

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Л.Д. ЛАНДАУ РАН

На правах рукописи

УДК 538.945

Антоненко Даниил Сергеевич

**ЭФФЕКТЫ ТОПОЛОГИИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В
НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

Специальность 01.04.02 —

«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Скворцов Михаил Андреевич

Черноголовка — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	5
0.1 Роль беспорядка в физике твердого тела	5
0.2 Сверхпроводимость в неупорядоченных мезоскопических системах	8
0.3 Топологические явления в физике твердого тела и беспорядок	11
0.4 Структура диссертационной работы	15
Глава 1. Баллистическая поправка к плотности состояний в трехмерном металле с взаимодействием	20
1.1 Поправка к туннельной плотности состояний	20
1.2 Поправка от взаимодействия в (квази)баллистическом режиме	23
1.3 Случай точечного взаимодействия электронов	25
1.3.1 Параболическая дисперсия электронов	25
1.3.2 Непараболическая дисперсия электронов	26
1.3.3 Актуальные масштабы длин в 2D и 3D	28
1.4 Потенциал Юкавы и параболическая дисперсия	29
1.5 Универсальность скачка производной на энергии Ферми	31
1.6 Обсуждение результатов	32
Глава 2. Подавление сверхпроводимости в неупорядоченных пленках: конкуренция двумерной диффузии и трехмерной баллистики	35
2.1 2D диффузия vs. 3D баллистика	35
2.2 Выбор модели	38
2.3 Диффузионный вклад	40
2.4 Баллистический вклад	42
2.5 Роль упругих диаграмм.	45
2.6 Обсуждение результатов	46
Глава 3. Мезоскопические флуктуации кондактанса и шум в майорановских проволоках	48
3.1 Критический режим разупорядоченной майорановской проволоки	48

3.2	Обзор результатов	53
3.3	Математическое введение	57
3.3.1	Сигма-модель и моменты кондактанса	57
3.3.2	Параметризация Картана-Ефетова	60
3.3.3	Трансфер-матричный гамильтониан и ядро теплопроводности	62
3.3.4	Параметризация Ивасавы	64
3.3.5	От Ивасавы к Картану: общий формализм	66
3.4	Радиальные собственные функции	67
3.4.1	Базис и параметризации	67
3.4.2	Семейства радиальных собственных функций	70
3.4.3	Нормировка собственных функций и мера Планшереля	76
3.5	Аналитические выражения для транспортных характеристик	79
3.5.1	Моменты кондактанса	79
3.5.2	Фактор Фано	82
3.5.3	Дисперсия $\det r$	83
3.6	Обсуждение результатов	83
	Заключение	88
	Список литературы	89
	Приложение А. Осцилляции Фриделя и туннельная плотность состояний в 2D	104
	Приложение Б. Вычисление куперовской восприимчивости	106
	Б.1 Квазибаллистические примесные лестницы	107
	Б.2 Перенормировка фононной вершины	108
	Б.3 Теорема Андерсона	109
	Б.4 Поправки к $\Pi(T)$ от диаграмм с пересечениями	109
	Б.5 Вычисление сдвига критической температуры в импульсном представлении	110
	Б.6 Упругие диаграммы	112
	Приложение В. Обозначения и базис $n = 2$ сигма-модели класса D	114

В.1	Базис и система корней	114
В.2	Генераторы группы K	116
Приложение Г.	Транспортные свойства и ядро теплопроводности	118
Приложение Д.	Разложение радиальных волновых функций на малых θ	120
Приложение Е.	Проверка полноты построенного базиса	122
Приложение Ж.	Прямое пертурбативное вычисление ядра теплопроводности	124

Введение

0.1 Роль беспорядка в физике твердого тела

В настоящей работе будут изучаться электронные подсистемы твердых тел с беспорядком. Последний неизбежно присутствует в конденсированных средах в форме примесей, различных дислокаций, дисклинаций и прочих нарушений порядка благодаря практической невозможности получить идеальную кристаллическую решетку на практике. Физические свойства системы, вообще говоря, зависят от конкретной реализации беспорядка, но во многих случаях имеет место самоусреднение, так что средние по беспорядку физические величины достаточно хорошо описывают и отдельно взятый образец. Тем не менее, в случае мезоскопических (см. далее) систем флуктуации от образцу к образцу становятся экспериментально измеримыми или даже большими, нарушая предположение о самоусреднении.

Влияние беспорядка на физические свойства электронов может быть различным в зависимости от изучаемого режима. Наиболее простым является квазиклассический случай, который реализуется для достаточно слабого беспорядка и при достаточно высоких температурах, когда квантовые эффекты пренебрежимо малы. Тогда поведение электронов на длинах, больших длины свободного пробега l является диффузионным и может быть описано квазиклассическим уравнением Больцмана [1] со столкновительным релаксационным членом, вызванным беспорядком. Из него можно получить широко известные выражения для транспортных характеристик системы. В частности, для проводимости имеется классический результат Друде [2] $\sigma = 2\nu DG_Q$, где σ — это проводимость, ν — это плотность состояний в расчете на одну проекцию спина (спину учитывается коэффициентом 2), а $D = v_F l / \mathcal{D}$ — коэффициент диффузии, где v_F — это скорость Ферми, а \mathcal{D} — размерность пространства. $G_Q = e^2 / 2\pi\hbar$ — это квант кондактанса.

Квантовые эффекты модифицируют классические формулы при наличии достаточной степени квантовой когерентности электронов [3; 4]. Последнюю можно охарактеризовать длиной сбой фазы L_φ , которую следует сравнивать с

размером системы L ; квантовая физика проявляется при $L < L_\varphi$. Величина L_φ определяется неупругими процессами (в отличие от l), такими как процессы электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействия. Обычно она возрастает по мере уменьшения температуры, поэтому экспериментальное наблюдение квантовых явлений требует, как правило, достаточно низких температур.

Наиболее знаменитый квантовый эффект, связанный с беспорядком — это явление слаболокализационной поправки к проводимости [5], которое вызывается интерференцией квазиклассических траекторий электронов в присутствии беспорядка. Ее можно интерпретировать как увеличение вероятности возврата в исходную точку в связи с положительной интерференцией электронных путей, отвечающих движению в противоположные стороны.

Стандартный вывод состоит в применении диаграммной теории возмущений по силе беспорядка [6], которая позволяет описывать диффузионный характер движения электронов путем суммирования последовательностей лестничных диаграмм (диффузоны и купероны).

Слабая локализация более заметна и лучше изучена для (квази)двумерных систем, в которых она носит логарифмический характер $\delta\sigma \sim -(1/g) \log L_\varphi/l$, где g — это безразмерный кондактанс пленки. Величину этой поправки можно менять экспериментально с помощью изменения L_φ температурой или магнитным полем. Последнее подавляет слабую локализацию, так как оно нарушает симметрию относительно обращения времени и делает обращенные электронные траектории неконгруэнтными исходным. Соответствующее явление отрицательного магнетосопротивления хорошо известно экспериментально.

В трехмерном случае стандартное выражение для слаболокализационной поправки через диффузионный куперон ультрафиолетово расходится и требует обрезки. Ранняя интуиция в этой научной области состояла в том, что нужно накладывать такую обрезку на границе диффузионной области (на длинах порядка свободного пробега), что приводит к выражению $\delta\sigma/\sigma \sim -1/(k_F l)^2$. Однако Белитц и Киркпатрик показали [7], что в действительности вклад простирается в баллистическую область, так что настоящая обрезка происходит на длине волны электрона ($\sim 1/k_F$, где k_F — импульс Ферми), а ведущая трехмерная слаболокализационная поправка имеет вид $\delta\sigma/\sigma \sim -1/(k_F l)$. На диаграммном языке в баллистической области не требуется суммировать примесные лестнич-

цы, а поправку можно интерпретировать, как вклад рассеяния на осцилляциях Фриделя, вызванных примесями. В трехмерном случае поправка не зависит от L_φ , поэтому ее значительно сложнее обнаружить экспериментально. Тем не менее, некоторые попытки были произведены [8], которые подтвердили выводы работы [7].

В случае сильного беспорядка, его эффект становится значительно более выражен [9]: характер волновых функций может существенно измениться, так что они будут локализованы в пространстве, а система будет вести себя, как изолятор (локализация Андерсона). Парадигма скейлинга [10] предсказывает соответствующий фазовый переход в трехмерии, в то время, как в двумерии (для обычного металла) и одномерии при достаточном размере системы локализация обеспечивается даже слабым беспорядком. Однако эффекты топологии, которые будут обсуждаться далее, могут нарушить эту закономерность даже в одномерной системе при тонкой подстройке параметров к критическому режиму.

Известно [11; 12], что диффузионный характер движения электронов эффективно усиливает кулоновское взаимодействие, так как два электрона проходят мимо друг друга медленнее, чем в чистом случае. Этот факт выливается в ряд наблюдаемых физических эффектов, таких как поправки к туннельной плотности состояний [11; 13], проводимости [14] и критической температуре сверхпроводника [15–21] (см. следующий раздел). Также важными связанными результатами являются теория сверхпроводящих флуктуаций [22], теория сбоя фазы в грязных металлах [23] и теория Ферми-жидкости в диффузионном металле [24–26].

При теоретическом изучении приведенных эффектов соответствующие вклады традиционно искусственно обрезались на границе диффузионной области. Однако, так же, как и для уже упомянутого баллистического продолжения трехмерной слаболокализационной поправки к проводимости, было показано, что аналогичное продолжение происходит и для поправки типа Альтшулера-Аронова к туннельной плотности состояний в двумерном [27] и трехмерном случаях [28].

Строго говоря, беспорядок должен оказывать влияние и на электрон-фононное взаимодействие. При изучении этого эффекта необходимо учитывать то, что примеси увлекаются фононными колебаниями решетки, что требует от-

дельного изучения, которое выходит за рамки настоящей диссертации. Влияние этого эффекта на сверхпроводимость обсуждалось, в частности, в работе [29], согласно которой беспорядок ослабляет взаимодействие электронов с продольными фононами и приводит к возникновению взаимодействия с поперечными фононами.

0.2 Сверхпроводимость в неупорядоченных мезоскопических системах

Сверхпроводимость — это принципиально квантовое явление, которое проявляется на макроскопическом масштабе. Его первая микроскопическая теория была построена в работах Бардина, Купера и Шриффера (БКШ). Она опирается на наличие электрон-электронного притяжения, которое имеет фононную природу в обычных сверхпроводниках.

Наиболее известным результатом в теории *неупорядоченных* сверхпроводников является теорема Андерсона [30–32], согласно которой потенциальный беспорядок сам по себе не влияет на критическую температуру сверхпроводника (T_c) в пертурбативном режиме. Тем не менее, масса экспериментальных и теоретических результатов свидетельствует о том, что в присутствии достаточно сильного беспорядка температура перехода обычно уменьшается.

Принято выделять два сценария подавления T_c в неупорядоченных материалах: бозонный и фермионный; их актуальность определяется структурой рассматриваемого материала. Бозонный механизм типичен для гранулированных и/или сильно разупорядоченных сверхпроводников (поликристаллический TiN, аморфный InO), в которых происходит преформирование локализованных куперовских пар [33–36]; температура сверхпроводящего перехода в таком случае определяется распространением сверхпроводящей когерентности с микро- на макро-масштабы. При фермионном сценарии, который реализуется для равномерно разупорядоченных пленок без дополнительной структуры (NbN, MoGe и др.), подавление сверхпроводимости связано с усилением электрон-электронного отталкивания в присутствии беспорядка, которое обсуждалось выше, что приводит к уменьшению эффективной константы куперовского притяжения.

Явление подавления сверхпроводимости беспорядком особенно активно изучалось в геометрии пленки мезоскопической толщины. Обычно считается, что T_c является свойством материала и не зависит от размеров образца. Однако многочисленные эксперименты свидетельствуют о том, что критическая температура широкого класса неупорядоченных сверхпроводников (V [37], NbN [38–45], TiN [46], MoGe [47; 48], MoSi [49; 50], MoC [51], WRe [52], InO [53] и др. [54]) систематически падает с уменьшением толщины пленки d . Как правило, подавление T_c становится заметным при $d \sim 10$ нм, а для самых тонких пленок T_c может уйти в ноль, что соответствует квантовому фазовому переходу сверхпроводник-металл или сверхпроводник-изолятор [55–60].

В трехмерной (3D) геометрии за усиление отталкивания при движении в потенциале дефектов отвечают малые расстояния, не превосходящие длины пробега l . В результате весь эффект может быть описан изменением константы куперовского взаимодействия. В работе Андерсона, Мутталиба и Рамакришнана [61] изучался фермионный механизм для сильно неупорядоченного 3D сверхпроводника вблизи порога андерсоновской локализации ($k_F l \sim 1$, где k_F — импульс ферми). Там же была дана оценка поправки к голой константе электрон-электронного взаимодействия λ в случае слабого беспорядка ($k_F l \gg 1$): $\delta\lambda/\lambda \sim 1/(k_F l)^2$. Аналогичное выражение было получено в работах [62; 63]. Приведенную оценку легко получить, обрезав 3D диффузионный вклад на ультрафиолетовом пределе $r \sim l$. Однако, как обсуждалось выше, в 3D геометрии диффузионные вклады протягиваются в баллистическую область вплоть до расстояний порядка длины волны и имеют относительный порядок $1/(k_F l)$, а не $1/(k_F l)^2$.

Белитц предпринял попытку одновременно учесть примесные поправки как к кулоновскому, так и к электрон-фононному взаимодействию и их влияние на T_c с помощью техники точных собственных функций [64], а также путем решения полных уравнений Горькова в режиме сильной связи [65–67]. Часть его результатов может быть интерпретирована, как поправка к голой константе электрон-электронного взаимодействия $\delta\lambda/\lambda \sim 1/k_F l$. Однако достоверность выводов Белитца была поставлена под сомнение Финкельштейном [21], который указал, что упругие диаграммы, связанные с поправкой к туннельной плотности состояний [16; 18], на важности которых настаивал Белитц, не дают вклада в ведущую поправку к сдвигу T_c в области двумерной диффузии.

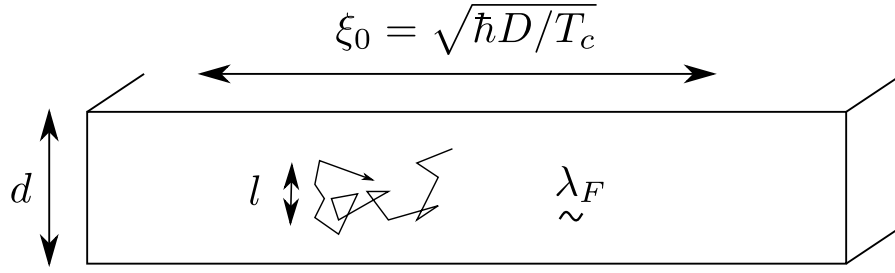


Рисунок 1 — Типичная для большинства экспериментов иерархия масштабов длины в разупорядоченной сверхпроводящей пленке.

Главное отличие *двумерной (2D) геометрии* от 3D случая заключается в том, что эффект перенормировок не может быть сведен к независящему от энергии сдвигу константы λ , а требует суммирования главных логарифмов. Общепринятое описание эффекта подавления T_c в тонких сверхпроводящих пленках существенно использует представление о *2D диффузионном* характере движения электронов, что мотивируется следующей экспериментально значимой иерархией масштабов длин: $\lambda_F \ll l \ll d \ll \xi_0$, см. рис. 1. (Здесь λ_F — фермиевская длина волны, $\xi_0 = \sqrt{\hbar D/T_c}$ — сверхпроводящая длина когерентности в грязном пределе, D — коэффициент диффузии.) В таком подходе усиление беспорядка с уменьшением d связано с увеличением сопротивления на квадрат R_{\square} . Эффект сдвига T_c из-за совместного влияния беспорядка и взаимодействия изучался в двумерном диффузионном случае в пертурбативном режиме в работах [15–19], где было получено выражение

$$\delta T_c/T_{c0} = -\lambda/(3\pi g) \log^3 \hbar/T_{c0}\tau_*, \quad (1)$$

где T_{c0} — это критическая температура в объемном сверхпроводнике, g — безразмерный кондактанс пленки, а λ — безразмерная константа электрон-электронного взаимодействия (для экранированного Кулоновского взаимодействия $\lambda = 1/2$). Параметр τ_* определяет время, на котором диффузия становится двумерной: $\tau_* = \max\{\tau, \tau_d\}$, где τ — время упругого рассеяния, а $\tau_d = d^2/4D$ — время диффузии через толщину пленки [15; 21]. В реальном пространстве логарифм в уравнении (2.1) набирается за счет двумерной диффузии от масштаба $\max(l, d)$ до длины когерентности ξ_0 . Поправка (2.1), обратно пропорциональная кондактансу пленки, концептуально подобна слаболокализационной и связанной со взаимодействием поправкам к двумерной проводимости, кото-

рые обсуждались выше, при этом две из трех степеней логарифма связаны с экспоненциальной чувствительностью T_c к константе взаимодействия λ_{BCS} .

Выражение (2.1), полученное в первом порядке теории возмущений, было позже обобщено Финкельштейном на случай произвольно сильного подавления T_c с помощью ренорм-группового суммирования ведущих логарифмов [20; 21]. Аналогичный результат можно получить, решая уравнение самосогласования с зависящей от энергии вершиной куперовского притяжения $\lambda_{E,E'} = \lambda_{\text{BCS}} - \gamma_g^2 \log[1/\max(E,E')\tau_*]$ [68].

Формула Финкельштейна была применена им в работе [21] для фиттирования экспериментальных данных по зависимости T_c пленок MoGe от толщины, напрямую связанной с безразмерным кондактансом g [47]. С тех пор такой способ объяснения экспериментальных данных по подавлению сверхпроводимости в неупорядоченных пленках стал фактически общепринятым [50; 51; 69].

Стоит подчеркнуть, что в подходе, описанном в нескольких последних абзацах предполагается, что подавление T_c в тонких ($d \ll \xi_0$) сверхпроводящих пленках определяется исключительно безразмерным кондактансом на квадрат g . Это утверждение прекрасно вписывается в общую парадигму скейлинга [10], подтверждаемую ренорм-групповым анализом нелинейной сигма-модели в 2D пространстве [25; 70; 71], однако, как показывается в главе 2 настоящей диссертации, в таком подходе на самом деле есть ряд принципиальных недостатков. В упомянутой главе применение формулы Финкельштейна пересматривается с точки зрения независимого определения входящих в нее параметров g и τ_* . Выявляются противоречия с рядом экспериментальных данных. Далее, вычисляется вклад трехмерной баллистической области в эффект подавления T_c и показывается, что он оказывается более существенным, чем широко известный вклад двумерной диффузии в приложении ко многим экспериментальным реализациям.

0.3 Топологические явления в физике твердого тела и беспорядок

На протяжении последних двух десятилетий оформилось новое направление физики, посвященное изучению топологических явлений в твердых телах

[72]. Наиболее разработанным является случай невзаимодействующих электронных подсистем с щелью в спектре, который изучается и в настоящей диссертации. Общую идею для случая чистых систем можно представить следующим образом. Рассмотрим гамильтониан Блоха как отображение из компактного многообразия, задаваемой зоной Бриллюэна системы, в пространство матриц, на которые наложено некоторое количество ограничений, задаваемых симметриями системы. Тогда можно разделить все такие (определяющие гамильтониан) отображения на топологические классы, так что в один класс входят те и только те отображения, которые можно гладко преобразовать друг друга без закрытия щели в спектре. Эти классы называются топологическими фазами, а переходный режим между ними называется критическим в настоящей работе. Оказывается, что такая классификация имеет важные физические следствия. Наиболее ярким из них является тот факт, что на границе нетривиальных топологических фаз существуют бесщелевые граничные состояния, которые не могут быть ликвидированы без закрытия объемной щели.

Одним из наиболее значимых достижений в этой области является классификация [73; 74] топологических фаз невзаимодействующих систем со щелью во всех 10 классах симметрии Алтланда-Цирнбауера [75]. При заданном классе симметрии и размерности пространства можно ввести топологическое число, перечисляющее топологические фазы: \mathbb{Z}_2 -число, если есть две топологически различные фазы (тривиальная и топологическая) или \mathbb{Z} -число, если для каждого целого существует своя отдельная фаза. Третьей возможностью является случай, когда есть только одна нетопологическая фаза (в этом случае класс называют нетопологическим). Бесщелевые возбуждения возникают на пространственной границе фазы, для которой топологическое число принимает произвольное ненулевое значение.

Первым открытым топологическим изолятором был квантовый эффект Холла, принадлежащий классу симметрии A (нормальный металл без симметрий по обращению времени и других). В настоящее время известна полная таблица топологических изоляторов [73; 74], с помощью которой можно узнать, какое топологическое число (\mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z} или 0) характеризует систему при заданной размерности и классе симметрии. Так в одномерии некоторые сверхпроводящие классы (а именно, D и DIII) характеризуются \mathbb{Z}_2 топологическим числом; классы симметрии AIII, BDI, и CII (несверхпроводящие классы с киральной

симметрией) имеют \mathbb{Z} топологическое число, а остальные классы (A, AI, AII, C и CI) топологически тривиальны.

Одним из наиболее интересных и сложных для изучения классов симметрии является класс D, который описывает сверхпроводник с нарушенными симметриями по обращению времени и повороту спина, так что полный гамильтониан Боголюбова–де Жена (БдЖ) ограничен только искусственной зеркальной симметрией, возникающей при удвоении числа степеней свободы в подходе БдЖ. Особенное внимание к этому классу симметрии связано с тем, что он предоставляет возможность пронаблюдать майорановские фермионы в твердотельном эксперименте. Манипулирование топологически защищенными майорановскими краевыми состояниями считается одной из перспективных платформ для квантовых вычислений и обработки информации, так как они менее подвержены декогеренции по сравнению с обычными кубитами [76]. Было предложено несколько реализаций для получения майорановских фермионов, которые включают в себя связанное состояние в вихре p -волнового сверхпроводника [77], цепочку Китаева [78] а также полупроводниковый провод в контакте с s -волновым сверхпроводником [79; 80]. Последний способ представляется наиболее подходящим для воплощения в эксперименте, и в нескольких работах последних лет, посвященных таким проволокам, уже сообщалось о наблюдении майорановских состояний [81–83].

Как упоминалось выше, (квази)одномерные квантовые проволоки класса симметрии D характеризуются \mathbb{Z}_2 топологическим квантовым числом [73; 74], что говорит о том, что есть две топологически различные фазы. И в тривиальной ($q = 1$) и в топологической фазах ($q = -1$) имеется щель в спектре, которую можно закрыть при помощи управляющего параметра μ и открыть “с другим знаком”, при этом на границе такой фазы появится пара майорановских мод. В чистой, трансляционно инвариантной системе топологическое число q выражается через значения пфаффиана гамильтониана (в киральном базисе) в центре и на краю зоны Бриллюэна [78].

В экспериментальной реализации практически неизбежно будет присутствовать беспорядок, который проявляет себя в описанной выше картине несколькими путями. Во-первых, он может сдвигать положение границы между топологическими фазами [84]. Во-вторых, он нарушает трансляционную инвариантность, что затрудняет топологическую классификацию в импульсном

представлении. Тем не менее, для каждой заданной реализации беспорядка по-прежнему возможно различать топологические фазы с помощью анализа транспортных свойств системы. Топологическое число в квантовой проволоке класса D можно выразить в терминах матрицы r амплитуд отражения квазичастиц как $q = \text{sign det } r$ [85]. Из этой формулы следует, что непосредственно на границе топологических фаз имеется как минимум один полностью проводящий канал с единичной прозрачностью.

Третья сложность, вызванная беспорядком состоит в том, что топологическое число q зависит не только от средней силы беспорядка, но и от его определенной реализации. В результате при заданной длине провода L и средней силе беспорядка, топологическое число становится случайной величиной с некоторым распределением [84]. Его среднее $\langle q \rangle$ гладко меняется между -1 и 1 при изменении управляющего параметра μ , переводящего систему из топологической фазы в тривиальную. Лишь в термодинамическом пределе, $L \rightarrow \infty$, топологический переход становится резким благодаря андерсоновской локализации квазичастиц в одном измерении, что является четвертым следствием наличия беспорядка.

Прямое экспериментальное измерение квазичастичного транспорта в квантовых проволоках класса D осложняется наличием в системе сверхпроводимости и замыкающим действием конденсата. Один из возможных способов обойти эту проблему заключается в изучении *теплового*, а не электрического транспорта [86]. Тепловой кондактанс G мезоскопической системы удобно выразить, используя квант теплового кондактанса $G_0 = \pi k_B^2 T / 6\hbar$. Тогда соответствующий безразмерный кондактанс $g = G/G_0$ выражается по известной формуле Ландауэра как сумма по прозраčnostям каналов: $g = \sum T_n$.

Влияние потенциального беспорядка на тепловой кондактанс в майорановских проволоках изучалось в ряде теоретических работ [84; 85; 87–89] с использованием аналитических и численных инструментов. В главе 3 настоящей диссертации эти работы обобщаются для извлечения более сложных транспортных характеристик.

0.4 Структура диссертационной работы

Глава 1 посвящена изучению баллистического продолжения поправки к туннельной плотности состояний, вызванной совместным влиянием беспорядка и взаимодействия в трехмерных системах. Подобного рода анализ баллистической области был подробно произведен в работе [27] для случая двумерных систем. Попытка изучить трехмерный случай была предпринята в работе [28]. В главе 1 настоящей диссертации этот вопрос изучается гораздо более глубоко: изучается вся поправка, а не только ее неаналитическая часть; рассматривается, как вклад Фока (обменный), так и вклад Хартри; проясняется роль различных пространственных масштабов и степень универсальности результата; отдельное внимание посвящено изучению влиянию ангармоничности электронного спектра и величины радиуса экранировки взаимодействия.

Глава 2 посвящена физике сверхпроводящих пленок с беспорядком, в которых реализуется фермионный механизм подавления сверхпроводимости. Проводится анализ большого количества известных экспериментальных данных и делается вывод о неудовлетворительности распространенной точки зрения об объяснении данного явления вклад области двумерной диффузии. Проводится подробное (с учетом эффектов перенормировок) изучение баллистической области, которая оказывается главной для большого количества экспериментальных ситуаций. Разработанная в этой главе теория применяется для объяснения нескольких экспериментов.

В главе 3 изучается роль топологических эффектов в неупорядоченных сверхпроводниках на примере майорановских проволок в критическом режиме. Вычисляются величины моментов кондактанса квазичастиц (вплоть до третьего), фактор Фано и дисперсия топологического индекса. Разрабатывается математический аппарат теории, подходящей для решения поставленных задач: суперсимметричной нелинейной сигма-модели с двумя репликами.

Целью данной работы является изучение роли электрон-электронного взаимодействия и эффектов топологии в неупорядоченных системах, главным образом, в присутствии сверхпроводимости.

С учетом проведенного обзора и поставленной цели было решено сосредоточиться на следующих **задачах**:

1. Детальный анализ вызванной беспорядком и взаимодействием поправки к туннельной плотности состояний в нормальном металле в режиме баллистического движения электронов.
2. Вычисление вклада трехмерной баллистической области в эффект подавления температуры сверхпроводящего перехода, вызванный совместным влиянием беспорядка и примесей. Подробный анализ существующих экспериментальных данных по подавлению T_c в сверхпроводящих пленках и сравнение их с теоретическими предсказаниями вкладов 3D баллистической и 2D диффузионной области.
3. Вычисление старших моментов кондактанса и Фано фактора в неупорядоченной майорановской проволоке в критическом режиме между тривиальной и топологической фазой.
4. Разработка математического аппарата, подходящего для решения этой проблемы (нелинейная суперсимметричная сигма-модель старшего ранга и Фурье-анализ на ее многообразии).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказана важность вклада баллистического движения электронов при изучении мезоскопических эффектов, связанных с взаимодействием и беспорядком
2. Поправка Альтшулера-Аронова к туннельной плотности состояний в трехмерных системах существенно пересмотрена с упором на роль баллистического вклада. Получено точное пертурбативное выражение для трехмерного баллистического вклада в рамках выбранной модели нормального металла (параболическая дисперсия, точечное взаимодействие, и т. д.), а также универсальное выражение для излома поправки на уровне Ферми.
3. Формула Овчинникова-Финкельштейна для вклада области двумерной диффузии в эффект уменьшения критической температуры сверхпроводящей пленки критически переосмыслена в свете большого массива экспериментальных данных. Показано, что она имеет ограниченную применимость, когда используется, как независимое предсказание, а не как формула для фиттирования данных.

4. Вычислен вклад области трехмерной баллистики в сдвиг критической температуры сверхпроводника и продемонстрировано, что он является главным в ситуации многих известных экспериментов.
5. Впервые были получены результаты для ряда транспортных характеристик квазичастиц в диффузионных майорановских проволоках (класса симметрии D) в критическом режиме: второй и третий момент кондактанса, Фано фактор и дисперсия топологического индекса при произвольной длине провода.
6. Достигнуто новое понимание структуры радиального собственного базиса на многообразии суперсимметричной сигма-модели старшего ранга. Показано наличие трех семейств собственных функций лапласиана для $n = 2$ сигма-модели в классе D. Сформулирована гипотеза об общей иерархической структуре радиального базиса на суперсимметрических пространствах.

Научная новизна:

1. Изучена баллистическая поправка к туннельной плотности состояний в трехмерном металле во всем диапазоне энергий.
2. Впервые подробно исследован кроссовер поправки к критической температуре сверхпроводника из диффузионной области в баллистическую.
3. Впервые изучены старшие моменты кондактанса и старшие транспортные моменты в топологических сверхпроводах класса симметрии D при произвольной длине провода в диффузионной области.
4. Впервые построен радиальный базис и описана иерархическая структура собственных функций лапласиана на неприводимом супермногообразии второго ранга.

Актуальность исследования, и его научная и практическая значимость. Актуальность исследования неупорядоченных сверхпроводящих пленок подтверждается большим количеством экспериментальных работ на эту тему и применением таких материалов в ультрачувствительных детекторах фотонов. Актуальность изучения квантовых проволок класса D связана с возможностью их применения для получения майорановских состояний и использования их для квантовых вычислений.

Степень достоверности и апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- Конференции *Strongly disordered and inhomogeneous superconductor*, 21 – 23 November 2016, Grenoble, France, Доклад: «Superconductivity suppression in disordered films: 3D vs 2D»
- Школе и конференции *Fundamentals on Quantum Transport*, Trieste, ICTP, July 31 – August 11, 2017, Стендовый доклад: «Distribution of conductance of disordered topological superconductors»
- Конференции *The Challenge of 2-Dimensional Superconductivity*, Leiden, Lorentz center, Netherlands, 8 – 12 July, 2019, Стендовый доклад: «Mesoscopic conductance fluctuations of class D superconducting wires»

Также все результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

Личный вклад. Все новые результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

1. *Antonenko D., Skvortsov M.* Ballistic correction to the density of states in an interacting three-dimensional metal // *Phys. Rev. B.* — 2020. — февр. — т. 101, вып. 6. — с. 064204. — DOI: [10.1103/PhysRevB.101.064204](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.064204).
2. *Antonenko D. S., Skvortsov M. A.* Superconductivity Suppression in Disordered Films: Interplay of Two-dimensional Diffusion and Three-dimensional Ballistics // *JETP Letters.* — 2020. — сент. — т. 112, вып. 7. — с. 466. — DOI: [10.1134/S0021364020190017](https://doi.org/10.1134/S0021364020190017).
3. *Antonenko D. S., Khalaf E., Ostrovsky P. M., Skvortsov M. A.* Mesoscopic conductance fluctuations and noise in disordered Majorana wires // submitted to *Phys. Rev. B.* —. — arXiv:2007.10815.

Работы изданы в 2 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Третья работа представлена в виде препринта и будет опубликована в научном журнале.

В диссертации используется естественная система единиц, в которой $\hbar = k_B = 1$.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и трёх приложений. Полный объём диссертации составляет 125 страниц с 20 рисунками. Список литературы содержит 140 наименований.

Глава 1. Баллистическая поправка к плотности состояний в трехмерном металле с взаимодействием

1.1 Поправка к туннельной плотности состояний

Влияние электрон-электронного взаимодействия на одночастичную плотность состояний (DOS) в неупорядоченных металлах изучалось в основополагающих работах Альтшулера и Аронова [11; 13]. Они получили пертурбативное по силе взаимодействия выражение для поправки к туннельной DOS, предполагая движение электронов диффузионным. Результат для аномалии DOS содержит сингулярность на энергии Ферми, E_F , и имеет логарифмическое поведение в двумерии. В случае же трехмерной геометрии, особенность является более слабой:

$$\frac{\delta\nu_{\text{diff}}(E)}{\nu_0} = \frac{c_d \lambda \sqrt{|E - E_F| \tau}}{(k_F l)^2}, \quad |E - E_F| \ll \frac{1}{\tau}, \quad (1.1)$$

где ν_0 , τ и $l = v_F \tau$ — это плотность состояний в системе без взаимодействия (на одну проекцию спина), время упругого рассеяния и упругая длина свободного пробега на E_F , λ — это безразмерная константа взаимодействия, а c_d — число, которое определяется видом потенциала взаимодействия ($\hbar = 1$).

Теоретический анализ Альтшулера и Аронова был проверен в ряде последующих экспериментальных исследований [12], как в двумерной [90], так и в трехмерной геометрии [91; 92], а также в переходной области между ними [93]. Поправка первого порядка была обобщена до непертурбативного режима в работах [25; 94; 95]. По мере увеличения силы беспорядка, поправка Альтшулера-Аронова преобразуется в полностью развитую кулоновскую щель на изолирующей стороне перехода металл-изолятор [96; 97].

Изначально ожидалось, что поправка от взаимодействия будет естественным образом обрезаться на границе *диффузионной области*, при $|E - E_F| \sim 1/\tau$. Однако, как показали Рудин, Алейнер и Глазман [27], в действительности эта поправка протягивается в *квазibalлистическую область*, $|E - E_F| \gg 1/\tau$, где ее можно интерпретировать, как результат рассеяния на осцилляциях Фриделя, вызываемых каждой отдельной примесью. В двумерной геометрии этот эффект приводит к логарифмической зависимости $\delta\nu(E)$, так же, как и вклад диффу-

зионной области. Кулаков [28] предпринял попытку обобщить этот результат на случай трехмерной геометрии, изучив обменный (фоковский) вклад при ряде упрощающих предположений и предсказал линейное поведение поправки в баллистической области:

$$\frac{\delta\nu_{\text{ball}}^{(\text{Koul})}(E)}{\nu_0} \sim \frac{\lambda}{k_F l} \frac{|E - E_F|}{E_F}, \quad \frac{1}{\tau} \ll |E - E_F|. \quad (1.2)$$

В настоящей главе будет переосмыслен баллистический вклад в DOS в трехмерном металле с короткодействующим взаимодействием. Будет учтена диаграмма Хартри, которая не рассматривалась в работе [28] и будет аккуратно отслежена зависимость поправки от энергии во всей баллистической области $|E - E_F| \gg 1/\tau$. Как обычно и бывает в баллистических системах, полученное поведение поправки к DOS существенно зависит от выбора модели взаимодействия и электронного спектра. Полученная зависимость $\delta\nu(E)$, как правило, асимметрична по отношению к энергии Ферми. Такая асимметрия наиболее выражена в случае точечного взаимодействия и параболического спектра электронов, когда поправка к DOS полностью отсутствует для $E > E_F$. В общем случае удобно представить поправку в виде:

$$\frac{\delta\nu_{\text{ball}}(E)}{\nu_0} = \frac{\pi\lambda}{4p_E l} [\zeta_F(E) - 2\zeta_H(E)], \quad (1.3)$$

где p_E — это импульс, отвечающий энергии E для заданного дисперсионного соотношения, а $\zeta_F(E)$ и $\zeta_H(E)$ — это безразмерные величины, описывающие вклад обменных диаграмм (Фока) и диаграмм Хартри, обе из которых принимают значения порядка 1. Для случая параболической дисперсии электронов и взаимодействия Юкавы эти функции показаны на Рис. 1.1 для различных значений радиусов экранировки.

В настоящей главе будет показано, что в целом поведение поправки $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ существенно зависит от дисперсии электронов во всей зоне, в то время как скачок ее производной на E_F (хорошо заметный на Рис. 1.1) является универсальным и определяется исключительно свойствами системы на Ферми поверхности и потенциалом взаимодействия в импульсном представлении:

$$\left. \frac{\partial[\delta\nu_{\text{ball}}(E)/\nu_0]}{\partial(p_E/p_F)} \right|_{E_F-0}^{E_F+0} = \frac{\pi\nu_0[V(0) - 2V(2p_F)]}{k_F l}, \quad (1.4)$$

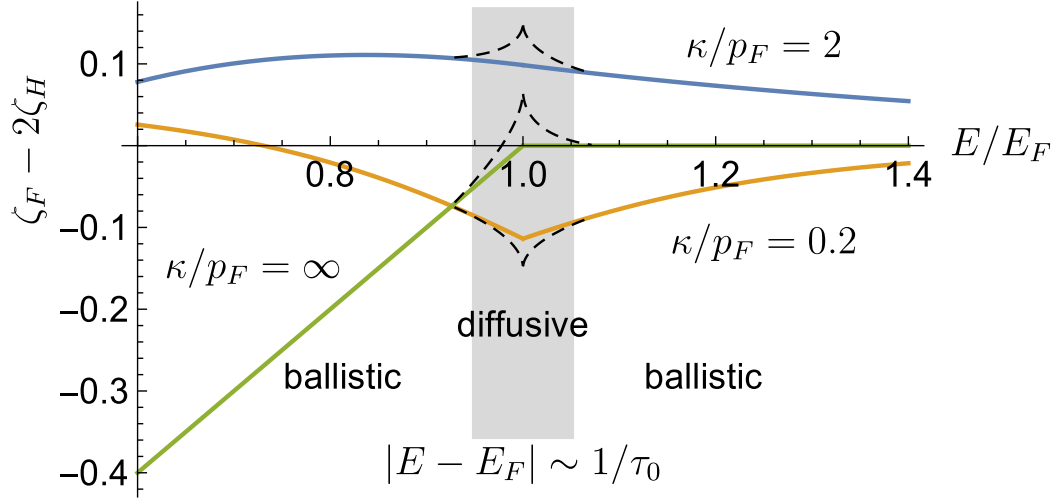


Рисунок 1.1 — Зависимость баллистической поправки (1.3) к туннельной плотности состояний от энергии для случая взаимодействия Юкавы при различных значениях волновых векторов экранировки $\kappa/p_F = 0.2, 2, \infty$ (точечное взаимодействие). Пунктиром схематически показан вклад диффузионной области (1.1) вблизи энергии Ферми, который имеет корневую зависимость.

где слагаемые отвечают обменному (фоковскому) и хартриевскому вкладам, соответственно. Результат, полученный в работе Кулакова [28] в действительности описывает именно этот скачок. Он изучал только вклад Ферми-поверхности, и поэтому смог извлечь только неаналитическую часть баллистической поправки. Скачок производной, посчитанный с использованием выражения Кулакова (1.2) полностью совпадает с Ур. (1.4), если учитывать то, что он не рассматривал вклад Хартри.

В координатном представлении поправка (1.3) содержит вклады как с малых длин $r \sim 1/k_F$, так и достаточно больших масштабов $r \sim v_F/|E - E_F|$, где r — это расстояние между точкой взаимодействия и примесью. Таким образом, вся поправка не может быть универсальной. Тем не менее, скачок ее производной набирается на больших масштабах $r \gg 1/k_F$ и приводит к достаточно компактной формуле (1.4).

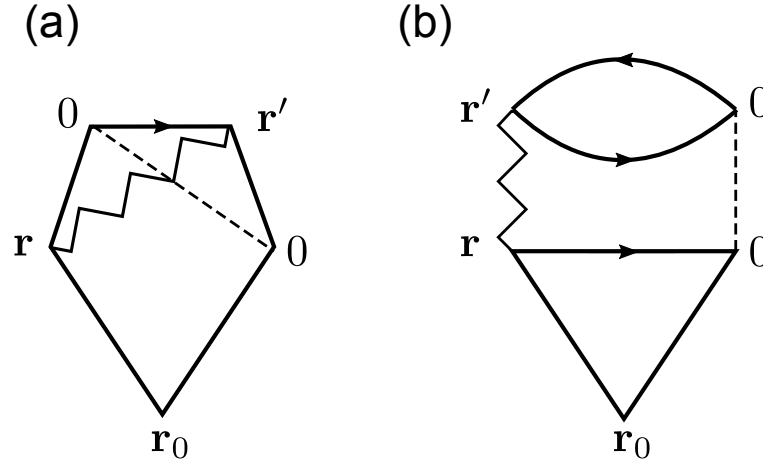


Рисунок 1.2 — (a) Обменная (фоковская) и (b) хартриевская диаграммы для средней туннельной плотности состояний (измеренной в точке \mathbf{r}_0) в неупорядоченном металле в баллистическом окне энергий $|E - E_F| \gg 1/\tau$. Сплошные, зигзагообразные и пунктирные линии обозначают электронные функции Грина, линии электрон-электронного взаимодействия и корреляционную функцию беспорядка, соответственно.

1.2 Поправка от взаимодействия в (квази)баллистическом режиме

Далее будет рассмотрен Ферми-газ электронов (спин 1/2) со слабым взаимодействием с потенциалом $V(\mathbf{r})$ в присутствии примесных рассеивателей, которые моделируются случайным потенциалом $U(\mathbf{r})$. Предполагается, что последний является короткодействующим и может быть описан обычной моделью гауссового случайного шума с коррелятором $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/(2\pi\nu_0\tau)$. Дальнейший анализ будет производиться при нулевой температуре, $T = 0$.

Туннельная плотность состояний может быть получена из причинной (фейнмановской) одночастичной функции Грина в совпадающих точках: $\nu(E) = -\text{sgn}(E - E_F) \text{Im} G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)/\pi$. Последняя связана с запаздывающей и опережающей функциями Грина как $G_E = G_E^{R(A)}$ при $E > E_F$ ($E < E_F$).

В баллистической области, $|E - E_F| \gg 1/\tau$, поправка к туннельной плотности состояний дается диаграммами, показанными на Рис. 1.2 (у обеих диаграмм есть зеркальный аналог) [27]. Они описывают ведущий порядок в разложении по величине взаимодействия и силе беспорядка [в баллистической области энергий, диффузионные лестницы переносили бы типичный импульс $q \gtrsim \min(p_F, \kappa) \gg 1/l$ и были бы малы, поэтому их учет не требуется].

Вычисление диаграмм удобно производить в координатном представлении. Результат для средней поправки к туннельной плотности состояний может быть записан в виде

$$\frac{\delta\nu(E)}{\nu_0} = \frac{\text{sgn}(E - E_F)}{\pi^2\nu_0^2\tau} \text{Re} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' V_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\eta_F - 2\eta_H), \quad (1.5)$$

где обменный (фоковский) и хартриевский вклады имеют вид

$$\eta_F(E) = \int \frac{dE'}{2\pi} [G_E G_E](r) G_E(r') G_{E'}(r) G_{E'}(r'), \quad (1.6)$$

$$\eta_H(E) = \int \frac{dE'}{2\pi} [G_E G_E](r) G_E(r) G_{E'}(r')^2. \quad (1.7)$$

Здесь выражение $[G_E G_E]$ представляет собой свертку двух электронных функций Грина по точке наблюдения \mathbf{r}_0 :

$$[G_E G_E] = \int G_E(\boldsymbol{\rho}) G_E(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = -\frac{\partial G_E(\mathbf{r})}{\partial E}. \quad (1.8)$$

Как обычно [98], интеграл по E' в уравнениях (1.6) и (1.7) нуждается в регуляризации с помощью множителя $e^{+i0E'}$, благодаря которому можно замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости. Использование аналитических свойств G^R позволяет заменить η_F на η_H эквивалентные им выражения

$$\eta_F = \int_0^{E_F} \frac{dE'}{2\pi} [G_E G_E](r) G_E(r') [G_{E'}^A(r) G_{E'}^A(r') - G_{E'}^R(r) G_{E'}^R(r')], \quad (1.9)$$

$$\eta_H = \int_0^{E_F} \frac{dE'}{2\pi} [G_E G_E](r) G_E(r) [G_{E'}^A(r')^2 - G_{E'}^R(r')^2], \quad (1.10)$$

В полученных уравнениях (1.9) и (1.10) интегрирование по энергии исходно происходит в интервале от $-\infty$ до E_F , однако на отрицательных энергиях $G^R = G^A$ и выражение равно нулю, поэтому нижний предел был заменен на 0.

Общее выражение для баллистической поправки, определяемое уравнениями (1.5), (1.9) и (1.10) содержит интегрирование по \mathbf{r} , \mathbf{r}' и E' , которое не может быть проделано аналитически для произвольного спектра и потенциала взаимодействия электронов. Для того, чтобы получить представление о поведении $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$, будут произведены вычисления для случаев точечного взаи-

модействия (раздел 1.3) и экранированного потенциала Юкавы (раздел 1.4), в которых можно получить явные аналитические результаты.

1.3 Случай точечного взаимодействия электронов

В настоящем разделе изучается простейший случай контактного потенциала взаимодействия электронов $V(\mathbf{r}) = \lambda\delta(\mathbf{r})/2\nu_0$. Несмотря на то, что он может быть получен из результата для потенциала Юкавы (1.19), изучаемого в разделе (1.4) взятием предела $\kappa \rightarrow \infty$, оказывается поучительным произвести его отдельное рассмотрение для того, чтобы показать, что изменится при конечном радиусе взаимодействия и провести сравнение с результатами работ [27] и [28].

1.3.1 Параболическая дисперсия электронов

В случае трехмерного пространства и параболической дисперсии электронов, $E(p) = p^2/2m$, затравочная причинная функция Грина электронов в координатном представлении имеет вид:

$$G_E(r) = -\frac{\pi\nu_0}{p_F r} e^{irp_E \cdot \text{sgn}(E-E_F)}, \quad (1.11)$$

где $p_E = \sqrt{2mE}$.

Подставляя Ур. (1.11) в уравнения (1.5), (1.9) и (1.10) немедленно получаем поправку (1.3) с совпадающими вкладами

$$\zeta_F(E) = \zeta_H(E) = \frac{1}{\pi} \int_0^{E_F} \frac{dE'}{E_F} \int_0^\infty dr \frac{\sigma_{EE'}(r)}{r}, \quad (1.12)$$

где было введено обозначение

$$\sigma_{EE'}(r) = \sin 2(p_E - p_{E'})r - \sin 2(p_E + p_{E'})r. \quad (1.13)$$

Интеграл по r в Ур. (1.12) выражается через интеграл Дирихле и приводит к выражению $\zeta_F = \zeta_H = \zeta$, где

$$\zeta(E) = \frac{1}{2} \int_0^{E_F} \frac{dE'}{E_F} [\operatorname{sgn}(E - E') - \operatorname{sgn}(E + E')]. \quad (1.14)$$

Теперь интегрирование по E' становится тривиальным и дает

$$\zeta_F(E) - 2\zeta_H(E) = \frac{E - E_F}{E_F} \theta_{E_F - E}, \quad (1.15)$$

Интересно, что достаточно неожиданным образом, сильно осциллирующий, $\int dr (1/r) \sin 2(p_E + p_{E'})r$, и слабо осциллирующий, $\int dr (1/r) \sin 2(p_E - p_{E'})r$, интегралы [см. уравнения (1.12) и (1.13)] приводят к равным вкладам и полностью сокращают друг друга на энергиях $E > E_F$, так что поправка обнуляется на энергиях, больших фермиевской (см. Рис. 1.1).

Скачок производной от выражения $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ на энергии Ферми дается уравнением (1.4), где $V(q) = \lambda/2\nu_0$.

1.3.2 Непараболическая дисперсия электронов

Отличительной особенностью Ур. (1.15), полученного для параболического спектра является отсутствие поправки при $E > E_F$. Для того чтобы изучить, насколько общим является данное свойство, рассмотрим теперь влияние ангармоничности в спектре электронов на форму поправки к туннельной плотности состояний. Возьмем случай параболического спектра с возмущением, пропорциональным четвертой степени импульса:

$$E(p) = (p^2 + \alpha^2 p^4)/2m. \quad (1.16)$$

В этом случае также можно явно записать функцию Грина электронов:

$$G_E(r) = -\frac{\pi\nu_E}{p_E r} \left[e^{irp_E \operatorname{sgn}(E - E_F)} - e^{-r\tilde{p}_E} \right], \quad (1.17)$$

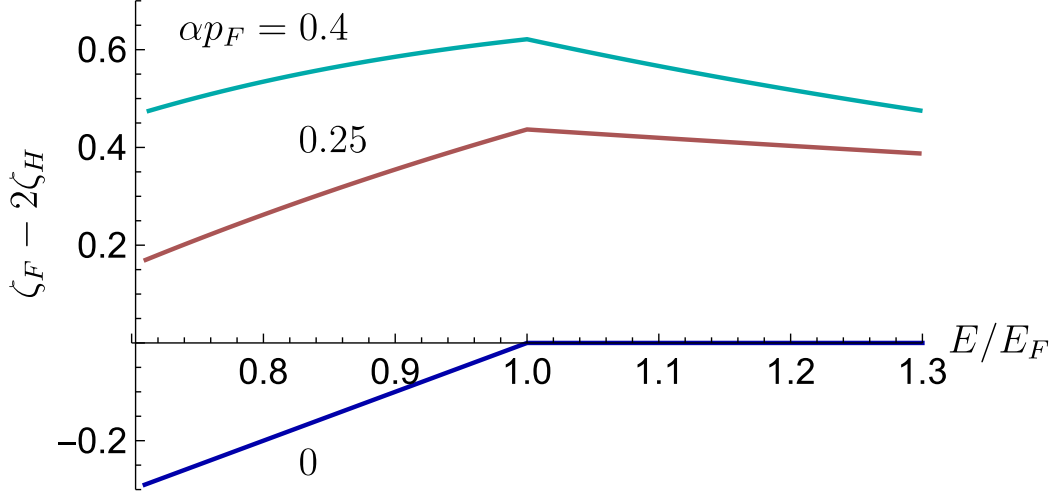


Рисунок 1.3 — Зависимость баллистической поправки к туннельной плотности состояний (1.3) для случая точечного взаимодействия ($\kappa/p_F = \infty$) при наличии ангармоничности в электронном спектре в виде членов четвертого порядка [Ур. (1.16)] для случаев $\alpha p_F = 0$ (параболическая дисперсия), 0.25, 0.4.

где ν_E — это плотность состояний на энергии E , p_E теперь обозначает положительный корень уравнения $E(p) = E$, а $\tilde{p}_E = \sqrt{p_E^2 + 1/\alpha^2}$.

Подставляя Ур. (1.17) в уравнения Eqs. (1.9) и (1.10), получим поправку к туннельной плотности состояний как функцию энергии и параметра α . Явный аналитический результат весьма громоздок, поэтому представим результаты графически на Рис. 1.3, на котором случай параболической дисперсии $\alpha = 0$) соответствует нижней кривой. Согласно этому результату, ангармоничность приводит к тому, что поправка $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ становится ненулевой при $E > E_F$, а наличие излома при $E = E_F$ устойчиво по отношению к деформации спектра. Вычисления показывают, что скачок производной на энергии Ферми по-прежнему описывается Ур. (1.4), что подтверждает универсальность этого ответа, когда он выражен через свойства Ферми поверхности. Доказательство этого факта будет приведено в разделе 1.5.

1.3.3 Актуальные масштабы длин в 2D и 3D

В настоящем разделе обсуждается разница между свойствами фриделевских осцилляций в двумерной и трехмерной геометрии, актуальные для рассматриваемой задачи масштабы длин и объясняется, почему баллистическая поправка в трехмерии является неуниверсальной в отличие от универсальной квазибаллистической поправки для двумерных систем [27].

При наличии трех пространственных измерений, подынтегральное выражение в Ур. (1.14) линейно по E' и оба слагаемых приводят к выражениям одного порядка (при параболической дисперсии полное подынтегральное выражение отлично от нуля только в полосе $E < E' < E_F$ из-за сокращения между этими слагаемыми, однако при произвольном законе дисперсии полного сокращения не происходит).

Так как первый (второй) член в Ур. (1.14) отвечает большим (малым) масштабам, можно сделать вывод о том, что в трехмерной геометрии одинаково важны как вклады больших масштабов длин (определяемые Ферми поверхностью), так и малых масштабов $r \sim 1/k_F$ (неуниверсальный вклад энергий, лежащих глубоко под уровнем Ферми). Эта неуниверсальность иллюстрируется результатами раздела 1.3.2, показанными на Рис. 1.3.

В двух пространственных измерениях более медленный закон затухания осцилляций Фриделя (детали приведены в приложении А) приводит к более сингулярному поведению (как функции энергии) подынтегрального выражения в формуле для $\zeta = \zeta_F = \zeta_H$ по сравнению с Ур. (1.14):

$$\zeta^{(2D)} = \frac{p_F}{\pi^2} \int_0^{E_F} \frac{dE'}{E_F} \left(\frac{1}{p_E - p_{E'}} + \frac{1}{p_E + p_{E'}} \right), \quad (1.18)$$

В ведущем приближении можно пренебречь вторым слагаемым, происходящим от малых масштабов $r \sim 1/k_F$, а интеграл по энергии становится логарифмическим. В координатном представлении, этому соответствует широкий диапазон длин $1 \ll k_F r \ll E_F/|E - E_F|$, в котором электронные функции Грина могут быть заменены их асимптотическими выражениями, определяемыми свойствами Ферми-поверхности. Подобная логика обосновывает законность применения метода стационарной фазы при изучении вклада рассеяния на осцилляциях

Фриделя, использованном в работе [27]. В совокупности приведенная аргументация объясняет, почему квазибаллистическая поправка к туннельной плотности состояния в двумерии определяется свойствами Ферми-поверхности и является симметричной относительно E_F .

1.4 Потенциал Юкавы и параболическая дисперсия

Для того, чтобы проиллюстрировать роль пространственного масштаба электрон-электронного взаимодействия, рассмотрим в настоящем разделе модель, в которой взаимодействие описывается потенциалом Юкавы:

$$V_r = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\kappa^2}{2\nu_0} \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad (1.19)$$

где $\lambda \ll 1$ — безразмерная константа взаимодействия, а κ — волновой вектор экранировки, который может принимать произвольные значения.

В этой модели интегралы по пространственным координатам в уравнениях (1.9) и (1.10) могут быть сосчитаны аналитически в переменных $|\mathbf{r}|$, $|\mathbf{r}'|$ и $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В первую очередь возьмем интеграл по $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и $|\mathbf{r}|$, получив следующие выражения для вклада Фока, входящего в Ур. (1.3):

$$\zeta_F(E) = \int_0^{E_F} \frac{dE'}{E_F} [F(p_E + p_{E'}) - F(p_E - p_{E'})], \quad (1.20)$$

где

$$F(p) = \frac{1}{\pi} \frac{\kappa^2}{p^2 + \kappa^2} \operatorname{arccot} \frac{p}{\kappa}. \quad (1.21)$$

Вклад Хартри дается выражением

$$\zeta_H(E) = \frac{\kappa^2}{(2p_E)^2 + \kappa^2} \left[\left(1 - \frac{E}{E_F}\right) \theta_{E_F - E} + \beta_{2p_E/\kappa} \right], \quad (1.22)$$

где

$$\beta_x = \frac{2}{\pi x} \left[1 - \frac{1 + x^2}{x} \arctan x \right]. \quad (1.23)$$

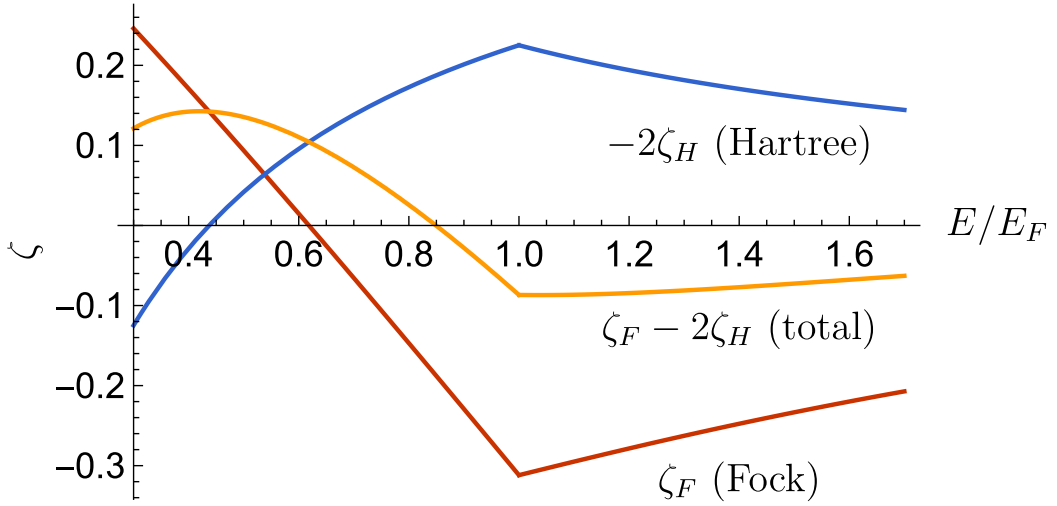


Рисунок 1.4 — Вклады Фока и Хартри в $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ [см. Ур. (1.3)] как функция энергии, а также их сумма в модели потенциала Юкавы при параметре экранировки $\kappa = p_F$.

Интеграл по энергии в Ур. (1.20) может быть сосчитан аналитически. В случае слабой экранировки ($\kappa \ll p_F$), вклад Хартри существенно меньше, чем вклад Фока (так же, как и в диффузионном режиме).

Полная поправка $\zeta_F(E) - 2\zeta_H(E)$ изображена на Рис. 1.1 для нескольких значений κ/p_F . На Рис. 1.4 результаты для вкладов $\zeta_F(E)$ и $\zeta_H(E)$ показаны по отдельности вместе с их суммой для случая $\kappa/p_F = 1$.

Вклады Фока и Хартри испытывают скачок производной на энергии E_F в соответствии с Ур. (1.4), где $V(q) = (\lambda/2\nu_0)\kappa^2/(q^2 + \kappa^2)$. Знак этого скачка зависит от соотношения между κ и p_F : при $\kappa < 2p_F$ излом баллистическая поправки к туннельной плотности состояний расположен острием вниз, а при $\kappa > 2p_F$ острием вверх (см. Рис. 1.1.)

Изложенные результаты для поправки к туннельной плотности состояний относятся к баллистической области энергий, $|E - E_F| \gg 1/\tau$ [выражения ± 0 в Ур. (1.4) следует понимать с учетом этого замечания]. В диффузионном пределе, $|E - E_F| \ll 1/\tau$, поправка описывается выражением Альтшулера-Аронова (1.1), знак которой совпадает со знаком выражения $V(0) - 2\langle V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \rangle$, где угловые скобки в члене Хартри означают усреднение по \mathbf{p} и \mathbf{p}' вдоль Ферми-поверхности [12]. В модели потенциала Юкавы $\delta\nu_{\text{diff}}(E) \propto 1 - 2(\kappa/2p_F)^2 \log[1 + (2p_F/\kappa)^2]$, следовательно, диффузионная поправка к плотности состояний содержит особенность, расположенную острием вверх при $\kappa < 1.26 p_F$ и острием

вниз при $\kappa > 1.26 p_F$. Поведение диффузионной поправки схематически показано пунктиром на Рис. 1.1.

1.5 Универсальность скачка производной на энергии Ферми

Баллистическая поправка к туннельной плотности состояний не универсальна в трехмерной геометрии и зависит от деталей потенциала взаимодействия $V(r)$ и дисперсии электронов во всей зоне, которая а priori неизвестна. Тем не менее, оказывается что скачок величины $\partial\nu_{\text{ball}}(E)/\partial E$ на энергии Ферми определяется исключительно свойствами Ферми-поверхности и характеристиками взаимодействия в соответствии с Ур. (1.4). В разделах 1.3 и 1.4 уже наблюдался этот факт в частных случаях, полностью поддающихся аналитическому анализу.

Ниже будет приведено доказательство универсальности излома для произвольного закона дисперсии и короткодействующего потенциала. Во-первых, покажем как это утверждение может быть проверено для случая точечного электрон-электронного взаимодействия без знания точного аналитического решения, а потом рассмотрим общий случай.

Для точечного (контактного) взаимодействия при параболической дисперсии $\partial\nu_{\text{ball}}(E)/\partial E$ можно получить, дифференцируя $\sigma_{EE'}$ в Ур. (1.12). При этом множитель r в знаменателе исчезнет, и интеграл по r выдаст $\delta(p_E - p_{E'})$ [аналогичное слагаемое $\delta(p_E + p_{E'})$ не даст вклада в дальнейшем]. Этот δ -функциональный пик далее интегрируется по отрезку $0 < E' < E_F$. Таким образом, он даст вклад в интеграл, если $E < E_F$ и не даст такого вклада при $E > E_F$. Благодаря этому производная испытывает скачок, который дается уравнением (1.4). Важно отметить, что этот δ -пик является вкладом больших расстояний, на которых функции Грина можно заменить на их асимптотические выражения. Последние определяются вкладом Ферми-поверхности, следовательно, ей же определяется и скачок производной поправки.

Эти рассуждения легко обобщить на случай статического электрон-электронного взаимодействия с произвольным, но конечным радиусом действия. Как было продемонстрировано выше, скачок $\partial\nu_{\text{ball}}(E)/\partial E$ связан с появлением

выражения $\delta(p_E - p_{E'})$, который набирается на больших расстояниях между положением примеси (0) и местом взаимодействия (точки r и r'). Это обстоятельство позволяет воспользоваться асимптотикой функции Грина $G_E^{R(A)}(r) \sim -[\pi\nu(E)]/(p_E r)e^{\pm i r p_E}$, выраженной только через свойства Ферми-поверхности. Подставляя ее в уравнения (1.5), (1.9) и (1.10) и извлекая скачок производной согласно описанной выше процедуре, получим

$$\left. \frac{\partial[\delta\nu_{\text{ball}}(E)/\nu_0]}{\partial(p_E/p_F)} \right|_{E_F-0}^{E_F+0} = \frac{\pi(\lambda_F - 2\lambda_H)}{2k_F l}, \quad (1.24)$$

где коэффициенты λ_F и λ_H равны

$$\lambda_F = \frac{\nu_0}{2\pi^2} \hat{\mathfrak{D}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' V_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} \frac{r+r'}{r r'^2} e^{i(p_E - p_{E'})(r+r')}, \quad (1.25)$$

$$\lambda_H = \frac{\nu_0}{\pi^2} \hat{\mathfrak{D}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' V_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} \frac{1}{r'^2} e^{2i p_E r - 2i p_{E'} r'}. \quad (1.26)$$

Здесь оператор $\hat{\mathfrak{D}}$ извлекает коэффициент перед $\delta(p_E - p_{E'})$, полагает $E = E' = E_F$ и берет вещественную часть полученного выражения. Для вычисления интегралов (1.25) и (1.26), перейдем к переменным \mathbf{r} и $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Так как релевантное $\rho \ll r$ при $r \rightarrow \infty$ из-за конечного радиуса взаимодействия, положим $r' \rightarrow r$ в префакторе и разложим $r' = r + (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho})/r$ в экспоненте. Тогда, вычисляя интегралы по \mathbf{r} и E_F , придем к Ур. (1.4) для скачка производной поправки к плотности состояний.

1.6 Обсуждение результатов

В главе была изученная поправка к туннельной плотности состояний вызванная совместным влиянием электрон-электронного взаимодействия и короткокоррелированного беспорядка в баллистической области энергий $|E - E_F| > 1/\tau$. В трехмерной геометрии эта поправка содержит два вклада одного порядка, причем один проистекает от масштабов длины порядка фермиевской (k_F^{-1}), а другой — с гораздо больших масштабов $\sim v_F/|E - E_F|$. В результате величина $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ существенно зависит от выбранной модели и является асимметрич-

ной по отношению к энергии Ферми. Однако скачок производной $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ на E_F определяется большими масштабами длин и поэтому не так чувствителен к деталям микроскопии. Согласно Ур. (1.4), он выражается в терминах свойств Ферми-поверхности и Фурье-гармоник потенциала взаимодействия при $q = 0$ и $q = 2p_F$. Это обстоятельство некоторым образом напоминает двумерный сценарий при котором, однако, вся логарифмическая поправка к плотности состояний в квазибаллистической области пропорциональна $V(0) - 2V(2p_F)$.

Скачок производной от выражения $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ на E_F в трехмерном случае впервые изучался Кулаковым [28]. Он рассматривал только диаграмму Фока и пренебрегал всеми слагаемыми, имеющими гладкое аналитическое поведение вблизи E_F . Значительно более подробный анализ, приведенный в настоящей диссертации показывает, что учет больших пространственных масштабов в его работе был произведен корректно. Однако в трехмерии короткие масштабы порядка фермиевской длины волны приводят к аналитическим выражениям того же порядка и сильно зависят от выбранной модели. Такое соотношение между вкладами коротких масштабов и больших длин приводит к существенной асимметрии величины $\delta\nu_{\text{ball}}(E)$ по отношению к энергии Ферми, которая более всего заметна при точечном взаимодействии и параболической дисперсии электронов, при которых туннельная плотность состояний над энергией Ферми не модифицируется в ведущем порядке.

Интересно, что неаналитичность в туннельной плотности состояний с линейным поведением ($|E - E_F|$) известна также и для двумерных систем, в которых она возникает благодаря плазмонной моде (полнос при $q \sim \omega^2/\kappa v_F^2$) [99] и возбуждениям в виде электрон-дырочных пар (сингулярность при $q \sim |\omega|/v_F$) [100], где $\omega = E - E'$. Так как она не содержит малого множителя $1/k_F l$, она может превышать результат (A.4), полученный в работе [27]. Однако оба этих механизма неэффективны в трехмерной геометрии, так как соответствующие процессы на малых энергиях $|\omega| \ll E_F$ либо отсутствуют (в трехмерии плазмоны имеют щель в спектре) либо подавлены благодаря меньшему фазовому объему (электрон-дырочные пары).

В настоящих трехмерных материалах электроны взаимодействуют согласно динамически, а не статически экранированному кулоновскому взаимодействию. Тем не менее, при изучении баллистической поправки к *неаналитической* части туннельной плотности состояний, вызванной рассеянием электронов

на примесных осцилляциях Фриделя, можно использовать статическое приближение, так как для основной части поправки передача энергии (в процессе электрон-электронного взаимодействия) мала, в то время как переданный импульс велик. Это утверждение было проверено Кулаковым [28], который пронаблюдал, что скачок производной баллистической части поправки к плотности состояний совпадает в моделях статического короткодействующего потенциала и динамически экранированного кулоновского взаимодействия (в приближении случайных фаз). Отметим однако, что наша модель формально не может описывать кулоновский случай, так как в он соответствует значениям $\lambda \sim 1$ и теория возмущений не применима. Вместо нее можно было бы использовать разложение по параметру $r_s = e^2/v_F \sim (\kappa/p_F)^2$ [1; 101], в котором вклад Хартри пренебрежимо мал по сравнению со вкладом Фока и в диффузионной и в баллистической областях (см. обсуждение в конце раздела 1.4).

Непосредственное экспериментальное наблюдение баллистической поправки [Ур. (1.3)] осложняется тем, что ее вклад в изменение наклона $\partial\nu(E)/\partial E$ параметрически меньше, чем изменение наклона невозмущенной плотности состояний $\nu_0(E)$ по малой величине $1/(k_F l)$. Тем не менее, невозмущенная зависимость плотности состояний является аналитической функцией энергии вблизи E_F , так что универсальный излом производной (1.4) доступен для измерения в эксперименте. Наконец, отметим, что полученные выражения для поправки к туннельной плотности состояний могут быть использованы при изучении физических величин, зависящих от плотности состояний на большом масштабе энергий, как например, вклад упругих диаграмм в поправку к критической температуре сверхпроводника, которая будет обсуждаться в следующей главе.

Глава 2. Подавление сверхпроводимости в неупорядоченных пленках: конкуренция двумерной диффузии и трехмерной баллистики

2.1 2D диффузия vs. 3D баллистика

Как упоминалось во введении, пертурбативная поправка для критической температуры сверхпроводника, вызванная совместным эффектом беспорядка и электрон-электронного взаимодействия в режиме двумерного диффузионного движения электронов имеет вид [15–19] :

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{3\pi g} \log^3 \frac{\hbar}{T_{c0}\tau_*}, \quad (2.1)$$

где T_{c0} — критическая температура объемного сверхпроводника, $g = h/e^2 R_{\square} = (2/3\pi)(k_F l)(k_F d) \gg 1$ — безразмерный кондактанс пленки, а λ — безразмерная константа электрон-электронного взаимодействия (для экранированного кулоновского взаимодействия $\lambda = 1/2$). Параметр τ_* определяет время, на котором диффузия становится двумерной: $\tau_* = \max\{\tau, \tau_d\}$, где τ — время упругого рассеяния, а $\tau_d = d^2/4D$ — время диффузии через толщину пленки [15; 21].

Ренормгрупповое обобщение результата (2.1), произведенное Финкельштейном [20; 21] приводит к формуле, описывающей подавление T_c как функции кондактанса пленки g вплоть до полного подавления сверхпроводимости (здесь было подставлено $\lambda = 1/2$, что отвечает случаю экранированного кулоновского взаимодействия):

$$\log \frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma_g} \log \frac{\gamma + \gamma_g}{\gamma - \gamma_g}, \quad (2.2)$$

где $\gamma_g = 1/\sqrt{2\pi g}$ и $\gamma = 1/\log(\hbar/T_{c0}\tau_*)$. Выражение (2.2), где параметр γ рассматривается как подгоночный, было использовано Финкельштейном [21] для описания экспериментальных данных по зависимости T_c пленок MoGe от толщины, напрямую связанной с безразмерным кондактансом g [47]. С тех пор такой способ объяснения экспериментальных данных по подавлению сверхпроводимости в неупорядоченных пленках стал фактически общепринятым [50; 51; 69].

Согласно уравнениям (2.1) и (2.2), подавление T_c в тонких ($d \ll \xi_0$) сверхпроводящих пленках определяется исключительно безразмерным кондактансом на квадрат g . Это утверждение прекрасно вписывается в общую парадигму скейлинга [10], подтверждаемую ренорм-групповым анализом нелинейной сигма-модели в 2D пространстве [25; 70; 71].

Однако интерпретация экспериментальных данных по зависимости $T_c(d)$ с помощью формулы (2.2) сталкивается с рядом принципиальных трудностей. Первая связана с внутренней противоречивостью подхода, в котором γ рассматривается как свободный подгоночный параметр. Как следует из табл. 1, где собраны данные по различным сверхпроводящим пленкам¹, типичные значения γ_{fit}^{-1} , полученные из подгонки зависимости $T_c(d)$ под выражение (2.2), находятся в интервале $7 \div 9$. Проблема заключается в том, что данные значения значительно превосходят теоретическую оценку $\gamma^{-1} = \mathcal{L}_d = \ln(\hbar/T\tau_d)$ (последняя колонка в табл. 1), а в половине случаев превосходят также и величину $\mathcal{L} = \ln(\hbar/T\tau)$ (предпоследняя колонка в табл. 1). С учетом того, что пертурбативный сдвиг T_c , согласно уравнению (2.1), пропорционален кубу этого логарифма, расхождение между микроскопической теорией и результатом фита по формуле 2.2 оказывается очень большим. Можно попытаться спасти положение, сказав, что γ_{fit}^{-1} содержит также вклад 3D диффузии, но в таком случае остается непонятным статус уравнений (2.1) и (2.2), полученных в предположении 2D диффузии.

Другая проблема, связанная с интерпретацией экспериментальных данных в терминах формулы (2.2), заключается в неявном постулировании того, что эффект подавления T_c определяется только безразмерным кондактансом пленки. Однако в реальных тонких пленках в силу технологических причин при изменении толщины меняется и концентрация примесей, а с ней и длина свободного пробега l . Большой массив экспериментальных данных по критической температуре тонких пленок был проанализирован в работе [103], где было показано, что T_c зависит в первую очередь от трехмерной объемной проводимости $\sigma \propto k_F^2 l$, а не от двумерного кондактанса $g \propto k_F^2 l d$.

Фактически неприменимость формулы (2.2) для описания подавления T_c в тонких пленках связана со слишком узким интервалом для 2D диффузии (от d до ξ_0), которого оказывается недостаточно для объяснения наблюдаемой величины эффекта, и малостью префактора $1/g \sim (k_F l)^{-1} (k_F d)^{-1}$. Следовательно,

¹Для пленок WRe и TiN была использована оценка $1/k_F \sim l \sim a$, где a — межатомное расстояние. При расчетах для MoS в качестве эффективной массы взята масса свободного электрона.

Таблица 1 — Параметры сверхпроводящих пленок: объемная критическая температура T_{c0} , толщина d , длина свободного пробега l , величина параметра γ при подгонке зависимости $T_c(g)$ формулой (2.2), а также значения двух логарифмов: $\mathcal{L} = \log(\hbar/T_{c0}\tau)$ и $\mathcal{L}_d = \log(\hbar/T_{c0}\tau d)$.

Mat.	Ref.	T_{c0} , K	d , nm	l , Å	γ_{fit}^{-1}	\mathcal{L}	\mathcal{L}_d
NbN	[40]	15	2 ÷ 15	~ 5	5.0	5.7	5.6 ÷ 3.4
NbN	[41]	15	1 ÷ 26	2	8.3	7.2	6.2 ÷ 2.1
NbN	[44]	17	> 50	< 7	—	4.8	3D
TiN	[46]	5	3.6 ÷ 5	3	6.2	8.9	6.4 ÷ 2.4
MoGe	[20; 47]	7	1.5 ÷ 100	~ 4	8.2	6	< 4.0
MoSi	[49]	7	1 ÷ 20	5	7.0	5.6	< 4.7
MoC	[51]	8	3 ÷ 30	< 4	7.5	5.5	3.2 ÷ 0.9
WRe	[52]	6	3 ÷ 120	4	7.4	6.1	< 2.7
Nb	[102]	7	2.5 ÷ 26	18	11.7	5.2	< 4.8

для количественного описания экспериментальных данных необходимо указать другой механизм усиления кулоновского взаимодействия беспорядком, не связанный с двумерной диффузией.

В настоящей работе мы показываем, что имеющиеся экспериментальные данные по подавлению T_c в тонких пленках могут быть удовлетворительно объяснены в предположении, что основной вклад происходит от процессов *трехмерного баллистического* движения электронов с типичным расстоянием между точкой взаимодействия и местом примесного рассеяния в несколько длин волн. Наш основной результат состоит в корректировке пертурбативной формулы (2.1) для сдвига T_c :

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\alpha}{k_F l} - \frac{\lambda}{3\pi g} \log^3 \frac{\hbar}{T_{c0}\tau d}, \quad (2.3)$$

где добавленный первый член отвечает вкладу трехмерной баллистической области. При этом нужно отдавать отчет, что в подавление T_c вносят вклад все масштабы, начиная от фермиевской длины волны, так что удержание последнего члена, происходящего из области двумерной диффузии, на фоне первого может быть оправдано только для материалов с исключительно низкой T_{c0} или достаточно тонких (в частности, атомных [104]) пленок.

Коэффициент α в формуле (2.3) является неуниверсальным, он зависит от деталей взаимодействия и структуры случайного потенциала. В модели сла-

бого короткодействующего отталкивания между электронами с амплитудой λ и гауссового белого случайного потенциала он имеет вид

$$\alpha = \frac{\pi \lambda \log^2 \omega_D / T_c}{2(1 + \lambda \log E_F / \omega_D)^2}. \quad (2.4)$$

Для реальных сверхпроводящих пленок с кулоновским взаимодействием следует ожидать зависящее от конкретного материала значение параметра $\alpha \sim 1$.

2.2 Выбор модели

Мы рассматриваем модель s -волновой сверхпроводимости, предполагая притяжение электронов по фонноному механизму, которое описывается потенциалом $V_{\text{ph}}(\mathbf{r}) = -(\lambda_{\text{ph}}/\nu)\delta(\mathbf{r})$, действующим в полосе энергий ω_D вблизи энергии Ферми, а также короткодействующее отталкивание с потенциалом $V(\mathbf{r}) = (\lambda/\nu)\delta(\mathbf{r})$ с обрезкой по энергии на величине E_F . Мы будем работать в приближении слабой связи, $\lambda_{\text{ph}}, \lambda \ll 1$, и пренебрегать перенормировкой фононной вершины беспорядком за рамками лестничного приближения [29]. Беспорядок моделируется случайным потенциалом с гауссовым белым шумом, задаваемом коррелятором $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2\pi\nu\tau$, где ν — плотность состояний на уровне Ферми в расчете на одну проекцию спина, а τ — время примесного рассеяния.

Без учета примесных перенормировок вершин взаимодействия, T_c дается стандартным выражением теории Бардина-Купера-Шриффера (БКШ):

$$T_{c0} = \omega_D \exp(-1/\lambda_{\text{BCS}}), \quad (2.5)$$

где эффективная константа связи имеет вид

$$\lambda_{\text{BCS}} = \lambda_{\text{ph}} - \frac{\lambda}{1 + \lambda \log E_F / \omega_D}. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое (в российской литературе известно, как толмачевский логарифм, а в западной — как кулоновский псевдопотенциал) описывает вклад электрон-электронного отталкивания в куперовский канал, которое подверже-

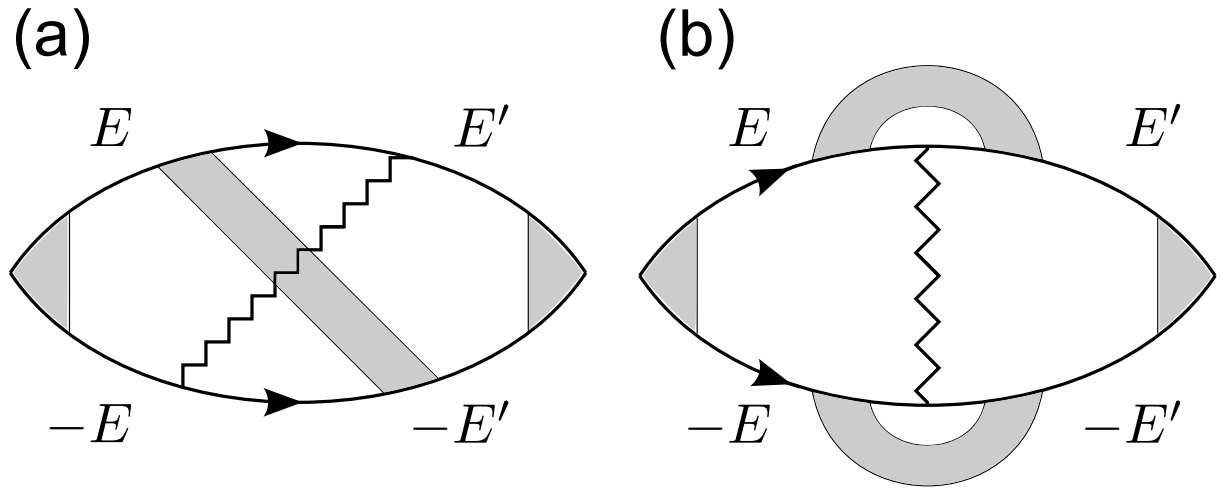


Рисунок 2.1 — Неупругие диаграммы для диффузионного вклада ($q \ll 1/l$ и $E, E' \ll 1/\tau$, где q — импульс, переносимый линией взаимодействия) в куперовскую восприимчивость, определяющие сдвиг T_c . Затененные блоки в середине диаграмм обозначают диффузоны и купероны, соединяющие функции Грина с разными знаками мацубаровских энергий. Затененные треугольники в углах диаграмм обозначают перенормировку фононной вершины примесными лестницами и лестницами электронного взаимодействия с константой λ .

но логарифмической перенормировке в области энергий от ω_D до E_F [105–107], см. также приложение Б.

Критическая температура определяется полюсом куперовской лестницы на нулевом импульсе и нулевой частоте в мацубаровской диаграммной технике. В присутствии случайного потенциала диаграммный ряд необходимо усреднить по беспорядку всеми возможными способами. В ведущем порядке (приближение непересекающихся пунктиров) этот процесс сводится к независимому усреднению произведения двух функций Грина, $G_E G_{-E}$, соединяющих вершины взаимодействия (λ_{ph} или λ), что достигается вставкой куперона. В согласии с теоремой Андерсона [30–32], результат не зависит от силы беспорядка и приводит к выражениям (2.5) и (2.6) для критической температуры.

2.3 Диффузионный вклад

Для вычисления сдвига T_c необходимо учесть процессы, описывающие совместный эффект взаимодействия и беспорядка в следующем порядке по отношению к диаграммам без пересечений [16–21]. Диаграммы, дающие ведущий вклад в диффузионной области, показаны на Рис. 2.1, где взаимодействие (зигзагообразная линия) пересекается примесными лестницами — диффузонами и куперонами — обозначенными серыми блоками. Диаграмма (а) имеет симметричный аналог, а диаграмма (б) содержит два дополнительных вклада, содержащих примесную линию, соединяющую функции Грина с энергией одного знака (Hikami box) [108]. Аналитическое выражение для сдвига T_c содержит суммирование по двум мацубаровским энергиям E и E' см. приложение Б:

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{2\pi\lambda}{\nu} \left(\frac{\lambda_{\text{ph}}}{\lambda_{\text{BCS}}} \right)^2 T^2 \sum_{E, E' > 0}^{E_F} \frac{u(E)u(E')I_{E, E'}}{EE'}, \quad (2.7)$$

где множитель $\lambda_{\text{ph}}/\lambda_{\text{BCS}}$ и логарифмическая функция $u(E) = \theta(\omega_D - E) - (\lambda \log \omega_D/T)/(1 + \lambda \log E_F/T)$ отвечают за эффекты перенормировок, которые можно описать путем включения в левую и правую вершину диаграммы лестниц из линий взаимодействия λ . В диффузионной области величина $I_{E, E'}$ определяется интегралом по двумерному импульсу в плоскости пленки q_{\parallel} и суммой по поперечным модам оператора Лапласа с граничными условиями Неймана ($q_z = 2\pi m/d$, где $m = 0, 1, \dots$), переносимыми линией взаимодействия (см. приложение Б):

$$I_{E, E'} = \frac{\tau}{d} \sum_{q_z} \int \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{f_q(E + E')^2 [3 - f_q(E + E')]}{1 - f_q(E + E')}. \quad (2.8)$$

Имея цель проследить за кроссовером в баллистическую область, мы написали купероны и диффузоны за рамками диффузионного приближения, выразив их через величину $f_q(\omega) = (ql)^{-1} \arctan[ql/(1 + |\omega|\tau)]$, которая описывает одну ступень примесной лестницы при произвольных значениях ql и $\omega\tau$ и условиях $q \ll k_F$, $\omega \ll E_F$. Аналогичный подход был использован в работе [109] для вычисления флуктуационной проводимости при произвольной силе беспорядка.

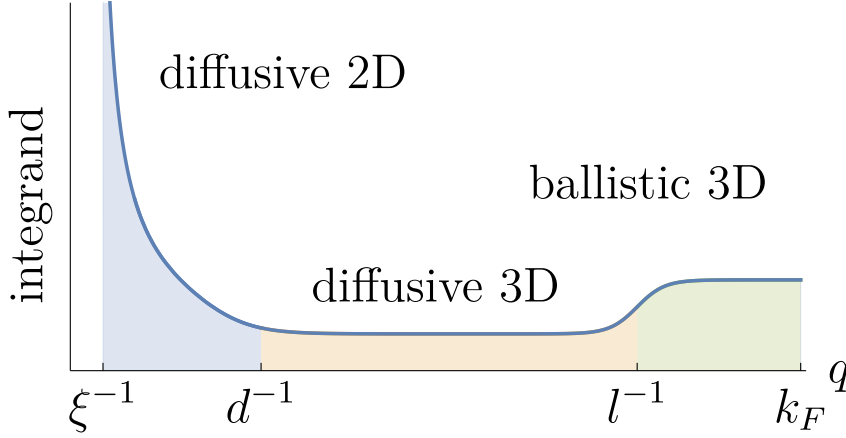


Рисунок 2.2 — Схематическое изображение зависимости подынтегрального выражения в уравнении (2.8) от q (при не очень больших $E + E'$). В области $q > 1/d$ оно слабо зависит от q , меняясь в $\pi^2/8$ раз при переходе от диффузионного к баллистическому характеру движения при $q \sim 1/l$.

Ведущий 2D диффузионный вклад возникает от моды с $q_z = 0$. Обрезая интеграл по q на импульсе $1/d$, а суммирование по энергиям — на ω_D , и принимая во внимание, что в реальных пленках, изучаемых в эксперименте, энергия Дебая ω_D по порядку величины совпадает с \hbar/τ_d [45], приходим к стандартному ответу (2.1) с $\tau_* \sim \tau_d$. При этом выделение 2D диффузионного вклада из выражений (2.7) и (2.8) осложняется тем, что вклад других областей, вообще говоря, оказывается больше. Действительно, на масштабе $q \sim 1/d$ двумерное логарифмическое поведение сменяется линейно расходящимся за счет включения высших поперечных мод, делающих импульсный интеграл трехмерным. При желании можно оценить вклад 3D диффузионной области, введя искусственную обрезку при $q \sim 1/l$, что дает

$$\frac{\delta T_c^{(\text{diff, 3D})}}{T_{c0}} \sim -\frac{\lambda}{(k_F l)^2} \log^2 \frac{\omega_D}{T_{c0}}. \quad (2.9)$$

Этот вклад, содержащий на одну степень логарифма меньше, оказывается больше выражения (2.1) по параметру $d/l \gg 1$. Однако оказывается, что ничто не мешает в интеграле (2.8) уйти на еще большие импульсы, в баллистическую область $q \gg 1/l$. Примечательно, что в этой области подынтегральное выражение в уравнении (2.8) по-прежнему ведет себя как $1/q^2$, но с другим численным коэффициентом. Данное обстоятельство указывает на то, что основной вклад

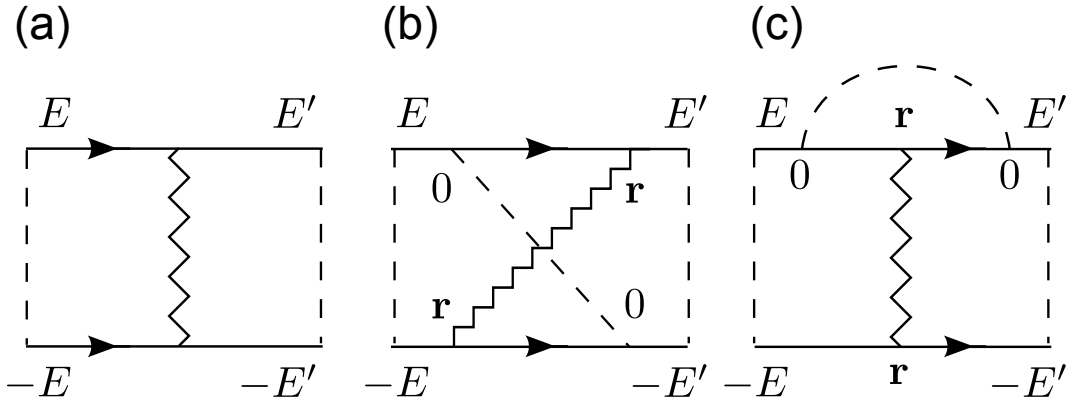


Рисунок 2.3 — (а) Вершина электрон-электронного взаимодействия λ в куперовском канале и примесные линии, с которых начинаются купероны. (б), (в) Диаграммы, описывающие ведущую поправку к вершине λ^c от баллистической области. Обе диаграммы имеют зеркальные аналоги.

в интеграл происходит от импульсов порядка фермиевского: $q \sim k_F$. Эта область требует особого рассмотрения, которое будет проведено ниже. Схематически роль различных областей импульса проиллюстрирована на рис. 2.2. С точностью до логарифмических факторов, возникающих от суммирования по энергии, интеграл от показанной кривой определяет вклад соответствующих областей в сдвиг T_c .

2.4 Баллистический вклад

В этом разделе мы изучим баллистический вклад в сдвиг T_c , возникающий от процессов с передачей импульса больше $1/l$. В силу неравенства $l \ll d$ движение электронов можно считать трехмерным. Этот вклад описывается диаграммами, изображенными на рис. 2.1, где в диффузионных лестницах следует оставить единственную примесную линию, описывающую рассеяние на одной примеси. Для его аккуратного вычисления требуется уточнить выражение (2.8), отказавшись от использованного при его выводе приближении $q \ll k_F$.

Баллистический вклад может быть описан, как поправка к голой (ненормированной) константе электронного отталкивания в куперовском канале λ^c , в низшем приближении совпадающей с λ (рис. 2.3(а)). Ведущие поправки даются диаграммами, показанными на рис. 2.3(б) и 2.3(в). В рассматриваемой

модели точечного взаимодействия и дельта-коррелированного беспорядка вычисление этих диаграмм может быть проделано аналитически и приводит к, вообще говоря, зависящей от энергий поправке $\delta\lambda_{EE'}^c$ к константе взаимодействия в куперовском канале:

$$\frac{\delta\lambda_{EE'}^c}{\lambda} = 2 \frac{(б) + (в)}{(а)} = \frac{2[P(E, E') + P(E, -E')]}{(2\pi\nu\tau)^2 f_0(2E) f_0(2E') \lambda}, \quad (2.10)$$

где слагаемые в скобках отвечают диаграммам (б) и (в), соответственно, а общий коэффициент 2 возник из-за наличия симметричных диаграмм. Множители $f_0(\omega) = 1/(1 + |\omega|\tau)$ в знаменателе возникают от интегрирования пары функций Грина на рис. 2.3(а) по импульсу (ступень диффузионной лестницы).

Вычисление блока $P(E, E')$ удобно проводить в координатном представлении [0]. Так как и электрон-электронное взаимодействие, и коррелятор беспорядка предполагаются точечными, аналитическое выражение содержит только одно интегрирование по расстоянию \mathbf{r} между примесью и точкой взаимодействия, и мы получаем:

$$P(E, E') = \frac{\lambda}{2\pi\nu\tau} \int d\mathbf{r} G_+ G'_- [G_+ G_-] [G'_+ G'_-], \quad (2.11)$$

где $G_{\pm} = G_{\pm E}(\mathbf{r})$ — усредненные по беспорядку функции Грина, а штрих относится к аргументу энергии E' . Квадратные скобки обозначают свертку в реальном пространстве: $[G_+ G_-] = \int G_+(\boldsymbol{\rho}) G_-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}$. Как мы увидим ниже, интеграл по \mathbf{r} в уравнении (2.11) сходится на масштабе $1/k_F$, что позволяет заменить функции Грина их значениями без беспорядка:

$$G_{\pm} = -\pi\nu \frac{e^{\pm ik_F r}}{k_F r}, \quad [G_+ G_-] = \frac{2\pi\nu\tau}{1 + 2|E|\tau} \frac{\sin k_F r}{k_F r}, \quad (2.12)$$

где при вычислении свертки использовано приближение $E, E' \ll E_F$.

Легко убедиться, что интеграл в уравнении (2.11) обращается в нуль для различных знаков энергий E и E' , так что $P(E, E') \propto \theta(EE')$. Таким образом, в рамках рассматриваемой модели баллистические диаграммы на Рис. 2.3(б) и 2.3(в) отличны от нуля при том же соотношении между знаками энергий E и E' , что и диффузионные диаграммы на Рис. 2.1(а) и 2.1(б), соответственно. Данное обстоятельство является а priori неочевидным, поскольку одиночный пунктир

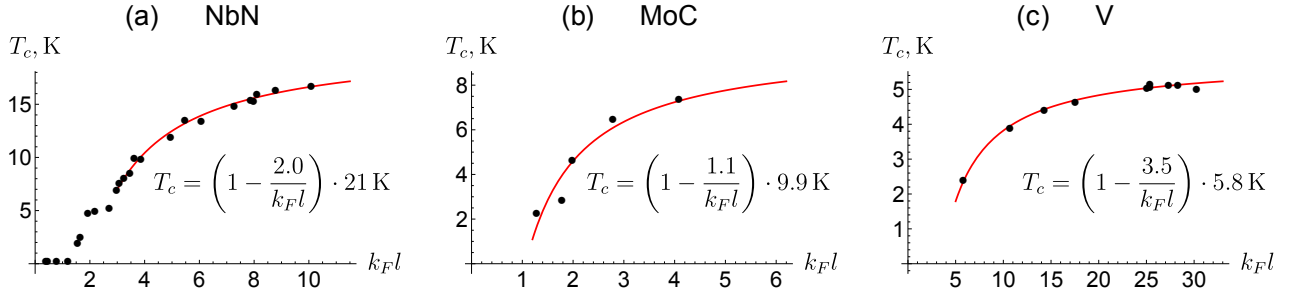


Рисунок 2.4 — Экспериментальные данные по зависимости T_c от $k_F l$ (точки) и их подгонка с помощью формулы (2.17) (сплошная линия) для сверхпроводящих пленок различной толщины и разного состава: (а) NbN [44], (б) MoC [51], (в) V [37].

может соединять две функции Грина с одинаковым знаком энергии. Однако, как мы видим, в случае точечного взаимодействия и дельта-коррелированного беспорядка такие диаграммы зануляются и в баллистическом пределе.

Подставляя выражения (2.12) в уравнение (2.11) и далее в (2.10), обнаруживаем, что множители $(1 + 2|E|\tau)$ и $(1 + 2|E'|\tau)$ в знаменателях $[G_+ G_-]$ и $[G'_+ G'_-]$ сокращают такие же множители в $f_0(E)$ и $f_0(E')$ в уравнении (2.10). Единственная остающаяся зависимость $\delta\lambda_{E,E'}^c$ от энергий содержится в факторе $\theta(EE')$, которому пропорционален блок $P(E,E')$. Однако благодаря структуре выражения (2.10), она также пропадает. В итоге, поправка $\delta\lambda_{E,E'}^c$ оказывается не зависящей от энергий E и E' :

$$\delta\lambda^c = \frac{\pi\nu\lambda}{2\tau} \int \frac{d\mathbf{r}}{(k_F r)^2} \left(\frac{\sin k_F r}{k_F r} \right)^2 = \frac{\pi\lambda}{2k_F l}. \quad (2.13)$$

Как и предполагалось, интеграл набирается с масштабов порядка длины волны электрона, что характерно для 3D мезоскопических эффектов [7; 110; 111].

Найденную поправку можно по аналогии с работой [27] рассматривать, как перенормировку вклада электрон-электронного взаимодействия в куперовский канал за счет рассеяния на фриделевских осцилляциях, вызванных примесями. Эта поправка описывает усиление электронного отталкивания, приводящее к увеличению кулоновского псевдопотенциала и, как следствие, к подавлению эффективной константы связи λ_{VCS} . Понижение T_c можно найти, заменяя

λ на $\lambda + \delta\lambda^c$ и раскладывая уравнение (2.6) по $\delta\lambda^c$:

$$\frac{\delta T_c^{(\text{ball, 3D})}}{T_{c0}} = -\frac{\pi \lambda}{2 k_F l} \left(\frac{\log \omega_D / T_{c0}}{1 + \lambda \log E_F / \omega_D} \right)^2. \quad (2.14)$$

2.5 Роль упругих диаграмм.

Помимо *неупругих* диаграмм, показанных на рис. 2.1 и 2.3, в которых линия взаимодействия соединяет верхнюю и нижнюю функции Грина, имеется также несколько так называемых *упругих* диаграмм, связанных с поправкой от взаимодействия в одноэлектронную функцию Грина. Как показал Финкельштейн [21], в случае 2D диффузии вклад в подавление T_c от этого класса диаграмм всегда мал: в случае $Dq^2 > \omega$ они содержат меньшую степень логарифма, а в случае $Dq^2 < \omega$ их вклад вместе со вкладом неупругих диаграмм сокращается при учете дополнительного семейства диаграмм, восстанавливающих калибровочную инвариантность теории. Последнее семейство диаграмм становится сублидирующим уже в диффузионной области при $Dq^2 > \omega$ и по этой причине не рассматривается в настоящей работе.

В случае электрон-электронного взаимодействия без запаздывания существует точное соотношение [16; 18; 64], связывающее вклад упругих диаграмм в подавление T_c и поправку к туннельной плотности состояний $\delta\nu(\varepsilon)$, которое для наших целей удобно представить (см. приложение Б) по аналогии с формулой (2.7) в виде

$$\frac{\delta T_c^{(\text{elast})}}{T_c} = \left(\frac{\lambda_{\text{ph}}}{\lambda_{\text{BCS}}} \right)^2 T \sum_E \int d\varepsilon \frac{u^2(E)}{E^2 + \varepsilon^2} \frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu_0}. \quad (2.15)$$

Воспользуемся известными результатами для $\delta\nu(\varepsilon)$, чтобы оценить поправку (2.15) от упругих диаграмм.

Поправка к туннельной плотности состояний 3D металла в диффузионной области ($|\varepsilon| < 1/\tau$) имеет вид $\delta\nu_{\text{diff}}(\varepsilon)/\nu_0 \sim \lambda \sqrt{|\varepsilon|\tau}/(k_F l)^2$ [13]. Элементарное вычисление показывает, что соответствующий вклад в сдвиг T_c от этой области содержит префактор $1/(k_F l)^2$, что параметрически меньше, чем вклад баллистической области, описанный ниже.

Поправка к туннельной плотности состояний в 3D баллистической области ($|\varepsilon| > 1/\tau$) изучалась в работах [28; 0], где было показано, что она носит линейный характер и может быть несимметрична относительно энергии Ферми. В случае контактного взаимодействия и дельта-коррелированного беспорядка, а также при параболической дисперсии электронов она отличается от нуля только для энергий, лежащих ниже энергии Ферми, и имеет вид $\delta\nu_{\text{ball}}(\varepsilon)/\nu_0 \sim \lambda|\varepsilon|\theta(-\varepsilon)/(k_F l)$ [0]. Вычисление по формуле (2.15) приводит к результату

$$\frac{\delta T_c^{(\text{ball, 3D, elast})}}{T_{c0}} \sim \frac{\lambda^3}{k_F l} \left(\frac{\log \omega_D/T_{c0}}{1 + \lambda \log E_F/\omega_D} \right)^2. \quad (2.16)$$

что параметрически меньше ведущего вклада (2.14) при сделанном предположении $\lambda \ll 1$. Отсутствие вклада упругих процессов в первом порядке по λ связано с тем, что в отличие от выражения (2.7), содержащего две логарифмические суммы по E и E' , интеграл (2.15) в 3D баллистической области не является логарифмическим. Утверждение о том, что упругие диаграммы не вносят вклад в ведущую поправку к сдвигу T_c , носит, по-видимому, общий характер и связано с тем, что туннельная плотность состояний не является термодинамической величиной.

2.6 Обсуждение результатов

В настоящей работе мы исследовали влияние области трехмерного баллистического движения электронов на подавление критической температуры умеренно разупорядоченных сверхпроводящих пленок ($k_F l \gg 1$). Работая в модели точечного отталкивания и дельта-коррелированного беспорядка, мы вычислили пертурбативный вклад соответствующей области в подавление T_c , даваемый первым членом в уравнении (2.3). При сравнении с экспериментальными данными следует принимать во внимание, как то, что в реальных образцах $\lambda \sim 1/2$ за счет кулоновского взаимодействия, так и то, что численный множитель в уравнении (2.4) является специфическим для выбранной модели. В общем случае, следует ожидать, что баллистическая поправка к сдвигу T_c имеет вид $\delta T_c/T_{c0} = -\alpha/k_F l$ с числом $\alpha \sim 1$.

Второй член в формуле (2.3) описывает стандартный вклад в подавление T_c , происходящий из области двумерного диффузионного движения электронов, в котором логарифм набирается от масштабов толщины пленки d до масштабов ξ_0 . Малость этого интервала для реальных пленок и относительно большое значение безразмерного кондактанса $g \sim (k_F l)(k_F d)$ делает его практически незаметным на фоне трехмерного баллистического вклада.

На рис. 2.4 показаны результаты фитирования данных $(T_c, k_F l)$ для сверхпроводящих пленок различной толщины из трех материалов с фермионным механизмом подавления зависимостью

$$T_c = (1 - \alpha/k_F l)T_{c0} \quad (2.17)$$

с подгонными параметрами α и T_{c0} . Мы видим довольно неплохое соответствие, причем зависящее от материала значение α ожидаемо оказывается порядка единицы. Важно отметить, что представленные на рис. 2.4(а) данные для NbN получены на толстых пленках [44], для которых область двумерной диффузии вообще отсутствует (см. табл. 1).

Основываясь на (i) наблюдаемом согласии экспериментальных данных с зависимостью (2.17), (ii) упомянутых выше внутренних противоречиях теории, приводящей к формуле (2.2) со свободным параметром γ , а также на (iii) выводах работы [103], свидетельствующих о преимущественной зависимости T_c от трехмерной проводимости, а не от двумерного кондактанса на квадрат, мы можем сделать следующий практически важный вывод:

В значительной части не очень тонких умеренно разупорядоченных сверхпроводящих пленок, где подавление сверхпроводимости происходит по фермионному сценарию, оно обусловлено приближением к порогу трехмерной андерсоновской локализации и контролируется параметром $k_F l$. Эффекты двумерной диффузии, определяемые безразмерным кондактансом g , также присутствуют, но они дают лишь малую поправку на фоне трехмерных баллистических эффектов.

Глава 3. Мезоскопические флуктуации кондактанса и шум в майорановских проволоках

3.1 Критический режим разупорядоченной майорановской проволоки

Настоящая глава посвящена изучению квазичастичного транспорта в разупорядоченных квантовых проволоках класса D вблизи фазового перехода между топологическими фазами. Для понимания физики начнем с простейшего случая единственной моды поперечного квантования (*одноканальный случай*) [85; 112; 113]. В этом случае низкоэнергетическая физика описывается одномерным (1D) гамильтонианом Дирака со случайной массой $\mathcal{H} = -iv\sigma_z\partial/\partial x + [\mu + m(x)]\sigma_y$, где σ_i — это матрицы Паули, μ — управляющий параметр, а масса $m(x)$ флуктуирует вдоль проволоки с нулевым средним. Будем предполагать $m(x)$ короткокоррелированной. В такой модели показатель Ляпунова λ , определяющий амплитуду отражения $r = \tanh \lambda$ и безразмерный кондактанс $g = T = 1/\cosh^2 \lambda$ испытывает случайно блуждание и дрейф по мере увеличения длины проволоки L : $\lambda = \mu L/v + \lambda'$, где $\lambda' = \int_0^L dx m(x)/v$. Тогда по центральной предельной теореме, λ' — случайная величина с нормальным распределением, у которого среднее равно нулю, а дисперсия $\text{var } \lambda' = L/\xi$, где $\xi = 2l$ — это зависящая от силы беспорядка *корреляционная длина* (l — упругая длина свободного пробега, а двойка учитывает то, что имеется две моды, распространяющиеся в противоположных направлениях). В пределе $L \rightarrow \infty$ флуктуирующая компонента λ' становится иррелевантной, а переход между топологическими фазами происходит строго при $\mu = 0$. В конечной системе, топологический переход размывается, что иллюстрируется на Рис. 3.1. Для заданной реализации беспорядка $m(x)$, идеально проводящий канал ($g = 1$) возникает при $\mu_* = -v\lambda'/L$, при этом ширина пика кондактанса $\mu - \mu_* \sim v/L$. Флуктуации μ_* от образца к образцу характеризуются дисперсией $\text{var } \mu_* = v^2/L\xi$.

В дальнейшем будет изучаться преимущественно *критический режим*, который реализуется при $\mu = 0$, когда отсутствует дрейф в случайном блуждании показателя Ляпунова и *локализационная длина* $\xi_{\text{loc}} = v/|\mu|$ расходится. В этом случае λ описывается нормальным распределением $P(\lambda)$ с нулевым сред-

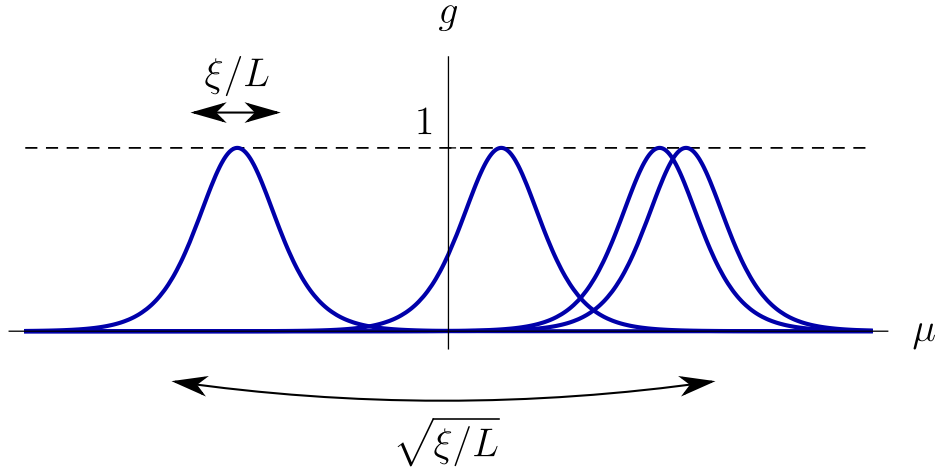


Рисунок 3.1 — Зависимость безразмерного кондактанса g проволоки длины $L \gg \xi$ от управляющего параметра μ для набора реализаций беспорядка (эскиз). Кондактанс достигает максимального значения $g = 1$ при $\mu^* = -v\lambda'/L$ (см. обсуждение в тексте). Отдельный пик имеет ширину, пропорциональную $1/L$, в то время как распределение центров пиков имеет ширину, пропорциональную $1/\sqrt{L}$.

ним, которое в пределе $L \gg \xi$ переписывается в терминах прозрачности канала $T = 1/\cosh^2 \lambda$ и кондактанса $g = T$ следующим образом:

$$P(T) = \frac{\langle g \rangle}{2} \frac{1}{T\sqrt{1-T}}, \quad (3.1)$$

где $\langle g \rangle$ определяется значением $P(\lambda = 0)$:

$$\langle g \rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi \text{var } \lambda}} = \sqrt{\frac{2\xi}{\pi L}}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) требует корректировки для самых маленьких $T \sim e^{-2/\langle g \rangle}$ из-за отклонения распределения $P(\lambda)$ от его пикового значения. Интересно, что распределение (3.1) формально совпадает с бимодальным распределением Дорохова [114], которое, как известно, описывает *общую плотность* прозрачностей каналов в многоканальных неупорядоченных проволоках в режиме Друде, в котором кондактанс самоусредняется. В противоположность этому, Ур. (3.1) относится к одноканальному случаю, при котором кондактанс сильно флуктуирует на отрезке $0 < g < 1$, а все его моменты $\langle g^n \rangle$ пропорциональны $\langle g \rangle \sim 1/\sqrt{L}$.

В частности, для дисперсии $\text{var } g = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$ из Ур. (3.1) следует выражение

$$\text{var } g = \frac{2}{3} \langle g \rangle. \quad (3.3)$$

Отсутствие самоусредняемости также очевидно из сравнения степенного поведения $\langle g \rangle$ с экспоненциальным поведением типичного значения кондактанса $g_{\text{typ}} = \exp \langle \log g \rangle \sim \exp(-4\sqrt{L/2\pi\xi})$. Важно понимать, что в рассматриваемом критическом режиме половина реализаций беспорядка отвечает тривиальной фазе, а другая половина — топологической. При этом на больших длинах провода L , кондактанс большинства реализаций мал $g \ll 1$. Однако в сравнительно редких случаях (вероятность уменьшается, как $1/\sqrt{L}$) образец находится вблизи фазового перехода и кондактанс принимает значения порядка единицы $g \sim 1$. Именно такие конфигурации определяют средний кондактанс $\langle g \rangle \sim 1/\sqrt{L}$, а также все его старшие моменты. Понять скейлинг $\langle g \rangle \propto 1/\sqrt{L}$ можно заметив, что в критическом режиме ($\mu = 0$) вероятность получить такую околоскритическую конфигурацию беспорядка можно оценить, как отношение ширины отдельного пика $\sim 1/L$ к ширине распределения центров пиков $\sim 1/\sqrt{L}$ (см Рис. 3.1). В случае, когда управляющий параметр уводится от перехода, большинство реализаций принадлежат к одному топологическому классу, а кондактанс экспоненциально мал в пределе длинного провода. Подобные выводы были также получены в работе [115] с помощью ренормализационной группы сильного беспорядка в координатном пространстве и метода трансфер-матрицы.

Локализация в *многоканальных* квантовых проволоках класса D изучалась в работах [87; 88] с помощью похода Дорохова-Мелло-Перейра-Кумара (ДМПК) [114; 116]. Решение уравнения Фоккера-Планка, описывающее изменение распределения прозрачностей каналов $T_n = 1/\cosh^2 \lambda_n$ по мере увеличения длины провода приводит (*в пределе длинного провода*) к известному явлению “кристаллизации” показателей Ляпунова λ_n [9]. Однако, особенность класса D в критическом режиме¹ заключается в том, что наименьший показатель Ляпунова λ_1 распределен нормально вблизи нуля (который отвечает полной прозрачности канала) с дисперсией $\text{var } \lambda_1 = L/\xi$, где $\xi = 2Nl$ — корреляционная длина для N -канального провода (ср. со случаем $N = 1$, рассмотренным выше). Так как вклад остальных каналов экспоненциально подавлен, кондактанс

¹Интересно, что изучение некритического режима в подходе ДМПК (в котором наблюдается локализация) требует дополнительных усилий [88].

определяется проводимостью одного самого прозрачного канала ($g = T_1$), что приводит к тому, что этот режим полностью подобен случаю одноканальной модели, описанной выше. Таким образом, в режиме $L \gg \xi$ Ур. (3.1) и (3.2) применимы также и к многоканальным проволокам, если подставить $T = T_1$. Такое поведение также наблюдается в других топологических классах в критическом режиме в одномерном случае, что было названо “суперуниверсальностью” в работе [88].

Слабая стороны подхода ДМПК связана с трудностью его применения к вычислению транспортных характеристик в режиме кроссовера между режимом Друде и режимом (анти)локализации, так как на произвольных длинах неизвестно ни аналитическое решение уравнения Фоккера-Планка для функции распределения прозрачностей T_n , ни эффективная схема его численного решения. Для того, чтобы проследить за зависимостью моментов кондактанса от длины провода L можно воспользоваться техникой суперсимметричной нелинейной сигма-модели [70], которая комплементарна подходу ДМПК. Этим способом средний кондактанс $\langle g(L) \rangle$ был вычислен в классе симметрии D в работах [84; 89] (отличие в численном коэффициенте с формулой (3.60) приведенной в настоящей диссертации связано, по-видимому, с другим способом выбора безразмерного кондактанса²).

Важной особенностью класса симметрии D состоит в том, что многообразии соответствующей суперсимметричной сигма-модели состоит из двух компонент связности [117; 118]. При этом явление локализации наблюдается только при учете прыжков (доменных стенок) между этими компонентами [118; 119]. Такие процессы можно описать дополнительным слагаемым в действии сигма-модели, пропорциональным $\log \tilde{\chi}$, где $\tilde{\chi}$ — это так называемая летучесть (fugacity) кинка [84], которая служит мерой отклонения от критического режима, которое приводит к конечной длине локализации $\xi_{\text{loc}} = 2\xi/\tilde{\chi}^2$ [84].

В дальнейшем сосредоточимся исключительно на *критическом* режиме, в котором кинки полностью подавлены ($\tilde{\chi} = \mu = 0$). Этот режим соответствует ДМПК подходу из работы [87], который обсуждался выше и который характеризуется алгебраическим убыванием среднего кондактанса на больших

²Коэффициент $\xi/16$ в действии сигма-модели (3.5) совпадает в работах [84] (где он обозначен, как $\tilde{\xi}$), [89] и настоящей диссертации. Отличие в численном коэффициенте в результатах может быть объяснено тем, что определение g , принятое в настоящей работе в 4 раза больше, чем в работе [84] и в 2 раза больше, чем в работе [89].

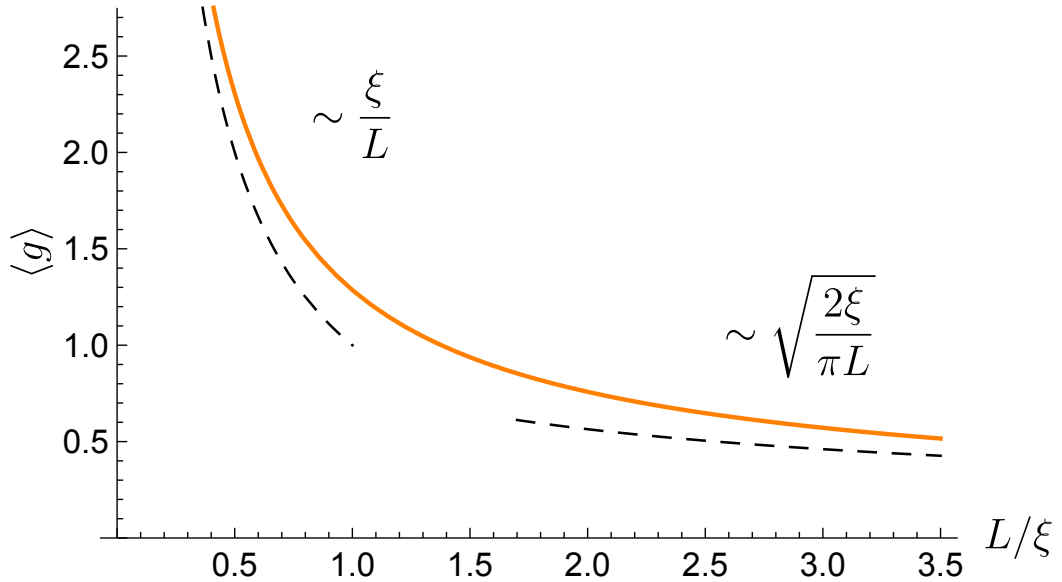


Рисунок 3.2 — Усредненный по беспорядку квазичастичный кондактанс квантовых проволок класса симметрии D в критическом режиме, как функция длины провода L . Пунктиром показаны асимптотики на больших и малых длинах провода.

длинах $L \gg \xi$ согласно Ур. (3.2). Критический режим можно определить в терминах физических величин на произвольных длинах L , как режим такого ансамбля беспорядка, для которого средний детерминант матрицы отражения равен нулю: $\langle \det r \rangle = 0$. Зависимость $\langle g(L) \rangle$ в критическом режиме в классе D, полученная в работе [84], показана на Рис. 3.2. Она гладко связывает режим Друде, в котором $\langle g \rangle = \xi/L$ с режимом большой длины провода, в котором $\langle g \rangle$ дается уравнением (3.2).

В настоящей главе диссертации будет произведен следующий шаг в анализе квазичастичного транспорта многоканальных квантовых проволок класса симметрии D в критическом режиме и будут выведены точные выражения для дисперсии кондактанса $\text{var } g$, его третьего кумулянта, фактора Фано для дробового шума и $\text{var } \det r$ при произвольных значениях L/ξ внутри диффузионного режима. Вычисление всех этих величин требует усреднения четырех функций Грина, что не может быть выполнено в рамках однорепличной суперсимметричной сигма-модели, рассмотренной в работах [84; 89]. Поэтому в диссертации будет изучаться более сложный случай двухрепличной ($n = 2$) версии суперсимметричной сигма-модели. Для последней будет получено ядро теплопроводности с помощью приема с использованием разложения Ивасава [120–122].

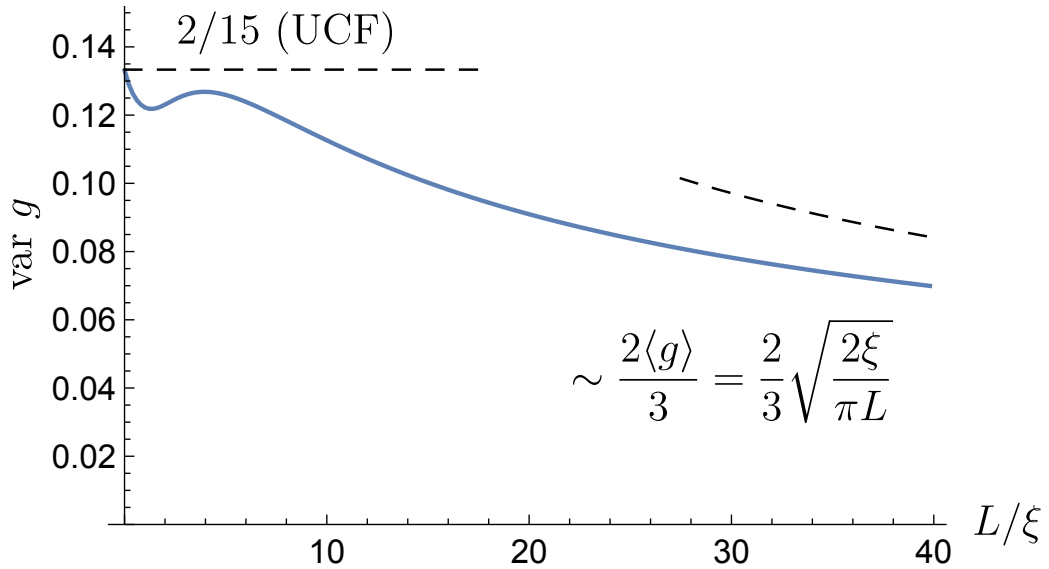


Рисунок 3.3 — Зависимость дисперсии кондактанса квазичастиц в критическом режиме класса D от длины провода L . Пунктиром показаны асимптотики на больших и малых длинах провода.

Главным техническим достижением этой главы служит классификация радиальных собственных функций суперсимметричной сигма модели старшего ранга (несколько реплик). Было обнаружено, что прямолинейное применение подхода к построению этих функций по аналогии с работами [120–122] не приводит к полному базису, что связано с занулением интеграла по грасмановым переменным в случае “слишком симметричных” волновых функций Ивасава. Эту проблему можно решить путем включения в базис дополнительных подсемейств собственных функций лапласиана, которые зависят от меньшего числа квантовых чисел. В дальнейшем будет показано, что это подсемейство тесно связано с собственными функциями сигма-модели с меньшим числом реплик. Ожидается, что такая же закономерность будет прослеживаться при построении ядер теплопроводности для суперсимметричных сигма-моделей старшего ранга ($n > 1$) во всех классах симметрии.

3.2 Обзор результатов

Результаты работы представлены в виде графиков на Рис. 3.3–3.6. Рис. 3.3 показывает зависимость дисперсии кондактанса от длины провода и иллюстри-

рует кроссовер между значением $\text{var } g = 2/15$ при $L \ll \xi$ в режиме Друде [универсальные флуктуации кондактанса (UCF) [123]] и “суперуниверсальным” пределом $\text{var } g = (2/3)\langle g \rangle$ при $L \gg \xi$ согласно Ур. (3.3).

В отличие от зависимости $\langle g \rangle$, не содержащей особенностей и испытывающей переход между асимптотическими режимами около $L/\xi \sim 1$ (см. Рис. 3.2), зависимость $\text{var } g$ от длины провода L описывает возвратное поведение, в котором кроссовер сильно смещен в сторону больших длин провода $L/\xi \sim 15$.

Рисунок 3.4 показывает зависимость третьего кумулянта кондактанса $\langle\langle g^3 \rangle\rangle = \langle g^3 \rangle - 3\langle g^2 \rangle \langle g \rangle + 2\langle g \rangle^3$ от длины провода. Эта величина характеризует асимметрию распределения кондактанса (skewness) относительно его среднего. В пределе $L \ll \xi$ третий кумулянт $\langle\langle g^3 \rangle\rangle \sim (L/\xi)^2$ с очень маленьким численным коэффициентом. На больших длинах он дважды меняет знак и выходит на асимптотику $\sim \sqrt{\xi/L}$ при $L \gtrsim 40$.

Двухрепличная сигма-модель также позволяет вычислить второй транспортный момент и связанным с ним фактор Фано, характеризующий мощность дробового шума. Введем псевдосредний фактор Фано, в котором рассматривается отношение средних, а не среднее отношения:

$$\tilde{F} = \frac{\langle \sum_n T_n (1 - T_n) \rangle}{\langle \sum_n T_n \rangle}. \quad (3.4)$$

Зависимость \tilde{F} от длины провода изображена на Рис. 3.5. Примечательно, что эта величина принимает значение $1/3$ и в пределе длинного, и в пределе короткого провода, так как оба случая характеризуются функцией распределения Дорохова (3.1). Для коротких проводов, ситуация аналогично нормальному диффузионному металлу, в котором распределение Дорохова описывает общую плотность прозрачностей транспортных каналов, а Фано фактор является самоусредняющейся величиной, так как в него вносит вклад большое количество каналов. Для длинных проводов, напротив, весь транспорт происходит благодаря одной моде с наименьшим показателем Ляпунова. Так как она описывается тем же уравнением (3.1), для псевдосреднего (3.4) получаем такое же значение $\tilde{F} = 1/3$, в то время, как настоящий Фано фактор F испытывает большие флуктуации от образца к образцу.

Еще одним набором величиной, характеризующих топологический сверхпровод, являются моменты детерминанта амплитуд отражения, $\det r$. Несмотря

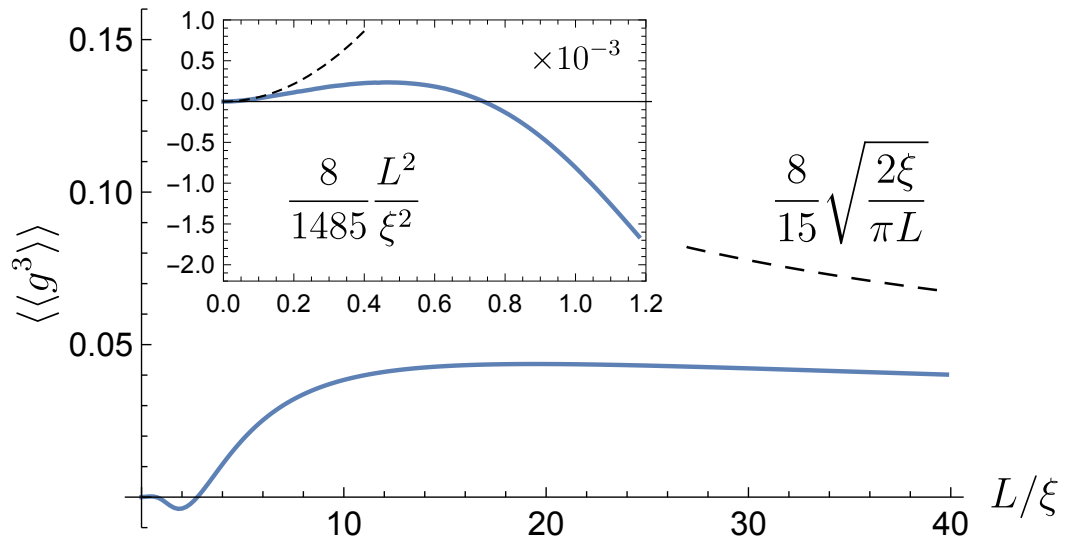


Рисунок 3.4 — Зависимость третьего кумулянта $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$ кондактанса в классе симметрии D в критическом режиме от длины провода L . Врезка: зависимость на коротких длинах. Пунктиром показаны асимптотики на больших и малых длинах провода.

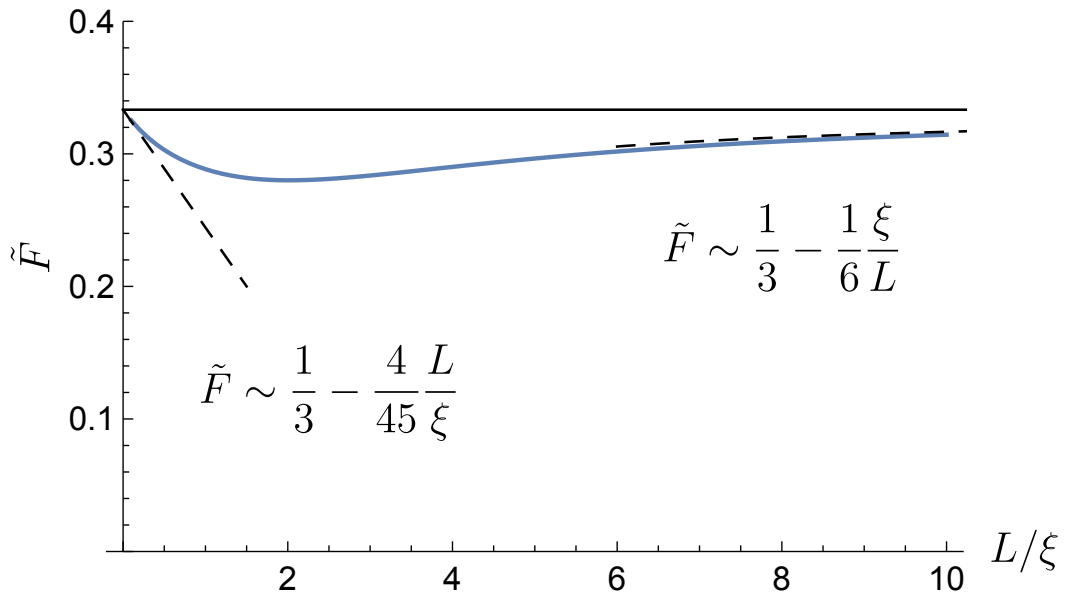


Рисунок 3.5 — Зависимость псевдосреднего фактора Фано [см Ур. (3.4)], определяющего дробовой шум. Пунктиром показаны асимптотики на больших и малых длинах провода.

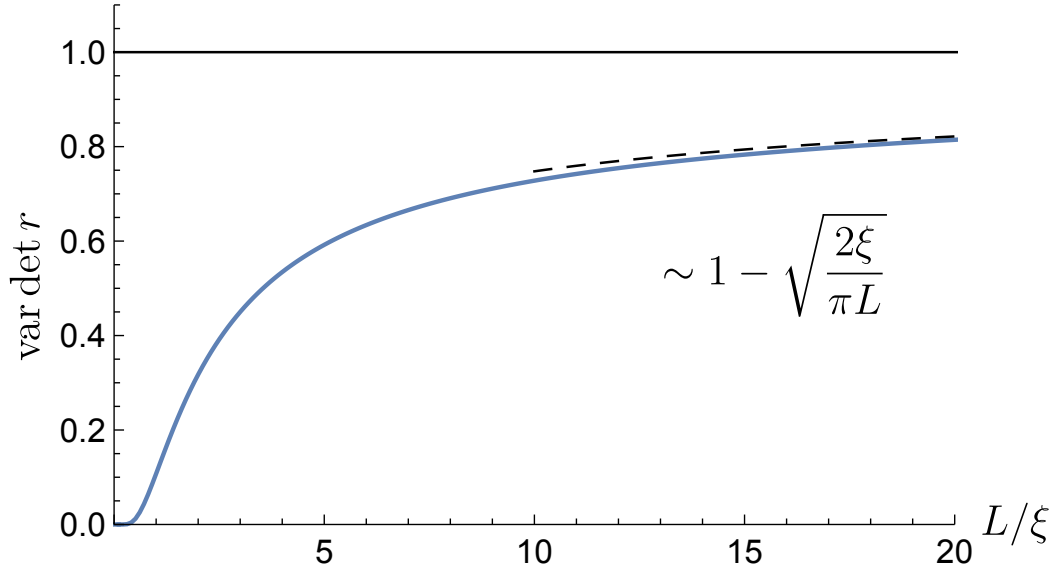


Рисунок 3.6 — Зависимость от длины среднего квадрата детерминанта матрицы амплитуд отражения, $\langle (\det r)^2 \rangle = \text{var det } r$. То, что кривая выходит на асимптотическое значение 1 указывает на то, что для каждого образца $\det r = \pm 1$ в пределе $L \rightarrow \infty$.

на то, что последняя величина несколько отличается от настоящего топологического числа $q = \text{sign det } r$, она также интерполирует между ± 1 при перевередении управляющего параметра через фазовый переход. Ее среднее значение $\langle \det r \rangle$, как функция L и летучести кинка $\tilde{\chi}$ была сосчитана в работе [84]. Она зануляется строго на критической линии ($\tilde{\chi} = 0$), в то время как при любой конечной летучести $\tilde{\chi}$, она стремится к ± 1 по мере увеличения длины провода таким образом, что ренормгрупповой поток в плоскости $(g, \tilde{\chi})$ оказывается подобен случаю целочисленного квантового эффекта Холла [124; 125].

В настоящей диссертации вычисляется второй момент детерминанта $\langle \det^2 r \rangle$ и показывается, что он не зануляется на критической линии (где $\langle \det r \rangle = 0$). По мере увеличения длины провода L он интерполирует между 0 (короткий провод) и 1 (длинный провод), как изображено на Рис. 3.6. Принимая во внимание, что $|\det r| \leq 1$ из-за унитарности квантовомеханической эволюции, можно сделать вывод, что в пределе $L \rightarrow \infty$, $\det r$ принимает значения $+1$ и -1 для каждой реализации беспорядка с равной вероятностью. Этот факт иллюстрирует с точки зрения сигма-модели описанное выше поведение на больших длинах: даже на критической линии практически все реализации беспорядка отвечают изолятору топологического/тривиального характера в равных пропорциях.

3.3 Математическое введение

В этом подготовительном разделе будут намечены основные шаги, необходимые для вычисления $\langle g \rangle$ и $\langle g^2 \rangle$ в формализме сигма-модели, а также введены соответствующие математические понятия. Наш анализ во многом следует пути, намеченному в работах [120–122] для стандартных классов симметрии и использованному в работах [84; 89] для вычисления $\langle g \rangle$ в квантовых проволоках класса симметрии D. Особенностью класса D является то, что вычисление $\langle g^2 \rangle$ требует использования двухрепличной ($n = 2$) суперсимметричной сигма-модели, что значительно усложняет проводимый анализ.

В настоящем разделе предпринята попытка найти баланс между общностью и детальностью. С одной стороны, изложение сделано как можно более общим и без использования какого-либо конкретного базиса (это будет сделано позднее в разделе 3.4). Поэтому практически все формулы могут быть применены и к моделям других классов симметрии с произвольным числом реплик. С другой стороны, некоторые формулы все же специфичны для класса симметрии D с $n = 2$, что используется для иллюстрации общего формализма, а также для подготовки к непосредственным вычислениям в последующих разделах.

3.3.1 Сигма-модель и моменты кондактанса

Действие сигма-модели для N -канальной квантовой проволоки класса симметрии D в критическом режиме имеет привычный вид (здесь $\xi = 2Nl$ — корреляционная длина) [84; 89]:

$$S[Q] = -\frac{\xi}{16} \int_0^L dx \operatorname{str}(\nabla Q)^2, \quad (3.5)$$

где $Q \in \text{BF} \otimes \text{N} \otimes \text{R}$ — это суперматрица, которая принадлежит тензорному произведению пространств Бозе-Ферми (BF), Намбу-Горькова (N) и реплик (R) и подчиняется соотношению зарядового сопряжения $\bar{Q} = C^T Q^T C = -Q$, которое связано с частично-дырочной симметрией гамильтониана Боголюбова–де Жена

(БдЖ). Матрица C является ортогональной, $CC^T = \mathbb{1}$, и для нее выполняется равенство $C^2 = -k$, где k различает бозоны и фермионы имея следующую структуру в пространстве ВФ: $k = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}_{\text{ВФ}}$. Особую роль в теории играет единжды выбранная матрица Λ (так называемый “северный полюс”), для которой выполняется соотношение $\bar{\Lambda} = -\Lambda$, $\text{str } \Lambda = 0$ и $\Lambda^2 = \mathbb{1}$. Все многообразие сигма модели может быть получено вращением Λ с помощью матриц T , принадлежащих определенной супергруппе G :

$$Q = T^{-1}\Lambda T, \quad (3.6)$$

где $\bar{T} = T^{-1}$. Тогда многообразие сигма-модели представляет собой косет (симметрическое пространство) G/K , где $—$ это подгруппа группы G , которая коммутирует с Λ : $[K, \Lambda] = 0$.

Для класса D с n репликами, G является супергруппой $\text{SpO}(n, n|2n)$, а K — супергруппой $U(n|n)$, так что многообразие сигма модели — это косет $\text{SpO}(n, n|2n)/U(n|n)$. Он состоит из двух компонент связности. Например, в случае одной реплики ($n = 1$) седловое многообразие сигма-модели $\text{SpO}(1, 1|2)/U(1|1)$ представляет собой гиперboloид H_2 в секторе Бозе-Бозе (ВВ) и множество, состоящее из двух точек (\mathbb{Z}_2) в секторе Ферми-Ферми [84; 89], а также соответствующий набор грассмановых переменных. Критический режим между топологической и тривиальной фазами, который будет изучаться в настоящей главе соответствует отсутствию прыжков между компонентами связности многообразия сигма-модели (кинков) [118; 119], что позволяет рассмотреть только одну компоненту, а именно $\text{SpSO}(1, 1|2)/U(1|1)$. В некритическом режиме необходимо учесть пролиферацию кинков с помощью соответствующего члена в действии сигма-модели (3.5), что приводит к экспоненциальной локализации и в топологической, и в тривиальной фазе [84].

В то время, как средний кондактанс $\langle g \rangle$ может быть вычислен в $n = 1$ сигма-модели, вычисление его старших моментов, вообще говоря, требует больших n . Тем не менее, в большинстве случаев, $\langle g^2 \rangle$ (и, следовательно, $\text{var } g$) могут быть вычислены уже с помощью $n = 1$ сигма-модели, так как в суперсимметричном подходе по ансамблю беспорядка усредняются две копии системы (бозоны и фермионы), и каждую копию можно использовать для вычисления кондактанса в случае системы без электрон-электронного взаимодействия [122]. Однако, особенностью класса D является то, что он его FF сектор в случае одной репли-

ки ($n = 1$) вырожден пара точек) и не может быть использован для изучения свойств второй копии системы.

Таким образом, для вычисления $\langle g^2 \rangle$ и $\text{var } g$ в классе D с неизбежностью необходимо рассматривать сигма-модель с двумя репликами ($n = 2$). Ее супермногообразие есть $\text{SpO}(2,2|4)/\text{U}(2|2)$, бозон-бозонный сектор которого представляет собой симметрическое пространство ранга 2 ($\text{Sp}(4)/\text{U}(2)$), а фермион-фермионный сектор — это симметрическое пространство ранга 1 ($O(4)/\text{U}(2) \simeq S_2 \times \mathbb{Z}_2$) [126], причем последнее изоморфно несвязному объединению двух сфер.

На языке сигма-модели моменты кондактанса могут быть вычислены путем взятия производной от статистической суммы по отношению к инфинитезимальным поворотам граничных условий [89; 122; 127–129]. При этом статсумма определяется через функциональный интеграл

$$Z[\theta_i] = \int_{Q(0)=\Lambda}^{Q(L)=Q_L} \mathcal{D}[Q(x)] e^{-S[Q]}, \quad (3.7)$$

где $Q_L = \Lambda \exp(\check{\theta})$, а матрица углов Картана $\check{\theta}$ определена ниже (Ур. (3.13)).

Количество переменных Картана (θ_i) зависит от числа реплик. Обозначим N_B (N_F) количество генераторов алгебры Картана в ВВ (FF) секторах. Для класса D с n репликами,

$$N_B = n, \quad N_F = \lfloor n/2 \rfloor, \quad (3.8)$$

где нижние квадратные скобки $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначают целую часть числа (для четных n , уравнение (3.8) было выведено в работе [130]).

Знание $Z[\theta_i]$ позволяет вычислять усредненные по беспорядку физические величины, см, Приложение Г. Первые три момента кондактанса выражаются следующим образом:

$$\langle g \rangle = -4 \left. \frac{\partial^2 Z(\theta_i)}{\partial \theta_{B1}^2} \right|_0, \quad (3.9a)$$

$$\langle g^2 \rangle = 16 \left. \frac{\partial^4 Z(\theta_i)}{\partial \theta_{B1}^2 \partial \theta_{B2}^2} \right|_0, \quad (3.9b)$$

$$\langle g^3 \rangle = -32 \left. \frac{\partial^6 Z(\theta_i)}{\partial \theta_{B1}^2 \partial \theta_{B2}^2 \partial \theta_F^2} \right|_0, \quad (3.9c)$$

где производные нужно вычислять в северном полюсе, $\theta_i = 0$ [следующие моменты требуют сигма-модели с числом реплик $n \geq 3$, и, соответственно, большим числом углов Картана θ_i]. Псевдоусредненный фактор Фано (3.4) (числитель и знаменатель усредняются отдельно) дается следующим выражением:

$$\tilde{F} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta_{B1}^2} \right)^{-1} \left[4 \frac{\partial^4 Z}{\partial \theta_{B1}^4} - \frac{\partial^4 Z}{\partial \theta_F^4} \right] \Big|_0. \quad (3.10)$$

Наконец, средний квадрат детерминанты матрицы амплитуд отражения получается при взятии статсуммы в так называемом “южном полюсе”. Как упоминалось в начале настоящей главы, в критическом режиме $\langle \det r \rangle = 0$, поэтому

$$\text{var } \det r = \langle \det^2 r \rangle = Z(\theta_{B1} = 0, \theta_{B2} = 0, \theta_F = \pi). \quad (3.11)$$

Для того, чтобы вычислить средние, перечисленные выше на произвольной длине провода, требуется ввести две различные параметризации многообразия Q -матриц: параметризацию Картана, которая явно используется в Ур. (3.9), и параметризацию Ивасава, в которой радиальный оператор Лапласа-Бельтрами принимает простой вид.

3.3.2 Параметризация Картана-Ефетова

Параметризация Картана (также известная, как параметризация Ефетова в контексте нелинейной сигма-модели) получается при использовании разложения Картана для матрицы T по отношению к инволюции $T \rightarrow \Lambda T \Lambda$. Это позволяет провести факторизацию $T = U_1 e^{\check{\theta}/2} U$, где U_1 и U коммутируют с Λ ($U \in K$, $U_1 \in K$), а $\check{\theta}$ лежит в максимальной абелевой (картановой) подалгебре матриц, принадлежащих группе G и антикоммутирующих с Λ : $\{\Lambda, \check{\theta}\} = 0$. Такая параметризация является избыточной, поэтому позволим U_1 пробегать всю группу K , а в матрице U оставим лишь необходимое число параметров. Q -матрица не зависит от U_1 и принимает вид:

$$Q = U^{-1} \Lambda e^{\check{\theta}} U. \quad (3.12)$$

Согласно Ур. (3.8), алгебра Картана для $n = 1$ сигма-модели параметризуется одним параметром (θ_B), принадлежащим ВВ сектору, в то время как в случае двух реплик ($n = 2$), $\check{\theta}$ можно представить в виде линейной комбинации трех взаимно коммутирующих генераторов h_i , два из которых принадлежат ВВ сектору, а один — FF сектору:

$$\check{\theta} = \theta_{B1} \check{h}_{B1} + \theta_{B2} \check{h}_{B2} + i\theta_F \check{h}_F, \quad (3.13)$$

где θ_i вещественны на многообразии сигма-модели.

Важной математической структурой является *система корней* по отношению к h_i . Она состоит из матриц Z_α , называемых *корневыми векторами*, которые представляют собой собственные векторы для всех генераторов h_i при их действии в присоединенном представлении: $[\check{\theta}, Z_\alpha] = \alpha(\theta)Z_\alpha$, где α — это линейная функция на алгебре Картана, носящая название *корня*. Из множества корней единожды произвольным образом выбирается половина \mathcal{R}_+ , лежащая в одной полуплоскости в дуальном пространстве, которая объявляется так называемыми *положительными корнями*. Особенность супермногообразий по сравнению с более известными некомпактными симметрическими пространствами [126] заключается в том, что корневые вектора, принадлежащие блокам на побочной диагонали в пространстве Бозе-Ферми являются грассмановыми числами. Соответствующие корни должны подсчитываться с отрицательной кратностью [120; 122]. Корневая система класса D с двумя репликами ($n = 2$) представлена в Приложении В.1, см. таблицу 2 и Рис. В.1.

Корневая система является симметричной по отношению к так называемой группе Вейля, образующими которой служат отражения относительно плоскостей, перпендикулярных к каждому неграссманову корню; таким образом, она действует на пространстве, дуальном к пространству Картана. В суперсимметричном случае группа Вейля состоит из ВВ и FF частей. В дальнейшем мы будем рассматривать радиальные волновые функции, которые зависят только от θ_i и являются симметричными по отношению к ВВ части группы Вейля (действие FF части приводит к требованию четности волновых функций по отношению к θ_F). Эта подгруппа получается из операций смены знака у θ_{B1} , θ_{B2} , а также из их перестановки ($\theta_{B1} \leftrightarrow \theta_{B2}$). Симметрия волновых функций позволяет рассматривать только один сектор в плоскости $(\theta_{B1}, \theta_{B2})$, который называется *камерой Вейля*. Мы выберем сектор, отвечающий неравенствам $\theta_{B1} > \theta_{B2} > 0$.

Мера в параметризации Картана (3.12) может быть записана в виде $DQ = J DU D\theta$. Таким образом, преимущество такой параметризации заключается в факторизации Якобиана $J = J_U J(\theta_i)$ на меру Хаара J_U на группе K и зависящую от θ часть $J(\theta_i)$ [89; 126]. Последняя может быть явно записана в виде произведения множителей, каждый из которых отвечает положительному корню $\alpha \in R^+$:

$$J(\theta_i) = \prod_{\alpha \in R^+} [\sinh \alpha(\theta)/2]^{m_\alpha}, \quad (3.14)$$

где m_α — это кратности корней. В применении к классу D с двумя репликами эта формула приводит к выражению:

$$J(\theta_i) = \frac{(\cosh \theta_{B1} - \cosh \theta_{B2}) \sinh \theta_{B1} \sinh \theta_{B2} \sin \theta_F}{(\cosh \theta_{B1} - \cos \theta_F)^2 (\cosh \theta_{B2} - \cos \theta_F)^2}. \quad (3.15)$$

Параметризация Картана особенно важна, так как согласно Ур. (3.9) она связана с физическими величинами кондактанса и его моментами. Таким образом главной целью будет вычисление статсуммы $Z[\theta_i]$.

3.3.3 Трансфер-матричный гамильтониан и ядро теплопроводности

Стандартный способ вычисления статсуммы (3.7) в одномерных системах — это переход от функционального интегрирования к уравнению типа Шредингера³ на волновую функцию $\psi(Q, t)$ [131]. Ее эволюция описывается трансфер-матричным гамильтонианом, при этом пространственная координата x играет роль мнимого времени:

$$\frac{\xi}{2} \partial_x \psi(Q, x) = -\hat{H} \psi(Q, x). \quad (3.16)$$

Гамильтониан дается оператором Лапласа-Бельтрами на многообразии сигма-модели:

$$\hat{H} = -\Delta = -\frac{1}{J} \partial_\alpha J \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \partial_\beta, \quad (3.17)$$

³В дальнейшем просто “уравнение Шредингера”.

где $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ — это метрика, индуцированная формой $dl^2 = (-1/2) \text{str } dQ^2 = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta$, где X^α — это координаты на супермногообразии сигма-модели [70; 89]. Диагонализация гамильтониана обеспечивается набором собственных функций $\phi_\nu(Q)$, удовлетворяющих уравнению

$$\Delta\phi_\nu(Q) = -\epsilon_\nu\phi_\nu(Q). \quad (3.18)$$

Статистическая сумма (3.7) совпадает с ядром теплопроводности для уравнения Шредингера (3.16):

$$Z[\theta_i] = \psi(Q_L, x = L), \quad (3.19)$$

которое можно получить, решая его с начальным условием $\psi(Q, x = 0) = \delta(Q, \Lambda)$, где $\delta(Q, \Lambda)$ — суперсимметричная дельта-функция, принимающая значение 1 в северном полюсе [70]:

$$\delta(Q, \Lambda) = \begin{cases} 1, & Q = \Lambda, \\ 0, & Q \neq \Lambda. \end{cases} \quad (3.20)$$

Знание собственных функций позволяет записать спектральное разложение ядра теплопроводности:

$$\psi(Q, x) = \sum_{\nu} \mu_{\nu} \phi_{\nu}(Q) e^{-2\epsilon_{\nu} x / \xi}, \quad (3.21)$$

где суммирование также включает в себя интегрирование по непрерывным квантовым числам, а μ_{ν} — это коэффициенты дельта-функции $\delta(Q, \Lambda)$ в базисе $\phi_{\nu}(Q)$ (см. раздел 3.4.3). Так как и гамильтониан и начальные условия инвариантны относительно поворотов с помощью матрицы $U \in K$, этим же свойством будет обладать и ядро теплопроводности: $\psi(U^{-1}QU, x) = \psi(Q, x)$. Таким образом, в выражение (3.21) войдут только *радиальные* собственные функции оператора Лапласа (то есть те, который зависят только от углов Картана θ_i), что значительно упростит дальнейший анализ. По этой же причине вместо полного лапласиана (3.17) потребуется лишь его часть, действующая на переменные θ_i . Она называется *радиальным лапласианом* и может быть получена, если в Ур. (3.17) вместо $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ взять зависящий от θ_i блок метрики g^{ij} , который опреде-

ляется формой (см. приложение B.1):

$$dl_{\text{rad}}^2 = \sum_{ij} g_{ij} \theta_i \theta_j = \theta_{B_1}^2 + \theta_{B_2}^2 + 2\theta_F^2. \quad (3.22)$$

Тогда радиальный лапласиан

$$\Delta_{\text{rad}} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{B_1}} J \frac{\partial}{\partial \theta_{B_1}} + \frac{\partial}{\partial \theta_{B_2}} J \frac{\partial}{\partial \theta_{B_2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_F} J \frac{\partial}{\partial \theta_F} \right). \quad (3.23)$$

Разложение (3.21) ядра теплопроводности с помощью системы собственных функций оператора Лапласа-Бейтрами является очень общим выражением. Однако в суперсимметричном случае обычно выделяют единицу в правой части Ур. (3.21) [84; 89; 121; 122]. Единица ($\phi_0 = 1$) является нулевой модой гамильтониана и поэтому в нашей записи уже содержится в разложении (3.21). Причина, по которой многие авторы рассматривают ее отдельно, заключается в том, что распространенная процедура получения собственных функций (усреднением плоской волны в параметризации Ивасава по группе K) не позволяет автоматически получить $\phi_0 = 1$ и ее требуется добавлять вручную. Однако по мере роста числа реплик и усложнения суперсимметрического пространства, количество собственных функций, которые не могут быть автоматически получены этим способом возрастает, что требует пересмотра этого вопроса, что будет произведено в разделах 3.3.4 и 3.4.2.

3.3.4 Параметризация Ивасава

Анализ Фурье на симметрических пространствах изложен Хельгасоном [126] и был обобщен на суперсимметричный случай Цирнбауером [121; 122]. Для построения системы собственных функций оператора Лапласа удобно воспользоваться так называемой параметризацией Ивасава:

$$Q = N^{-1} \Lambda e^{\tilde{a}} N. \quad (3.24)$$

Она получается, если применить разложение Ивасава к T -матрице: $T = U_I e^{\check{a}/2} N$, где $U_I \in K$, \check{a} лежит в подалгебре Картана

$$\check{a} = a_{B1} \check{h}_{B1} + a_{B2} \check{h}_{B2} + i a_F \check{h}_F \quad (3.25)$$

[генераторы \check{h} те же самые, что и в Ур. (3.13)], а $N \in \mathcal{N}_+$ лежит в экспоненцированной подалгебре *положительных* корней, которым соответствуют нильпотентные матрицы. В параметризации Ивасава якобиан является экспонентой от линейной функции: $J_I(a_i) = e^{\rho(a)}$, где ρ — это так называемый вектор Вейля, который выражается как полусумма положительных корней $\alpha(a)$ с коэффициентами, равными их кратности:

$$\rho(a) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} m_\alpha \alpha(a). \quad (3.26)$$

Стоит отметить, что выбор определенного набора положительных корней нарушает симметрию между переменными a_{B1} и a_{B2} . При выборе, сделанном в приложении В.1 и показаном на Рис. В.1, $\rho(a) = a_F - a_{B2}$.

Оператор Лапласа в координатах Ивасава (a, N) имеет очень простой вид:

$$\Delta = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial}{\partial a_i} + 2\rho_i(a) \cdot \frac{\partial}{\partial a_i} \right] + \Delta_N, \quad (3.27)$$

где ρ_i — это компоненты вектора Вейля, скалярное произведение определяется радиальной метрикой $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ [см. Ур. (3.22) и приложение В.1], а Δ_N — это часть лапласиана, действующая на переменные N , которая зануляется при действии на функции, зависящие только от a : $\Delta_N f(a) = 0$.

Тогда плоские волны

$$e^{ipa} = e^{i \sum_i p_i a_i} \quad (3.28)$$

являются собственными функциями оператора Лапласа:

$$\Delta e^{ipa} = -\epsilon_p e^{ipa}, \quad \epsilon_p = p \cdot p - 2i\rho \cdot p. \quad (3.29)$$

Радиальные собственные функции (3.28) в представлении Ивасава параметризуются тремя импульсами p_i , что отвечает трехмерной алгебре Картана.

3.3.5 От Ивасава к Картану: общий формализм

При переходе от плоских волн (3.28) в координатах Ивасава к радиальным волновым функциям в координатах Картана необходимо сделать два шага. Во-первых, необходимо получить явное выражение для $a(\theta, U)$, что может быть сделано путем приравнивания ΛQ в представлениях Ивасава и Картана:

$$\Lambda N^{-1} \Lambda e^{\check{a}} N = U^{-1} e^{\check{\theta}} U, \quad (3.30)$$

и решения полученной системы уравнений. При этом, однако, волновые функции (3.28), будучи выражены через координаты Картана (θ, U) , приобретают ненужную зависимость от U . Поэтому, вторым шагом в получении радиальных собственных функций является *изотропизация* e^{ipa} по группе K :

$$\phi_p(\theta) = \langle e^{ipa(\theta, U)} \rangle_K \simeq \int_{U \in K} e^{ipa(\theta, U)}. \quad (3.31)$$

Из-за наличия грасмановых переменных, последнее слагаемое в Ур. (3.31) нужно понимать следующим образом: если подынтегральное выражение не зависит от (некоторых) грасмановых чисел на некотором импульсе p , то интегрирование по ним не проводится (в противном случае получилось бы нулевое значение $\phi_p(\theta)$). Простейший пример — это $p = 0$, что отвечает волновой функции $\phi_0 = 1$, которая уже не зависит от U и не нуждается в изотропизации. Однако, если ее все же проинтегрировать по полной группе K (включая грасмановы переменные), то получится нуль. Именно поэтому “слишком симметричные” волновые функции обычно добавляются в Ур. (3.21) вручную.

Как будет показано далее, в классе D с двумя репликами помимо единицы имеется еще одно семейство таких “слишком симметричных” волновых функций, которые зависят не от трех, а от одного импульса и которые приходится рассматривать отдельно. По этим причинам процесс получения радиальных собственных функций из плоских волн в представлении Ивасава назван выше изотропизацией, а не просто усреднением по группе K .

Наконец, стоит отметить, что общий численный множитель в Ур. (3.31) остается произвольным. Он будет уточнен в дальнейшем отдельно для каждого семейства собственных функций, см. раздел 3.4.2.

3.4 Радиальные собственные функции

Процедура получения собственных функций, намеченная в разделе 3.3.4 является общей для любого симметрического пространства. Но ее реализация в конкретном классе симметрии требует некоторого мастерства в выборе подходящей параметризации группы U . Более того, известно, что суперсимметрия вносит свои сложности [122], которые, как мы покажем ниже растут с увеличением числа реплик.

3.4.1 Базис и параметризации

Выберем определенный базис, который значительно упростит последующие вычисления. Расположим коммутирующие и грассмановы переменные таким образом, что матрица бозон-фермионной градуировки имела вид $k = \text{diag}\{1,1, -1, -1, -1, -1,1,1\}$, действуя как ± 1 на бозонные и фермионные переменные, соответственно. Следуя работе [89], выберем матрицу Λ так чтобы всеми ее нулевыми элементами были единицы на побочной диагонали, см. Ур. (B.2). Матрица зарядового сопряжения C дается Ур. (B.3). Корневая система представлена в приложении B.1. В этом базисе генераторы картановой подалгебры \check{h}_i являются диагональными, а матрицы (3.13) и (3.25) принимают вид

$$\check{\theta} = \text{diag}\{\theta_{B1}, \theta_{B2}, i\theta_F, i\theta_F, -i\theta_F, -i\theta_F, -\theta_{B2}, -\theta_{B1}\}, \quad (3.32)$$

$$\check{a} = \text{diag}\{a_{B1}, a_{B2}, ia_F, ia_F, -ia_F, -ia_F, -a_{B2}, -a_{B1}\}. \quad (3.33)$$

Принципиальное преимущество выбранного базиса состоит в том, что он позволяет легко и явно решить уравнение (3.30) на $a(\theta, U)$ опираясь на знание о том, что положительные корни могут быть выбраны в виде строго верхнетреугольных матриц. Тогда N и $\Lambda N^{-1} \Lambda$ в Ур. (3.30) будут верхне (нижне) треугольными матрицами с единицами на главной диагонали. Поэтому главные (супер)миноры левой части уравнения (3.30) будут содержать только пере-

менные a и из них легко выразятся необходимые зависимости $a(\theta, U)$. Так как первые три элемента \check{a} уже содержат все три a_i , то будет достаточно рассмотреть только первые три главных подматрицы от матричного Ур. (3.30), получив следующий набор соотношений:

$$\begin{aligned} e^{a_{\text{B1}}} &= [U^{-1}e^{\check{\theta}U}]_{11}, \\ e^{a_{\text{B1}}+a_{\text{B2}}} &= \det [U^{-1}e^{\check{\theta}U}]_{1-2,1-2}, \\ e^{a_{\text{B1}}+a_{\text{B2}}-a_{\text{F}}} &= \text{sdet} [U^{-1}e^{\check{\theta}U}]_{1-3,1-3}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Последовательно используя уравнения (3.34), получим $e^{a_{\text{B1}}}$, $e^{a_{\text{B2}}}$ and $e^{a_{\text{F}}}$. Наконец, возводя их в степени ip_{B1} , ip_{B2} and ip_{F} , соответственно и перемножая полученные выражения, получим выражение для плоской волны Ивасавы в базисе Картана-Ефетова.

Радиальные волновые функции в переменных Картана θ получаются изотропизацией плоских волн $\langle e^{ipa(\theta, U)} \rangle_K$ по матрицам $U \in K$ в соответствии с Ур. (3.31). Однако, в связи с тем, что матрица U зависит от большого числа переменных, окончательное выражение для $\phi_\nu(\theta)$ не удастся получить в явном виде. К счастью, для вычисления моментов кондактанса (3.9), полное знание радиальных функций не требуется. Достаточно иметь (i) выражения для их асимптотик на больших θ , которые определяют нормировку и позволят найти коэффициенты μ_ν в спектральном разложении ядра теплопроводности (3.21) и (ii) разложение на маленьких θ , которое необходимо для вычисления производных в Ур. (3.9)–(3.11).

Для того, чтобы вычислить асимптотику на больших θ , требуется выбор очень специальной параметризации матрицы $U \in K$. Вдохновляясь выводом Хельгасона для несуперсимметричного случая [126] и прошлым опытом работы с суперсимметричными моделями [89], удалось правильным образом факторизовать U :

$$U = U_{\text{BB}}U_{\text{FF}}U_g, \quad (3.35)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\text{ВВ}} &= e^{i\alpha_{b1}w_{b1}} e^{i\beta_{b1}w_{b2}} e^{i\alpha_{b2}w_{b1}} e^{i\beta_{b2}w_{b2}}, \\ U_{\text{FF}} &= e^{i\alpha_F w_F}, \\ U_g &= e^{w_{g1}} e^{w_{g2}} = (1 + w_{g1})(1 + w_{g2}), \end{aligned} \quad (3.36)$$

генераторы $w_{b1}, w_{b2}, w_F, w_{g1}, w_{g2}$ представляют из себя сумму пары противоположных корневых векторов, определенных в Приложении В.1, а $\alpha_{b1}, \beta_{b1}, \alpha_{b2}, \beta_{b2}, \alpha_F$ — действительные числа, принадлежащие отрезкам $\alpha_{b2}, \beta_{b2} \in [0, \pi]$ and $\alpha_{b1}, \beta_{b1}, \phi_F \in [0, 2\pi]$ [установить эти отрезки можно исходя из положений особенностей якобиана (3.37)]. Самый тонкий момент заключается в параметризации ВВ сектора. Оказывается, что правильный способ (позволяющий прийти к берущимся интегралам для асимптотики на больших θ_i) — это действовать попеременно двумя генераторами, соответствующим так называемым *простым корням* (см. [126] и приложение В.1)

В такой параметризации мера Хаара на группе K приводит к следующему якобиану:

$$J_U = \sin \alpha_{b2} \sin^2 \beta_{b2}. \quad (3.37)$$

Именно факторизация якобиана J_U на произведение простых тригонометрических функций, а также аналогичная структура, возникающая из (3.34) позволяют сосчитать асимптотическое выражение для волновых функций $\phi_\nu(\theta)$ в пределе $\theta_1 \gg \theta_2 \gg 1$ в явной форме, см. раздел 3.4.3. Параметризация, задаваемая уравнениями (3.35) и (3.36) будет использована в дальнейшем для того, чтобы получить главное, трехпараметрическое семейство радиальных собственных функций.

Общая теория некомпактных симметрических пространств [126] говорит о том, что импульсы p_i в Ур. (3.28) должны быть сдвинуты на вектор Вейля (3.26): $p_i = q_i + (i/2)\rho$ для того, чтобы волновые функции были нормируемы на вещественных q_i . В нашем (суперсимметричном) случае осуществим такой сдвиг для ВВ сектора, в то время как для FF сектора будем использовать параметризацию, удобную для работы с волновыми функциями с правильным поведением при $\theta_F = \pi$ (см. обсуждение в разделе 3.4.2). Таким образом, мы

перепараметризуем импульсы Ивасава p_{B1}, p_{B2}, p_F следующим образом:

$$p_{B1} = q_1, \quad p_{B2} = q_2 - i/2, \quad p_F = -il. \quad (3.38)$$

Тогда правильные собственные функции будут перечисляться при $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ и $l = 0, 1, \dots$ (см. разделы 3.4.2 и 3.4.3).

Для некомпактных симметрических пространств проведенная процедура приводит к полному базису радиальных собственных функций [126]. В случае суперсимметрических пространств, напротив, возникают дополнительные семейства собственных функций, которые будут обсуждаться ниже.

3.4.2 Семейства радиальных собственных функций

Явное выражение для трехпараметрических функций $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$ неизвестно, так как интеграл (3.31) по группе K не берется на произвольных θ_i . Тем не менее, можно показать, что он обнуляется на специальной линии $\theta_{B2} = \theta_F = 0$ из-за того, что не более чем 6 из 8 грассмановых переменных содержатся в каждом мономе, входящем в подынтегральное выражение (то же самое справедливо и для другой специальной линии $\theta_{B1} = \theta_F = 0$, что следует из симметрии, описываемой группой Вейля). Это означает, что трехпараметрическое семейство вместе с функцией 1 (единица) не образуют полный базис. Так, например, дельта-функция $\delta(Q, \Lambda)$ не может быть разложена по функциям $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$ и 1 как минимум на указанных линиях. Это является первой проблемой на пути построения базиса.

Второй проблемой является то, что если положить $q_2 = l = 0$, оставив только импульс q_1 , интеграл (3.31) опять обнулится по той же причине, что может означать, что волновые функции, отвечающие этим импульсам, потеряны. Для того, чтобы восстановить потерянные волновые функции, семейство $q_2 = l = 0$ будет рассмотрено в модифицированной параметризации, при этом будет опущено интегрирование по части грассмановых переменных. В результате такой процедуры решится и первая упомянутая проблема, связанная с неполнотой базиса из трехпараметрических функций.

Модификация параметризации должна быть такой, чтобы в каждом члене в подынтегральном выражении (3.31) отсутствовал одно и то же подмножество грассмановых переменных, так что можно было бы опустить интегрирование по ним в процессе изотропизации. Это будет выполняться в параметризации, которая дается уравнениями (3.35) и (3.36), но в которой U_g заменено на

$$\tilde{U}_g = (1 + w_{g2}|_{\gamma, \chi \rightarrow 0})(1 + w_{g1})(1 + w_{g2}|_{\rho, \sigma \rightarrow 0}). \quad (3.39)$$

В этом случае якобиан (3.37) модифицируется: $J_U \rightarrow J_U(1 + 4\eta\chi - 4\zeta\gamma)$, а все подынтегральное выражение в Ур. (3.31) оказывается независимым от четырех грассмановых переменных $\alpha, \beta, \rho, \sigma$. Опуская интегрирование по этим четырем буквам в соответствии с общей логикой изотропизации, получим дополнительное семейство однопараметрических волновых функций $\phi_{q_1}(\theta)$.

В итоге, в классе D с двумя репликами существует три семейства радиальных собственных функций:

- трехпараметрические функции $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$, которые получаются усреднением по полной группе K (зануляются на “бозонной линии” $\theta_{B2} = \theta_F = 0$);
- однопараметрические функции $\phi_{q_1}(\theta)$, возникающие когда плоская волна (в координатах Ивасава) не зависит от некоторых грассмановых переменных (после перехода к параметризации Картана) и интегрирование по ним не производится (изотропизация); интересно, что это семейство тесно связано с собственными функциями трансфер-матричного гамильтониана сигма-модели класса D с одной репликой, как будет показано ниже (зануляются в “северном полюсе” $\theta_{B1} = \theta_{B2} = \theta_F = 0$);
- функция-единица 1, отвечающая тривиальной плоской волне в параметризации Ивасава, которую совсем не нужно интегрировать по грассмановым переменным.

Такую ситуацию можно сравнить со случаем класса D с одной репликой, когда только одно нетривиальное однопараметрическое семейство $\phi_q(\theta_B)$ может быть получено стандартным способом путем усреднения по полной группе K [84].

Мы предполагаем, что этим исчерпываются все собственные функции лапласиана. Мы проверяем это утверждение в приложении E.

Собственные числа полученных волновых функций даются Ур. (3.29) и равны:

$$\epsilon_{q_1} = q_1^2, \quad \epsilon_{q_1 q_2 l} = \frac{1}{4} + q_1^2 + q_2^2 + \frac{1}{2}l(l+1). \quad (3.40)$$

Как было упомянуто выше, функции $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$ и $\phi_{q_1}(\theta)$ не получается получить в замкнутом виде. Используя систему компьютерной алгебры, удалось посчитать их значения явно только в некоторых частных случаях: когда два из трех углов Картана θ_i полагаются равными нулю (“бозонные” и “фермионные” линии), а также асимптотику на больших θ . Ниже будут приведены выражения для радиальных функций на этих линиях и будет обсуждено их поведение на больших и маленьких θ .

Окажется, что выражений для этих частных случаях будет достаточно для вычисления физических наблюдаемых (кондактанс, его дисперсия, фактор Фано): из асимптотики на больших θ_i можно будет извлечь меру интегрирования μ_ν в Ур. (3.21) (см, раздел 3.4.3), в то время как выражения на “фермионной линии” будут использованы для определения общего численного коэффициента, проверки сконструированного ядра теплопроводности и удобного получения разложения на маленьких θ_i . Выражения на “бозонной линии” заметно упрощают определение меры для однопараметрических волновых функций и иллюстрируют связь между $n = 2$ и $n = 1$ сигма-моделями.

“Бозонная линия” ($\theta_{\mathbf{B2}} = \theta_{\mathbf{F}} = 0$)

Трехпараметрические радиальные волновые функции зануляются на “бозонной линии”: $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta_{\mathbf{B1}}, 0, 0) = 0$.

Так как “бозонная линия” содержит только один угол Картана из ВВ сектора (так же, как и в случае одной реплики $n = 1$) и однопараметрические функции зависят только от одного импульса (тоже так же, как и для $n = 1$), можно ожидать, что на “бозонной линии” сигма-модель с двумя репликами сводится к сигма-модели с одной репликой. Такое сведение действительно имеет место быть, что может быть проверено путем действия лапласианом на волновые функции. С этой целью подставим выражения для волновых функций

вблизи “бозонной линии” ($\theta_{B2} \ll 1$, $\theta_F \ll 1$),

$$\phi = f(\theta_{B1}) + u(\theta_{B1})\theta_{B2}^2 + v(\theta_{B1})\theta_F^2 + \dots, \quad (3.41)$$

в Ур. (3.18) с радиальным лапласианом из Ур. (3.23) и получим

$$\Delta\phi = \Delta^{(1)}f(\theta_{B1}) + \frac{\theta_{B2}^2 - \theta_F^2}{\theta_{B2}^2 + \theta_F^2} [2v(\theta_{B1}) - 4u(\theta_{B1})]. \quad (3.42)$$

Здесь $\Delta^{(1)}$ — это однорепличный радиальный лапласиан [84; 89],

$$\Delta^{(1)} = \frac{1}{J^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \theta_{B1}} J^{(1)} \frac{\partial}{\partial \theta_{B1}}, \quad (3.43)$$

с однорепличным якобианом $J^{(1)}(\theta_{B1}) = \coth(\theta_{B1}/2)$, который может быть получен из Ур. (3.15) путем устремления θ_{B2} и θ_F к нулю и опущением сингулярных множителей, не зависящих от θ_{B1} . Подстановка уравнения (3.42) в (3.18) показывает, что предел $\theta_{B2} = \theta_F = 0$ собственной функции ϕ хорошо определен только, если $v = 2u$. Тогда последнее слагаемое выпадает и уравнение на $f(\theta_{B1})$ принимает вид оператора Лапласа в классе D с одной репликой. Таким образом, можно выписать собственные волновые функции в этом пределе [84; 89]:

$$\phi_{q_1}(\theta_{B1}, 0, 0) = iq_1 [P_{iq_1}(\lambda_1) - P_{-iq_1}(\lambda_1)], \quad (3.44)$$

где $\lambda_1 = \cosh \theta_{B1}$ и $P_\nu(z)$ — функция Лежандра. Соответствующие собственные значения приведены в Ур. (3.40). Волновые функции (3.44) ортогональны при интегрировании вдоль “бозонной линии” с якобианом $J^{(1)}(\theta_{B1})$.

В асимптотической области $\theta_{B1} \gg 1$ однопараметрические собственные функции ϕ_{q_1} ведут себя, как

$$\phi_{q_1} \sim c_{q_1} e^{iq_1 \theta_{B1}}, \quad (3.45)$$

с коэффициентом c_{q_1} (c -функция Хариш-Чандры)

$$c_{q_1} = iq_1 C_{q_1}, \quad C_{q_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 + iq_1)}{\Gamma(iq_1)}. \quad (3.46)$$

Эта функция используется для получения меры интегрирования μ_{q_1} в ядре теплопроводности (3.53) [см Ур. (3.54)].

“Фермионная линия” ($\theta_{B1} = \theta_{B2} = 0$)

Трехпараметрические радиальные собственные функции на “фермионной линии” $\theta_{B1} = \theta_{B2} = 0$ могут быть получены взятием интеграла (3.31) с помощью системы компьютерной алгебры. Это требует обработки нескольких тысяч слагаемых, каждое из которых можно проинтегрировать с использованием формулы

$$\int_0^{2\pi} d\phi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^\nu = 2\pi P_\nu(\cos \theta). \quad (3.47)$$

Используя тождества для функции Лежандра, можно привести полученное выражение к компактному виду:

$$\begin{aligned} \phi_{q_1 q_2 l}(0, 0, \theta_F) = & 16(l^2 + 4q_1^2)(l^2 + 4q_2^2) P_l(\lambda_F) \sin^4 \frac{\theta_F}{2} \\ & + 32(1 + l) \epsilon_{q_1 q_2 l} [P_l(\lambda_F) - P_{1+l}(\lambda_F)] \sin^2 \frac{\theta_F}{2}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где $\lambda_F = \cos \theta_F$.

Для однопараметрических функций на “фермионной линии” получим:

$$\phi_{q_1}(0, 0, \theta_F) = -4q_1^2 \sin^2 \frac{\theta_F}{2}. \quad (3.49)$$

Асимптотическое поведение при $\theta_{B1} \gg \theta_{B2} \gg 1$

В пределе $\theta_{B1} \gg \theta_{B2} \gg 1$, трехпараметрическое семейство ведет себя как

$$\phi_{q_1 q_2 l} \sim \mathcal{W} \tilde{c}_{q_1 q_2 l} \cdot P_l(\lambda_F) e^{iq_1 \theta_{B1} + (iq_2 + 1/2) \theta_{B2}}, \quad (3.50)$$

где

$$\tilde{c}_{q_1 q_2 l} = \frac{(1 + l - 2iq_1)(l + 2iq_1)(1 + l - 2iq_2)(l + 2iq_2)}{\pi^4 C_{q_1} C_{q_2} C_{q_1+q_2} C_{q_1-q_2}}, \quad (3.51)$$

а коэффициенты C_q определены в (3.46).

В Ур. (3.50) операция \mathcal{W} обозначает симметриацию по отношению к бозон-бозонной части группы симметрий Вейля [126], а именно, для произвольной функции F_{q_1, q_2} переменных q_1, q_2 :

$$\mathcal{W} F_{q_1, q_2} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1} (F_{\sigma_1 q_1, \sigma_2 q_2} + F_{\sigma_1 q_2, \sigma_2 q_1}), \quad (3.52)$$

где сумма вычисляется по всем возможным выборам знаков [четыре варианта для каждого слагаемого в (3.52)].

Выражение (3.50) говорит о том, что для того, чтобы волновые функции хорошо определены при $\theta_F = \pi$, функции Лежандра должны сводиться к полиномам Лежандра на целых l . Используя тождество $P_l(z) = P_{-1-l}(z)$, приходим к выводу, что разрешенные дискретные импульсы — это $l = 0, 1, 2, \dots$

Поведение на маленьких θ_i

Разложение волновых функций на маленьких θ_i может быть получено обычным способом из интеграла (3.31), но немного более удобным способом является разложение выражений (Д.3) для волновых функций на фермионной линии и использование соотношений (Д.3)–(Д.3с) для коэффициентов ряда Тейлора, следующих из симметрий действия (3.5) и уравнения Шредингера (3.16); вывод приведен в приложении Д.

3.4.3 Нормировка собственных функций и мера Планшереля

Пользуясь знанием о семействах радиальных собственных функций, перепишем общее выражение (3.21) для ядра теплопроводности в явном виде:

$$\begin{aligned} \psi(Q, x) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \mu_{q_1} \phi_{q_1}(\theta) e^{-2\epsilon_{q_1} x / \xi} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{q_1 q_2 l} \phi_{q_1 q_2 l}(\theta) e^{-2\epsilon_{q_1 q_2 l} x / \xi}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где μ_{q_1} и $\mu_{q_1 q_2 l}$ — это меры интегрирования, которые будут найдены ниже. Здесь будут уместны несколько комментариев. Во-первых, собственная функция единица входит с коэффициентом 1 для того, чтобы удовлетворить граничное условие (3.20) при $x \rightarrow 0$, так как все остальные собственные функции зануляются на северном полюсе ($\theta_i = 0$). Во-вторых, так как трехпараметрические собственные функции симметричны по отношению к группе симметрий Вейля (перестановка и смена знаков у q_1, q_2 , см. раздел 3.4.2), то каждая собственная функция входит в Ур. (3.53) несколько раз. Такими же симметриями обладает и мера интегрирования $\mu_{q_1 q_2 l}$, поэтому можно оставить полные интегралы по q_1 и q_2 и подобрать правильный общий численный коэффициент в $\mu_{q_1 q_2 l}$. В-третьих, важно, что формулы для μ_{q_1} и $\mu_{q_1 q_2 l}$, которые будут приведены ниже, написаны для конкретной нормировки одно- и трех-параметрических семейств волновых функций, выбранной при написании уравнений (3.44)–(3.45) и (3.48)–(3.49). В-четвертых, несмотря на то, что математически строгое доказательство полноты базиса, состоящего из функций 1, $\phi_{q_1}(\theta)$ and $\phi_{q_1, q_2 l}(\theta)$ и, соответственно, отсутствия других собственных функций приведено не будет, можно с высокой степенью достоверности считать эти утверждения верными после численной проверки того, что Ур. (3.53) приводит к суперсимметричной дельта-функции в пределе $x \rightarrow 0$ на “фермионной линии”, см. приложение E. Другим сильным аргументом в пользу того, что конструкция (3.53) является верной — это тот факт, что средний кондактанс, его дисперсия и третий кумулянт, посчитанные в пределе малых L , совпадают с пертурбативными результатами, полученными в приложении Ж. Это совпадение является весьма нетривиальным, так как в

разложении по L наблюдается сокращение членов, пропорциональных $1/L^2$ и $1/L$ (для дисперсии) и пяти ведущих членов (с $1/L^3$ по L) для $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$.

Для некомпактных симметрических пространств без грассмановых переменных мера (Планшереля) интегрирования μ определяется по асимптотикам волновых функций известным образом [126]: $\mu_q^{\text{noncomp}} = \text{const}/|c_q|^2 = \text{const}/(c_q c_{-q})$, где c -функция Хариш-Чандры c_q — это коэффициент перед асимптотикой волновых функций на больших θ , полученных с помощью параметризации Ивасава [см. Ур. (3.31)]. В случае суперсимметрических пространств строгое математическое доказательство отсутствует, тем не менее считается, что справедливо непосредственное обобщение этой формулы, предложенное Цирнбауером [120; 121].

Так как формула (3.31) определена с точностью до общего численного множителя, их нормировка должны быть дополнительно согласована с мерой интегрирования. Это будет сделано в процессе численной проверки полноты базиса на “фермионной линии” в приложении E с использованием формул (3.48) и (3.49).

Однопараметрические собственные функции $\phi_{q_1}(\theta)$

Для однопараметрических собственных функций выражения для некомпактного случая достаточно прямолинейно обобщаются на суперсимметричный случай:

$$\mu_{q_1} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c_{q_1} c_{-q_1}} = \frac{\coth \pi q_1}{2q_1}, \quad (3.54)$$

что верно если $\phi_{q_1}(\theta)$ нормированы так, что их поведение на “бозонной линии” дается Ур. (3.44) с функцией Хариш-Чандры (3.46).

Выражение (3.54) полностью наследуется от однорепличного случая [84; 89], так как на бозонной линии собственный базис полностью совпадает с собственным базисом $n = 1$ сигма-модели (см. обсуждение в разделе 3.4.2).

Трехпараметрические собственные функции $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$

Для трехпараметрических собственных функций обобщение формулы для меры на суперсимметричный случай выглядит несколько более замысловато. Предложенная процедура [120] заключается в следующем. Во-первых, рассмотрим полностью некомпактную теорию, аналитически продолжив асимптотику на большие мнимые отрицательные θ_F . С помощью подстановки $\theta_F = -i\vartheta_F$ и известных асимптотик функции Лежандра на большом аргументе получим, что при $\theta_{B1} \gg \theta_{B2} \gg \vartheta_F \gg 1$ волновая функция, помноженная на \sqrt{J} ведет себя как

$$\sqrt{J}\phi_{q_1 q_2 l} \sim c_{q_1 q_2 l} \mathcal{W} e^{iq_1 \theta_{B1} + iq_2 \theta_{B2} + (1/2+l)\vartheta_F}, \quad (3.55)$$

что соответствует нормируемой функции на вещественных q_1, q_2 и $l = -1/2 + l_F$ с мнимым l_F . c -функция Хариш-Чандры есть

$$c_{q_1 q_2 l} = \frac{\tilde{c}_{q_1 q_2 l}}{\pi c_{-i(l+1/2)}}, \quad (3.56)$$

где $\tilde{c}_{q_1 q_2 l}$ было определено в (3.51).

Применяя стандартную формулу для меры Планшереля получим

$$\mu_{q_1 q_2 l}^{\text{noncomp}} = \frac{\text{const}}{|c_{q_1 q_2 l}|^2} = \frac{\text{const}}{c_{q_1 q_2 l} c_{-q_1, -q_2, -1-l}}. \quad (3.57)$$

В настоящей теории с вещественным θ_F правильные значения q_1 и q_2 (отвечающие нормируемым волновым функциям) тоже вещественны, что обосновывает (3.38). Правильные l были выведены с помощью (3.50) (см. обсуждение вокруг этой формулы) и приведены под Ур. (3.38). Оказывается, что аналитически продолженная мера (3.57) содержит полюса при этих значениях, так что предполагаемая формула для меры в суперсимметричном случае имеет вид:

$$\mu_{q_1 q_2 l} = \text{res}_l \frac{1}{c_{q_1 q_2 l} c_{-q_1, -q_2, -1-l}}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (3.58)$$

при выборе общего численного множителя в волновых функциях в соответствии с (3.48). Мы выводим численный коэффициент $1/\pi^4$ в (3.58) и проверяем эту формулу в приложении E.

Подставляя (3.56) в (3.58) получим меру интегрирования в виде:

$$\mu_{q_1 q_2 l} = \frac{(1 + 2l)T_{q_1} T_{q_2} T_{q_1+q_2} T_{q_1-q_2}}{2 \prod_{q \in \{q_1, q_2\}} [l^2 + 4q^2] [(1 + l)^2 + 4q^2]}, \quad (3.59)$$

где $T_q = q \tanh \pi q$.

3.5 Аналитические выражения для транспортных характеристик

Имея вышеприведенные выражения, подсчитаем величины, характеризующие квазичастичный транспорт в классе D. Для этого подставим статсумму (3.19), выраженную через ядро теплопроводности (3.53) в уравнения (3.9)–(3.11). С помощью соотношений (Д.3а) и (Д.3с), необходимые производные по θ могут быть выражены через производные только по θ_F . Это позволяет ограничиться использованием значения волновых функций $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$ и $\phi_{q_1}(\theta)$ только на “фермионной линии”, где известны явные выражения для них (3.48) и (3.49).

3.5.1 Моменты кондактанса

Эта процедура приводит к следующим выражениям для среднего кондактанса, его второго и третьего моментов:

$$\langle g^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \mu_q P_q^{(k)} e^{-2\epsilon_q L/\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{q_1 q_2 l} R_{q_1 q_2 l}^{(k)} e^{-2\epsilon_{q_1 q_2 l} L/\xi}, \quad (3.60)$$

где собственные числа ϵ_q и $\epsilon_{q_1 q_2 l}$ перечислены в выражении (3.40), а меры μ_{q_1} и $\mu_{q_1 q_2 l}$ приведены в Ур. (3.54) и (3.58) с s -функциями Хариш-Чандры (3.46) и (3.56), соответственно. Многочлены $P_{q_1}^k$, определяющие вклад однопараметри-

ческого семейства собственных функций имеют вид:

$$P_q^{(1)} = 4q^2, \quad (3.61a)$$

$$P_q^{(2)} = \frac{8}{3}q^2(1 + q^2), \quad (3.61b)$$

$$P_q^{(3)} = \frac{8}{15}q^2(1 + q^2)(4 + q^2). \quad (3.61c)$$

Вклад трехпараметрических собственных функций описывается многочленами $R_{q_1 q_2 l}^{(k)}$:

$$R_{q_1 q_2 l}^{(1)} = 0, \quad (3.62a)$$

$$R_{q_1 q_2 l}^{(2)} = \frac{64}{3} [4\epsilon_{q_1 q_2 l}(1 + l)^2 + M], \quad (3.62b)$$

$$R_{q_1 q_2 l}^{(3)} = \frac{32}{5} [4\epsilon_{q_1 q_2 l}(1 + l)^2 B_3 + M B_4], \quad (3.62c)$$

где $M = (l^2 + 4q_1^2)(l^2 + 4q_2^2)$ и $B_m = 5 + l(4 + ml) + 4q_1^2 + 4q_2^2$.

Полученное выражение для среднего кондактанса $\langle g \rangle$ совпадает с тем, которое получается из однорепличной сигма-модели [84; 89] (с учетом другого числа в определении безразмерного кондактанса g , см. сноску в разделе ??). Однако в нашем случае это выражение получено из более сложной двухрепличной сигма-модели. Таким образом, тот факт, что ожидаемое совпадение действительно имеет место быть, служит подтверждением корректности нашего рассмотрения двухрепличной теории. С математической точки зрения факт, что трехпараметрическое семейство $\phi_{q_1 q_2 l}(\theta)$ не дает вклада в $\langle g \rangle$ (однако дает вклад в $\langle g^2 \rangle$ и $\langle g^3 \rangle$) объясняется тем, что для него ряд Тейлора на маленьких θ_i начинается не с квадратичных слагаемых, а с членов четвертого порядка [см. Ур. (3.48)].

Асимптотическое поведение моментов кондактанса в пределе большой длины провода, $L \gg \xi$, определяется первым слагаемым в Ур. (3.60), так как трехпараметрическое семейство, в отличие от однопараметрического, содержит щель в спектре [see Eq. (3.40)]. Вычисляя интеграл по q_1 методом перевала, получим

$$\frac{\langle g \rangle}{g_L} = 1 + \frac{\pi^2 \xi}{12L} - \frac{\pi^4 \xi^2}{240L^2} + \dots, \quad (3.63a)$$

$$\frac{\langle g^2 \rangle}{g_L} = \frac{2}{3} + \frac{(3 + \pi^2)\xi}{18L} + \frac{\pi^2(15 - \pi^2)\xi^2}{360L^2} + \dots, \quad (3.63b)$$

$$\frac{\langle g^3 \rangle}{g_L} = \frac{8}{15} + \frac{(15 + 4\pi^2)\xi}{90L} + \dots, \quad (3.63c)$$

где $g_L = \sqrt{2\xi/\pi L}$. Ведущая асимптотика в уравнениях (3.63) согласуется с результатами подхода ДМПК [88] и может быть получена из распределения Дорхова (3.1).

В пределе короткого провода, $L \ll \xi$, оба семейства радиальных собственных функций дают вклад в $\langle g^2 \rangle$ и $\langle g^3 \rangle$. Как обсуждалось в работе [122], проще получить аналитические выражения для асимптотики на коротких длинах провода не из общей формулы (3.60), а при помощи непосредственного пертурбативного решения уравнения Шредингера для ядра теплопроводности [122], что выполнено в приложении Ж. Еще одним способом изучения этого режима является вычисление флуктуационного детерминанта вблизи квазиклассической траектории [89]. Было обнаружено, что общий численный результат согласуется с обоими вышеперечисленными аналитическими методами, что является сильным аргументом в пользу того, что базис был построен правильно. Полученные выражения для $\langle g \rangle$, $\text{var } g = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$ и $\langle\langle g^3 \rangle\rangle = \langle g^3 \rangle - 3\langle g^2 \rangle \langle g \rangle + 2\langle g \rangle^3$ имеют вид:

$$\langle g \rangle = \frac{\xi}{L} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} \frac{L}{\xi} + \frac{2}{63} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots, \quad (3.64a)$$

$$\text{var } g = \frac{2}{15} - \frac{8}{315} \frac{L}{\xi} + \frac{136}{4725} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots, \quad (3.64b)$$

$$\langle\langle g^3 \rangle\rangle = \frac{8}{1485} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots \quad (3.64c)$$

В процессе вычисления $\text{var } g$, два ведущих слагаемых, пропорциональных $1/L^2$ и $1/L$ полностью сокращаются, как и ожидается в теории универсальных флуктуаций кондактанса [123]. Неожиданным является тот факт, что третий кумулянт оказывается пропорциональным L^2 , а не L , как можно было бы ожидать из скейлинга $\langle\langle g^k \rangle\rangle \propto L^{k-2}$, предположенного в работе [132]. Подобные сокра-

щения ведущих членов в $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$ в слаболокализационном режиме являются характерной особенностью (квази)одномерных систем [133].

На произвольной длине провода L приходится вычислять средний кондактанс и его дисперсию численно. Результаты представлены на Рис. 3.2, 3.3 и 3.4, которые иллюстрируют переход из режима Друде в критический режим на больших длинах L . Достаточно неожиданно, $\text{var } g$ и $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$ выходят на асимптотики (3.63) гораздо медленнее, чем сам $\langle g \rangle$.

3.5.2 Фактор Фано

Псевдоусредненный фактор Фано (3.4), который вычисляется посредством (3.10) также может быть получен в виде (3.60), где многочлены P и R заменены на

$$P_q^{(F)} = \frac{4}{3}q^2 - \frac{8}{3}q^4, \quad R_{q_1 q_2 l}^{(F)} = \frac{1}{2}R_{q_1 q_2 l}^{(2)}. \quad (3.65)$$

Полученная зависимость псевдоусредненного фактора Фано \tilde{F} от длины провода показана на Рис. 3.5. Ее асимптотики на больших и маленьких длинах имеют вид:

$$\tilde{F} = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \frac{\xi}{L} - \frac{\pi^2}{36} \frac{\xi^2}{L^2} + \dots, & L \gg \xi, \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{45} \frac{L}{\xi} + \frac{76}{945} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots, & L \ll \xi. \end{cases} \quad (3.66)$$

Как упоминалось в начале этой главы, совпадение асимптотических значений $(1/3)$ объясняется тем фактом, что обв предела описываются бимодальным распределением Дорохова (3.1), которое на малых L (режим Друде, самоусредняющийся фактор Фано) задает общую плотность прозрачностей многих каналов, в то время как на больших L оно описывает прозрачность одного наиболее прозрачного канала (критический режим, сильные флуктуации).

3.5.3 Дисперсия $\det r$

Дисперсия (3.11) детерминанта матрицы амплитуд отражения $\text{var det } r = \langle \det^2 r \rangle$ выражается, как значение ядра теплопроводности в “южном полюсе” ($\theta_{B1} = \theta_{B2} = 0$, $\theta_F = \pi$) и не содержит производных по θ_i . Следовательно, имеется вклад собственной функции-единицы [первое слагаемое в Ур. (3.53)], в то время как вклад одно- и трех-параметрических собственных функций дается Ур. (3.60) с многочленами

$$P_q^{(\det)} = -4q^2, \quad R_{q_1 q_2 l}^{(\det)} = \frac{3(-1)^l}{4} R_{q_1 q_2 l}^{(2)}. \quad (3.67)$$

Зависимость $\text{var det } r$ от длины провода приведена на Рис. 3.6. Ее асимптотики на больших и малых длинах провода L имеют вид

$$\text{var det } r = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{2\xi}{\pi L}} + \dots, & L \gg \xi. \\ \sim \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi}{4L}\right), & L \ll \xi. \end{cases} \quad (3.68)$$

Свойство $\lim_{L \rightarrow \infty} \text{var det } r = 1$ означает, что в критическом режиме для большинства образцов наблюдается поведение изолятора, расположенного на фазовой диаграмме глубоко в тривиальной или топологической фазе. Так как $\text{var det } r$ определяется ядром теплопроводности в южном полюсе (3.11), тот факт что она обнуляется а пределе $L \rightarrow 0$ является еще одной проверкой того, что ядро теплопроводности было вычислено правильно.

3.6 Обсуждение результатов

В настоящей главе был произведен подробный анализ квазичастичного транспорта в неупорядоченных многоканальных ($N \gg 1$) квантовых проволоках класса симметрии D, который реализуется в сверхпроводниках с нарушенными симметриями по обращению времени и повороту спина. В этом случае

квазичастицы определяют не электрический, а тепловой кондактанс. Материал класса симметрии D может принадлежать двум различным топологическим фазам в зависимости от параметров гамильтониана. На больших длинах обе фазы подвергаются локализации Андерсона, в то время как в критическом режиме между ними наблюдается своеобразное “делокализационное” поведение, при котором средние транспортные характеристики определяются редкими конфигурациями, которые характеризуются распределением Дорохова для одного наиболее прозрачного канала.

Средний кондактанс $\langle g \rangle$ в квантовых проволоках класса D был вычислен в работах [84; 89; 120] с помощью нелинейной суперсимметричной сигма-модели с одной репликой ($n = 1$). Этот подход позволяет полностью описать зависимость $\langle g \rangle$ от длины провода L (см. Рис. 3.2) в диффузионной области и проследить за переходом из обычного поведения $\langle g \rangle = \xi/L$ при $L \ll \xi$ (режим Друде) к сверх-Омическому поведению $\langle g \rangle \propto \sqrt{\xi/L}$ в критическом режиме ($L \gg \xi$), где $\xi = 2Nl$ is the correlation length of the wire — это корреляционная длина провода.

В настоящей диссертации излагается следующий шаг к полному статистическому описанию квантового транспорта в классе симметрии D и развитие предыдущие работы для описания старших моментов кондактанса: его дисперсии и третьего кумулянта. Получение этих величин требует использования более сложной нелинейной сигма-модели с двумя репликами ($n = 2$), которая ранее никогда не изучалась в классе симметрии D, насколько известно автору. Такая $n = 2$ сигма-модель определена на суперсимметричном многообразии ранга три (т.е. с тремя углами Картана), что позволяет вычислить моменты кондактанса до третьего включительно. Интересно, что полученные результаты и для $\text{var } g$ (Рис. 3.3) и для $\langle\langle g^3 \rangle\rangle$ (Рис. 3.4) указывают на широкую переходную область, которая выходит на асимптотику на больших длинах только при $L \gtrsim 20\xi$. В то же время средний кондактанс (Рис. 3.2) неплохо описывается асимптотическим выражением уже при $L \gtrsim \xi$.

Изучаемая $n = 2$ сигма-модель, в принципе, также позволяет найти полное распределение прозрачностей каналов, и следовательно, извлечь полную транспортную статистику (FCS) провода. Распределение прозрачностей выражается через ядро теплопроводности вблизи “суперсимметричной линии” $\theta_{B1} = \theta_{B2} = -i\theta_F$. Особенность класса симметрии D состоит в том, что произ-

водная функция для FCS (Г.1) не может быть получена из $n = 1$ сигма-модели, потому что ее компактный сектор пуст и отсутствует необходимый угол Картана. Таким образом, минимально необходимое число реплик равняется двум. Очень сложная структура интегрального представления собственных функций (3.31), полученная с помощью разложения Ивасава не позволила автору найти аналитическое выражения для распределения прозрачностей каналов. Однако, отдельные транспортные моменты этого распределения могут быть записаны в замкнутой форме. Они включают в себя средний кондактанс и фактор Фано (3.65). Последний выходит на квазиклассическое значение $1/3$ и в пределе короткого и в пределе длинного провода, см. Ур. (3.66) и Рис. 3.5.

Наконец, была сосчитана дисперсия детерминанта матрицы квантовомеханических амплитуд отражения (см. Рис. 3.6). Этот детерминант связан с топологическим индексом $\chi = \text{sign det } r$ провода и определяет переход между двумя топологически различными локализованными фазами. На протяжении главы мы рассматривали критический режим провода, в котором средний детерминант равен нулю. В то же время средний квадрат детерминанта имеет нетривиальную зависимость от длины провода. Она указывает на то, что при $L \gg \xi$ большинство реализаций беспорядка подвергаются локализации Андерсона, а вероятность найти проводящий провод убывает, как $\sqrt{\xi/L}$.

Кондактанс и его моменты доступны для экспериментального наблюдения посредством измерений теплопроводности (как, скажем, в работе [134]), а также путем измерения электрического шума в отсутствие разницы потенциалов на проволоке [135; 136]. Оба подхода активно развивались в последнее время. Второй метод представляется легче реализуемым. Мезоскопические флуктуации транспортных свойств могут быть изучены на одном образце путем изменения таких внешних параметров, как магнитное поле или напряжение на затворе, которые эффективно меняют реализацию беспорядка. Такое изменение должно производиться по специальному протоколу, который будет оставлять систему в критическом режиме между двумя топологически разными фазами. Такой способ будет эквивалентен усреднению по беспорядку и позволит набрать необходимую статистику.

С технической точки зрения, вычисление основано на построении полного набора собственных функций радиального оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии сигма-модели класса D с двумя репликами. Эта задача выполня-

ется с помощью разложения Ивасава соответствующей супергруппы G и усреднения радиальной плоской волны в координатах Ивасава по нерадиальным переменным в параметризации Картана. Впервые такой подход был предложен в работах [121; 122] и был применен к минимальным (однорепличным) сигма-моделям стандартных классов симметрии Вигнера-Дайсона.

Было обнаружено, что в суперсимметричной сигма модели класса симметрии D с двумя репликами существует два различных семейства собственных функций помимо специальной нулевой моды (единица на всем многообразии). Одно общее семейство параметризуется тремя компонентами импульса в соответствии с тремя имеющимися углами Картана. Особенность класса D с двумя репликами состоит в том, что эти функции тождественно зануляются на специальных “бозонных линиях” $\theta_{B1} = \theta_F = 0$ и $\theta_{B2} = \theta_F = 0$. Помимо этого существует также меньшее однопараметрическое семейство собственных функций, которое остается конечным на этой линии и которое тесно связано с собственными функциями в модели с одной репликой. В последней есть только один угол Картана, соответствующий, скажем, θ_{B1} , а вся теория описывает именно эти “бозонные линии”. Интересно, что спектр однопараметрического семейства не имеет щели в отличие от спектра трехпараметрического семейства. Таким образом, основные свойства провода в пределе $L \gg \xi$ определяются однопараметрическим семейством.

Поучительно сравнить проведенный анализ радиальных собственных функций для сигма-модели класса D с двумя репликами с аналогичным анализом в ортогональном (AI) и симплектическом классах симметрии (AII) с одной репликой [121; 122]. Многообразия, на которых определены эти сигма-модели все имеют ранг 3, и в каждой имеется три угла Картана. Более того, однопараметрическое семейство собственных функций, найденное в $n = 2$ классе D частично напоминает “subsidiary series” в $n = 1$ классах AI и AII. Однако, есть принципиальное отличие, которое состоит в том, что в нашем случае дополнительные собственные функции не могут быть получены взятием каких-либо пределов от главного трехпараметрического семейства и, строго говоря, не могут быть получены прямым применением приема Ивасава. Вместо этого, усреднение по группе K нужно понимать, как изотропизацию, когда интегрирование по некоторым грассмановым переменным опускается, так как они не

содержатся в подынтегральном выражении. Эта сложность отсутствует в обычных полностью некомпактных (несуперсимметричных) теориях.

Исходя из изученных математических структур и результатов, можно сделать предположение о том, что такая иерархичная организация собственных функций является общей для суперсимметричных сигма-моделей во всех классах симметрии с произвольным $n > 1$ числом реплик. А именно, полный набор собственных функций в каждой из этих моделей включает в качестве специальных семейств функции главных семейств моделей с меньшим числом реплик (правильно и нетривиально продолженных на многообразии большей размерности). Специальная собственная функция-единица которая существует во всех сигма-моделях и которая не зависит ни от одного угла Картана также вписывается в эту парадигму в качестве семейства, отвечающего модели с нулевым числом реплик.

Заключение

В настоящей диссертации был успешно решен ряд задач физики неупорядоченных систем и достигнуты все поставленные цели. По итогам работы можно сделать следующие выводы. В главе 1 был получен ряд интересных результатов, позволяющих сравнить диффузионные и баллистические вклады. Оказалось, что неаналитическая часть баллистической поправки к туннельной плотности состояний является универсальной, как и в диффузионном случае. Результаты главы 2 дают новое видение физики неупорядоченных сверхпроводящих пленок, подтверждаются множеством имеющихся экспериментальных данных и могут быть проверены дальнейшими экспериментами. Они также свидетельствуют о важности изучения протягивания известных мезоскопических явлений в баллистическую область. В главе 3 впервые в замкнутом виде было получено точное решение одномерной сигма модели высшего ранга и вычислены ранее неизвестные транспортные характеристики. Ее результаты могут быть проверены в будущих экспериментах на топологических проволоках.

В качестве одного из возможного пути развития настоящей работы можно предложить обобщение результатов и методов главы 3 на другие классы симметрии и на системы с наличием защищенных мод.

Я очень благодарен своему научному руководителю, Михаилу Андреевичу Скворцову за постоянную и разностороннюю поддержку, П. Островскому за терпеливое объяснение премудростей сигма-модели (и других вопросов) и за многочисленные идеи, которые позволили довести до конца работу над классом D, Ю. Пеколе за сотрудничество, поддержку и постановку научных задач, а также М. В. Фейгельману, К. С. Тихонову, А. В. Андрееву, В. Е. Кравцову, И. С. Бурмистрову, Я. В. Фоминову, А. С. Горскому, Л. И. Глазману, И. Грузбергу, А. Каменеву, О. Мотруничу, И. Побойко, Н. Степанову, В. Балашову и многим другим за различную помощь и мотивирующее общение. Наконец, я хотел бы поблагодарить своего школьного учителя Виктора Геннадиевича Крыштопа за то, что он открыл для меня замечательный мир физики.

Список литературы

1. *Mahan G. D.* Many-Particle Physics. — New York : Plenum Press, 1990.
2. *Drude P.* Zur elektronentheorie der metalle // Annalen der Physik. — 1900. — т. 306. — с. 566.
3. *Akkermans E., Montambaux G.* Mesoscopic physics of electrons and phonons. — Cambridge University Press, 2007.
4. *Stone A. D., Mello P., Muttalib K. A., Pichard J. L., L. A. B.* Mesoscopic phenomena in solids. — North-Holland, Amsterdam, 1991.
5. *Gorkov L. P., Larkin A. I., Khmel'nitsky D. E.* Particle conductivity in a two-dimensional random potential // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 248 (1979) [Sov. Phys. JETP Lett. **30**, 228 (1979)]. —
6. *Lee P. A., Ramakrishnan T. V.* Disordered electronic systems // Rev. Mod. Phys. — 1985. — апр. — т. 57, вып. 2. — с. 287–337. — DOI: [10.1103/RevModPhys.57.287](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.287).
7. *Kirkpatrick T. R., Belitz D.* Nonanalytic behavior of ultrasonic attenuation in disordered electronic systems // Phys. Rev. B. — 1986. — авг. — т. 34, вып. 4. — с. 2168. — DOI: [10.1103/PhysRevB.34.2168](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.34.2168).
8. *Adams P. W., Browne D. A., Paalanen M. A.* Evidence for a first-order correction to the Boltzmann conductivity of a disordered three-dimensional electron gas // Phys. Rev. B. — 1992. — апр. — т. 45, вып. 15. — с. 8837. — DOI: [10.1103/PhysRevB.45.8837](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.45.8837).
9. *Evers F., Mirlin A. D.* Anderson transitions // Rev. Mod. Phys. — 2008. — окт. — т. 80, вып. 4. — с. 1355. — DOI: [10.1103/RevModPhys.80.1355](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1355).
10. *Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V.* Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions // Phys. Rev. Lett. — 1979. — март. — т. 42, вып. 10. — с. 673. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.42.673](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.673).
11. *Altshuler B. L., Aronov A. G.* Contribution to the theory of disordered metals in strongly doped semiconductors // Zh. Eksp. Teor. Fiz. **77**, 2028 (1979) [Sov. Phys. JETP **50**, 968 (1979)]. —

12. *Altshuler B. L., Aronov A. G.* Electron-electron Interaction in Disordered System / под ред. М. Р. А. Л. Efros. — Amsterdam : North-Holland, 1985.
13. *Altshuler B. L., Aronov A. G.* Zero bias anomaly in tunnel resistance and electron-electron interaction // *Solid State Commun.* — 1979. — т. 30. — с. 115.
14. *Altshuler B. L., Aronov A. G., Lee P. A.* Interaction effects in disordered Fermi systems in two dimensions // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — май. — т. 44, вып. 19. — с. 1288. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.44.1288](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.44.1288).
15. *Ovchinnikov Y. N.* Fluctuation shift of the transition temperature of thin superconducting films // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1973. — т. 64, № 2. — с. 719. — [Sov. Phys. JETP **37**, 366 (1973)].
16. *Maekawa S., Fukuyama H.* Localization Effects in Two-Dimensional Superconductors // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1982. — т. 51. — с. 1380.
17. *Takagi H., Kuroda Y.* Anderson Localization and Superconducting Transition Temperature in Two-Dimensional Systems // *Solid State Commun.* — 1982. — т. 41, № 9. — с. 643.
18. *Maekawa S., Fukuyama H.* Upper Critical Field in Two-Dimensional Superconductors // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1983. — т. 52. — с. 1352.
19. *Ebisawa H., Fukuyama H., Maekawa S.* Superconducting Transition Temperature of Dirty Thin Films in Weakly Localized Regime // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1985. — т. 54. — с. 2257.
20. *Finkel'stein A. M.* Superconducting transition temperature in amorphous films // *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1987. — т. 45. — с. 37. — [JETP Lett. **45**, 46 (1987)].
21. *Finkel'stein A. M.* Suppression of superconductivity in homogeneously disordered systems // *Physica B: Cond. Mat.* — 1994. — т. 197, № 1. — с. 636. — DOI: [10.1016/0921-4526\(94\)90267-4](https://doi.org/10.1016/0921-4526(94)90267-4).
22. *Larkin A., Varlamov A.* Theory of fluctuations in superconductors. — Oxford : Clarendon Press, 2005.
23. *Altshuler B. L., Aronov A. G., Khmelnitsky D. E.* Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation // *J. Phys. C.* — 1982. — т. 15, № 36. — с. 7367.

24. *Finkelstein A. M.* Influence of Coulomb interaction on the properties of disordered metals // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **84**, 168 (1983) [*Sov. Phys. JETP* **57**, 97 (1983)]. —
25. *Finkelstein A. M.* Electron Liquid in Disordered Conductors // *Soviet scientific reviews.* т. 14 / под ред. I. M. Khalatnikov. — Harwood Academic Publishers, Glasgow, 1990.
26. *Belitz D., Kirkpatrick T. R.* The Anderson-Mott transition // *Rev. Mod. Phys.* — 1994. — т. 66. — с. 261.
27. *Rudin A. M., Aleiner I. L., Glazman L. I.* Tunneling zero-bias anomaly in the quasiballistic regime // *Phys. Rev. B.* — 1997. — апр. — т. 55, вып. 15. — с. 9322. — DOI: [10.1103/PhysRevB.55.9322](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.9322).
28. *Koulakov A. A.* Quasiballistic correction to the density of states in three-dimensional metal // *Phys. Rev. B.* — 2000. — сент. — т. 62, вып. 11. — с. 6858. — DOI: [10.1103/PhysRevB.62.6858](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.6858).
29. *Keck B., Schmid A.* Superconductivity and electron-phonon interaction in impure simple metals // *J. Low Temp. Phys.* — 1976. — сент. — т. 24, № 5. — с. 611. — DOI: [10.1007/BF00657170](https://doi.org/10.1007/BF00657170).
30. *Anderson P. W.* Theory of dirty superconductors // *J. Phys. Chem. Solids.* — 1959. — т. 11, № 1. — с. 26. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(59\)90036-8](https://doi.org/10.1016/0022-3697(59)90036-8).
31. *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P.* On the Theory of Superconducting Alloys; I. The Electrodynamics of Alloys at Absolute Zero // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **35**, 1558 (1958) [*Sov. Phys. JETP* **8**, 1090 (1959)]. —
32. *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P.* Superconducting Alloys at Finite Temperatures // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **36**, 319 (1959) [*Sov. Phys. JETP* **9**, 220 (1959)]. —
33. *Feigel'man M. V., Larkin A. I., Skvortsov M. A.* Quantum superconductor-metal transition in a proximity array // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — февр. — т. 86. — с. 1869. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.1869](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.1869).

34. *Feigel'man M. V., Ioffe L. B., Kravtsov V. E., Yuzbashyan E. A.* Eigenfunction Fractality and Pseudogap State near the Superconductor-Insulator Transition // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — янв. — т. 98. — с. 027001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.027001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.027001).
35. *Feigel'man M. V., Ioffe L. B., Kravtsov V. E., Cuevas E.* Fractal superconductivity near localization threshold // *Ann. Phys.* — 2010. — т. 325. — с. 1390. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.04.001>.
36. *Sacépé B., Chapelier T. D. C., Sanquer M., Ovadia M., Shahar D., Feigel'man M. V., Ioffe L. B.* Localization of preformed Cooper pairs in disordered superconductors // *Nat. Phys.* — 2011. — т. 7. — с. 239.
37. *Teplov A. A.* Critical magnetic fields in layered thin-film vanadium-carbon structures // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1976. — т. 71. — с. 802. — [Sov. Phys. JETP **44**, 422 (1976)].
38. *Wang Z., Kawakami A., Uzawa Y., Komiyama B.* Superconducting properties and crystal structures of single-crystal niobium nitride thin films deposited at ambient substrate temperature // *J. Appl. Phys.* — 1996. — т. 79, № 10. — с. 7837. — DOI: [10.1063/1.362392](https://doi.org/10.1063/1.362392).
39. *Semenov A., Günther B., Böttger U., Hübers H.-W., Bartolf H., Engel A., Schilling A., Ilin K., Siegel M., Schneider R., Gerthsen D., Gippius N. A.* Optical and transport properties of ultrathin NbN films and nanostructures // *Phys. Rev. B.* — 2009. — авг. — т. 80, вып. 5. — с. 054510. — DOI: [10.1103/PhysRevB.80.054510](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.054510).
40. *Noat Y., Cherkez V., Brun C., Cren T., Carbillet C., Debontridder F., Ilin K., Siegel M., Semenov A., Hübers H.-W., Roditchev D.* Unconventional superconductivity in ultrathin superconducting NbN films studied by scanning tunneling spectroscopy // *Phys. Rev. B.* — 2013. — июль. — т. 88, вып. 1. — с. 014503. — DOI: [10.1103/PhysRevB.88.014503](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.014503).
41. *Makise K., Odou T., Ezaki S., Asano T., Shinozaki B.* Superconductor-insulator transition in two-dimensional NbN/MgO and NbN/AlN/MgO films // *Materials Research Express.* — 2015. — т. 2, № 10. — с. 106001.

42. Kang L., Jin B. B., Liu X. Y., Jia X. Q., Chen J., Ji Z. M., Xu W. W., Wu P. H., Mi S. B., Pimenov A., Wu Y. J., Wang B. G. Suppression of superconductivity in epitaxial NbN ultrathin films // J. Appl. Phys. — 2011. — т. 109, № 3. — с. 033908. — DOI: [10.1063/1.3518037](https://doi.org/10.1063/1.3518037).
43. Ezaki S., Makise K., Shinozaki B., Odo T., Asano T., Terai H., Yamashita T., Miki S., Wang Z. Localization and interaction effects in ultrathin epitaxial NbN superconducting films // J. Phys.: Cond. Mat. — 2012. — т. 24, № 47. — с. 475702.
44. Chand M., Saraswat G., Kamlapure A., Mondal M., Kumar S., Jesudasan J., Bagwe V., Benfatto L., Tripathi V., Raychaudhuri P. Phase diagram of the strongly disordered *s*-wave superconductor NbN close to the metal-insulator transition // Phys. Rev. B. — 2012. — янв. — т. 85, вып. 1. — с. 014508. — DOI: [10.1103/PhysRevB.85.014508](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.014508).
45. Carbillet C., Cherkez V., Skvortsov M. A., Feigel'man M. V., Debontridder F., Ioffe L. B., Stolyarov V. S., Ilin K., Siegel M., Noûs C., Roditchev D., Cren T., Brun C. Spectroscopic evidence for strong correlations between local superconducting gap and local Altshuler-Aronov density of states suppression in ultrathin NbN films // Phys. Rev. B. — 2020. — июль. — т. 102, вып. 2. — с. 024504. — DOI: [10.1103/PhysRevB.102.024504](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.024504).
46. Sacépé B., Chapelier C., Baturina T. I., Vinokur V. M., Baklanov M. R., Sanquer M. Disorder-Induced Inhomogeneities of the Superconducting State Close to the Superconductor-Insulator Transition // Phys. Rev. Lett. — 2008. — окт. — т. 101, вып. 15. — с. 157006. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.157006](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.157006).
47. Graybeal J. M., Beasley M. R. Localization and interaction effects in ultrathin amorphous superconducting films // Phys. Rev. B. — 1984. — апр. — т. 29, вып. 7. — с. 4167. — DOI: [10.1103/PhysRevB.29.4167](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.29.4167).
48. Lotnyk D., Onufriienko O., Samuely T., Shylenko O., Komanický V., Szabó P., Feher A., Samuely P. Suppression of the superconductivity in ultrathin amorphous Mo₇₈Ge₂₂ films observed by STM // Low Temp. Phys. — 2017. — т. 43, № 8. — с. 919. — DOI: [10.1063/1.5001290](https://doi.org/10.1063/1.5001290).

49. *Fogel N. Y., Buchstab E. I., Pokhila A. S., Erenburg A. I., Langer V.* Disorder and superconductivity in Mo/Si multilayers // *Phys. Rev. B.* — 1996. — янв. — т. 53, вып. 1. — с. 71. — DOI: [10.1103/PhysRevB.53.71](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.53.71).
50. *Banerjee A., Baker L. J., Doye A., Nord M., Heath R. M., Erotokritou K., Bosworth D., Barber Z. H., MacLaren I., Hadfield R. H.* Characterisation of amorphous molybdenum silicide (MoSi) superconducting thin films and nanowires // *Supercond. Sci. Tech.* — 2017. — июль. — т. 30, № 8. — с. 084010. — DOI: [10.1088/1361-6668/aa76d8](https://doi.org/10.1088/1361-6668/aa76d8).
51. *Szabó P., Samuely T., Hašková V., Kačmarčík J., Žemlička M., Grajcar M., Rodrigo J. G., Samuely P.* Fermionic scenario for the destruction of superconductivity in ultrathin MoC films evidenced by STM measurements // *Phys. Rev. B.* — 2016. — янв. — т. 93, вып. 1. — с. 014505. — DOI: [10.1103/PhysRevB.93.014505](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.014505).
52. *Raffy H., Laibowitz R. B., Chaudhari P., Maekawa S.* Localization and interaction effects in two-dimensional W-Re films // *Phys. Rev. B.* — 1983. — дек. — т. 28, вып. 11. — с. 6607. — DOI: [10.1103/PhysRevB.28.6607](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.28.6607).
53. *Shahar D., Ovadyahu Z.* Superconductivity near the mobility edge // *Phys. Rev. B.* — 1992. — нояб. — т. 46. — с. 10917. — DOI: [10.1103/PhysRevB.46.10917](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.46.10917).
54. *Strongin M., Thompson R. S., Kammerer O. F., Crow J. E.* Destruction of Superconductivity in Disordered Near-Monolayer Films // *Phys. Rev. B.* — 1970. — февр. — т. 1, вып. 3. — с. 1078. — DOI: [10.1103/PhysRevB.1.1078](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.1.1078).
55. *Haviland D. B., Liu Y., Goldman A. M.* Onset of superconductivity in the two-dimensional limit // *Phys. Rev. Lett.* — 1989. — май. — т. 62, вып. 18. — с. 2180. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.62.2180](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.2180).
56. *Fisher M. P. A.* Quantum phase transitions in disordered two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — авг. — т. 65, вып. 7. — с. 923. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.65.923](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.923).
57. *Gantmakher V. F., Dolgopолоv V. T.* Superconductor-insulator quantum phase transition // *Usp. Fiz. Nauk.* — 2010. — т. 180. — с. 3. — DOI: [10.3367/UFNr.0180.201001a.0003](https://doi.org/10.3367/UFNr.0180.201001a.0003). — [Physics-Uspekhi **53**, 1 (2010)].

58. *Burmistrov I. S., Gornyi I. V., Mirlin A. D.* Superconductor-insulator transitions: Phase diagram and magnetoresistance // *Phys. Rev. B.* — 2015. — июль. — т. 92. — с. 014506. — DOI: [10.1103/PhysRevB.92.014506](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.014506).
59. *Kapitulnik A., Kivelson S. A., Spivak B.* Colloquium: Anomalous metals: Failed superconductors // *Rev. Mod. Phys.* — 2019. — янв. — т. 91, вып. 1. — с. 011002. — DOI: [10.1103/RevModPhys.91.011002](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.011002).
60. *Sacépé B., Feigel'man M., Klapwijk T. M.* Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials // *Nat. Phys.* — 2020. — т. 16. — с. 734.
61. *Anderson P. W., Muttalib K. A., Ramakrishnan T. V.* Theory of the “universal” degradation of T_c in high-temperature superconductors // *Phys. Rev. B.* — 1983. — июль. — т. 28, вып. 1. — с. 117. — DOI: [10.1103/PhysRevB.28.117](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.28.117).
62. *Fukuyama H., Ebisawa H., Maekawa S.* Bulk superconductivity in weakly localized regime // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1984. — т. 53, № 10. — с. 3560.
63. *Rabatin B., Hlubina R.* Superconductivity in systems exhibiting the Altshuler-Aronov anomaly // *Phys. Rev. B.* — 2018. — нояб. — т. 98, вып. 18. — с. 184519. — DOI: [10.1103/PhysRevB.98.184519](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.184519).
64. *Belitz D.* Correlation gap mechanism for T_c degradation in high-temperature superconductors // *J. Phys. F: Metal Physics.* — 1985. — т. 15, № 11. — с. 2315.
65. *Belitz D.* Theory for dirty superconductors. I. Strong-coupling equations // *Phys. Rev. B.* — 1987. — т. 35, № 4. — с. 1636.
66. *Belitz D.* Theory for dirty superconductors. II. McMillan solution and T_c degradation // *Phys. Rev. B.* — 1987. — т. 35, № 4. — с. 1651.
67. *Belitz D.* Theory of disorder-induced increase and degradation of superconducting T_c // *Physical Review B.* — 1987. — т. 36, № 1. — с. 47.
68. *Feigel'man M. V., Skvortsov M. A.* Universal Broadening of the Bardeen-Cooper-Schrieffer Coherence Peak of Disordered Superconducting Films // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — окт. — т. 109, вып. 14. — с. 147002. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.147002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.147002).

69. *Kim H., Ghimire A., Jamali S., Djidjou T. K., Gerton J. M., Rogachev A.* Effect of magnetic Gd impurities on the superconducting state of amorphous Mo–Ge thin films with different thickness and morphology // *Phys. Rev. B.* — 2012. — июль. — т. 86, вып. 2. — с. 024518. — DOI: [10.1103/PhysRevB.86.024518](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.024518).
70. *Efetov K. B.* Supersymmetry in Disorder and Chaos. — Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996.
71. *Burmistrov I. S.* Finkel'stein nonlinear sigma model: interplay of disorder and interaction in 2D electron systems // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 2019. — т. 156. — с. 724. — [JETP **129**, 669 (2019)].
72. *Hasan M. Z., Kane C. L.* Colloquium: Topological insulators // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — нояб. — т. 82, вып. 4. — с. 3045. — DOI: [10.1103/RevModPhys.82.3045](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.3045).
73. *Ryu S., Schnyder A. P., Furusaki A., Ludwig A. W. W.* Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy // *New J. Phys.* — 2010. — июнь. — т. 12, № 6. — с. 065010. — DOI: [10.1088/1367-2630/12/6/065010](https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/6/065010).
74. *Kitaev A.* Periodic table for topological insulators and superconductors // *AIP Conf. Proc.* — 2009. — т. 1134, № 1. — с. 22. — DOI: [10.1063/1.3149495](https://doi.org/10.1063/1.3149495).
75. *Altland A., Zirnbauer M. R.* Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures // *Phys. Rev. B.* — 1997. — янв. — т. 55, вып. 2. — с. 1142. — DOI: [10.1103/PhysRevB.55.1142](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.1142).
76. *Beenakker C. W. J.* Search for Majorana Fermions in Superconductors // *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* — 2013. — т. 4, № 1. — с. 113. — DOI: [10.1146/annurev-conmatphys-030212-184337](https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-030212-184337).
77. *Ivanov D. A.* Non-Abelian Statistics of Half-Quantum Vortices in p -Wave Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — янв. — т. 86, вып. 2. — с. 268. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.268](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.268).
78. *Kitaev A. Y.* Unpaired Majorana fermions in quantum wires // *Physics-Uspokhi.* — 2001. — т. 44, 10S. — с. 131.

79. *Lutchyn R. M., Sau J. D., Das Sarma S.* Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — авг. — т. 105, вып. 7. — с. 077001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.077001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.077001).
80. *Oreg Y., Refael G., Oppen F. von.* Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — окт. — т. 105, вып. 17. — с. 177002. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.177002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.177002).
81. *Mourik V., Zuo K., Frolov S. M., Plissard S. R., Bakkers E. P. A. M., Kouwenhoven L. P.* Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices // *Science.* — 2012. — май. — т. 336, вып. 6084. — с. 1003—1007. — DOI: [10.1126/science.1222360](https://doi.org/10.1126/science.1222360).
82. *Das A., Ronen Y., Most Y., Oreg Y., Heiblum M., Shtrikman H.* Zero-bias peaks and splitting in an Al-InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions // *Nat. Phys.* — 2012. — т. 8, вып. 12. — с. 887. — DOI: [10.1038/nphys2479](https://doi.org/10.1038/nphys2479).
83. *Gül Ö., Zhang H., Bommer J. D. S., Moor M. W. A. de, Car D., Plissard S. R., Bakkers E. P. A. M., Geresdi A., Watanabe K., Taniguchi T., Kouwenhoven L. P.* Ballistic Majorana nanowire devices // *Nature Nanotechnology.* — 2018. — март. — т. 13, № 3. — с. 192.
84. *Altland A., Bagrets D., Kamenev A.* Topology versus Anderson localization: Nonperturbative solutions in one dimension // *Phys. Rev. B.* — 2015. — февр. — т. 91, вып. 8. — с. 085429. — DOI: [10.1103/PhysRevB.91.085429](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.085429).
85. *Akhmerov A. R., Dahlhaus J. P., Hassler F., Wimmer M., Beenakker C. W. J.* Quantized Conductance at the Majorana Phase Transition in a Disordered Superconducting Wire // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — янв. — т. 106, вып. 5. — с. 057001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.057001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.057001).
86. *Read N., Green D.* Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect // *Phys. Rev. B.* — 2000. — апр. — т. 61, вып. 15. — с. 10267. — DOI: [10.1103/PhysRevB.61.10267](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.10267).

87. *Brouwer P. W., Furusaki A., Gruzberg I. A., Mudry C.* Localization and delocalization in dirty superconducting wires // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — т. 85, № 5. — с. 1064.
88. *Gruzberg I. A., Read N., Vishveshwara S.* Localization in disordered superconducting wires with broken spin-rotation symmetry // *Phys. Rev. B.* — 2005. — июнь. — т. 71, вып. 24. — с. 245124. — DOI: [10.1103/PhysRevB.71.245124](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.245124).
89. *Khalaf E.* PhD Thesis “Mesoscopic Phenomena in Topological Insulators, Superconductors and Semimetals”. — Stuttgart, 2016.
90. *White A. E., Dynes R. C., Garno J. P.* Correction to the two-dimensional density of states // *Phys. Rev. B.* — 1985. — янв. — т. 31, вып. 2. — с. 1174. — DOI: [10.1103/PhysRevB.31.1174](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.31.1174).
91. *McMillan W. L., Mochel J.* Electron Tunneling Experiments on Amorphous $\text{Ge}_{1-x}\text{Au}_x$ // *Phys. Rev. Lett.* — 1981. — февр. — т. 46, вып. 8. — с. 556. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.46.556](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.46.556).
92. *Hertel G., Bishop D. J., Spencer E. G., Rowell J. M., Dynes R. C.* Tunneling and Transport Measurements at the Metal-Insulator Transition of Amorphous Nb : Si // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — март. — т. 50, вып. 10. — с. 743. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.50.743](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.743).
93. *Imry Y., Ovadyahu Z.* Density-of-States Anomalies in a Disordered Conductor: a Tunneling Study // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — сент. — т. 49, вып. 11. — с. 841. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.841](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.841).
94. *Levitov L. S., Shytov A. V.* Semiclassical theory of Coulomb anomaly // *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **66**, 200 (1997) [*JETP Lett.* **66**, 214 (1997)]. —
95. *Kamenev A., Andreev A.* Electron-electron interactions in disordered metals: Keldysh formalism // *Phys. Rev. B.* — 1999. — т. 60. — с. 2218.
96. *Lee M., Massey J. G., Nguyen V. L., Shklovskii B. I.* Coulomb gap in a doped semiconductor near the metal-insulator transition: tunneling experiment and scaling ansatz // *Phys. Rev. B.* — 1999. — июль. — т. 60, вып. 3. — с. 1582. — DOI: [10.1103/PhysRevB.60.1582](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.1582).

97. *Bokacheva L., Teizer W., Hellman F., Dynes R. C.* Variation of the density of states in amorphous GdSi at the metal-insulator transition // *Phys. Rev. B.* — 2004. — июнь. — т. 69, вып. 23. — с. 235111. — DOI: [10.1103/PhysRevB.69.235111](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.235111).
98. *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzyaloshinski I. E.* *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics.* — New York : Dover, 1963.
99. *Khveshchenko D. V., Reizer M.* Effects of two-dimensional plasmons on the tunneling density of states // *Phys. Rev. B.* — 1998. — февр. — т. 57, вып. 8. — R4245. — DOI: [10.1103/PhysRevB.57.R4245](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.57.R4245).
100. *Mishchenko E. G., Andreev A. V.* Zero-bias anomaly in two-dimensional electron layers and multiwall nanotubes // *Phys. Rev. B.* — 2002. — май. — т. 65, вып. 23. — с. 235310. — DOI: [10.1103/PhysRevB.65.235310](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.235310).
101. *Kozii V. A., Skvortsov M. A.* Energy relaxation rate and its mesoscopic fluctuations in quantum dots // *Ann. Phys.* — 2016. — т. 371. — с. 20.
102. *Couedo F., Crauste O., Bergé L., Dolgorouky Y., Marrache-Kikuchi C., Dumoulin L.* Superconductor-Insulator Transitions in Pure Polycrystalline Nb Thin Films // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2012. — т. 400, № 2. — с. 022011.
103. *Ivry Y., Kim C.-S., Dane A. E., De Fazio D., McCaughan A. N., Sunter K. A., Zhao Q., Berggren K. K.* Universal scaling of the critical temperature for thin films near the superconducting-to-insulating transition // *Phys. Rev. B.* — 2014. — дек. — т. 90, вып. 21. — с. 214515. — DOI: [10.1103/PhysRevB.90.214515](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.214515).
104. *Brun C., Cren T., Cherkez V., Debontridder F., Pons S., Fokin D., Tringides M. C., Bozhko S., Ioffe L. B., Altshuler B. L., Roditchev D.* Remarkable effects of disorder on superconductivity of single atomic layers of lead on silicon // *Nat. Phys.* — 2014. — т. 10. — с. 444.
105. *Bogoliubov N. N., Tolmachev V. V., Shirkov D. V.* *A New Method in the Theory of Superconductivity.* — Consultants Bureau, New York, 1959.
106. *Morel P., Anderson P. W.* Calculation of the Superconducting State Parameters with Retarded Electron-Phonon Interaction // *Phys. Rev.* — 1962. — февр. — т. 125, вып. 4. — с. 1263. — DOI: [10.1103/PhysRev.125.1263](https://doi.org/10.1103/PhysRev.125.1263).

107. *McMillan W. L.* Transition Temperature of Strong-Coupled Superconductors // *Phys. Rev.* — 1968. — март. — т. 167, вып. 2. — с. 331. — DOI: [10.1103/PhysRev.167.331](https://doi.org/10.1103/PhysRev.167.331).
108. *Hikami S.* Anderson localization in a nonlinear- σ -model representation // *Phys. Rev. B.* — 1981. — сент. — т. 24, вып. 5. — с. 2671. — DOI: [10.1103/PhysRevB.24.2671](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.24.2671).
109. *Stepanov N. A., Skvortsov M. A.* Superconducting fluctuations at arbitrary disorder strength // *Phys. Rev. B.* — 2018. — апр. — т. 97, вып. 14. — с. 144517. — DOI: [10.1103/PhysRevB.97.144517](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.144517).
110. *Tiggelen B. A. van, Skiptrov S. E.* Fluctuations of local density of states and C_0 speckle correlations are equal // *Phys. Rev. E.* — 2006. — апр. — т. 73, вып. 4. — с. 045601. — DOI: [10.1103/PhysRevE.73.045601](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.045601).
111. *Smolyarenko I. E., Altshuler B. L.* Statistics of rare events in disordered conductors // *Phys. Rev. B.* — 1997. — апр. — т. 55, вып. 16. — с. 10451. — DOI: [10.1103/PhysRevB.55.10451](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.10451).
112. *Shelton D. G., Tsvelik A. M.* Effective theory for midgap states in doped spin-ladder and spin-Peierls systems: Liouville quantum mechanics // *Phys. Rev. B.* — 1998. — июнь. — т. 57, вып. 22. — с. 14242. — DOI: [10.1103/PhysRevB.57.14242](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.57.14242).
113. *Balents L., Fisher M. P. A.* Delocalization transition via supersymmetry in one dimension // *Phys. Rev. B.* — 1997. — нояб. — т. 56, вып. 20. — с. 12970. — DOI: [10.1103/PhysRevB.56.12970](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.56.12970).
114. *Dorokhov O. N.* Transmission coefficient and the localization length of an electron in N bound disordered chains // *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **36**, 259 (1982) [*Sov. Phys. JETP Lett.* **36**, 318 (1982)]. —
115. *Motrunich O., Damle K., Huse D. A.* Griffiths effects and quantum critical points in dirty superconductors without spin-rotation invariance: One-dimensional examples // *Phys. Rev. B.* — 2001. — май. — т. 63, вып. 22. — с. 224204. — DOI: [10.1103/PhysRevB.63.224204](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.224204).
116. *Mello P. A., Pereyra P., Kumar N.* Macroscopic approach to multichannel disordered conductors // *Ann. Phys.* — 1988. — т. 181, № 2. — с. 290.

117. *Zirnbauer M. R.* Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory // J. Math. Phys. — 1996. — т. 37. — с. 4986. — DOI: [10.1063/1.531675](https://doi.org/10.1063/1.531675).
118. *Bocquet M., Serban D., Zirnbauer M. R.* Disordered 2d quasiparticles in class D: Dirac fermions with random mass, and dirty superconductors // Nucl. Phys. B. — 2000. — т. 578, № 3. — с. 628.
119. *Read N., Ludwig A. W. W.* Absence of a metallic phase in random-bond Ising models in two dimensions: Applications to disordered superconductors and paired quantum Hall states // Phys. Rev. B. — 2000. — дек. — т. 63, вып. 2. — с. 024404. — DOI: [10.1103/PhysRevB.63.024404](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.024404).
120. *Zirnbauer M. R.* Fourier analysis on a hyperbolic supermanifold with constant curvature // Comm. Math. Phys. — 1991. — т. 141. — с. 503. — DOI: [10.1007/BF02102812](https://doi.org/10.1007/BF02102812).
121. *Zirnbauer M. R.* Super Fourier analysis and localization in disordered wires // Phys. Rev. Lett. — 1992. — сент. — т. 69, вып. 10. — с. 1584. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.1584](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1584).
122. *Mirlin A. D., Mullergroeling A., Zirnbauer M. R.* Conductance Fluctuations of Disordered Wires: Fourier Analysis on Supersymmetric Spaces // Ann. Phys. — 1994. — т. 236, № 2. — с. 325. — DOI: <https://doi.org/10.1006/aphy.1994.1115>.
123. *Lee P. A., Stone A. D.* Universal Conductance Fluctuations in Metals // Phys. Rev. Lett. — 1985. — окт. — т. 55, вып. 15. — с. 1622. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.55.1622](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.1622).
124. *Khmelnitskii D. E.* Quantization of Hall conductivity // Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **38**, 454 (1983) [Sov. Phys. JETP Lett. **38**, 552 (1983)]. —
125. *Pruisken A. M. M.* On localization in the theory of the quantized Hall effect: A two-dimensional realization of the θ -vacuum // Nucl. Phys. B. — 1984. — т. 235, № 2. — с. 277. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90101-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90101-9).
126. *Helgason S.* Groups and Geometric Analysis. Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions. т. 83. — American Mathematical Society, 2000. — (Mathematical Surveys and Monographs).

127. *Levitov L. S., Lesovik G. B.* Charge distribution in quantum shot noise // *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **58**, 225 (1993) [*JETP Lett.* **58**, 230 (1993)]. —
128. *Lee H., Levitov L. S., Yakovets A. Y.* Universal statistics of transport in disordered conductors // *Phys. Rev. B.* — 1995. — февр. — т. 51, вып. 7. — с. 4079. — DOI: [10.1103/PhysRevB.51.4079](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.4079).
129. *Khalaf E., Skvortsov M. A., Ostrovsky P. M.* Semiclassical electron transport at the edge of a two-dimensional topological insulator: Interplay of protected and unprotected modes // *Phys. Rev. B.* — 2016. — март. — т. 93, вып. 12. — с. 125405. — DOI: [10.1103/PhysRevB.93.125405](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.125405).
130. *Gruzberg I. A., Mirlin A. D., Zirnbauer M. R.* Classification and symmetry properties of scaling dimensions at Anderson transitions // *Phys. Rev. B.* — 2013. — март. — т. 87, вып. 12. — с. 125144. — DOI: [10.1103/PhysRevB.87.125144](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.87.125144).
131. *Efetov K. B., Larkin A. I.* Kinetics of a quantum particle in a long metallic wire // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **85**, 764 (1983) [*Sov. Phys. JETP* **58**, 444 (1983)]. —
132. *Altshuler B. L., Kravtsov V. E., Lerner I. V.* Statistics of mesoscopic fluctuations and instability of one-parameter scaling // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **91**, 2276 (1986) [*Sov. Phys. JETP* **64**, 1352 (1986)]. —
133. *Rossum M. C. W. van, Lerner I. V., Altshuler B. L., Nieuwenhuizen T. M.* Deviations from the Gaussian distribution of mesoscopic conductance fluctuations // *Phys. Rev. B.* — 1997. — февр. — т. 55. — с. 4710. — DOI: [10.1103/PhysRevB.55.4710](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.4710).
134. *Dutta B., Peltonen J. T., Antonenko D. S., Meschke M., Skvortsov M. A., Kubala B., König J., Winkelmann C. B., Courtois H., Pekola J. P.* Thermal Conductance of a Single-Electron Transistor // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — авг. — т. 119, вып. 7. — с. 077701. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.077701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.077701).
135. *Lumbroso O. S., Simine L., Nitzan A., Segal D., Tal O.* Electronic noise due to temperature differences in atomic-scale junctions // *Nature.* — 2018. — т. 562, № 7726. — с. 240.

136. *Sivre E., Duprez H., Anthore A., Aassime A., Parmentier F. D., Cavanna A., Ouerghi A., Gennser U., Pierre F.* Electronic heat flow and thermal shot noise in quantum circuits // Nature Commun. — 2019. — т. 10, № 1. — с. 1.
137. *Landauer R.* Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices // Phil. Mag. — 1970. — т. 21. — с. 863.
138. *Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S.* Generalized many-channel conductance formula with application to small rings // Phys. Rev. B. — 1985. — май. — т. 31, вып. 10. — с. 6207. — DOI: [10.1103/PhysRevB.31.6207](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.31.6207).
139. *Landauer R.* Spatial variation of currents and fields due to localised scatterers in metallic conduction // IBM J. Res. Dev. — — т. 1. — с. 223.
140. *Nazarov Y. V.* Limits of universality in disordered conductors // Phys. Rev. Lett. — 1994. — июль. — т. 73, вып. 1. — с. 134. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.73.134](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.134).

Приложение А

Осцилляции Фриделя и туннельная плотность состояний в 2D

В этом приложении изложен способ посчитать баллистическую поправку к туннельной плотности состояний $\delta\nu(E)$ в двумерном металле с контактным взаимодействием электронов с помощью подхода, разработанного в главе 2 настоящей диссертации. Цель такого рассмотрения заключается в том, чтобы воспроизвести результат Рудина, Алейнера и Глазмана [27] в несколько другой технике и проследить, как отличие в характере осцилляций Фриделя в 2D и 3D приводит к качественно разному поведению $\delta\nu(E)$.

В координатном пространстве двумерная функция Грина и ее асимптотика при $p_E r \gg 1$ имеют вид:

$$G_E^R(r) = -\frac{im}{2} H_0^{(1)}(p_E r) \sim -\frac{me^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi p_E r}} e^{ip_E r}, \quad (\text{A.1})$$

где $H_0^{(1)}$ — это функция Ганкеля первого рода. Так как, в отличие от трехмерного случая, ведущий логарифмический вклад в двумерии возникает на масштабах $r \gg \lambda_F$ [27], можно заменить функцию Грина на ее асимптотику (A.1). Подставляя ее в уравнения (1.9) и (1.10) и оставляя ведущий член в пределе $p_E r \gg 1$, получаем:

$$\zeta_F - 2\zeta_H = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{p_F} \int_0^\infty dp_{E'} dr \sigma_{E'E}(r), \quad (\text{A.2})$$

где $\sigma_{EE'}(r)$ определена уравнением (1.13) [другой порядок энергий в аргументе связан с фазовым сдвигом на $\pi/4$ в функции Грина (A.1)]. Регуляризуя интеграл по r в инфракрасной области, получаем

$$\zeta_F - 2\zeta_H = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} dp_{E'} \left(\frac{1}{p_E - p_{E'}} + \frac{1}{p_E + p_{E'}} \right), \quad (\text{A.3})$$

где подразумевается интеграл в смысле главного значения.

Вблизи энергии Ферми, при $|E - E_F| \ll E_F$, интегрирование первого слагаемого в Ур. (A.3) приводит к ведущему логарифмическому вкладу [27]:

$$\frac{\delta\nu(E)}{\nu_0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{k_F l} \log \frac{|E - E_F|}{E_F}. \quad (\text{A.4})$$

Второе слагаемое в Ур. (A.3) не дает вклада в ведущую часть (A.4), так как не содержит большого логарифма в пределе $E \rightarrow E_F$. Таким образом, сокращение слагаемых невозможно (в отличие от трехмерного случая, когда оно обеспечивает зануление поправки при $E > E_F$, см. раздел 1.3). Также стоит отметить, что результат (A.4) симметричен относительно уровня Ферми.

Приведенный выше анализ опирается на предположение $p_E r \gg 1$. Для того, чтобы выявить релевантный масштаб длин, отвечающий за поправку к туннельной плотности состояний, полезно проинтегрировать уравнения (1.9) и (1.10) в первую очередь по E' , что дает

$$\zeta_F - 2\zeta_H = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty dr \frac{\sin 2p_E r \sin 2p_F r}{r}. \quad (\text{A.5})$$

Вблизи Ферми поверхности, $|E - E_F| \ll E_F$, этот логарифмический интеграл набирается на большом диапазоне длин $1 \ll k_F r \ll E_F/|E - E_F|$. Это обосновывает приближение (A.1), а также метод стационарной фазы при изучении осцилляций Фриделя, проведенном в работе [27].

Приложение Б

Вычисление куперовской восприимчивости

В данном приложении приводится технический анализ куперовской восприимчивости, который позволяет вычислить критическую температуру сверхпроводника. Приложение частично использует магистерскую диссертацию автора. Куперовская восприимчивость на нулевом импульсе имеет вид:

$$L = \int d\mathbf{r} \int^{1/T} d\tau \langle \psi_{\downarrow}^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}(0, 0) \psi_{\downarrow}(0, 0) \rangle. \quad (\text{Б.1})$$

При критической температуре сверхпроводящего перехода L обращается в бесконечность.

В последующих вычислениях будет использоваться мацубаровская функция Грина, усредненная по беспорядку:

$$G_{\pm E}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pm iE - \xi_{\mathbf{k}} \pm i/2\tau}. \quad (\text{Б.2})$$

Для вычислений в импульсном представлении будем использовать приближение $\xi_{\mathbf{k}} = v_F (|\mathbf{k}| - k_F)$, которое становится некорректным вблизи импульса Ферми. При вычислениях в координатном представлении будем предполагать параболическую дисперсию электронов: $\xi_{\mathbf{k}} = k^2/2m - E_F$.

Для вычисления L требуется изобразить все диаграммы, включающие в себя вершины взаимодействия λ_{ph} и λ и усреднить их по беспорядку. Удобно сначала просуммировать лестницы отталкивательного взаимодействия λ и вставить соответствующий блок (обозначенный, как Π) между линиями фононного взаимодействия λ_{ph} . Суммируя соответствующую лестницу, получим:

$$L = \frac{\Pi}{1 - \lambda_{\text{ph}}\Pi/\nu} \quad (\text{Б.3})$$

Так как блок Π вставлен между двумя фононными линиями, в нем предполагается обрезка на дебаевской частоте ω_D в углах диаграммы. Уравнение (Б.3)

позволяет выразить критическую температуру через величину Π :

$$\nu\lambda_{\text{ph}}^{-1} = \Pi(T_c). \quad (\text{Б.4})$$

Б.1 Квазибаллистические примесные лестницы

В дальнейшем вычислении потребуется выражения для так называемого “баллистического” куперона и диффузона $\mathcal{C}(\mathbf{q}, \omega)$, вычисленного при произвольных значениях ql , $\omega\tau$ (однако по-прежнему требуется выполнение условий $q \ll k_F$ и $\omega \ll E_F$). Считая, что $E > 0$ и $E - \omega < 0$, для одной ступени лестницы получим выражение [109]:

$$\begin{aligned} f_q(\omega) &= \frac{\nu}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \frac{1}{iE - \xi + i/2\tau} \frac{1}{i(E - \omega) - \xi - \mathbf{v}\mathbf{q} - i/2\tau} \\ &= \frac{1}{ql} \arctan \frac{ql}{1 + \omega\tau}. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Суммируя геометрическую прогрессию, соответствующую диффузионной лестнице, получим:

$$\mathcal{C}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \frac{1}{1 - f_q(\omega)}; \quad \mathcal{C}(0, \omega) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \frac{1 + \omega\tau}{\omega\tau}. \quad (\text{Б.6})$$

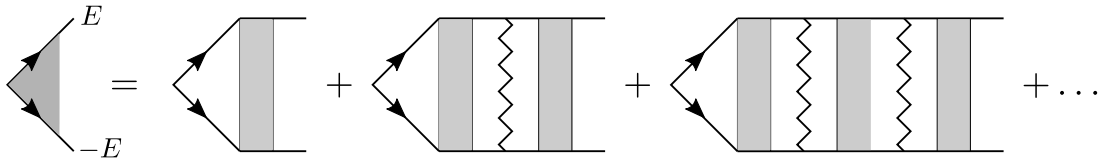


Рисунок Б.1 — Диаграммное выражение для перенормированной фононной вершины $v(E)$. Зигзагообразные линии обозначают отталкивательное взаимодействие с константой λ . Серые блоки обозначают купероны, при этом включаются также диаграммы, в которых на месте такого блока нет ни одной примесной линии. Внешние функции Грина не включаются в определение $v(E)$.

Б.2 Перенормировка фононной вершины

Для того, чтобы аккуратно учесть логарифмические вклады, возникающие на различных масштабах энергии, удобно ввести перенормированную фононную вершину $v(E)$, определенную, как сумма последовательности диаграмм, показанных на Рис. Б.1. Величина $v(E)$ учитывает лестницы линий взаимодействия (отталкивательная константа λ), которые, как известно, отвечают за перенормировку “толмачевским логарифмом” (псевдопотенциал Мореля-Андерсона) [105–107]. В квазибаллистической области важно учитывать диаграммы, где диффузионная лестница отсутствует (нет примесных линий). Так как вершина описывает фононное взаимодействие, энергию пары функций Грина, смежных с вершиной следует ограничить величиной ω_D . Это обстоятельство учитывается путем введения функции Хевисайда $\theta(\omega_D - |E|)$ в первый член ряда и ограничением интегрирования по энергии в остальных слагаемых (см. ниже). Перенормированная фононная вершина имеет вид:

$$v(E) = \left[1 + \frac{2\pi\nu\tau}{1 + 2|E|\tau} \mathcal{C}(0, 2|E|) \right] u(E) = \frac{1 + 2E\tau}{2E\tau} u(E), \quad (\text{Б.7})$$

где

$$\begin{aligned} u(E) &= \theta(\omega_D - |E|) - \frac{\lambda}{\nu} T \sum_{E'} \frac{\pi\nu}{E'} + \left(-\frac{\lambda}{\nu} \right)^2 T^2 \sum_{E'} \frac{\pi\nu}{E'} \sum_{E''} \frac{\pi\nu}{E''} + \dots \\ &= \theta(\omega_D - |E|) - \frac{\lambda \log \omega_D / T}{1 + \lambda \log E_F / T}. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Б.3 Теорема Андерсона

В ведущем приближении (диаграммы без пересечений), Π описывается диаграммой, изображенной на Рис. Б.2, которой соответствует выражение

$$\Pi_0(T) = 2\pi\nu\tau \sum_E^{\omega_D} f_0(2|E|)v(E) = \nu \frac{1 + \lambda \log E_F/\omega_D}{1 + \lambda \log E_F/T} \log \frac{\omega_D}{T}. \quad (\text{Б.9})$$

Это выражение оказывается не зависящим от силы беспорядка, что приводит к нечувствительности критической температуры к потенциальным примесям в ведущем порядке (теорема Андерсона) [30–32]. Решая Ур. (Б.4) при $\Pi = \Pi_0$, получим выражение теории Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) (2.5) с перенормированной константой взаимодействия λ_{BCS} в согласии с Ур. (2.6).

Б.4 Поправки к $\Pi(T)$ от диаграмм с пересечениями

Вклады в Π от диаграмм с пересечениями отвечают сдвигают критическую температуру T_c . Предполагая, что $\delta\Pi$ и линеаризуя уравнение (Б.4), получим следующее выражение для δT_c в первом порядке:

$$\nu\lambda_{\text{ph}}^{-1} = \Pi_0(T_{c0} + \delta T_c) + \delta\Pi(T_{c0}). \quad (\text{Б.10})$$

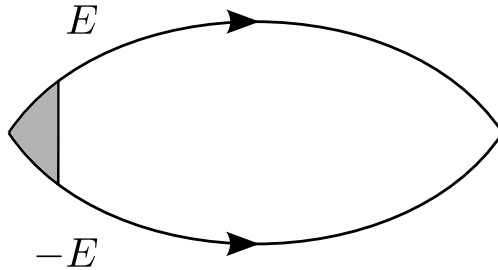


Рисунок Б.2 — Cooper bubble Π_0 in the no-crossing approximation.

Следовательно, для пертурбативного сдвига T_c имеем:

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{\delta \Pi}{\nu} \left(\frac{1 + \lambda \log E_F/T_{c0}}{1 + \lambda \log E_F/\omega_D} \right)^2 = \frac{\delta \Pi}{\nu} \left(\frac{\lambda_{\text{ph}}}{\lambda_{\text{BCS}}} \right)^2. \quad (\text{Б.11})$$

Таким образом, учет явлений перенормировки для различных вкладов может быть произведен с помощью Ур. (Б.11) и вставки перенормированных фононных вершин $\nu(E)$ в углы диаграмм, описывающих поправки к куперовскому коррелятору, $\delta \Pi$. Именно такая процедура приводит к уравнениям (2.7) и (2.15).

Применение описанной техники к баллистической поправке к вершине взаимодействия воспроизводит результат, полученный в главе 3 с помощью интерпретации этой поправки, как сдвига голой константы в куперовском канале $\delta \lambda^c$ и разложения уравнений (2.5) и (2.6). С другой стороны, применение такой же техники к поправкам, возникающим на энергиях $E < \omega_D$ (таких, как поправка Овчинникова-Финкельштейна) приводит к сокращению перенормировочных множителей.

Б.5 Вычисление сдвига критической температуры в импульсном представлении

Ниже наметим вывод уравнений (2.7) и (2.8), описывающих вклад неупругих диаграмм (Рис. 2.1) в сдвиг T_c . Будем использовать выражения для баллистического диффузона и куперона [см. Ур. (Б.6)] для того, чтобы оценить вклад баллистической области.

Первая диаграмма на Рис. 2.1 описывает поправку $\delta \Pi_a$, которую нужно вставить между фононными линиями в куперовскую лестницу. Подстановка в уравнение (Б.11) приводит к выражению (2.7), где

$$I_{E,E'}^{(a)} = \frac{\tau}{d} \sum_{q_z} \int \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{f_q(E + E')^2}{1 - f_q(E + E')}. \quad (\text{Б.12})$$

Здесь были использованы уравнения (Б.5), (Б.6) и подразумевается суммирование по диффузионным модам в геометрии пленки [в баллистической области его следует заменить на обычное трехмерное интегрирование; так можно оце-

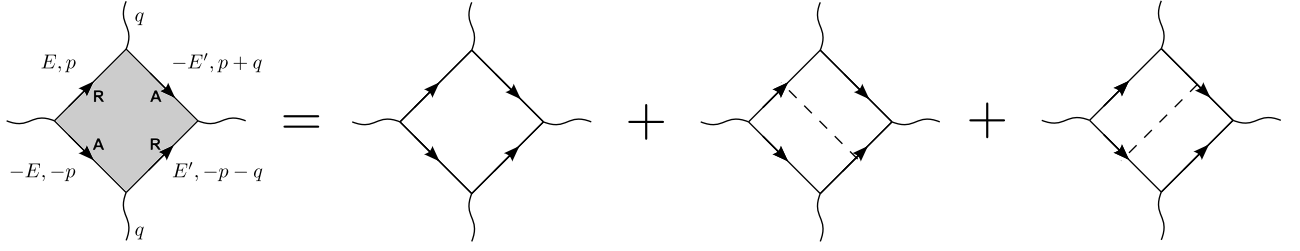


Рисунок Б.3 — Блок Хиками $H(q, E, E')$ из четырех электронных функций Грина.

нить кроссовер из 3D диффузии в 3D баллистику]. Числитель в Ур. (Б.12) соответствует двум треугольным блокам Хиками в диаграмме, а знаменатель происходит от куперонной лестницы.

Вычисление второй диаграммы на Рис. 2.1 подразумевает вычисление баллистического блока Хиками из четырех функций Грина (см. Рис. Б.3), который равен

$$H(q, E, E') = 4\pi\nu\tau^3 \frac{f_q(E + E')[1 - f_q(E + E')]}{(1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)}. \quad (\text{Б.13})$$

Тогда вклад второй диаграммы дается Ур. (2.7), в котором используется

$$I_{E,E'}^{(b)} = \frac{\tau}{d} \sum_{q_z} \int \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{f_q(E + E')^3 [1 - f_q(E + E')]}{[1 - f_q(E + E')]^2}. \quad (\text{Б.14})$$

Здесь знаменатель образуется двумя диффузорами в центральной части диаграммы, а числитель отвечает блоку Хиками (Б.13), помноженному на два дополнительных множителя $f_q(E + E')$, возникающих то интегралов “пузырьков” $G_E(p)G_{-E'}(p + q)$ и $G_{-E}(p')G_{E'}(p' - q)$.

Для того чтобы проследить за переходом в баллистическую область, следует также включить в рассмотрение диаграммы, которые получаются из второй диаграммы на Рис. 2.1, если в ней оставить только один из двух диффузонов, окружающих линию взаимодействия. Это приводит к выражению, которое дается Ур. (2.7), где

$$I_{E,E'}^{(b')} = 2\frac{\tau}{d} \sum_{q_z} \int \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{f_q(E + E')^2 [1 - f_q(E + E')]}{1 - f_q(E + E')}. \quad (\text{Б.15})$$

Наконец, складывая выражения (Б.12), (Б.14) и (Б.15), получим Ур. (2.8).

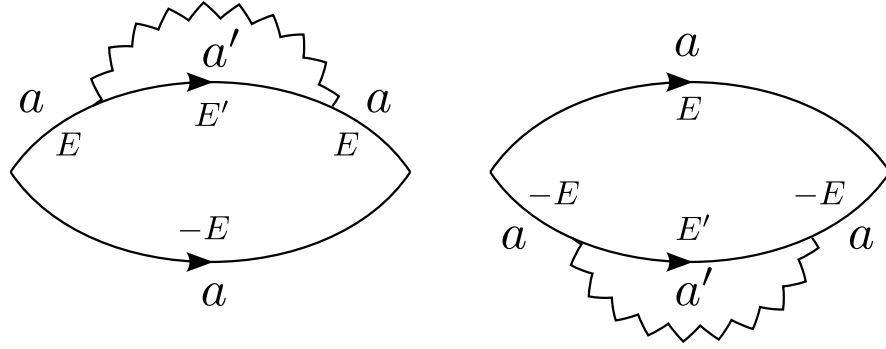


Рисунок Б.4 — Центральная часть упругих диаграмм (обменный вклад) для куперовской восприимчивости в базисе точных собственных функций гамильтониана в присутствии беспорядка.

Б.6 Упругие диаграммы

Центральная часть $\delta P^{\text{elastic}}$ упругих диаграмм (обменный вклад) показана на Рис. Б.4 в базисе точных собственных функций (обозначенных, как a, a') гамильтониана в присутствии беспорядка. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид:

$$\delta P^{\text{elastic}} = T^2 \sum_{E, E'} \sum_{a, a'} V_{aa'} G_a(E) G_a(-E) [G_a(E) + G_a(-E)] G_{a'}(E'), \quad (\text{Б.16})$$

где матричный элемент взаимодействия $V_{aa'} = -(1 - s)(\lambda/\nu) \int d\mathbf{r} |\phi_a(\mathbf{r})|^2 |\phi_{a'}(\mathbf{r})|^2$ включает в себя как обменный (фоковский), так и хартриевский вклады (где $s = 2$ — вырождение по спину в последнем). Здесь $\phi_a(\mathbf{r})$ — это волновые функции на энергии ξ_a . Мацубаровская функций Грина в этом представлении равна $G_a(E) = 1/(iE - \xi_a)$. С помощью несложных вычислений можно показать [16; 18], что уравнение (Б.16) переписывается в виде

$$\delta P^{\text{elastic}} = T^2 \sum_E \frac{1}{2iE} \sum_{E'} \sum_{aa'} V_{aa'} [G_a^2(E) - G_a^2(-E)] G_{a'}(E'), \quad (\text{Б.17})$$

в котором несложно увидеть поправку к одночастичной функции Грина в совпадающих точках (δG_E и δG_{-E}), просуммированную по мацубаровским энергиям с множителем $T/(2iE)$. Учитывая перенормировки с помощью вершин $v(E)$

[Ур. (Б.7)] и подставляя в Ур. (Б.11), получаем следующее выражение:

$$\frac{\delta T_c^{\text{elastic}}}{T_c} = \left(\frac{\lambda_{\text{ph}}}{\lambda_{\text{BCS}}} \right)^2 iT \sum_{E=E_n} \frac{u(E)^2}{E} \frac{\delta G_E - \delta G_{-E}}{\nu_0}. \quad (\text{Б.18})$$

Теперь с помощью аналитических свойств, связывающих мацубаровскую функцию Грина с запаздывающей функцией Грина G^R в реальном времени (в совпадающих точках в нашем случае),

$$G_E = \frac{1}{\pi} \int d\varepsilon \frac{\text{Im } G^R(\varepsilon)}{\varepsilon - iE} = - \int d\varepsilon \frac{\nu(\varepsilon)}{\varepsilon - iE}. \quad (\text{Б.19})$$

можно наконец выразить [64] вклад упругих диаграмм в сдвиг T_c через поправку к туннельной плотности состояний, получив Ур. (2.15).

Таблица 2 — Система корней: положительные корни (α), их кратности (m_α) и соответствующие корневые вектора ($Z_{\alpha(i)}$). Матрица Ξ_{ij} содержит 1 на пересечении i -ой строки и j -ого столбца; остальные элементы нулевые.

Bosonic ($m_\alpha = 1$)		Fermionic ($m_\alpha = -2$)		
α	Z_α	α	$Z_{\alpha,1}$	$Z_{\alpha,1}$
$2\theta_{B1}$	Ξ_{18}	$\theta_{B1} + i\theta_F$	$\Xi_{15} - \Xi_{38}$	$\Xi_{16} + \Xi_{48}$
$2\theta_{B2}$	Ξ_{27}	$\theta_{B1} - i\theta_F$	$\Xi_{13} - \Xi_{48}$	$\Xi_{14} + \Xi_{68}$
$2\theta_F$	$\Xi_{36} + \Xi_{45}$	$\theta_{B2} + i\theta_F$	$\Xi_{25} - \Xi_{37}$	$\Xi_{26} + \Xi_{47}$
$\theta_{B1} + \theta_{B2}$	$\Xi_{17} - \Xi_{28}$	$\theta_{B2} - i\theta_F$	$\Xi_{23} - \Xi_{57}$	$\Xi_{24} + \Xi_{67}$
$\theta_{B1} - \theta_{B2}$	$\Xi_{12} - \Xi_{78}$			

Тогда алгебра Картана параметризуется так:

$$\check{\theta} = \text{diag}\{\theta_{B1}, \theta_{B2}, i\theta_F, i\theta_F, -i\theta_F, -i\theta_F, -\theta_{B2}, -\theta_{B1}\}. \quad (\text{B.4})$$

Метрика $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ на супермногообразии сигма-модели определяется посредством элемента длины [70; 89; 122]

$$dl^2 = -\frac{1}{2} \text{str} dQ^2 = \mathfrak{g}_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta. \quad (\text{B.5})$$

Радиальный лапласиан (3.23) определяется не зависящей от θ частью \mathfrak{g} . Подставляя параметризацию Картана-Ефетова (3.12) в Ур. (B.5), получим для радиальной части элемента длины (который оказывается не зависящим от U):

$$dl_{\text{rad}}^2 = -\frac{1}{2} \text{str} (\Lambda e^{\check{\theta}} d\check{\theta})^2 = \frac{1}{2} \text{str} d\check{\theta}^2. \quad (\text{B.6})$$

Взяв $\check{\theta}$ из Ур. (B.4), получим Ур. (3.22), которое определяет радиальную часть метрики g_{ij} . Важно, что в определение оператора Лапласа-Бельтрами (3.17) входит метрика с верхними индексами $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$. По этой причине в Ур. (3.23) коэффициент перед производной по θ_F равен 1/2, а не 2, как в Ур. (3.22). Также матрица g^{ij} определяет скалярное произведение для корней (пространство, дуальное к картановому), входящее в выражения (3.27) и (3.29).

Принципиальное преимущество выбранного базиса состоит в том, что он позволяет выбрать положительные корни в виде верхнетреугольных матриц. Этот выбор указан в таблице 2, а его ВВ часть показана на Рис. B.1.

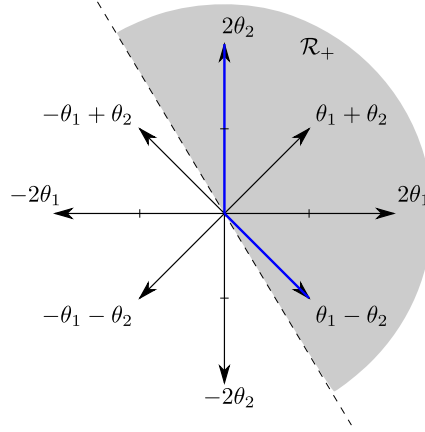


Рисунок В.1 — Бозон-бозонная часть корневой системы супермногообразия $n = 2$ сигма-модели класса симметрии D. Выбранная полуплоскость, определяющая положительные корни показана серым цветом. Простые корни подсвечены синим.

В ВВ секторе особую роль играют [126] так называемые *простые корни* $2\theta_{B2}$ и $\theta_{B1} - \theta_{B2}$ (показанные на Рис. В.1 жирными синими стрелками). Эти корни расположены ближе всего к границе выбранной полуплоскости \mathcal{R}_+ в пространстве Картана, содержащей положительные корни. Другими словами, все положительные корни могут быть выражены, как линейная комбинация простых корней с положительными коэффициентами. Попеременное действие экспонентами от этих корней [см. Ур. (3.36)] позволяет построить параметризацию, в которой интеграл (3.31) аналитически вычисляется в пределе больших θ_i , что позволяет найти явные выражения для s -функции Хариш-Чандры.

В.2 Генераторы группы K

Будем параметризовывать группу K (см. раздел 3.3.1) с помощью генераторов w_α , которые образованы суммой корневого вектора Z_α и корневого вектора $Z_{-\alpha}$, соответствующего противоположному корню $-\alpha$. Другими словами, из каждого положительного корня построим матрицу, коммутирующую с Λ :

$$w_\alpha = Z_\alpha + \Lambda Z_\alpha \Lambda. \quad (\text{В.7})$$

В разделе 3.4 используются сокращенные обозначения $w_{b1} = w_{2\theta_{B2}}$, $w_{b2} = -iw_{\theta_{B1}-\theta_{B2}}$ и $w_F = w_{2\theta_F}$ для генераторов группы U в ВВ и FF секторах и грассмановы генераторы следующего вида:

$$w_{g1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta & \zeta & \zeta & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \zeta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & -\zeta \\ -\eta & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \eta \\ \eta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\eta \\ -\zeta & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \zeta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \zeta & \zeta & \eta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

$$w_{g2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \chi & -\chi & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \sigma & -\sigma & -\rho & 0 & 0 \\ \chi & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & -\chi \\ -\gamma & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & -\gamma \\ -\gamma & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & -\gamma \\ \chi & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & \chi \\ 0 & 0 & -\rho & -\sigma & \sigma & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & -\chi & \chi & \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Приложение Г

Транспортные свойства и ядро теплопроводности

Транспортные свойства квазиодномерного провода могут быть описаны набором прозрачностей каналов, которые являются собственными значениями матрицы $t^\dagger t$, где t — это матрица амплитуд прохождения. Полная транспортная статистика [127; 128] может быть закодирована с помощью производящей функции

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \text{tr}(t^\dagger t)^k = \text{tr} \frac{t^\dagger t}{1 - z t^\dagger t}. \quad (\text{Г.1})$$

В частности, безразмерный кондактанс и дробовой шум на нулевой частоте [137–139], который описывается Фано фактором F может быть получен следующим образом:

$$g = \text{tr} t^\dagger t = \mathcal{F}(0), \quad (\text{Г.2a})$$

$$gF = \text{tr} t^\dagger t - \text{tr}(t^\dagger t)^2 = \mathcal{F}(0) - \mathcal{F}'_z(0). \quad (\text{Г.2b})$$

Для того, чтобы сосчитать $\mathcal{F}(z)$, Назаров [140] предложил использовать специальную матричную функцию Грина, в которой обычные запаздывающая и опережающая функции Грина перемешиваются вспомогательным считывающим полем. При переходе на язык сигма-модели [89; 122; 129], считывающее поле Назарова переходит в поворот граничных условий для сигма-модели. Тогда средняя по беспорядку производящая функция выражается так:

$$\langle \mathcal{F}(z_F) \rangle = - \left. \frac{\partial Z[\theta_i]}{\partial z_F} \right|_{\text{SUSY line}}, \quad (\text{Г.3})$$

где $Z[\theta_i]$ — это статистическая сумма (3.7),

$$z_F = \sin^2(\theta_F/2), \quad (\text{Г.4})$$

а производные в Ур. (Г.3) берутся вдоль “суперсимметричной линии”, на которой фермионные и бозонные углы совпадают.

Класс симметрии D , который рассматривается в настоящей диссертации имеет несколько особенностей, которые следует учитывать при использовании общей схемы, описанной выше. Во-первых, при изучении свойств квазичастиц на нулевой энергии, пространство Намбу-Горькова играет роль запаздывающего-опережающего пространства матрицы Назарова. Во-вторых, в однореplikном случае ($n = 1$), FF сектор супермногообразия сигма-модели вырожден и отсутствует необходимый угол Картана θ_F . По этой причине оказывается невозможным построение полной производящей функции $\langle \mathcal{F}(z) \rangle$. Доступно лишь значение этой функции в начале координат, $\langle \mathcal{F}(0) \rangle$, которое позволяет найти средний кондактанс [84; 89] с помощью Ур. (3.9a).

Как было объяснено во введении к главе 4, в случае двух реплик ($n = 2$) в сигма-модели имеется два бозонных (θ_{B1}, θ_{B2}) и один фермионный (θ_F) угол Картана. Этого достаточно для применения Ур. (Г.3) и получения производящей функции полной транспортной статистики. В этом случае суперсимметричной линией является линия $\theta_{B1} = \theta_{B2} = -i\theta_F$.

Вычисление полной производящей функции исходя из ядра теплопроводности требует знания собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами вблизи суперсимметричной линии. Интегральное представление (3.31), основанное на разложении Ивасаваы оказывается слишком сложным для явного решения этой задачи. Тем не менее, транспортные моменты $\text{tr}(t^\dagger t)^k$ можно получить, раскладывая собственные функции на малых значениях углов Картана, как объяснено в приложении Д. Например, подставляя Ур. (Г.3) в Ур. (Г.2b) приходим к выражению для Фано фактора в форме Ур. (3.10).

Стоит отметить, что благодаря наличию трех углов Картана, средний кондактанс может быть получен из статсуммы (3.7) тремя различными способами: (i) из фермионного сектора согласно уравнениям (Г.3) и (Г.2a):

$$\langle g \rangle = -2 \left. \frac{\partial^2 Z(\theta_i)}{\partial \theta_F^2} \right|_0, \quad (\text{Г.5})$$

(ii) из бозонного сектора посредством Ур. (3.9a) и (iii) аналогично предыдущему способу, но с заменой $\theta_{B1} \rightarrow \theta_{B2}$. Существование трех копий системы которые совместно усредняются по беспорядку позволяет выйти за пределы линейных статистик и посчитать второй и третий моменты кондактанса согласно уравнениям (3.9b) и (3.9c), соответственно.

Приложение Д

Разложение радиальных волновых функций на малых θ

Согласно уравнениям (3.9) и (3.10), моменты кондактанса и фактор Фано выражаются в терминах производной ядра теплопроводности, а значит, через производные собственных функций в начале координат. В настоящем приложении будет показано, как эти производные могут быть выражены через производные только вдоль специальной “фермионной линии” $\theta_{B1} = \theta_{B2} = 0$, где известны явные выражения для собственных функций, см. уравнения (3.48) и (3.49). Соотношения, приведенные ниже применимы как к трехпараметрическим ($\phi_{q_1 q_2 l}$), так и к однопараметрическим (ϕ_{q_1}) собственным функциям [соответствующие собственные числа $\epsilon_{q_1 q_2 l}$ и ϵ_{q_1} содержатся в Ур. (3.40)] и позволяют сосчитать физические характеристики, определяемые уравнениями (3.9) и (3.10).

Симметрия действия (3.5), а, следовательно, и лапласиана (3.23) по отношению к вращениям с помощью группы K [определение дано в разделе 3.3.1] означает, что разложение собственной функции ϕ на малых θ должно выражаться через K -инвариантные полиномы

$$H_n = \frac{1}{2} \text{str } \check{\theta}^n = \theta_{B1}^{2n} + \theta_{B2}^{2n} - 2(-\theta_F^2)^n \quad (\text{Д.1})$$

в виде ряда (постоянный член отсутствует для всех собственных функций, кроме единицы)

$$\phi(\theta_i) = a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_{1,1} H_1^2 + \dots \quad (\text{Д.2})$$

Подставляя Ур. (Д.2) в Ур. (3.18) с оператором Лапласа (3.23), определяемым якобианом (3.15) и раскладывая по θ_i до шестого порядка, можно получить ряд соотношений между коэффициентами:

$$\begin{aligned} (1 + 3\epsilon)a_1 + 24(a_2 + a_{1,1}) &= 0, \\ \left(\frac{2}{3} + \epsilon\right) a_2 - \frac{a_1}{45} + 16a_{1,2} + 18a_3 &= 0, \\ \left(\frac{8}{3} + 4\epsilon\right) a_{1,1} - \frac{a_1}{15} + 96a_{1,1,1} + 32a_{1,2} + 24a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Общий вид собственной функции (Д.2) и приведенные выше соотношения позволяют выразить различные производные от ϕ через собственное число ϵ и производные от ϕ только по переменной θ_F :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_{B1}^2} \right|_0 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_F^2} \right|_0, \quad (\text{Д.3a})$$

$$\left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta_{B1}^4} \right|_0 = -\frac{1+3\epsilon}{4} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_F^2} \right|_0, \quad (\text{Д.3b})$$

$$\left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta_{B1}^2 \partial \theta_{B2}^2} \right|_0 = -\frac{3\epsilon+1}{36} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_F^2} \right|_0 + \frac{1}{18} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta_F^4} \right|_0, \quad (\text{Д.3c})$$

$$\left. \frac{\partial^6 \phi}{\partial \theta_{B1}^2 \partial \theta_{B2}^2 \partial \theta_F^2} \right|_0 = \frac{15\epsilon(1+\epsilon)+16}{1800} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_F^2} \right|_0 - \frac{2+3\epsilon}{90} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta_F^4} \right|_0 + \frac{1}{450} \left. \frac{\partial^6 \phi}{\partial \theta_F^6} \right|_0. \quad (\text{Д.3d})$$

Приложение Е

Проверка полноты построенного базиса

Интегральное представление (3.53) ядра теплопроводности основывается на разложении единицы по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами. В настоящем приложении излагается процедура надежной численной проверки утверждения о том, что разложение (3.53) с весами (3.54) и (3.58) действительно дает правильное ядро теплопроводности. Во-первых, отметим тот факт, что однопараметрическое семейство и веса для входящих в него функций строго фиксируются разложением единицы вдоль “бозонной линии” $\theta_{B2} = \theta_F = 0$. Следовательно, два первых слагаемых в Ур. (3.53) не вызывают никаких сомнений. Для того, чтобы продемонстрировать корректность третьего слагаемого, содержащего вклад трехпараметрического семейства собственных функций, рассмотрим ядро теплопроводности на “фермионной линии” $\theta_{B1} = \theta_{B2} = 0$. Напомним, что разложение собственных функций на малых θ , полученное в приложении Д полностью определяется их поведением на “фермионной линии”. Следовательно, полноты ядра теплопроводности на этой линии достаточно для того, чтобы гарантировать, что полученные результаты для моментов кондактанса и фактора Фано верны.

Рассмотрим ядро теплопроводности (3.53) на “фермионной линии”, где собственные функции известны явно [Ур. (3.48) и (3.49)]. Используя рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, выразим трехпараметрическую собственную функцию $\phi_{q_1, q_2, l}$, как линейную комбинацию, состоящую из $P_s(\cos \theta_F)$, где s пробегает значения в диапазоне $l - 2 \leq s \leq l + 2$. Аналогичным образом, однопараметрическая собственная функция может быть представлена как линейная комбинация P_0 и P_1 . Используя это представление в Ур. (3.53), соберем члены содержащие один и тот же полином Лежандра:

$$\psi(0, 0, \theta_F; x) = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \left[\int dq_1 dq_2 A_{q_1, q_2}^{(s)}(x) + \int dq B_q^{(s)}(x) \right] P_s(\cos \theta_F). \quad (\text{E.1})$$

Явный вид коэффициентов $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$ довольно громоздкий. Как было объяснено выше, $B_q^{(s)}$ отличается от нуля только при $s = 0$ или 1 , а $A_{q_1, q_2}^{(s)}$ существует для всех значений s .

В пределе $x = 0$, ядро теплопроводности представляет собой суперсимметричную дельта-функцию (3.20), которая должна зануляться для всех ненулевых значений θ_F . Это означает, что все слагаемые в вышеприведенной сумме с $s \geq 1$ должны быть равны нулю, а слагаемое с $s = 0$ компенсируется единицей. Это утверждение было численно проверено вплоть до членов шестого порядка с высокой точностью. Стоит отметить, что два вклада в Ур. (E.1), содержащие один и два интеграла по импульсу, соответственно, расходятся в пределе $x \rightarrow 0$ как $1/x$, но их сумма остается конечной. Это наблюдается для $s = 0$ и 1 , когда присутствуют оба этих слагаемых. В этом случае приходится вычислять интегралы для нескольких малых значений x (которое служит правильной и естественной физической регуляризацией этих интегралов) для того, чтобы проверить, что сокращение имеет место быть и извлечь конечное значение суммы. Для $s \geq 2$ остается только двукратный интеграл. Он сходится сам по себе и дает 0 . Его можно вычислять сразу при $x = 0$.

Приложение Ж

Прямое пертурбативное вычисление ядра теплопроводности

Как упоминалось в разделе 3.5.1, извлечение точных аналитических выражений для транспортных характеристик системы в пределе короткого провода $L \ll \xi$ из представления Ивасава (3.60) является весьма сложной задачей. К счастью, существует более простой способ получить эти выражения с помощью прямой теории возмущений для ядра теплопроводности $\psi(\theta_i, L)$, используя уравнение Шредингера (3.16) [122]. С этой целью, подставим выражение (3.14) для якобиана в терминах системы корней в радиальный лапласиан (3.23) и перепишем его в виде

$$\Delta_{\text{rad}} = \partial \cdot \partial + \sum_{\alpha \in R^+} m_\alpha \coth \alpha \partial_{(\alpha)}, \quad (\text{Ж.1})$$

где $\partial_i = \partial/\partial\theta_i$, $\partial_{(\alpha)} = (\partial_i \alpha) g^{ij} \partial_j$ обозначают производные в направлении α , а скалярное произведение определено согласно метрике g^{ij} [см Ур. (3.22)]. Положительные корни $\alpha \in R^+$ перечислены в таблице 2: есть пять бозонных корней кратности $m_\alpha = 1$ (четыре корня из ВВ сектора показаны на Рис. В.1) и четыре грассмановых корня (по два корневых вектора на каждый), которые следует считать с кратностью $m_\alpha = -2$ [122].

Идея пертурбативного построения ядра теплопроводности $\psi(\theta_i, L)$ основывается на том, что при $L \ll \xi$ актуальные θ очень малы и лапласиан хорошо приближается его евклидовой версией, действующей в касательной плоскости:

$$\Delta_{\text{rad}}^{\text{E}} = \partial \cdot \partial + \sum_{\alpha \in R^+} m_\alpha \alpha^{-1} \partial_{(\alpha)}, \quad (\text{Ж.2})$$

где оба слагаемых имеют скейлинг θ^{-2} . Если теперь заменить Δ_{rad} на $\Delta_{\text{rad}}^{\text{E}}$, то уравнение Шредингера (3.16) легко решить, что дает евклидово приближения для ядра теплопроводности:

$$\psi^{\text{E}}(\theta, L) = \exp(-\xi H_1/8L), \quad (\text{Ж.3})$$

где $H_1 = \theta_{B_1}^2 + \theta_{B_2}^2 + 2\theta_F^2$ — это первый из семейства инвариантных полиномов (Д.1). Отсутствие обычного префактора $\propto L^{-d/2}$ в ядре теплопроводности (Ж.3) объясняется суперсимметричностью теории, которая в данном случае оказывается эффективно нульмерной, $d = 0$.

Для того, чтобы улучшить приближение (Ж.3), нужно учесть кривизну многообразия сигма-модели, то есть отличие Δ_{rad} от Δ_{rad}^E . По соображениям симметрии, ядро теплопроводности выражается в терминах инвариантных полиномов (Д.1). Записывая его в виде ряда

$$\psi = e^{-\xi H_1/8L} [1 + b_1 H_1 + b_2 H_2 + b_{1,1} H_1^2 + \dots] \quad (\text{Ж.4})$$

с коэффициентами b_i , зависящими от L и раскладывая уравнение Шредингера по разнице $\Delta_{\text{rad}} - \Delta_{\text{rad}}^E$, можно извлекать асимптотику на малых длинах порядок за порядком:

$$b_1 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{120} \frac{L}{\xi} - \frac{1}{252} \frac{L^2}{\xi^2} + \dots, \quad (\text{Ж.5a})$$

$$b_2 = \frac{1}{720} - \frac{1}{1260} \frac{L}{\xi} + \dots, \quad (\text{Ж.5b})$$

$$b_{1,1} = \frac{11}{5760} - \frac{11}{20160} \frac{L}{\xi} + \dots \quad (\text{Ж.5c})$$

Подстановка пертурбативного ядра теплопроводности (Ж.4) в уравнения (3.9) и (3.10) позволяет найти аналитические выражения для физических величин, перечисленных в разделе 3.5 в пределе короткого провода.