morozov, P. Blake, M. P. Halsall, A. C. Ferrari, D. W. Boukhvalov, M. I. Katsnelson, A. K. Geim, K. S. Novoselov*, **Control of graphene's properties by reversible hydrogenation: Evidence for graphane** // *Science*, 2009, vol. 323, pp. 610–613.
229. *S. Lebegue, M. Klintenberg, O. Eriksson, M. I. Katsnelson*, **Accurate electronic band gap of pure and functionalized graphane from GW calculations** // *Phys. Rev. B*, 2009, vol. 79, p. 245117.
230. *Z. H. Ni, L. A. Ponomarenko, R. R. Nair, R. Yang, S. Anissimova, I. V. Grigorieva, F. Schedin, P. Blake, Z. X. Shen, E. H. Hill, K. S. Novoselov, A. K. Geim*, **On resonant scatterers as a factor limiting carrier mobility in graphene** // *Nano Lett.*, 2010, vol. 10, pp. 3868–3872.
231. *J. Katoch, J.-H. Chen, R. Tsuchikawa, C. W. Smith, E. R. Mucciolo, M. Ishigami*, **Uncovering the dominant scatterer in graphene sheets on SiO₂** // *Phys. Rev. B*, 2010, vol. 82, p. 081417.
232. *J. T. Robinson, J. S. Burgess, C. E. Junkermeier, S. C. Badescu, T. L. Reinecke, F. K. Perkins, M. K. Zalalutdniov, J. W. Baldwin, J. C. Culbertson, P. E. Sheehan, E. S. Snow*, **Properties of fluorinated graphene films** // *Nano Lett.*, 2010, vol. 10, pp. 3001–3005.
233. *R. R. Nair, W. Ren, R. Jalil, I. Riaz, V. G. Kravets, L. Britnell, P. Blake, F. Schedin, A. S. Mayorov, S. Yuan, M. I. Katsnelson, H.-M. Cheng, W. Strupinski, L. G. Bulusheva, A. V. Okotrub, I. V. Grigorieva, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, A. K. Geim*, **Fluorographene: A two-dimensional counterpart of teflon** // *Small*, 2010, vol. 6, pp. 2877–2884.
234. *F. Withers, M. Dubois, A. K. Savchenko*, **Electron properties of fluorinated single-layer graphene transistors** // *Phys. Rev. B*, 2010, vol. 82, p. 073403.
235. *X. Hong, S.-H. Cheng, C. Herding, J. Zhu*, **Colossal negative magnetoresistance in dilute fluorinated graphene** // *Phys. Rev. B*, 2011, vol. 83, p. 085410.

236. *A. A. Stabile, A. Ferreira, J. Li, N. M. R. Peres, J. Zhu*, [Electrically tunable resonant scattering in fluorinated bilayer graphene](#) // Phys. Rev. B, 2015, vol. 92, p. 121411.
237. *B. M. Kessler, C. O. Girit, A. Zettl, V. Bouchiat*, [Tunable superconducting phase transition in metal-decorated graphene sheets](#) // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 104, p. 047001.
238. *K. I. Bolotin, K. J. Sikes, Z. Jiang, M. Klima, G. Fudenberg, J. Hone, P. Kim, H. L. Stormer*, [Ultrahigh electron mobility in suspended graphene](#) // Solid State Commun., 2008, vol. 146, pp. 351–355.
239. *K. I. Bolotin, K. J. Sikes, J. Hone, H. L. Stormer, P. Kim*, [Temperature-dependent transport in suspended graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 101, p. 096802.
240. *X. Du, I. Skachko, A. Barker, E. Y. Andrei*, [Approaching ballistic transport in suspended graphene](#) // Nat. Nanotechnol., 2008, vol. 3, pp. 491–495.
241. *X. Du, I. Skachko, E. Y. Andrei*, [Towards ballistic transport in graphene](#) // Int. J. Mod. Phys. B, 2008, vol. 22, pp. 4579–4588.
242. *M. Hentschel, F. Guinea*, [Orthogonality catastrophe and Kondo effect in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2007, vol. 76, p. 115407.
243. *D. S. Novikov*, [Elastic scattering theory and transport in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2007, vol. 76, p. 245435.
244. *D. M. Basko*, [Resonant low-energy electron scattering on short-range impurities in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 78, p. 115432.
245. *J. H. Bardarson, M. Titov, P. W. Brouwer*, [Electrostatic confinement of electrons in an integrable graphene quantum dot](#) // Phys. Rev. Lett., 2009, vol. 102, p. 226803.
246. *D. J. Thouless, S. Kirkpatrick*, [Conductivity of the disordered linear chain](#) // J. Phys. C: Solid State Phys., 1981, vol. 14, pp. 235–245.
247. *P. A. Lee, D. S. Fisher*, [Anderson localization in two dimensions](#) // Phys. Rev. Lett., 1981, vol. 47, pp. 882–885.
248. *A. MacKinnon*, [The calculation of transport properties and density of states of disordered solids](#) // Z. Phys. B: Condens. Mat., 1985, vol. 59, pp. 385–390.
249. *J. Schelter, D. Bohr, B. Trauzettel*, [Interplay of the Aharonov-Bohm effect and Klein tunneling in graphene](#) // Phys. Rev. B, 2010, vol. 81, p. 195441.
250. *A. V. Shytov, D. A. Abanin, L. S. Levitov*, [Long-range interaction between adatoms in graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2009, vol. 103, p. 016806.
251. *V. V. Cheianov, O. Syljuasen, B. L. Altshuler, V. Fal'ko*, [Ordered states of adatoms on graphene](#) // Phys. Rev. B, 2009, vol. 80, p. 233409.
252. *D. A. Abanin, A. V. Shytov, L. S. Levitov*, [Peierls-type instability and tunable band gap in functionalized graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 105, p. 086802.
253. *J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong*, [Zero-energy state in graphene in a high magnetic field](#) // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 100, p. 206801.

254. *J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong*, [Divergent resistance at the Dirac point in graphene: Evidence for a transition in a high magnetic field](#) // Phys. Rev. B, 2009, vol. 79, p. 115434.
255. *X. Du, I. Skachko, F. Duerr, A. Luican, E. Y. Andrei*, [Fractional quantum Hall effect and insulating phase of Dirac electrons in graphene](#) // Nature, 2009, vol. 462, pp. 192–195.
256. *K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman, H. L. Stormer, P. Kim*, [Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene](#) // Nature, 2009, vol. 462, pp. 196–199.
257. *Y. Zhao, P. Cadden-Zimansky, F. Ghahari, P. Kim*, [Magnetoresistance measurements of graphene at the charge neutrality point](#) // Phys. Rev. Lett., 2012, vol. 108, p. 106804.
258. *F. Ortmann, S. Roche*, [Splitting of the zero-energy Landau level and universal dissipative conductivity at critical points in disordered graphene](#) // Phys. Rev. Lett., 2013, vol. 110, p. 086602.
259. *K. Nomura, S. Ryu, M. Koshino, C. Mudry, A. Furusaki*, [Quantum Hall effect of massless Dirac fermions in a vanishing magnetic field](#) // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 100, p. 246806.
260. *Y. Avishai, M. Y. Azbel, S. A. Gredeskul*, [Electron in a magnetic field interacting with point impurities](#) // Phys. Rev. B, 1993, vol. 48, pp. 17280–17295.
261. *M. Y. Azbel*, [Condensation of states and oscillatory metal-insulator transitions in a magnetic field](#) // Phys. Rev. B, 1994, vol. 49, pp. 5463–5475.
262. *M. Y. Azbel, B. I. Halperin*, [Landau levels in the presence of dilute short-range scatterers](#) // Phys. Rev. B, 1995, vol. 52, pp. 14098–14103.
263. *S. A. Gredeskul, M. Zusman, Y. Avishai, M. Y. Azbel*, [Spectral properties and localization of an electron in a two-dimensional system with point scatterers in a magnetic field](#) // Phys. Rep., 1997, vol. 288, pp. 223–257.
264. *J. P. Bouchaud, A. Georges*, [Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications](#) // Phys. Rep. Rev. Sec. Phys. Lett., 1990, vol. 195, pp. 127–293.
265. *A. D. Mirlin, Y. V. Fyodorov, F. M. Dittes, J. Quezada, T. H. Seligman*, [Transition from localized to extended eigenstates in the ensemble of power-law random banded matrices](#) // Phys. Rev. E, 1996, vol. 54, pp. 3221–3230.
266. *M. Leadbeater, V. I. Fal'ko, C. J. Lambert*, [Lévy flights in quantum transport in quasiballistic wires](#) // Phys. Rev. Lett., 1998, vol. 81, pp. 1274–1277.
267. *C. W. Groth, M. Wimmer, A. R. Akhmerov, X. Waintal*, [Kwant: A software package for quantum transport](#) // New J. Phys., 2014, vol. 16, p. 063065.
268. *F. J. Dyson*, [The dynamics of a disordered linear chain](#) // Phys. Rev., 1953, vol. 92, pp. 1331–1338.
269. *T. P. Eggarter, R. Riedinger*, [Singular behavior of tight-binding chains with off-diagonal disorder](#) // Phys. Rev. B, 1978, vol. 18, pp. 569–575.

270. *T. A. L. Ziman*, [Localization and spectral singularities in random chains](#) // Phys. Rev. Lett., 1982, vol. 49, pp. 337–340.
271. *D. S. Fisher*, [Critical behavior of random transverse field Ising spin chains](#) // Phys. Rev. B, 1995, vol. 51, pp. 6411–6461.
272. *L. Balents, M. P. A. Fisher*, [Delocalization transition via supersymmetry in one dimension](#) // Phys. Rev. B, 1997, vol. 56, pp. 12970–12991.
273. *H. Mathur*, [Feynman’s propagator applied to network models of localization](#) // Phys. Rev. B, 1997, vol. 56, pp. 15794–15805.
274. *S. Hikami*, [Isomorphism and the beta-function of the non-linear sigma model in symmetric spaces](#) // Nucl. Phys. B, 1983, vol. 215, pp. 555–565.
275. *R. Oppermann*, [Nonlinear sigma model for localization in superconductors](#) // Nucl. Phys. B, 1987, vol. 280, pp. 753–769.
276. *R. Oppermann*, [Anderson localization problems in gapless superconducting phases](#) // Physica A, 1990, vol. 167, pp. 301–312.
277. *F. Wegner*, [Four-loop-order beta-function of nonlinear sigma-models in symmetric spaces](#) // Nucl. Phys. B, 1989, vol. 316, pp. 663–678.
278. *K. Slevin, T. Nagao*, [New random matrix theory of scattering in mesoscopic systems](#) // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 70, pp. 635–638.
279. *J. J. M. Verbaarschot, I. Zahed*, [Spectral density of the QCD Dirac operator near zero virtuality](#) // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 70, pp. 3852–3855.
280. *P. H. Damgaard, J. C. Osborn, D. Toublan, J. J. M. Verbaarschot*, [The microscopic spectral density of the QCD Dirac operator](#) // Nucl. Phys. B, 1999, vol. 547, pp. 305–328.
281. *D. A. Ivanov*, [The supersymmetric technique for random-matrix ensembles with zero eigenvalues](#) // J. Math. Phys., 2002, vol. 43, pp. 126–153.
282. *M. F. Sykes, J. W. Essam*, [Some exact critical percolation probabilities for bond and site problems in two dimensions](#) // Phys. Rev. Lett., 1963, vol. 10, pp. 3–4.
283. *M. Bocquet, J. T. Chalker*, [Network models for localization problems belonging to the chiral symmetry classes](#) // Phys. Rev. B, 2003, vol. 67, p. 054204.
284. *P. Minnhagen*, [The two-dimensional Coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films](#) // Rev. Mod. Phys., 1987, vol. 59, pp. 1001–1066.
285. *P. B. Wiegmann*, [One-dimensional Fermi system and plane XY model](#) // J. Phys. C: Solid State Phys., 1978, vol. 11, pp. 1583–1598.
286. *D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, G. Grinstein*, [Renormalization group analysis of the phase transition in the 2D Coulomb gas, sine-Gordon theory and XY-model](#) // J. Phys. A: Math. Gen., 1980, vol. 13, pp. 585–620.
287. *A. M. Polyakov*, [Interaction of Goldstone particles in two dimensions: Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields](#) // Phys. Lett. B, 1975, vol. 59, pp. 79–81.

288. *A. M. M. Pruisken*, [Quasiparticles in the theory of the integral quantum Hall effect II: Renormalization of the Hall conductance or instanton angle theta](#) // Nucl. Phys. B, 1987, vol. 290, pp. 61–86.
289. *E. J. König, P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, A. D. Mirlin*, [Metal-insulator transition in two-dimensional random fermion systems of chiral symmetry classes](#) // Phys. Rev. B, 2012, vol. 85, p. 195130.
290. *E. Witten*, [Non-abelian bosonization in two dimensions](#) // Commun. Math. Phys., 1984, vol. 92, pp. 455–472.
291. *S. Ryu, C. Mudry, A. W. W. Ludwig, A. Furusaki*, [Global phase diagram of two-dimensional Dirac fermions in random potentials](#) // Phys. Rev. B, 2012, vol. 85, p. 235115.
292. *M. Disertori, T. Spencer, M. R. Zirnbauer*, [Quasidiffusion in a 3D supersymmetric hyperbolic sigma model](#) // Commun. Math. Phys., 2010, vol. 300, pp. 435–486.
293. *L. Fu, C. L. Kane*, [Topology, delocalization via average symmetry and the symplectic Anderson transition](#) // Phys. Rev. Lett., 2012, vol. 109, p. 246605.
294. *M. S. Foster, A. W. W. Ludwig*, [Metal-insulator transition from combined disorder and interaction effects in Hubbard-like electronic lattice models with random hopping](#) // Phys. Rev. B, 2008, vol. 77, p. 165108.
295. *K. B. Efetov, G. Schwiete, K. Takahashi*, [Bosonization for disordered and chaotic systems](#) // Phys. Rev. Lett., 2004, vol. 92, p. 026807.
296. *J. E. Bunder, K. B. Efetov, V. E. Kravtsov, O. M. Yevtushenko, M. R. Zirnbauer*, [Superbosonization formula and its application to random matrix theory](#) // J. Stat. Phys., 2007, vol. 129, pp. 809–832.
297. *P. Littelmann, H.-J. Sommers, M. R. Zirnbauer*, [Superbosonization of invariant random matrix ensembles](#) // Commun. Math. Phys., 2008, vol. 283, pp. 343–395.
298. *V. Häfner, J. Schindler, N. Weik, T. Mayer, S. Balakrishnan, R. Narayanan, S. Bera, F. Evers*, [Density of states in graphene with vacancies: Midgap power law and frozen multifractality](#) // Phys. Rev. Lett., 2014, vol. 113, p. 186802.
299. *А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников*, Плотность состояний в неоднородных сверхпроводниках // ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 2147–2159.
300. *A. Silva, L. B. Ioffe*, [Subgap states in dirty superconductors and their effect on dephasing in Josephson qubits](#) // Phys. Rev. B, 2005, vol. 71, p. 104502.
301. *M. A. Skvortsov, M. V. Feigel'man*, [Subgap states in disordered superconductors](#) // ЖЭТФ, 2013, т. 144, с. 560–573.
302. *G. Parisi, N. Sourlas*, [Random magnetic fields, supersymmetry, and negative dimensions](#) // Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 43, pp. 744–745.
303. *C. A. Tracy, H. Widom*, [Level-spacing distributions and the Airy kernel](#) // Commun. Math. Phys., 1994, vol. 159, pp. 151–174.

304. *C. A. Tracy, H. Widom, On orthogonal and symplectic matrix ensembles* // Commun. Math. Phys., 1996, vol. 177, pp. 727–754.
305. *B. A. Muzykantskii, D. E. Khmel'nitskii, Nearly localized states in weakly disordered conductors* // Phys. Rev. B, 1995, vol. 51, pp. 5480–5483.
306. *I. A. Gruzberg, A. D. Mirlin, M. R. Zirnbauer, Classification and symmetry properties of scaling dimensions at Anderson transitions* // Phys. Rev. B, 2013, vol. 87, p. 125144.
307. *N. Read, D. Green, Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect* // Phys. Rev. B, 2000, vol. 61, pp. 10267–10297.
308. *J. T. Chalker, N. Read, V. Kagalovsky, B. Horowitz, Y. Avishai, A. W. W. Ludwig, Thermal metal in network models of a disordered two-dimensional superconductor* // Phys. Rev. B, 2002, vol. 65, p. 012506.
309. *A. Bondi, G. Curci, G. Paffuti, P. Rossi, Metric and central charge in the perturbative approach to two-dimensional fermionic models* // Ann. Phys., 1990, vol. 199, pp. 268–339.
310. *А. Н. Васильев, М. И. Вязовский, С. Э. Деркачев, Н. А. Кивель, Об эквивалентности ренормировок в обычной и размерной регуляризациях для 2D-четырёхфермионных взаимодействий* // ТМФ, 1996, т. 107, с. 27–46.
311. *Д. Голуб, Ч. ван Лоун, Матричные вычисления, М.: Мир, 1999.*