

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Л.Д. ЛАНДАУ РАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

На правах рукописи

УДК 538.945

Степанов Николай Анатольевич

**ФЛУКТУАЦИОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И
ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ В НИЗКОРАЗМЕРНЫХ
СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

01.04.02 —

«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н.

Скворцов Михаил Андреевич

Москва — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Флуктуационная сверхпроводимость	17
1.1 Общее выражение для поправки к проводимости	19
1.1.1 Модель	19
1.1.2 Техника Келдыша	20
1.1.3 Поправка к проводимости	22
1.1.4 Ингредиенты диаграммной техники	22
1.1.5 Статическая проводимость при произвольном беспорядке	26
1.2 Поправка к проводимости в диффузном режиме	28
1.2.1 Общее выражение в 2D	28
1.2.2 Сравнение с предыдущими результатами	30
1.2.3 В окрестности перехода, $T \rightarrow T_c$	31
1.2.4 Вдали от перехода, $T \gg T_c$	33
1.3 Поправка к проводимости в баллистическом режиме	34
1.3.1 Предварительный обзор	34
1.3.2 Окрестность перехода, $T \rightarrow T_c$	36
1.3.3 Вдали от перехода, $T \gg T_c$	39
1.4 Кроссовер от диффузного к баллистическому пределу около T_c	43
1.4.1 Вклад AL2	43
1.4.2 Вклад от полюсов функции распределения F_E	44
1.4.3 Сингулярный вклад АМТ	45
1.5 Заключение	45
Глава 2. Перевернутый маятник под действием случайной горизонтальной силы	50
2.1 Введение	50
2.2 Случай слабого шума (линейное уравнение)	52
2.3 Разработка общего метода решения	55
2.3.1 Представление в виде функционального интеграла	56

2.3.2	Трансфер-матричный гамильтониан и его нулевая мода . . .	57
2.3.3	Граничные условия для нулевой моды	59
2.4	Решение для ψ в разных режимах.	60
2.4.1	Отсутствие горизонтальной силы	61
2.4.2	Случай слабого шума	61
2.4.3	Точное решение в пределе $\omega \rightarrow 0$	62
2.4.4	Случай произвольной силы шума	64
2.4.5	Универсальный скейлинг дальних хвостов по скорости . . .	66
2.5	НПТ как минимайзер	66
2.5.1	Средний лагранжиан на ННПТ без гравитации	67
2.6	Заключение	69

Глава 3. Показатель Ляпунова и разновременные

	корреляционные функции НПТ	70
3.1	Временное трансфер-матричное уравнение	72
3.1.1	Описание границы	73
3.1.2	Предел слабого шума	75
3.1.3	Корреляционные функции	78
3.2	Ляпуновская экспонента	80
3.2.1	Слабый шум: пертурбативный анализ	80
3.2.2	Произвольный шум: численное решение	81
3.3	Заключение	82

Глава 4. Флуктуации в неоднородных сверхпроводящих

	проводах	84
4.1	Введение	84
4.2	Уравнение Узделя со случайным параметром порядка	86
4.3	Суперсимметричный подход	87
4.3.1	Усреднение по беспорядку	88
4.3.2	Трансфер-матричный гамильтониан	89
4.3.3	БРСТ-симметричная нулевая мода	90
4.3.4	Уравнение Фоккера-Планка	91
4.3.5	Одноточечная функция распределения	92
4.3.6	Граничные условия	92
4.3.7	Уравнение в действительных переменных	93

Заключение	95
Список сокращений и условных обозначений	98
Список литературы	99
Приложение А. Флуктуационная сверхпроводимость: детали вычислений	109
А.1 Исходные выражения для диаграмм	109
А.2 Усреднение по беспорядку	110
А.3 Вклад AL и его разбиение	112
А.4 Эквивалентность результатам [25] в диффузионной области	113
А.5 Аномальная поправка МТ в диффузионной области вблизи перехода	114
А.6 Функции L^R , Σ^R и Σ^Z в чистом пределе	115
Приложение Б. Теоретико-полевое описание ННПТ	120
Б.1 Доказательство единственности НПТ для задачи Уитни	120
Б.2 Формализм Паризи-Сурла	121
Б.2.1 Суперсимметричное функциональное представление и усреднение по шуму	121
Б.2.2 Вывод трансфер-матричного гамильтониана	123
Б.2.3 Редукция к скалярному уравнению и оператор Фоккера-Планка	125
Б.2.4 БРСТ симметрия	126
Б.2.5 Совместная функция распределения угла и скорости	126
Б.3 Граничные условия для суперпотенциала	127
Б.4 Точное решение в отсутствии гравитации ($\omega = 0$)	129
Б.4.1 Разложение по функциям Эйри	129
Б.4.2 Решение для $s(\mu)$	130
Б.5 Математическое дополнение: Интегралы с функциями Эйри	131
Б.5.1 Основные тождества и интегралы для функций Эйри	131
Б.5.2 Ключевой интеграл с функциями Эйри	132

Введение

Одним из удивительных явлений, открытых в XX веке, является сверхпроводимость. Сверхпроводники обладают следующими специфическими свойствами: они могут переносить бездиссипативный ток, обладать абсолютным диамагнетизмом, демонстрировать макроскопические квантовые когерентные явления, такие как эффект Джозефсона и т.д. Эти свойства свидетельствуют о качественном отличии сверхпроводящего состояния от нормального, связанном с существенной перестройкой основного состояния.

Микроскопическая теория сверхпроводимости была разработана Бардином, Купером и Шриффером (теория БКШ) [1]. Важнейшим элементом этой теории является аномальное среднее операторов уничтожения электронных состояний $\langle \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \rangle$, которое появляется ниже критической температуры ($T < T_c$) и отсутствует в стандартной теории Ферми-жидкости. Такое аномальное среднее играет роль параметра порядка, отличающего сверхпроводящее состояние от нормального. Возникновение сверхпроводимости приводит к непертурбативной перестройке электронного спектра и образованием щели Δ в плотности состояний (DOS):

$$\nu(E) = \nu_0 \operatorname{Re} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, \quad (1)$$

где E — энергия, отсчитываемая от уровня Ферми, а ν_0 — плотность состояний в отсутствие сверхпроводимости. В теории БКШ щель в спектре Δ совпадает (при правильной нормировке) с параметром порядка.

Первоначально, теория БКШ была развита для чистых образцов, в которых куперовское спаривание происходит между двумя электронами с противоположными направлениями импульсов. Введение примесей делает траектории квазичастиц диффузионными, и поэтому можно было бы подумать, что беспорядок разрушает сверхпроводящее состояние. Однако, если беспорядок сохраняет симметрию по отношению к обращению времени (TRS), оказывается, что электроны так же эффективно спариваются на обращенных во времени диффузных траекториях. В соответствии с теоремой Андерсона [2], возникающее сверхпроводящее состояние имеет те же термодинамические параметры, что и в чистом случае. В частности, остаются неизменными критическая температура, величина спектральной щели и зависимость $\nu(E)$. Однако, теорема Андерсона

носит лишь приближённый характер; строго говоря, она применима лишь при выполнении условия $k_F l \gg 1$ (где l — длина свободного пробега электронов) и начинает нарушаться по мере приближения к переходу металл-изолятор.

Если же в системе имеется возмущение, нарушающее симметрию по отношению к обращению времени, то частичное разрушение куперовских пар приводит к существенному изменению вида плотности состояний (1): когерентные пики замываются, а щель в спектре уменьшается. Наиболее известным примером такого поведения являются сверхпроводники с парамагнитными примесями, рассмотренные в работе Абрикосова и Горькова [3]. Авторы аналитически описали размытие плотности состояний и предсказали явление бесщелевой сверхпроводимости, когда при определённой концентрации примесей возможно полное закрытие щели при сохранении глобальной когерентности куперовских пар. Важный вывод, который можно сделать из работы [3], заключается в том, что при определённых ситуациях щель в спектре и сверхпроводящий параметр порядка — которые совпадали в рамках классической теории БКШ — могут различаться, причём существенно.

В работе 1971 года [4] Ларкин и Овчинников обнаружили, что вид плотности состояний (1), предсказанный теорией БКШ, может изменяться и без нарушения TRS, если в системе присутствуют неоднородности. Ими была предложена простейшая модель неоднородного сверхпроводника с пространственными флуктуациями куперовской константы связи $\lambda(\mathbf{r})$, которые, в свою очередь, индуцируют флуктуации параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$. В представляющем практический интерес случае, когда пространственный масштаб флуктуаций параметра порядка r_c значительно меньше размера куперовской пары ξ_0 , задача оказывается эквивалентной задаче Абрикосова и Горькова о магнитных примесях [3].

В последнее время в научном сообществе активизировался интерес к неупорядоченным сверхпроводникам, что, в частности, мотивировано их практическими применениями. Среди таких применений стоит выделить однофотонные детекторы на сверхпроводящих пленках [5; 6], для которых важно использование сверхпроводников с большой величиной кинетической индуктивности, что останавливает выбор на сильно неупорядоченных сверхпроводниках. Также на основе сверхпроводящих пленок строится квантовая электроника, к примеру защищенные кубиты [7]. Неоднородные сверхпроводящие провода, исполь-

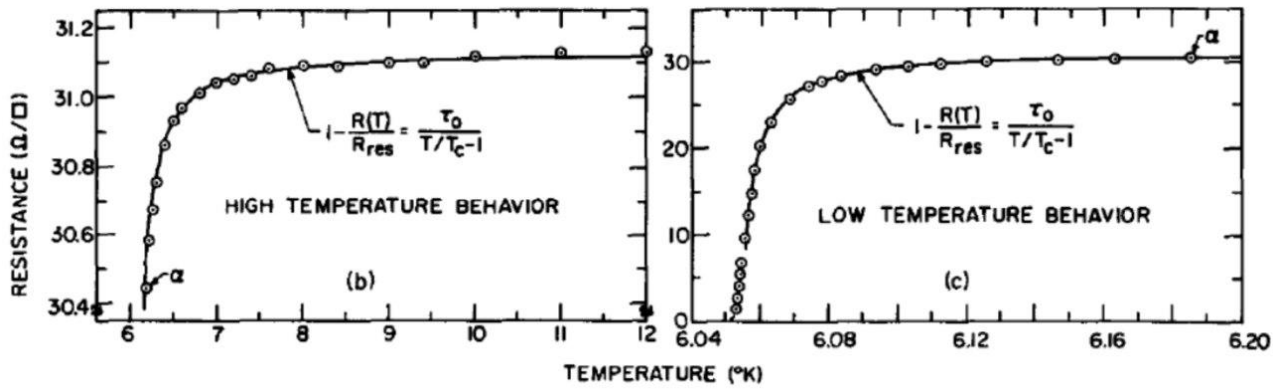


Рисунок 1 — Первое экспериментальное изучение флуктуационных поправок к проводимости, проведенное на пленках висмута (из работы [10]).

зуются для исследования квантового когерентного проскальзывания фазы [8]. Обсуждение других практических и экспериментальных применений неупорядоченных сверхпроводников можно найти в недавнем обзоре [9].

Данная диссертация посвящена изучению флуктуационных явлений в неупорядоченных сверхпроводниках, для описания которых необходим выход за рамки среднеполевого приближения. Будут рассматриваться следующие два класса флуктуационных явлений:

- Влияние флуктуационно рождающихся куперовских пар при температуре выше критической на проводимость в нормальном состоянии (флуктуационная проводимость).
- Размытие плотности состояний в неоднородных сверхпроводящих проволоках.

Первая часть диссертации посвящена изучению явления флуктуационной проводимости, впервые исследованного экспериментально в 1967 году в работе [10] (см. Рис. 1). Основы его теоретического описания были заложены в 1968 году Асламазовым и Ларкиным (AL) в работе [11], где была вычислена поправка к проводимости — *парапроводимость* — от прямого вклада куперовских пар в электрический ток. Полученный ими результат примечателен тем, что для двумерных систем ответ оказывается независимым от микроскопических параметров системы, таких как длина свободного пробега l или сверхпроводящая длина когерентности ξ_0 , а определяется лишь величиной близости температу-

ры к сверхпроводящему переходу:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} = \frac{1}{16\epsilon}, \quad (2)$$

где $\epsilon = \ln T/T_c \ll 1$ (проводимость записана в единицах в единицах e^2/h).

Следующим шагом в развитии теории стали работы Маки [12] и Томпсона [13] (МТ), где был проанализирован дополнительный механизм — рассеяние электронов на сверхпроводящих флуктуациях, приводивший хоть и к менее сингулярному по ϵ вкладу, но содержащий инфракрасно расходящийся интеграл по импульсу. По мере развития теории слабой локализации [14] стало понятно, что «обрезка» этого интеграла определяется временем сбоя фазы τ_ϕ . В двумерном случае соответствующая поправка имеет вид:

$$\delta\sigma_{\text{MT}} = \frac{1}{8} \frac{\ln \epsilon/\gamma_\phi}{\epsilon - \gamma_\phi}, \quad \gamma_\phi = \frac{\pi}{8T_c\tau_\phi}. \quad (3)$$

В зависимости от соотношения между параметрами ϵ и γ_ϕ , этот вклад может быть важнее чем традиционный вклад AL. Помимо вкладов AL и МТ есть еще и вклад, обусловленный уменьшением нормальной плотности состояний (DOS) [15], который не так сингулярен вблизи перехода, но становится важным вдали от него.

В 1980-е годы теория флуктуационной проводимости в грязном пределе была распространена на большие температуры выше T_c [16; 17]. Появление высокотемпературной сверхпроводимости в 1990-е годы стимулировал интерес к менее неупорядоченным сверхпроводникам, что потребовало обобщения теории на чистый случай, $T\tau \gg 1$, в окрестности T_c [18–21]. Флуктуационная проводимость сверхпроводника без примесей была рассмотрена в работе [22].

Развитие теории сверхпроводящих флуктуаций в 2000-е годы было связано с учетом влияния магнитного поля, которое также разрушает сверхпроводимость и позволяет поставить вопрос о вычислении флуктуационной проводимости выше линии $H_{c2}(T)$. В работе [23] низкотемпературная область в окрестности квантового фазового перехода $H \rightarrow H_{c2}$, была проанализирована в грязном пределе. Общая фазовая диаграмма в плоскости (H, T) была рассмотрена в работах [24; 25]. Частотная зависимость поправки к проводимости $\sigma(\omega)$ для произвольного $T > T_c$ в диффузионном пределе была исследована в [26]. Помимо проводимости, сверхпроводящие флуктуации влияют на коэф-

фициент Нернста [27—31], что приводит к гигантскому эффекту благодаря его аномальной малости в нормальном состоянии. В работах [30; 31] флуктуационный эффект Нернста был исследован во всей области температур и магнитных полей выше кривой $H_{c2}(T)$.

Таким образом, несмотря на почтенный возраст, теория сверхпроводящих флуктуаций продолжает активно развиваться. Одной из тенденций последнего десятилетия стало появление публикаций, где флуктуационные поправки вычисляются не в какой-то асимптотической области, а при произвольных значениях одного или двух параметров [24—26; 30; 31]. При таком подходе естественным образом вскрываются недочеты и ошибки предыдущих работ, изучавших флуктуационные эффекты в отдельной узкой области параметров.

Данное обстоятельство послужило главной мотивацией первой части диссертационной работы, которая, фактически, является продолжением этой тенденции и посвящена распространению общих формул в сторону произвольной силы примесного рассеяния. Выведенные формулы позволяют аналитически описать весь кроссовер от грязного к чистому пределу и критически проанализировать результаты работ [19—21] в чистом пределе, а также впервые исследовать ранее не изучавшуюся баллистическую область вдали от перехода ($T_c\tau \gg 1$, $\epsilon \gg 1$).

Вторая часть диссертации посвящена вопросам теории неоднородного сверхпроводящего состояния.

С экспериментальной точки зрения, развитие методов сканирующей туннельной спектроскопии позволило напрямую изучать электронные свойства сверхпроводника с нанометровым разрешением. Впервые пространственные флуктуации щели в тонких плёнках TiN при низких температурах изучались Sacéré и др. в работе [32]. Типичная карта таких флуктуаций приведена на Рис. 2. В ряде последующих работ аналогичный метод был применён для изучения пространственно неоднородной структуры щели в других сверхпроводящих пленках: NbN [33; 34], MoGe [35] и др. При этом структура сверхпроводящей щели оказывается нескоррелированной с мелкомасштабной зернистой структурой материала [36], что позволяет говорить о «спонтанной» неоднородности сверхпроводящего состояния.

В этой связи вопрос о микроскопическом описании неоднородного сверхпроводящего состояния остается открытым. Предложенная в работе [37] мо-

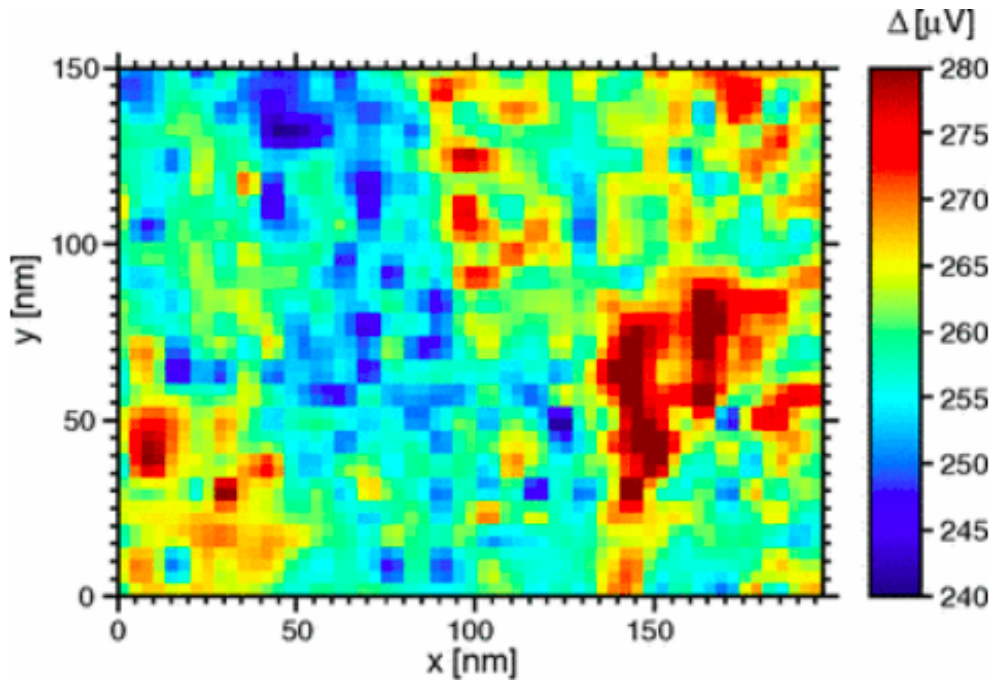


Рисунок 2 — Пространственная карта щели, измеренная методом сканирующей туннельной спектроскопии на тонкой пленке TiN [32].

дель, учитывающая вклад мезоскопических флуктуаций в размытие щели, существенно недооценивает величину эффекта [38]. В отсутствие надежной микроскопической теории, для описания неоднородных сверхпроводников имеет смысл обратиться к феноменологическому подходу, предложенному в работе Ларкина и Овчинникова [4], где источником неоднородности выступают флуктуации константы связи $\lambda(\mathbf{r})$.

Предложенное Ларкиным и Овчинниковым решение основывается на идее разделения масштабов, предполагающей, что эффективное распаривание набирается с малых пространственных расстояний. Однако такое предположение, фактически эквивалентное методу среднего поля, оказывается применимым для описания лишь трёхмерных и (с логарифмической точностью) двумерных сверхпроводников. В одномерных системах сильные длинноволновые флуктуации полностью разрушают среднеполевое описание. По этой причине изучение одномерных неупорядоченных сверхпроводников представляет большой теоретический интерес.

В рамках модели Ларкина-Овчинникова, сверхпроводящее состояние может быть описано при помощи уравнения Узаделя, которое определяет пространственное распределение спектрального угла $\theta(\mathbf{r})$, параметризующего квазиклассическую функцию Грина [39], и в котором параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ пред-

полагается случайным:

$$-\frac{D}{2}\nabla^2\theta + iE\sin\theta + \Delta(\mathbf{r})\cos\theta = 0, \quad (4)$$

где D — коэффициент диффузии. Локальная плотность состояний может быть выражена через спектральный угол соотношением

$$\nu(E, \mathbf{r}) = \nu_0 \operatorname{Re} \cos \theta(\mathbf{r}).$$

Стандартные методы квазиклассической теории сверхпроводимости не позволяют описать форму плотности состояний для задачи (4) в одном пространственном измерении. Поэтому одной из целей настоящей диссертационной работы было разработать качественно новый метод для решения подобных задач. В качестве такого нами был избран суперсимметричный формализм Паризи и Сурла [40; 41] в сочетании с трансфер-матричным подходом Ефетова и Ларкина [42].

Как мы увидим, применение метода Паризи и Сурла является довольно трудоёмкой задачей. С методической целью для опробирования этого метода нами была выбрана упрощённая модель, основанная на формальной схожести уравнения Узаделя (4) для одномерной системы и уравнения перевёрнутого математического маятника со случайной силой $f(t)$, действующей в горизонтальном направлении:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta + f(t) \cos \theta. \quad (5)$$

Это уравнение должно быть дополнено условием $|\theta(t)| \leq \pi/2$, физически означающем, что маятник должен оставаться в верхней полуплоскости. На языке уравнения Узаделя аналогичное условие $\operatorname{Re} \cos \theta \geq 0$ диктуется физическим требованием неотрицательности плотности состояний.

Примечательно, что такое решение, которое мы будем называть *непадающей траекторией* (НПТ), существует для произвольной реализации случайной силы $f(t)$. Вопрос о существовании НПТ для Ур. (5) впервые был рассмотрен Курантом и Роббинсом (КР) в книге «Что такое математика?», опубликованной в 1941 году [43], где авторство этой задачи было приписано Уитни. Доказательство существования НПТ базировалось на теореме о промежуточном значении и, по существу, опиралось на предположение о непрерывной зависимости ко-

нечного положения маятника от начальных условий. Недостаточная строгость в первоначальных аргументах КР стимулировала длительную дискуссию в математическом сообществе [44—46]). Важное уточнение доказательства КР было сделано Броманом [47], который использовал тот факт, что множества начальных условий, приводящих к касанию левой ($\theta = -\pi/2$) или правой ($\theta = \pi/2$) границы, открыты. Тем не менее, в 2002 году Арнольд считал эту проблему все еще открытой [48]. Замечание Арнольда вызвало новую волну интереса к задаче Уитни. В 2014 году Полехин привел доказательство этого утверждения для случая гладкой силы [49], основанное на топологическом принципе Важевского. За работой Полехина последовал ряд публикаций, в которых его подход был обобщен а также были применены новые топологические методы для доказательства существования НПТ [45; 50; 51].

В нашей работе мы докажем единственность НПТ в задаче Уитни и изучим ее статистические свойства, предполагая силу $f(t)$ гауссовой дельта-коррелированной случайной величиной. В дальнейшем, разработанный подход будет обобщен на случай одномерного уравнения Узаделя (4).

Целью диссертационной работы является исследование влияния сверхпроводящих флуктуаций на проводимость в нормальном состоянии и разработка теоретического описания неоднородного сверхпроводящего состояния в квазиодномерных системах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Вычислить поправку к проводимости металла от флуктуационных куперовских пар при произвольной силе беспорядка при произвольной температуре.
2. Разработать непertурбативный подход к описанию плотности состояний в неоднородных сверхпроводящих проволоках с неоднородным параметром порядка.
3. Опробовать новый метод на более простой системе со схожей математической структурой. В качестве примера была выбрана задача о стохастическом перевернутом маятнике.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено общее выражение для флуктуационной проводимости при произвольной силе потенциального беспорядка и произвольной температуре в любой размерности, учитывающее три стандартных вклада: вклад от флуктуационных куперовских пар, вклад от рассеяния электронов на флуктуационных парах и вклад от подавления плотности нормальных электронов.
2. Общее выражение исследовано в двумерной геометрии в разных асимптотических режимах. На его основе был проведен критический анализ предыдущих результатов.
3. Разработан теоретико-полевой суперсимметричный подход к описанию особого единственного решения стохастических дифференциальных уравнений, который был применен к задаче о балансировке стохастического перевернутого маятника. Вычислена функция распределения угла и скорости на никогда не падающей траектории.
4. Предложенный суперсимметричный подход обобщен на конечные интервалы времени. Вычислены разновременные корреляционные функции и ляпуновская экспонента в задаче о стохастическом перевернутом маятнике.
5. Разработанный в диссертации суперсимметричный метод обобщен на случай уравнения Узаделя с флуктуирующим в пространстве параметром порядка. Выведена система уравнений, необходимая для описания статистики плотности состояний в неупорядоченных сверхпроводниках.

Научная новизна:

1. Впервые вычислена флуктуационная поправка к проводимости во всей области температур и сил примесного рассеяния.
2. Разработан принципиально новый метод, позволяющий описать статистику не падающей траектории в стохастической задаче Уитни.
3. Заложены основы теории неоднородных квазиодномерных сверхпроводников.

Научная и практическая значимость Результаты, представленные в первой части диссертации, систематизирует знание о флуктуационных поправках, закрывают многие предыдущие результаты, что позволяет более аккуратно анализировать экспериментальные данные по флуктуационной сверхпроводимости. Разработанный во второй части диссертации метод позволяет описывать статистические свойства решений широкого класса стохастических дифференциальных уравнений с условием невыхода из полосы.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается, во-первых, надежностью применявшихся теоретических подходов, во-вторых, подтверждением численными методами и, в-третьих, согласием с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Winter workshop/school on localization, interactions and superconductivity, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 19-22 декабря 2016, Черноголовка.
Доклад: *"Fluctuation superconductivity: from the dirty to the clean case"*.
- The Challenge of 2-Dimensional Superconductivity, Lorentz Center, 8-12 июня 2019, Лейден.
Постер: *"Fluctuation superconductivity: from the dirty to the clean case"*.
- Landay Days 2020, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 22-25 июня 2020, Черноголовка.
Доклад: *"Inverted pendulum driven by a horizontal random force: statistics of the non-falling trajectory and supersymmetry"*.
- Ученый совет ИТФ им. Л.Д. Ландау, 4 сентября 2020, Черноголовка.
Доклад: *"Lyapunov exponent for Whitney's problem with random drive"*.

Личный вклад. Над задачами, представленными в диссертациями, автор работал в сотрудничестве с научным руководителем д.ф.-м.н. Скворцовым М.А. Все результаты были получены либо автором, либо при непосредственном личном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

1. *Stepanov N. A., Skvortsov M. A.* Superconducting fluctuations at arbitrary disorder strength // *Phys. Rev. B.* — 2018. — т. 97, вып. 14. — с. 144517.
2. *Степанов Н. А., Скворцов М. А.* Ляпуновская экспонента в задаче Уитни со случайной накачкой // *Письма в ЖЭТФ.* — 2020. — т. 112, вып. 16. — с. 394—400.
3. *Stepanov N. A., Skvortsov M. A.* Inverted pendulum driven by a horizontal random force: statistics of the never-falling trajectory and supersymmetry // *arXiv:2006.13819.* — 2020.

Работы изданы в 2 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 136 страниц с 19 рисунками. Список литературы содержит 101 наименование.

В Главе 1 получено общее выражение для флуктуационной поправки к проводимости тонких сверхпроводящих пленок выше критической температуры для произвольной силы беспорядка, измеряемой параметром $T_c\tau$, где τ — время примесного рассеяния. Расчет выполнен в технике Келдыша с учетом стандартных вкладов Асламазова-Ларкина, Маки-Томсона и вклада плотности состояний, которые аккуратно вычислены вне диффузионного приближения. Проведен критический анализ имеющейся литературы по флуктуационным поправкам.

В Главе 2 разработан новый подход для описания статистических свойств единственного решения нелинейных стохастических уравнений с условием невыхода из заданной полосы. В качестве платформы для демонстрации выбрана стохастическая задача Уитни о движении перевернутого маятника в поле тяжести под действием зависящей от времени горизонтальной силы в случае, когда последняя является белым шумом. Для усреднения единственного решения по беспорядку применяется метод Паризи-Сурла, что приводит к эффективной теории поля, которая в пространстве одного измерения может быть точно сведена к изучению трансфер-матричного гамильтониана. Одновременная статисти-

ка никогда не падающей траектории, рассматриваемой на всей действительной оси времени, выражается через нулевую моду трансфер-матричного гамильтониана. Вычислена совместная функция распределения угла и угловой скорости маятника на никогда не падающей траектории.

В Главе 3 суперсимметричный подход из Главы 2 расширен на случай конечных временных интервалов и многоточечных корреляционных функций непадающей траектории. В случае слабого шума построена полная система собственных и присоединенных функций связанного с трансфер-матричным гамильтонианом уравнения Фоккера-Планка. Вычислена ляпуновская экспонента для стохастической задачи Уитни.

В Главе 4 показано, что размытие плотности состояний в неоднородных сверхпроводниках в одномерной геометрии не может быть описано в рамках теории среднего поля, предложенной Ларкиным и Овчинниковым. В качестве нового подхода к решению этой проблемы, выбран метод описанный в Главе 2. Задача об усреднении плотности состояний по шуму переформулирована как задача поиска нулевой моды у эффективного трансфер-матричного гамильтониана. Выведены полная система уравнений для описания статистики плотности состояний в неоднородных квазиодномерных сверхпроводниках.

Глава 1. Флуктуационная сверхпроводимость

В этой главе изучается влияние сверхпроводящих флуктуаций на проводимость сверхпроводников в нормальном состоянии при произвольных температурах $T > T_c$ и скоростях примесного рассеяния τ^{-1} . Используя стандартную диаграммную технику, но в представлении Келдыша, мы получаем общее выражение для флуктуационной поправки к статической проводимости для случая произвольной размерности пространства и проводим его анализ для двумерной геометрии. Мы увидим, что обычная классификация в терминах диаграмм Асламазова-Ларкина, Маки-Томпсона и плотности состояний в некоторой степени искусственна, поскольку эти диаграммы содержат схожие вклады, которые частично сокращают друг друга.

В Разделе 1.1 формулируется модель, обсуждаются основные компоненты диаграммной техники и выводится общее выражение для поправки к проводимости. В Разделах 1.2, 1.2.3 и 1.3 мы анализируем статическую проводимость в диффузионном и баллистическом режимах соответственно. Кроссовер от диффузионного к баллистическому режиму в окрестности перехода изучается в Разделе 1.4. В Разделе 1.5 подводятся итоги проделанной работе и обсуждаются результаты в контексте предыдущих подходов. Многочисленные технические детали представлены в Приложении А.

На Рис. 1.1 изображена диаграмма для флуктуационной проводимости в переменных $\epsilon = \ln T/T_c$ и $T_c\tau$, которую можно рассматривать как путевоитель по результатам в различных асимптотических областях. Диаграмма показывает ведущие вклады вместе со ссылками на соответствующие формулы. Области (a)–(d) обозначают четыре асимптотических случая: близко к T_c /далеко от T_c и диффузионный/баллистический предел. Поведение АМТ вклада вблизи T_c различается в умеренно чистой (c') и сверхчистой (c'') областях, разделенных линией $T_c\tau\sqrt{\epsilon} \sim 1$.

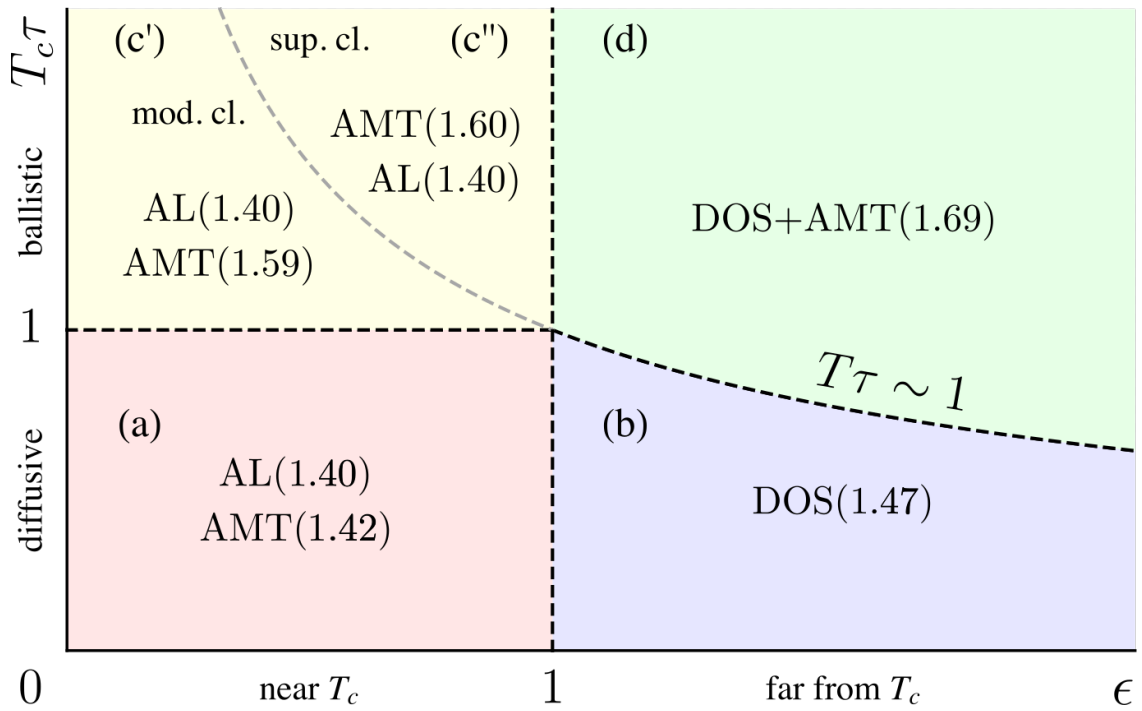


Рисунок 1.1 — Примерная фазовая диаграмма в переменных $\epsilon = \ln T/T_c$ и $T_c\tau$ для флуктуационной проводимости. В разных асимптотических областях указаны ссылки на ведущие вклады в проводимость. Области (a)–(d) обозначают четыре асимптотических случая: близкие к T_c /далекие от T_c и диффузионные/баллистические пределы.

1.1 Общее выражение для поправки к проводимости

1.1.1 Модель

Мы рассматриваем неупорядоченный s -волновой сверхпроводник в модели БКШ, описываемый вторично-квантованным гамильтонианом

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{\dagger} \hat{H}_0 \psi_{\alpha} - \frac{\lambda}{\nu} \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \right], \quad (1.1)$$

где $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ — фермионное поле, $\alpha = \uparrow, \downarrow$ — спиновые степени свободы, $\lambda \ll 1$ — безразмерная константа взаимодействия, а ν — плотность состояний на энергии Ферми (на одну проекцию спина).

Одночастичный гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H}_0 = -\frac{(\nabla - i\mathbf{a})^2}{2m} - \mu + U(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

где μ — химический потенциал. Мы будем рассматривать систему при нулевом магнитном поле, а векторный потенциал \mathbf{a} будет играть роль источника для вычисления тока и впоследствии будет положен в ноль. Предполагается, что потенциал беспорядка $U(\mathbf{r})$ является гауссовым белым шумом, заданным корреляционной функцией

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi\nu\tau}, \quad (1.3)$$

где τ — время свободного пробега.

Мы предполагаем, что беспорядок является слабым и квазиклассический параметр $\mu\tau \gg 1$. Это неравенство позволяет для усреднения по беспорядку применить обычную крестовую диаграммную технику. Мы также предполагаем, что система далека от перехода металл-изолятор, так что поправками слабой локализации и возникающими за счет электрон-электронного взаимодействия [52] можно пренебречь.

1.1.2 Техника Келдыша

Для вычисления проводимости σ мы будем использовать метод Келдыша для сверхпроводящих систем [53–55]. Проинтегрировав по фермионным степеням свободы, мы получим теорию, сформулированную в терминах классической, Δ_{cl} , и квантовой, Δ_{q} , компонент параметра порядка и определяемых статистической суммой

$$Z[\mathbf{a}] = \int \mathcal{D}[\Delta] e^{iS[\Delta, \mathbf{a}]}, \quad (1.4)$$

с эффективным действием

$$iS[\Delta, \mathbf{a}] = \text{Tr} \ln \check{\mathcal{G}}^{-1} - \frac{2i\nu}{\lambda} \int d\mathbf{r} dt (\Delta_{\text{cl}}^* \Delta_{\text{q}} + \Delta_{\text{q}}^* \Delta_{\text{cl}}). \quad (1.5)$$

Здесь Tr — полный операторный след, а оператор $\check{\mathcal{G}}^{-1}$ действует в пространствах Намбу и Келдыша. Его структура в пространстве Намбу имеет следующий вид:

$$\check{\mathcal{G}}^{-1} = \begin{pmatrix} i\partial_t - \check{H}_0 & \check{\Delta} \\ -\check{\Delta}^* & -i\partial_t - \check{H}_0^* \end{pmatrix}_{\text{N}}. \quad (1.6)$$

Оператор \check{H}_0 получается из Ур. (1.2), заменой \mathbf{a} на $\check{\mathbf{a}}$, при этом в Келдышевом пространстве матрицы $\check{\Delta}$ и $\check{\mathbf{a}}$ даются выражениями:

$$\check{\Delta} = \Delta_{\text{cl}} \sigma_0 + \Delta_{\text{q}} \sigma_1, \quad \check{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_{\text{cl}} \sigma_0 + \mathbf{a}_{\text{q}} \sigma_1, \quad (1.7)$$

где σ_i обозначают матрицы Паули в пространстве Келдыша.

В нормальном состоянии ($\Delta = 0$) функция Грина является диагональной в пространстве Намбу, причем «частичная» (G) и «дырочная» (\tilde{G}) компоненты связаны заменой знака энергии. В энергетическом представлении:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} G_E & 0 \\ 0 & \tilde{G}_E \end{pmatrix}_{\text{N}}, \quad \tilde{G}_E^{R(A)} = -G_{-E}^{A(R)}. \quad (1.8)$$

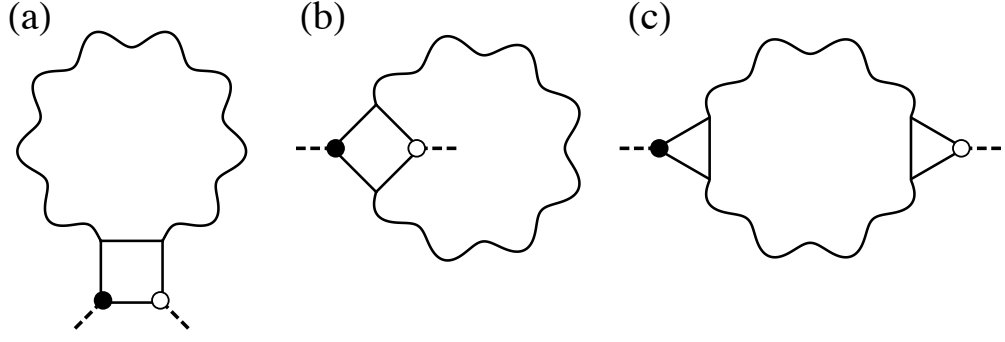


Рисунок 1.2 — Затравочные диаграммы, определяющие флуктуационную поправку к проводимости: (а) вклад от перенормировки плотности состояний (DOS), (б) вклад Маки-Томпсона (MT), (в) вклад Асламазова-Ларкина (AL).

Волнистая линия — флуктуационный пропагатор, сплошная линия — электронная функция Грина. Сплошные (открытые) точки обозначают квантовые (классические) токовые вершины. Данные диаграммы должны быть усреднены по беспорядку.

В равновесии при температуре T структура G_E в пространстве Келдыша выглядит следующим образом:

$$G_E = \begin{pmatrix} G_E^R & G_E^K \\ 0 & G_E^A \end{pmatrix}_K, \quad G_E^K = F_E(G_E^R - G_E^A), \quad \tilde{G}_E^K = -G_{-E}^K. \quad (1.9)$$

где $F_E = \tanh(E/2T)$ — равновесная фермионная функция распределения.

Гауссовы флуктуации поля параметра порядка Δ , определяемые действием (1.5), описывается флуктуационным пропагатором

$$L_{ij}(\omega, q) = 2i\nu \langle \Delta_i(\omega, q) \Delta_j^*(-\omega, -q) \rangle. \quad (1.10)$$

Он имеет стандартную структуру бозонного пропагатора в пространстве Келдыша:

$$L(\omega, q) = \begin{pmatrix} L_\omega^K & L_\omega^R \\ L_\omega^A & 0 \end{pmatrix}_K, \quad L_\omega^K = B_\omega(L_\omega^R - L_\omega^A), \quad (1.11)$$

где $B(\omega) = \coth(\omega/2T)$ — равновесная бозонная функция распределения, и $L_\omega^A = (L_\omega^R)^*$.

1.1.3 Поправка к проводимости

В технике Келдыша тензор проводимости в режиме линейного октлика вычисляется путем взятия второй производной по источнику \mathbf{a} :

$$\delta\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{Q_{\alpha\beta}(\omega)}{\omega}, \quad Q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \frac{\delta^2 Z[\mathbf{a}]}{\delta a_q^\alpha \delta a_{cl}^\beta} \Big|_{\mathbf{a}=0}. \quad (1.12)$$

Флуктуационная поправка к проводимости в однопетлевом (по флуктуационному пропагатору) приближении дается тремя стандартными скелетными диаграммами, показанными на Рис. 1.2: (a) DOS, (b) MT и (c) AL [15]. Ядро $Q(\omega)$ дается суммой трех соответствующих вкладов:

$$Q(\omega) = Q^{\text{DOS}}(\omega) + Q^{\text{MT}}(\omega) + Q^{\text{AL}}(\omega). \quad (1.13)$$

Наиболее технической сложной частью вычислений является процедура усреднения скелетных диаграмм по беспорядку, которая обсуждается в Приложениях A.1 и A.2. Общее выражение для $\delta\sigma$ будет представлено в Разделе 1.1.5, а мы тем времен опишем необходимые элементы диаграммной техники.

1.1.4 Ингредиенты диаграммной техники

Общее выражение для флуктуационной поправки включает в себя два основных компонента: флуктуационный пропагатор $L^R(\omega, q)$, а также функции $f_m(\omega, q)$ и $g_m(\omega, q)$, возникающие при усреднении по беспорядку блоков функций Грина на Рис. 1.2.

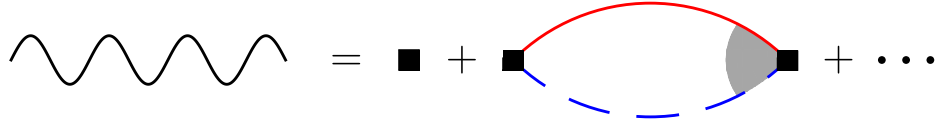


Рисунок 1.3 — Уравнение для усредненного по беспорядку флуктуационного пропагатора. Сплошная (красная) линия — запаздывающая, а пунктирная (синяя) линия — опережающая функция Грина. Черный квадрат обозначает вершину электрон-электронного взаимодействия, а серый сектор обозначает вершину, перенормированную беспорядком, показанную на Рис. 1.4.

Флуктуационный пропагатор

Флуктуационный пропагатор определяется как сумма диаграмм, показанных на Рис. 1.3, которая также должна быть усреднена по беспорядку. В первом приближении усреднение должно выполняться в каждом пузырьке независимо. Результат выражается через перенормированную вершину (см. Рис. 1.4):

$$\gamma^R(\omega, q) = \frac{1}{1 - f_1^R(\omega, q)}, \quad (1.14)$$

где $f_1(\omega, q) = \int G_{E+\omega}^R(p+q)G_E^A(p)(dp)/2\pi\nu\tau$ — одна ступень куперонной лестницы. В длинноволновом пределе $q \ll p_F$ она дается выражением

$$f_1^R(\omega, q) = \left\langle \frac{1}{1 - i\omega\tau + iqln_x} \right\rangle_{\mathbf{n}}, \quad (1.15)$$

где усреднение проводится по единичному d -мерному вектору \mathbf{n} , $l = v_F\tau$ — длина свободного пробега, а v_F — скорость Ферми. Явный вид f_1 зависит от размерности пространства. В 2D и 3D случаях он задается следующим выражением:

$$f_1^R(\omega, q) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1 - i\omega\tau)^2 + q^2l^2}}, & 2D; \\ \frac{\arctan[ql/(1 - i\omega\tau)]}{ql}, & 3D. \end{cases} \quad (1.16)$$

В дальнейшем мы будем работать в 2D случае и использовать соответствующее выражение для f_1 .

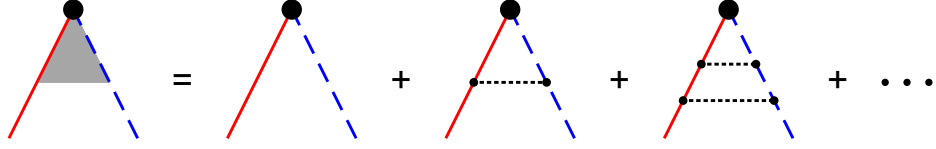


Рисунок 1.4 — Перенормировка вершины γ примесной лестницей. Черные пунктирные линии обозначают коррелятор примесей (1.3).

Запаздывающий флуктуационный пропагатор $L^R(\Omega, q)$ можно записать как сумму по Мацубаровским частотам $\varepsilon_n = 2\pi T(n + 1/2)$ [15]:

$$\frac{1}{L^R(\Omega, q)} = \epsilon + 4\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\varepsilon_n} - \frac{\tau f_1^R(2i\varepsilon_n + \Omega, q)}{1 - f_1^R(2i\varepsilon_n + \Omega, q)} \right], \quad (1.17)$$

где

$$\epsilon = \ln(T/T_c). \quad (1.18)$$

Отметим, что Ур. (1.17) согласуется с определением (1.10) и не содержит дополнительного множителя $-1/\nu$, унаследованного от константы взаимодействия из Ур. (1.1) и обычно включаемого в L [15]. Мы считаем удобным следовать обозначениям, которых L является безразмерным, это упрощает промежуточные выражения.

Общее выражение для флуктуационного пропагатора (1.17) является довольно громоздким. Его можно значительно упростить в двух частично перекрывающихся пределах: (i) в диффузионном режиме при произвольных температурах и (ii) вблизи перехода при произвольной силе беспорядка.

- В диффузном пределе ($ql \ll 1$ и $\Omega\tau \ll 1$), функция f_1 близка к единице, $f_1^R(\omega, q) \approx 1 - i\omega\tau + Dq^2\tau$, и флуктуационный пропагатор имеет простой вид:

$$\frac{1}{L^R(\Omega, q)} = \epsilon + \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{Dq^2 - i\Omega}{4\pi T} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right), \quad (1.19)$$

где $\psi(z)$ — дигамма функция.

- Рядом с переходом ($T \rightarrow T_c$) основной вклад в проводимость приходит с малых импульсов и частот. После соответствующих вычислений флуктуационный пропагатор принимает так называемую локальную форму

при всех значениях $T\tau$ [15]:

$$\frac{1}{L^R(\Omega, q)} = \epsilon + \xi^2(T\tau)q^2 - \frac{i\pi}{8T}\Omega, \quad (1.20)$$

где $\xi(T\tau)$ — зависящая от беспорядка сверхпроводящая длина когерентности. Она интерполирует между грязным, $\xi_d^2 = \pi D/8T$, и чистым, $\xi_c^2 = 7\zeta(3)D/16\pi^2\tau T^2$, пределами в соответствии с общим выражением [11; 56]:

$$\xi^2(T\tau) = D\tau \mathcal{F}(1/2), \quad (1.21)$$

где функция \mathcal{F} выражается через дигамма функцию:

$$\mathcal{F}(z) = \psi(z) + \frac{\psi'(z)}{4\pi T\tau} - \psi\left(z + \frac{1}{4\pi T\tau}\right). \quad (1.22)$$

Отметим, что $\xi(T\tau)$ остается конечной при $T \rightarrow T_c$. Корреляционная длина $\xi(T\tau)/\sqrt{\epsilon}$ [см. Ур. (1.20)], как и положено, корневым образом расходится вблизи перехода.

Усредненные по беспорядку блоки электронных функций Грина

Процедура усреднения по беспорядку блоков электронных функций Грина изложена в Приложении A.2. При вычислении интегралов по сферической поверхности Ферми встречаются следующие выражения:

$$f_m^R(\omega, q) = \left\langle \frac{1}{(1 - i\omega\tau + iqln_x)^m} \right\rangle_{\mathbf{n}}, \quad (1.23a)$$

$$g_m^R(\omega, q) = \left\langle \frac{in_x}{(1 - i\omega\tau + iqln_x)^m} \right\rangle_{\mathbf{n}}. \quad (1.23b)$$

Функции $f_m(\omega, q)$ являются обобщениями функции $f_1(\omega, q)$ из Ур. (1.15). Они появляются в результате усреднения по беспорядку блоков в диаграммах DOS и МТ. Функции $g_m(\omega, q)$, содержащие дополнительный n_x в числителе, происходят от усреднения треугольных блоков с токовой вершиной в диаграмме AL.

Как обычно, $f_m^A(\omega, q) = [f_m^R(\omega, q)]^*$ и $g_m^A(\omega, q) = [g_m^R(\omega, q)]^*$.

1.1.5 Статическая проводимость при произвольном беспорядке

В пределе нулевой частоты общее выражение для поправки к проводимости удобно представить в виде суммы вкладов с одним и двумя флуктуационными пропагаторами:

$$\delta\sigma = \delta\sigma^{(1)} + \delta\sigma^{(2)}. \quad (1.24)$$

Член с одним пропагатором, $\delta\sigma^{(1)}$, учитывает диаграммы DOS и МТ, а также содержит часть диаграммы AL (AL1), естественно преобразованную в один L путем интегрирования по частям, как описано в Приложении A.3. Оставшаяся часть поправки AL (AL2) содержит два пропагатора и учитывается в $\delta\sigma^{(2)}$.

Выражение для $\delta\sigma^{(1)}$ может быть представлено в удобном виде:

$$\delta\sigma^{(1)} = 2\pi D\tau^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left\{ B_\Omega \text{Im} [L^R(\Omega, q)\Sigma^R(\Omega, q)] + B'_\Omega \text{Im} [L^R(\Omega, q)] \Sigma^Z(\Omega, q) \right\}, \quad (1.25)$$

где $\Sigma^{R,Z}(\Omega, q)$ обозначают усредненные по беспорядку блоки электронных функций Грина. Квадратный блок диаграммы DOS на Рис. 1.2(a) дает Σ_{DOS} (без дополнительного куперона; в диффузионном пределе эквивалентен диаграммам 5–8 из [15]) и $\Sigma_{\text{DOS}(C)}$ (с дополнительным купероном; в диффузионном пределе эквивалентен диаграммам 9–10 из [15]). Квадратный блок диаграммы МТ на Рис. 1.2(b) дает регулярный вклад Σ_{RMT} [без дополнительного куперона, см. диаграммы (a)–(e), (g), (h) на Рис. A.1; в диффузионном пределе он содержится в диаграмме 2 из [15]], аномальный вклад Σ_{AMT} [диаграмма (f) на Рис. A.1; в диффузионном пределе он так же содержится в диаграмме 2 из [15]], и $\Sigma_{\text{MT}(C)}$ [с дополнительным купероном, см. диаграммы (b')–(h') на Рис. A.1; в диффузионном пределе он эквивалентен диаграммам 3, 4 из [15]].

В явном виде функции $\Sigma^{R,Z}(\Omega, q)$ задаются следующими выражениями:

$$\Sigma_{\text{DOS+RMT}}^R(\Omega, q) = \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [f_1^A - f_1^A(\gamma^A)^2 - 2f_2^A\gamma^A - 3f_3^A(\gamma^A)^2], \quad (1.26a)$$

$$\Sigma_{\text{DOS+RMT}}^Z(\Omega, q) = 2 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E [f_1^A + f_1^A(\gamma^A)^2 - 2f_2^A\gamma^A + f_3^A(\gamma^A)^2], \quad (1.26b)$$

$$\Sigma_{\text{MT(C)}}^R(\Omega, q) = 2 \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [f_1^A g_1^A g_2^A (\gamma^A)^2 + f_1^A (g_2^A)^2 (\gamma^A)^3], \quad (1.26c)$$

$$\Sigma_{\text{MT(C)}}^Z(\Omega, q) = 4 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E f_1^A g_1^A g_2^A (\gamma^A)^2, \quad (1.26d)$$

$$\Sigma_{\text{DOS(C)}}^R(\Omega, q) = \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [f_1^A (g_2^A)^2 (\gamma^A)^3 - f_1^A (g_1^A)^2 \gamma^A], \quad (1.26e)$$

$$\Sigma_{\text{DOS(C)}}^Z(\Omega, q) = -2 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E [f_1^A (g_2^A)^2 (\gamma^A)^3 + f_1^A (g_1^A)^2 \gamma^A], \quad (1.26f)$$

$$\Sigma_{\text{AMT}}^Z(\Omega, q) = -4 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E f_1^A \gamma^R \gamma^A, \quad (1.26g)$$

$$\Sigma_{\text{AL1}}^R(\Omega, q) = \frac{2}{l} \frac{1}{q^{d-1}} \partial_q \left\{ q^{d-1} \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [g_2^A (\gamma^A)^2 + 2g_1^A \gamma^A] \right\}, \quad (1.26h)$$

где аргументы функций f_m , g_m и γ такие же как и в $f_m(2E - \Omega, q)$, а $\partial_q = \partial/\partial|q|$ это производная по абсолютному значению импульса. Блоки, отсутствующие в списке (1.26), оказываются нулевыми: $\Sigma_{\text{AMT}}^R = \Sigma_{\text{AL1}}^Z = 0$.

Для регуляризации инфракрасно расходящейся аномальной поправки АМТ в размерностях $d \leq 2$ следует учитывать конечное время сбоя фазы τ_ϕ [12; 13]. Мы пренебрегаем дефазировкой за счет рассеяния на сверхпроводящих флуктуациях [57; 58], которая характеризуется зависимостью τ_ϕ от энергии [59], и считаем, что τ_ϕ является не зависящей от энергии константой, как, например, имеет место в стандартном сценарии дефазировки кулоновским взаимодействием [14].

Примечательно, что вклад с двумя пропагаторами, $\delta\sigma^{(2)} = \delta\sigma^{\text{AL2}}$, может быть выражен исключительно в терминах L и его производных [которые генерируют соответствующие блоки, согласно Ур. (A.11)]:

$$\begin{aligned} \delta\sigma^{(2)} &= \frac{1}{2d} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} B'(\Omega) \\ &\times \left[2 (L^R \partial_q [L^R]^{-1} - L^A \partial_q [L^A]^{-1})^2 - L^R L^A (\partial_q [L^R]^{-1} - \partial_q [L^A]^{-1})^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Уравнения (1.24)–(1.27) описывают статическую флуктуационную проводимость в единицах e^2/\hbar при произвольной температуре $T > T_c$, времени рассеяния электронов на беспорядке τ и размерности пространства d . Дальнейший анализ будет проведен в 2D геометрии.

1.2 Поправка к проводимости в диффузном режиме

В этом разделе мы проанализируем флуктуационную поправку при произвольных температурах в диффузионном режиме $T\tau \ll 1$ [области (а) и (б) на Рис. 1.1]. Эта область отвечает соотношению $l \ll \xi_c$; в грязном пределе длина когерентности задается выражением $\xi_d = \sqrt{\pi D/8T} \sim \sqrt{\xi_c l}$, см. Ур. (1.21). В диффузионном режиме, $f_m \approx 1$, $g_m \approx mql/d$, и общее выражение для куперона принимает стандартный вид:

$$\gamma^{R(A)}(\omega, q) = \frac{1}{\tau(Dq^2 \mp i\omega)}. \quad (1.28)$$

Интегралы по E в Ур. (1.26) за исключением $\Sigma_{\text{АМТ}}^Z$ могут быть вычислены через полюса F_E , так как контур интегрирования в комплексной плоскости E может быть деформирован, чтобы избежать особенностей в функциях f и γ . Полученное выражение затем выражается через дигамма функцию. С другой стороны, вклад АМТ (1.26g) содержит часть, определяемую полюсами $\gamma^R \gamma^A$.

1.2.1 Общее выражение в 2D

В двумерном случае поправку к проводимости удобно записать в виде

$$\delta\sigma = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy \varsigma(x, y), \quad (1.29)$$

где безразмерные переменные x и y связаны с импульсом и частотой флуктуационного пропагатора согласно

$$x = \frac{Dq^2}{4\pi T}, \quad y = \frac{\Omega}{4\pi T}. \quad (1.30)$$

Следуя [26], мы выразим результаты в терминах функции $G(z)$ от комплексной переменной $z = x + iy$:

$$G(z) = \frac{1}{L^A(\Omega, q)} = \epsilon + \psi\left(\frac{1}{2} + z\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right), \quad (1.31)$$

которая определяет как пропагатор, так и сами блоки Σ в уравнениях (1.26). Вклад различных процессов в $\zeta(x, y)$ приведен ниже:

$$\zeta^{\text{DOS+RMT}} = -4b \operatorname{Im} \frac{G''}{G} - 2b' \frac{\operatorname{Im} G \operatorname{Im} G'}{|G|^2}, \quad (1.32)$$

$$\zeta^{\text{DOS(C)+MT(C)}} = -3bx \operatorname{Im} \frac{G'''}{G} - b'x \frac{\operatorname{Im} G \operatorname{Im} G''}{|G|^2}, \quad (1.33)$$

$$\zeta^{\text{AL1}} = 4b \operatorname{Im} \frac{G'' + xG'''}{G}, \quad (1.34)$$

$$\zeta^{\text{AMT}} = -\frac{2b'}{x + x_*} \frac{\operatorname{Im}^2 G}{|G|^2}, \quad (1.35)$$

$$\zeta^{\text{AL2}} = 2b'x \left(\frac{\operatorname{Im}^2 G'}{|G|^2} - 2 \operatorname{Im}^2 \frac{G'}{G} \right), \quad (1.36)$$

где $G = G(z)$, $b = b(y) = \coth 2\pi y$, а $x_* = (4\pi T \tau_\phi)^{-1}$ — безразмерная скорость дефазировки, а штрихи означают производные по аргументу функции.

Мы видим, что математическая структура выражений для вкладов DOS, RMT, DOS(C), MT(C) и AL1 аналогична. Поэтому мы считаем естественным объединить их в одно выражение:

$$\zeta^{\text{REG}} = \zeta^{\text{DOS+RMT}} + \zeta^{\text{DOS(C)+MT(C)}} + \zeta^{\text{AL1}}, \quad (1.37)$$

которое после частичных сокращений приобретает довольно простую форму:

$$\zeta^{\text{REG}} = bx \operatorname{Im} \frac{G'''}{G} - b' \frac{\operatorname{Im} G \operatorname{Im}(2G' + xG'')}{|G|^2}. \quad (1.38)$$

В результате, общая поправка может быть записана в виде (1.29) с

$$\zeta = \zeta^{\text{REG}} + \zeta^{\text{AL2}} + \zeta^{\text{AMT}}, \quad (1.39)$$

где ζ^{REG} , ζ^{AL2} , и ζ^{AMT} даются выражениями из Ур. (1.38), (1.36) и (1.35), соответственно.

1.2.2 Сравнение с предыдущими результатами

Наше выражение для флуктуационной поправки в двумерном диффузионном случае [уравнения (1.29), (1.35), (1.36), (1.38) и (1.39)] в точности совпадает с результатом для нулевого магнитного поля, полученным Тихоновым *и др.* в рамках другого подхода [25]. В работе [25] общая поправка представляется в виде суммы трех членов, $\delta\sigma^{(\text{dos})} + \delta\sigma^{(\text{sc})} + \delta\sigma^{(\text{an})}$. Прямое сравнение показывает, что их $\delta\sigma^{(\text{an})}$ эквивалентен нашему $\delta\sigma^{\text{AMT}}$. Два других слагаемых, $\delta\sigma^{(\text{dos})}$ и $\delta\sigma^{(\text{sc})}$, представлены в Ур. (A.13) и (A.14), соответственно. Хотя эти слагаемые по отдельности не равны нашим $\delta\sigma^{\text{REG}}$ и $\delta\sigma^{\text{AL2}}$, в Приложении A.4 показано, что их суммы совпадают: $\delta\sigma^{(\text{dos})} + \delta\sigma^{(\text{sc})} = \delta\sigma^{\text{REG}} + \delta\sigma^{\text{AL2}}$. Таким образом, мы установили полную эквивалентность между стандартным диаграммным методом (в формализме Келдыша) и методом, основанным на уравнении Узаделя в поле флуктуирующего параметра порядка (также в формализме Келдыша), использованном в работе [25].

На языке σ -модели в представлении Келдыша флуктуационная проводимость изучалась Петкович и Винокуром [26], где полная поправка была записана в другом виде: $\delta\sigma_{\text{DOS}} + \delta\sigma_{\text{AL}} + \delta\sigma_{\text{MT}}$. Их поправка МТ, $\delta\sigma_{\text{MT}}$, совпадает с $\delta\sigma^{(\text{an})}$ из [25] и с нашей $\delta\sigma^{\text{AMT}}$. Однако выражения для $\delta\sigma_{\text{DOS}} + \delta\sigma_{\text{AL}}$ в [26] слишком громоздки, и мы не сравнивали их с нашими $\delta\sigma^{\text{REG}} + \delta\sigma^{\text{AL2}}$. Тем не менее, наше асимптотическое разложение поправки в области $\gamma \ll \epsilon \ll 1$ [см. Ур. (1.44) ниже] полностью согласуется с их результатом, что является сильным аргументом в пользу полной эквивалентности между нашей теорией и теорией [26].

Наконец, упомянем работу Глатца *и др.* [24], где исследовалась флуктуационная поправка при произвольных температурах и магнитных полях в рамках

стандартной Мацубаровской диаграммной техники. Поскольку мы полностью совпадаем с результатами [25] в режиме нулевого поля, то мы, таким образом, не можем воспроизвести результаты [24] (результаты работ [24; 25] известны своим несоответствием).

1.2.3 В окрестности перехода, $T \rightarrow T_c$

В окрестности T_c [область (а) на Рис. 1.1] общее выражение для $\delta\sigma^{\text{REG}}$, $\delta\sigma^{\text{AL2}}$, и $\delta\sigma^{\text{AMT}}$ можно упростить. В то время как ведущие вклады AL и AMT правильно описаны в книге [15], поведение сублидирующих по ϵ и $\gamma = (\pi/8)(T\tau_\phi)^{-1}$ членов до сих пор является предметом споров [25; 26]. Сохраняя члены, которые являются сингулярными в пределе $\epsilon, \gamma \rightarrow 0$, с точностью до $\mathcal{O}(1)$ мы можем записать:

$$\delta\sigma^{\text{AL2}} = \frac{1}{16\epsilon} + \dots, \quad (1.40)$$

$$\delta\sigma^{\text{REG}} = -\frac{7\zeta(3)}{\pi^4} \ln \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (1.41)$$

$$\delta\sigma^{\text{AMT}} = \frac{1}{8} \frac{\ln(\epsilon/\gamma)}{\epsilon - \gamma} + h\left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right) - \left[\frac{7\zeta(3)}{\pi^4} + \kappa\right] \ln \frac{1}{\gamma} + \dots, \quad (1.42)$$

где численная константа $\kappa = 0.1120$, а функция $h(x)$ дается выражением

$$h(x) = \frac{7\zeta(3) \ln(1/x) - 1 + x}{2\pi^4 (1-x)^2}. \quad (1.43)$$

Коэффициент перед $\ln(1/\gamma)$ в поправке AMT (1.42) содержит два члена разного происхождения, описанных в Приложении A.5. Член пропорциональный $\zeta(3)$, происходит от области малых y [см. Ур. (1.30)] которые соответствуют частотам $\Omega \sim T - T_c$, где функция $G(z)$ в Ур. (1.35) может быть разложена в ряд по малому z . Напротив, член с κ определяется интегралом (A.23), где $y \sim 1$ (соответствует $\Omega \sim T_c$), при которых дигамма функцию нельзя разложить в ряд. Важность вклада от этой области была отмечена в работе [26],

где параметр κ (записанный в виде $7\zeta(3)(c-1)/\pi^4$) был оценен численно с 4% точностью.

В области слабой дефазировки, $\gamma \ll \epsilon \ll 1$, мы можем записать полную поправку в виде

$$\delta\sigma = \frac{1 + 2\ln(\epsilon/\gamma)}{16\epsilon} - \frac{21\zeta(3)}{2\pi^4} \ln \frac{1}{\epsilon} - \left[\frac{7\zeta(3)}{2\pi^4} + \kappa \right] \ln \frac{1}{\gamma} + \dots \quad (1.44)$$

Здесь первый член является суммой стандартных поправок AL и AMT в ведущих порядках, а коэффициент $c = -21/2$ перед сублидирующим членом $\zeta(3) \ln(1/\epsilon)/\pi^4$ состоит из суммы вкладов:

$$c^{\text{REG}} = -7, \quad c^{\text{AL}2} = 0, \quad c^{\text{AMT}} = -7/2. \quad (1.45)$$

Уравнение (1.44) точно совпадает с выражением, полученным в работе [26], где коэффициент $c = -21/2$ получается как сумма $c_{\text{DOS}} = -21$, $c_{\text{AL}} = 14$ и $c_{\text{MT}} = -7/2$. Коэффициенты $c^{(\text{dos})} = -7$ и $c^{(\text{sc})} = 0$, найденные в работе [25] совпадают с нашими $c^{\text{REG}} = -7$ и $c^{\text{AL}2} = 0$ соответственно, тогда как их $c^{(\text{an})}$ содержит ошибку, исправленную в [26].

В этом разделе мы представили наши результаты в терминах $\delta\sigma^{\text{REG}}$, $\delta\sigma^{\text{AL}2}$ и $\delta\sigma^{\text{AMT}}$, благодаря их компактной аналитической форме. Легко можно показать, что в терминах исходных диаграмм коэффициенты перед логарифмическими членами имеют вид:

$$c^{\text{DOS}} = -14, \quad c^{\text{AL}} = 14, \quad c^{\text{MT}} = -7 - 7/2 \quad (1.46)$$

(где $c^{\text{RMT}} = -7$ и $c^{\text{AMT}} = -7/2$). В стандартной Мацубаровской диаграммной технике [15] вклад диаграммы MT часто представляется как сумма регулярных и аномальных членов, $\delta\sigma^{\text{MT,reg}}$ и $\delta\sigma^{\text{MT,an}}$. Такое разбиение является чисто техническим, естественно возникающим в процессе аналитического продолжения. Это разбиение похоже, но все же отличается от нашего разбиения MT вклада на вклады RMT и AMT, что также является вопросом технического удобства. В непосредственной близости от перехода, $\delta\sigma^{\text{MT,reg}}$ растет логарифмически с $c^{\text{MT,reg}} = -14$, что приводит к известному удвоению DOS поправки [15]. Заметим, однако, что точное извлечение сублидирующего логарифмического члена

из аномальной части вклада МТ должно дать $c^{\text{MT, an}} = 7/2$, восстанавливая правильный общий коэффициент $c^{\text{MT}} = -21/2$.

1.2.4 Вдали от перехода, $T \gg T_c$

При высоких температурах, $\epsilon = \ln(T/T_c) \gg 1$ [область (b) на Рис. 1.1], основной температурно-зависящий вклад в проводимость определяется выражением $\delta\sigma^{\text{REG}}$, приходящим с больших импульсов и частот ($x, y \sim e^\epsilon \gg 1$). Формально поправка расходится на больших импульсах, $x \gg e^\epsilon$, и обычно обрезается на верхнем пределе диффузионной области $x \sim 1/(T\tau)$, это приводит к известному результату [17]:

$$\delta\sigma^{\text{REG}} = -\frac{1}{2\pi^2} \ln \frac{\ln 1/T_c\tau}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^{-1}). \quad (1.47)$$

В баллистической области, как мы увидим в Разделе 1.3.1, ультрафиолетовая расходимость становится еще сильнее, что приводит к большому, но не зависящему от температуры и поэтому неизмеримому вкладу.

Функции ς^{AMT} и ς^{AL2} пропорциональны b' , поэтому соответствующие поправки к проводимости определяются областью $x \sim 1$ и $y \sim 1$. Следовательно, они дополнительно подавляются по параметру $1/\epsilon$ по сравнению с $\delta\sigma^{\text{REG}}$:

$$\delta\sigma^{\text{AMT}} = \frac{1}{12} \frac{\ln 1/\gamma}{\epsilon^2} + \mathcal{O}(\epsilon^{-3}), \quad (1.48)$$

$$\delta\sigma^{\text{AL2}} = \frac{\varkappa}{\epsilon^2} + \mathcal{O}(\epsilon^{-3}), \quad (1.49)$$

где большой коэффициент $\ln 1/\gamma$ в поправке АМТ обусловлен сингулярностью на малых импульсах, а численная константа $\varkappa = 0.0150$ определяется интегралом

$$\varkappa = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy \frac{x \operatorname{Im}^2 \psi'(1/2 + x + iy)}{\pi \sinh^2 2\pi y}. \quad (1.50)$$

Для сравнения с предыдущими диаграммными подходами полезно посмотреть на полный вклад диаграммы АЛ, $\delta\sigma^{\text{AL}} = \delta\sigma^{\text{AL1}} + \delta\sigma^{\text{AL2}}$. В нашем представлении член $\delta\sigma^{\text{AL1}}$, включенный в $\delta\sigma^{\text{REG}}$, оказывается намного больше, чем $\delta\sigma^{\text{AL2}}$,

и таким образом определяет ведущую асимптотику поправки AL:

$$\delta\sigma^{\text{AL}} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\ln 1/T_c\tau} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{-2}). \quad (1.51)$$

Флуктуационная проводимость при $T > T_c$ впервые была рассмотрена в работе [17]. Мы воспроизводим их результат для ведущих поправок типа DOS (1.47) и вклада AL (1.51). В то же время мы не можем воспроизвести частичный вклад отдельных диаграмм в [17]. Расхождение проявляется, например, в вкладах диаграмм DOS и МТ, пересеченных дополнительными куперонами: Вместо полученного у них соотношения $2\delta\sigma^{\text{DOS}(C)} = -\delta\sigma^{\text{MT}(C)}$ мы получаем $2\delta\sigma^{\text{DOS}(C)} = \delta\sigma^{\text{MT}(C)}$. Также наша поправка АМТ (1.48) в $\pi^2/2$ раз меньше, чем полученная в [17]. Отметим в заключение, что наши асимптотические выражения полностью согласуются с результатом работы [25].

1.3 Поправка к проводимости в баллистическом режиме

1.3.1 Предварительный обзор

Рассмотрим теперь флуктуационную поправку в баллистическом режиме, $T\tau \gg 1$, что в терминах масштабов означает $l \gg \xi_c$ [области (c) и (d) на Рис. 1.1]. В этом случае удобно использовать определенные отлично от Ур. (1.30) безразмерные импульс x и частоту y :

$$x = \frac{qv}{4\pi T}, \quad y = \frac{\Omega}{4\pi T}. \quad (1.52)$$

В двумерном случае, рассматриваемом далее, общее выражение (1.25) для вклада с одним пропагатором может быть записано в виде

$$\delta\sigma^{(1)} = 16\pi^2 T^3 \tau^3 \int_0^\infty x dx \int_{-\infty}^\infty dy \left\{ b(y) \text{Im}(L^R \Sigma^R) + \frac{b'(y)}{4\pi T} \text{Im}(L^R) \Sigma^Z \right\}, \quad (1.53)$$

где $b(y) = \coth 2\pi y$, как и в Разделе 1.2.1.

Проанализируем поведение $\delta\sigma^{(1)}$ в пределе $\tau \rightarrow \infty$. Блоки f_n и g_n определенные в Ур. (1.23) масштабируются с τ как $\mathcal{O}(1/\tau^n)$. Поэтому наиболее сингулярные вклады среди уравнений (1.26) это $\Sigma_{\text{DOS+RMT}}^Z$ и Σ_{AMT}^Z , в которых нужно заменить $\gamma \rightarrow 1$ и оставить только множители f_1 . Оба слагаемые ведут себя как $\mathcal{O}(1/\tau)$, но противоположны по знаку и точно сокращают друг друга. Сохраняя следующие за ведущими — сублидирующие — члены $\mathcal{O}(1/\tau^2)$, мы получаем

$$\Sigma^R = 2 \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [f_2^A - (f_1^A)^2] + \mathcal{O}(1/\tau^3), \quad (1.54)$$

$$\Sigma^Z = -4 \text{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E [f_2^A + f_1^R f_1^A] + \mathcal{O}(1/\tau^3), \quad (1.55)$$

где мы использовали тождество $\frac{1}{l} \frac{1}{q^{d-1}} \frac{\partial}{\partial q} q^{d-1} g_1 = f_2$ (работающее во всех пространственных размерностях d) в преобразовании вклада от Σ_{AL1}^R .

Вклад AL2 с двумя пропагаторами (1.27) и опущенные члены вклада МТ меньше по параметру $T\tau$, но имеют более сильную расходимость при $T \rightarrow T_c$ (см. ниже).

Аналитическая структура подынтегральных выражений в Σ^R и Σ^Z [Ур. (1.26)] определяется (i) полюсами функции распределения F_E и (ii) особенностями $f_1^A \gamma^R \gamma^A$ в члене АМТ Σ_{AMT}^Z . Действительно, сингулярности, обусловленные $f_1^{R,A}$ и $\gamma^{R,A}$ во всех членах, кроме поправки АМТ, расположены либо выше, либо ниже действительной оси и поэтому могут быть устранены правильной деформацией контура интегрирования. Соответствующий интеграл по E затем определяется только полюсами F_E .

Иначе обстоит дело с членом АМТ (1.26g), который содержит произведение $f_1^A \gamma^R \gamma^A$, имеющее особенности как выше, так и ниже действительной оси: разрезы $f_1^{R,A}$ и полюса $\gamma^{R,A}$, см. Рис. 1.5. Полюса куперонов $\gamma^{R,A}$ оказываются существенными только для малых импульсов, $ql \ll 1$. Вклад этой области меньше по параметру $1/T\tau$, чем вклад области $ql \gg 1$ [приходящий от члена $f_1^R f_1^A$ в Ур. (1.55)], но более сингулярен при $\epsilon \rightarrow 0$. Он будет проанализирован в Разделе 1.3.2.

Поскольку в баллистическом пределе полюса F_E расположены гораздо дальше от действительной оси, чем другие особенности в Σ_{AMT}^Z , естественно разделить член АМТ на вклад от полюсов функции распределения, $\Sigma_{\text{tanh}}^{Z,\text{AMT}}$, и особенностей $f_1^A \gamma^R \gamma^A$, Σ_{sing}^Z . Следовательно, у нас есть три вклада: Σ^R , Σ_{tanh}^Z

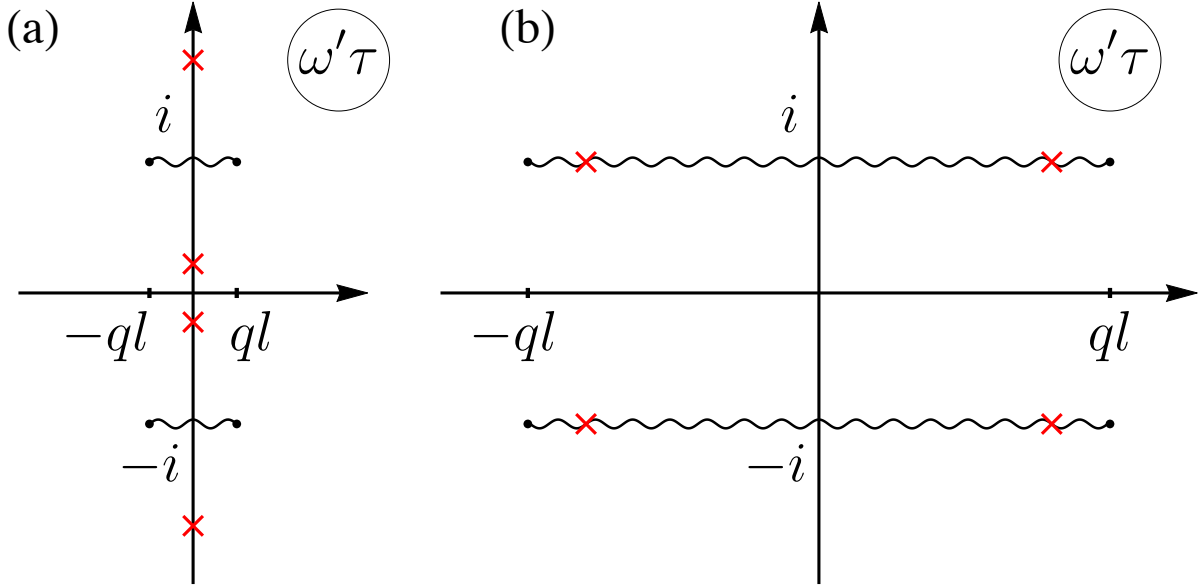


Рисунок 1.5 — Особенности члена $f_1^A(\omega', q)\gamma^R(\omega', q)\gamma^A(\omega', q)$ в подынтегральном выражении (1.26g) в комплексной плоскости частоты $\omega' = 2E - \omega$: разрезы функций $f_1^{R,A}$ показаны волнистыми линиями, а полюса $\gamma^{R,A}$ — красными крестами. Рисунки (a) и (b) соответствуют диффузному ($ql \ll 1$) и баллистическому ($ql \gg 1$) пределам, соответственно.

(который включает в себя $\Sigma_{\tanh}^{Z,AMT}$ и все остальные Σ^Z) и Σ_{sing}^Z . Функции Σ^R [Ур. (A.29)], Σ_{\tanh}^Z [Ур. (A.34)] и Σ_{sign}^Z [Ур. (A.32)] оцениваются в Приложении A.6 в ведущем порядке по τ . Поскольку Σ^R и Σ_{\tanh}^Z пропорциональны $1/\tau^2$, результирующий вклад в $\delta\sigma$ пропорционален τ , аналогично затравочной проводимости Друде. Ниже мы проанализируем флуктуационную поправку вблизи перехода и при высоких температурах.

1.3.2 Окрестность перехода, $T \rightarrow T_c$

Флуктуационный пропагатор в баллистическом пределе дается уравнением (A.24). В окрестности перехода, $T \rightarrow T_c$ [область (с) на Рис. 1.1], сингулярная часть флуктуационной поправки определяется малыми импульсами и частотами, что позволяет использовать разложение для пропагатора по степеням $x, y \ll 1$:

$$\frac{1}{L^A(\Omega, q)} = \epsilon + \frac{7\zeta(3)}{2}x^2 + i\frac{\pi^2}{2}y, \quad (1.56)$$

что является баллистическим пределом общего выражения (1.20).

Начнем анализ с лидирующих по $T\tau \gg 1$ вкладов. Согласно Ур. (1.56), сингулярная часть $\delta\sigma$ приходит от $x \sim \sqrt{\epsilon}$ и $y \sim \epsilon$, соответствующих $q \sim \sqrt{\epsilon}T/v_F$ и $\Omega \sim \epsilon T$. Поэтому в лидирующем по ϵ порядке, блоки $f_n^R(2E - \Omega, q)$ из Ур. (1.54) и (1.55) можно использовать на нулевом импульсе и частоте: $f_n^R(2E - \Omega, q) \approx (1 \mp 2i\tau E)^{-n}$. Это приводит к дополнительному подавлению как Σ^R , так и Σ_{\tanh}^Z , которые теперь ведут себя как $\Sigma^R \sim \Sigma_{\tanh}^Z/\Omega \sim \mathcal{O}(1/\tau^3)$. В результате, соответствующая поправка к проводимости перестает зависеть от τ .

Поучительно проследить за этим сокращением с точки зрения вкладов от конкретных диаграмм:

$$\delta\sigma^{\text{DOS}} = \left[-\frac{2\pi^2}{7\zeta(3)}(T\tau)^2 - \frac{2}{\pi}T\tau + \mathcal{O}(1) \right] \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (1.57a)$$

$$\delta\sigma_{\tanh}^{\text{MT}} = \left[\frac{2\pi^2}{7\zeta(3)}(T\tau)^2 - \frac{2}{\pi}T\tau + \mathcal{O}(1) \right] \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (1.57b)$$

$$\delta\sigma^{\text{AL1}} = \left[\frac{4}{\pi}T\tau + \mathcal{O}(1) \right] \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (1.57c)$$

Здесь сокращение квадратичных членов $(T\tau)^2$ является общей особенностью баллистической поправки, обсуждаемой в Разделе 1.3.1, тогда как сокращение линейных по $T\tau$ членов имеет место только для ведущего вклада $\ln 1/\epsilon$ в окрестности перехода. Оставшийся вклад $\delta\sigma_{\tanh} = \mathcal{O}(1) \ln(1/\epsilon)$ будут обсуждаться в Разделе 1.4.2.

Сокращение линейного по $T\tau$ вклада в Ур. (1.57) заставляет нас проанализировать сингулярную часть вклада АМТ. Функция $\Sigma_{\text{sing}}^Z(\Omega, q)$ ведет себя по-разному на малых и больших импульсах. В диффузионном пределе ($ql \ll 1$) важны только полюса куперонов $\gamma^{R,A}$. В баллистическом пределе ($ql \gg 1$) она задается Ур. (A.32). Объединяя вместе, получим

$$\Sigma_{\text{sing}}^Z(\Omega, q) \approx -\frac{\Omega}{2T\tau^2} \begin{cases} 1/2Dq^2, & ql \ll 1, \\ \ln(qv_F\tau)/\pi qv_F, & ql \gg 1. \end{cases} \quad (1.58)$$

Как уже упоминалось выше, форма пропагатора (1.56) определяет температурную длину когерентности $\xi_c/\sqrt{\epsilon}$ в качестве соответствующего пространственного масштаба. В зависимости от ее отношения к l , следует различать два пре-

дельных режима: *умеренно чистый* случай $\xi_c \ll l \ll \xi_c/\sqrt{\epsilon}$ [область (с')], и *суперчистый* случай $\xi_c/\sqrt{\epsilon} \ll l$ [область (с'')] на Рис. 1.1].

- В *умеренно чистом* случае релевантные импульсы принадлежат диффузионной области, $ql \ll 1$. В этом режиме мы можем просто использовать результат для вклада АМТ для диффузного случая (1.42), с заменой диффузного пропагатора (1.31) баллистическим Ур. (1.56). Таким образом, получаем [60]

$$\delta\sigma_{\text{sing, mod.cl.}}^{\text{AMT}} \approx \frac{1}{8} \frac{1}{\epsilon - \gamma'} \ln \frac{\epsilon}{\gamma'}, \quad (1.59)$$

где $\gamma'^{-1} = [16\pi^2/7\zeta(3)](T\tau)(T\tau_\phi)$. Параметр γ' связан со своим диффузионным аналогом γ согласно $\gamma'/\gamma = (\xi_c/\xi_d)^2$, см. Раздел 1.4.3.

- В *суперчистом* случае, следует учитывать вклады как от диффузионной, так и от баллистической области импульсов. Диффузионный вклад задается уравнением Ур. (1.59), тогда как баллистический вклад вычисляется с использованием Ур. (1.53) и (1.58):

$$\delta\sigma_{\text{sing, sup.cl.}}^{\text{AMT}} \approx \delta\sigma_{\text{sing, mod.cl.}}^{\text{AMT}} + \frac{\pi T\tau}{\sqrt{14\zeta(3)\epsilon}} \ln \frac{l\sqrt{\epsilon}}{\xi_c}. \quad (1.60)$$

Второй член в Ур. (1.60), был получен в работе [19] (с ответом в π раз большим из-за арифметической ошибки). Из-за дополнительного логарифмического фактора оказывается, что вклад АМТ растет быстрее по τ , чем обычная проводимость Друде. На самом деле, Ур. (1.60) работает до тех пор, пока средняя длина свободного пробега l меньше, чем неупругая длина l_{in} . В противоположном случае, $l_{\text{in}} < l$, логарифм следует заменить на $\ln(l_{\text{in}}\sqrt{\epsilon}/\xi_c)$, что восстанавливает правильный скейлинг $\delta\sigma_{\text{sing, sup.cl.}}^{\text{AMT}} \propto \tau$ для очень чистых образцов.

Наконец, имеется еще член AL2 (1.40), ведущий вклад которого нечувствителен к беспорядку вблизи T_c и дается Ур. [11]. Хотя он и остается конечным в пределе $T\tau \rightarrow \infty$, его следует сохранить, поскольку он более сингулярен вблизи перехода и, таким образом, конкурирует с вкладом АМТ.

Таким образом, мы видим, что в баллистическом пределе в окрестности T_c флуктуационная поправка к проводимости определяется вкладом АМТ [Ур.

(1.59) и (1.60)] и вкладом Al2 [Ур. (1.40)]. Первый содержит большой фактор $T\tau$, в то время как последний более сингулярен при $\epsilon \rightarrow 0$.

Наши результаты находятся в противоречии с выводом работы [20], где утверждалась, что в умеренно чистом пределе баллистическая поправка пропорциональна $(T\tau)^2$. Этот сильно растущий по τ вклад в флуктуационную поправку был приписан диаграмме DOS, в соответствии с нашим результатом (1.57a). Однако мы видим, что полюсной вклад диаграммы МТ имеет такое же ведущее поведение, но с противоположным знаком [см. (1.57b)], что приводит к точной компенсации $(T\tau)^2$ -членов (как объяснено в Разделе 1.3.1, это сокращение является общим, справедливым не только в окрестности T_c). Мы полагаем, что расхождение с работой [20] происходит из-за их неправильной оценки диаграммы МТ. Понимая, что рост поправки $\delta\sigma$ пропорциональный $(T\tau)^2$, является нефизическим, в работе [21] было высказано предположение (и даже некоторым образом численно подтверждено), что такое поведение реализуется только в умеренно чистом случае, в то время как в сверхчистом случае «большой отрицательный вклад DOS может быть сокращен положительным аномальным вкладом МТ». Однако наш анализ показывает, что данное объяснение неверно: сокращение наиболее расходящихся членов происходит уже в умеренно чистом пределе из-за полюсного вклада диаграммы МТ.

1.3.3 Вдали от перехода, $T \gg T_c$

Ультрафиолетовая расходимость

При высоких температурах [область (d) на Рис. 1.1], ведущий вклад в флуктуационную поправку определяется членом с $b(y) = B(\Omega)$ в Ур. (1.53), где частоты и импульсы оказываются большими: $\Omega, qv \gg T_c$. В этой области L^R — логарифмически медленная функция, а Σ^R , задаваемую Ур. (1.54) можно грубо оценить как $1/[\tau^2 \max^2(\Omega, qv)]$. Тогда с логарифмической точностью мы получим

$$\delta\sigma \sim v^2\tau \int \frac{d\Omega d^d q}{\max^2(\Omega, qv)} \sim v\tau \int \frac{d^d q}{q} \sim v\tau q_{\max}^{d-1}. \quad (1.61)$$

Итак, поправка ультрафиолетово расходится для всех пространственных размерностей $d \geq 1$ [для $d = 1$, $\delta\sigma \propto \ln \ln q_{\max}$ из-за логарифмической зависимости флуктуационного пропагатора, опущенной в Ур. (1.61)]. В баллистическом пределе возле перехода, $T \rightarrow T_c$, блоки $\Sigma^{R,Z}$ могут быть взяты при нулевых Ω и q , а сходимость интегралов для флуктуационной поправки обеспечивается L^R [см. Ур. (1.56)]. В баллистической области при $T \gg T_c$ ситуация обратная: здесь L^R почти постоянен, и слабое затухание $\Sigma^R(\Omega, q)$ не может компенсировать растущий фазовый объем сверхпроводящих флуктуаций на больших частотах и импульсах.

Такое поведение следует сравнить с ситуацией $T \gg T_c$ в диффузионном режиме [область (b) на Рис. 1.1], где наличие диффузионных полюсов в Σ^R и Σ^Z обеспечивает лучшую сходимость интегралов в Ур. (1.25). Тем не менее, для $d \geq 2$ флуктуационная поправка в диффузионном случае все еще ультрафиолетово расходится $\propto q_{\max}^{d-2}$, где $q_{\max} \sim 1/l$ — верхняя граница диффузионной области. Именно эта расходимость приводит к вкладу $\ln \ln 1/T_c\tau$ в Ур. (1.47). В баллистической области он трансформируется в еще более сильно расходящийся член в Ур. (1.61). Сильная температурно-независящая ультрафиолетовая расходимость в баллистическом пределе впервые обсуждалась в работе Зала и др. [61].

Три взаимосвязанных свойства флуктуационного пропагатора значительно упрощают анализ при больших температурах ($T \gg T_c$): (i) его малость, $L^R < 1/\epsilon \ll 1$, (ii) его логарифмически слабая зависимость от Ω и q , и (iii) тот факт, что $\text{Im } L^R \ll \text{Re } L^R$.

Вклад от Σ^R

Для начала, рассмотрим вклад Σ^R в Ур. (1.53), который будет обозначаться как $\delta\sigma^R$. Пренебрегая $\text{Im } L^R$ по причине, описанной выше, и беря Σ^R из Ур. (A.29) получаем

$$\delta\sigma^R \approx \frac{2T\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} x dx \coth(2\pi y) L^R \int_0^{\infty} dt \frac{t^2 [J_0(xt) - S_0(xt)] \sin(yt)}{2 \sinh t/2}, \quad (1.62)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, а $S_0(z) = \sin(z)/z$. Далее мы интегрируем по y , пренебрегая логарифмически слабой зависимостью L^R от y :

$$\delta\sigma^R = \frac{4T\tau}{\pi} \int_0^\infty x dx L^R \int_0^\infty dt \frac{t^2 [J_0(xt) - S_0(xt)]}{16 \sinh^2 t/4}. \quad (1.63)$$

Как обсуждалось в Разделе 1.3.3, этот интеграл расходится при $x \rightarrow \infty$. Поскольку большие x соответствуют малым t , можно заменить $(t/4)^2/\sinh^2(t/4)$ на 1, и интеграл по t даст $(1 - \pi/2)/x$. Затем, обрезая оставшийся интеграл по x на $x = x_{\max} \gg 1$, получаем

$$\delta\sigma_{\text{div}}^R \sim T\tau \frac{x_{\max}}{\epsilon + \ln x_{\max}} \sim \frac{v\tau q_{\max}}{\ln(vq_{\max}/T_c)}, \quad (1.64)$$

в соответствии с оценкой (1.61). Ключевым моментом является то, что эта расходящаяся поправка не зависит от температуры и, следовательно, может быть включена в друдевскую проводимость [61].

Температурно-зависящий вклад флуктуационной проводимости определяется областью $x \sim t \sim 1$ (и, следовательно, $y \sim 1$). Чтобы найти его, следует учесть отличие $(t/4)^2/\sinh^2(t/4)$ от 1 в Ур. (1.63). Поскольку результирующие интегралы сходятся достаточно быстро, мы можем заменить L^R на $1/\epsilon$. Затем интегрируя по x с помощью $\int_0^\infty dx x [J_0(xt) - S_0(xt)] = \delta(t)/t - 1/t^2$, получаем

$$\delta\sigma_T^R = \frac{4T\tau}{\pi\epsilon} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \left[1 - \frac{(t/4)^2}{\sinh^2 t/4} \right]. \quad (1.65)$$

Выполняя оставшееся интегрирование, находим ведущую T -зависящую поправку:

$$\delta\sigma_T^R = \frac{T\tau}{\pi\epsilon}. \quad (1.66)$$

Более точная оценка интегралов, а также учет $\text{Im } L^R$ породили бы меньшие члены порядка $T\tau \mathcal{O}(1/\epsilon^2)$.

Поправка от взаимодействия к проводимости чистых нормальных металлов была изучена в работе [61]. В случае слабого точечного взаимодействия с безразмерной константой взаимодействия $\lambda = \nu V_0$, их Ур. (2.14) предсказывает $\delta\sigma_{\text{ZNA}} = -\lambda T\tau/\pi$. Случай короткодействующего притяжения, изученный в нашей работе, формально соответствует $\lambda = -1/\ln(T/T_c)$. Подставляя такую λ в $\delta\sigma_{\text{ZNA}}$, моментально воспроизводим наше выражение (1.66).

Вклад от Σ^Z

Теперь перейдем к анализу вклада от $\Sigma^Z = \Sigma_{\text{tanh}}^Z + \Sigma_{\text{sing}}^Z$ в Ур. (1.53), который обозначим как $\delta\sigma^Z = \delta\sigma_{\text{tanh}}^Z + \delta\sigma_{\text{sing}}^Z$. Благодаря наличию $b'(y)$ эта поправка не содержит расходящейся части, а ее высокотемпературное разложение содержит $1/\epsilon^2$, происходящее от $\text{Im } L^R$. Таким образом, можно ожидать, что $\delta\sigma^Z$ всегда меньше, чем $\delta\sigma^R$. Однако это не так из-за наличия специального вклада от разрезов в Σ_{sing}^Z для диаграммы АМТ, который отсутствует в Σ^R .

Вклады $\delta\sigma_{\text{tanh}}^Z$ и $\delta\sigma_{\text{sing}}^Z$ вычисляются прямолинейно. Используя Ур. (1.53), (A.26), (A.32) и (A.34), получаем

$$\delta\sigma_{\text{tanh}}^Z = \alpha_p \frac{T\tau}{\epsilon^2}, \quad (1.67)$$

$$\delta\sigma_{\text{sing}}^Z = \alpha_c \frac{T\tau \ln T\tau}{\epsilon^2}, \quad (1.68)$$

где $\alpha_p = 0.458$ и $\alpha_c = 0.190$ — численные оценки для интегралов (A.35) и (A.36).

Ведущая аспимптотика

Объединяя Ур. (1.66), (1.67) и (1.68), для ведущего асимптотического поведения мы можем записать:

$$\delta\sigma = \text{const} + \frac{T\tau}{\pi\epsilon} + 0.190 \frac{T\tau \ln T\tau}{\epsilon^2} + \dots \quad (1.69)$$

Удерживание члена (1.67) в результирующем выражении есть превышение точности, так как он имеет тот же порядок, что и сублидирующий член в Ур. (1.66) также пропорциональный $1/\epsilon^2$. Однако вклад АМТ (1.68) нужно сохранить, поскольку он содержит дополнительный большой множитель $\ln T\tau$. Как обсуждалось в Разделе 1.3.2, логарифмический множитель во вкладе АМТ должен быть заменен на $\ln T\tau_{\text{in}}$ тогда, когда время свободного пробега τ превышает время неупругого рассеяния τ_{in} за счет взаимодействия (очень чистый предел).

Флуктуационная проводимость в абсолютно чистом пределе (без примесей, $\tau = \infty$) изучалась в работе [22], где сначала был взят предел $\tau \rightarrow \infty$ при конечных ω , а затем ω была отправлена ноль. В результате, сумма поправок DOS и МТ оказывается пропорциональной ω и, таким образом, не вносит вклад в проводимость на постоянном токе. Также было заявлено, что в пределе $T \gg T_c$ оставшийся вклад AL пропорционален $1/\epsilon^3$. Напротив, мы сначала берем предел $\omega = 0$ и приходим к гораздо большему выражению (1.69), которое растет примерно как $T\tau$.

Расхождение между нашим результатом и результатом работы [22] указывает на то, что пределы $\omega \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$ не коммутируют. Поскольку некоторое количество беспорядка неизбежно присутствует в реальных образцах, мы считаем, что при расчете проводимости на постоянном токе сначала следует взять предел $\omega \rightarrow 0$.

1.4 Кроссовер от диффузного к баллистическому пределу около T_c

В этом Разделе рассматривается поведение флуктуационной поправки в окрестности перехода ($T \rightarrow T_c$) для произвольной силы беспорядка, характеризуемой параметром $T\tau$. Полученные выражения описывают кроссовер между грязным [область (а) на Рис. 1.1, рассмотренная в Разделе 1.2.3] и чистым [область (с), рассмотренная в Разделе 1.3.2] пределами. Следуя Разделу 1.3.1, мы разобьем поправку АМТ (1.26g) на вклады от особенностей $f_1^A \gamma^A \gamma^R$ ($\delta\sigma_{\text{sing}}^{\text{AMT}}$) и от полюсов функции распределения ($\delta\sigma_{\text{tanh}}^{\text{AMT}}$). Таким образом, имеются три вклада: (i) $\delta\sigma^{\text{AL2}}$, (ii) $\delta\sigma_{\text{tanh}}$ от полюсов F_E (который включает DOS, AL1, RMT и часть МТ) и (iii) $\delta\sigma_{\text{sing}}^{\text{AMT}}$ от куперонов в АМТ.

1.4.1 Вклад AL2

Вклад AL2 (1.27) дает ведущую поправку Асламазова-Ларкина $\delta\sigma^{\text{AL2}} \approx 1/16\epsilon$, которая, как известно, нечувствительна к беспорядку [11]. Однако ме-

нее сингулярные вклады пропорциональные $\ln(1/\epsilon)$ уже зависят от беспорядка. Чтобы найти их, мы должны вычислить флуктуационный пропагатор с более высокой точностью. Сохраняя в пропагаторе (1.20) следующие за ведущим членами порядка $(qv_F)^4$, Ω^2 и $(qv_F)^2\Omega$, после простых вычислений получаем:

$$\delta\sigma^{\text{AL2}} = \frac{1}{16\epsilon} + s(T\tau) \ln \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0). \quad (1.70)$$

Здесь описывающая кроссовер функция $s(T\tau)$ может быть выражена через функцию \mathcal{F} , введенную в Ур. (1.22), следующим образом:

$$s(T\tau) = \frac{\psi''(1/2)}{4\pi^4} - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mathcal{F}'(1/2)}{\mathcal{F}(1/2)} + \frac{6\mathcal{F}(1/2) + [2\psi''(1/2) + \psi''(1/2 + 1/4\pi T\tau)]}{32\mathcal{F}^2(1/2)(4\pi T\tau)^2}. \quad (1.71)$$

Это монотонная функция, меняющаяся от $s(0) = 0$ в диффузном пределе [в соответствии с Ур. (1.45)] к $s(\infty) \approx 0.0183$ в баллистическом пределе.

1.4.2 Вклад от полюсов функции распределения F_E

Полюсной вклад от F_E в Ур. (1.26a), (1.26b), (1.26g) и (1.26h) пропорционален $\ln(1/\epsilon)$. Поправки с дополнительным купероном, Ур. (1.26c) – (1.26f), не сингулярны при $T \rightarrow T_c$ и будут игнорироваться. Вычисляя функции (1.23) в первом неисчезающем порядке по Ω и q и суммируя вклады от полюсов F_E при вычислении интегралов по E в блоках Σ_{tanh}^Z и Σ^R , приходим к удивительно компактному выражению:

$$\Sigma_{\text{tanh}}^Z(\Omega, q) = -\frac{\Omega \mathcal{F}'(1/2)}{\pi^2 T\tau}, \quad \Sigma^R(\Omega, q) = 0. \quad (1.72)$$

Используя далее Ур. (1.25) с локальным видом флуктуационного пропагатора (1.20), получаем выражение для поправки:

$$\delta\sigma_{\text{tanh}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\mathcal{F}'(1/2)}{\mathcal{F}(1/2)} \ln \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0). \quad (1.73)$$

Эта формула описывает кроссовер между диффузионным и баллистическим режимами:

$$\delta\sigma_{\tanh} = \ln \frac{1}{\epsilon} \times \begin{cases} -14\zeta(3)/\pi^4, & T\tau \ll 1, \\ -\pi^2/28\zeta(3), & T\tau \gg 1. \end{cases} \quad (1.74)$$

В обозначениях Раздела 1.2.3, диффузионный предел выражения (1.74) соответствует $c_{\tanh} = -14$, что отличается от $c^{\text{REG}} = -7$ в Ур. (1.45). Причина этого расхождения заключается в том, что в отличие от σ_{\tanh} , σ^{REG} не содержит вклада, происходящего от полюсов F_E во вкладе АМТ.

1.4.3 Сингулярный вклад АМТ

Анализ этой поправки уже был выполнен в Разделе 1.3.2. Единственное отличие заключается в форме флуктуационного пропагатора (1.20), который содержит зависящую от беспорядка длину когерентности $\xi(T\tau)$, описываемую уравнением (1.21).

Поэтому мы приходим к выводу, что и в *диффузионном*, и *умеренно чистом* случаях (когда $T\tau \ll 1/\sqrt{\epsilon}$) можно использовать результат (1.59), с соответствующей заменой γ' на $\gamma(T\tau)$:

$$\gamma(T\tau) = \frac{\xi^2(T\tau)}{D\tau_\phi} = \mathcal{F}(1/2) \frac{\tau}{\tau_\phi}. \quad (1.75)$$

Эта функция интерполирует между γ для диффузионного режима и γ' для баллистического режима.

1.5 Заключение

В этой Части диссертации мы изучили вклад куперовского канала во флуктуационную проводимость неупорядоченных s -волновых сверхпроводников выше температуры перехода. Работая в ведущем однопетлевом приближе-

нии по флуктуационному пропагатору, мы вывели общее выражение для флуктуационной поправки, справедливое для произвольных температур $T > T_c$ и сил беспорядка, характеризуемых параметром $T\tau$. Формула, полученная для произвольной размерности пространства, была подробно проанализирована в двумерном случае.

Наш подход основан на обычной диаграммной технике [15], но в представлении Келдыша. Использование метода Келдыша имело решающее значение для корректного усреднения по беспорядку в блоках электронных функций Грина. Процедура усреднения чувствительна к конкретной комбинации запаздывающих и опережающих функций Грина в блоках, и каждая такая комбинация должна рассматриваться отдельно. Преимущество метода Келдыша состоит в том, что все блоки из G^R и G^A генерируются автоматически, тогда как в Мацубаровской технике это требует утомительной процедуры аналитического продолжения, что может быть дополнительным источником возможных вычислительных ошибок. Хотя оба подхода в принципе эквивалентны, технологичность Келдышевой техники становится особенно заметной за пределами диффузионного предела, где следует учитывать все возможные комбинации G^R и G^A .

Наш анализ показывает, что стандартная классификация диаграммных вкладов в терминах AL, DOS и MT не отражает однозначно лежащие в их основе физические процессы. Мы видим, что результирующие выражения для различных диаграмм, усредненных по беспорядку, содержат ряд подобных фрагментов. Поэтому естественно их разделить и перегруппировать члены в соответствии с их математической структурой. В частности, мы разделили вклад AL на AL1 (один флуктуационный пропагатор) и AL2 (два флуктуационных пропагатора), причем член AL1 частично сокращает вклад диаграмм DOS и MT. Это иллюстрирует тот факт, что каждой из индивидуальных диаграмм AL, DOS и MT вряд ли можно приписать четко определенный физический смысл. Лишь сумма всех диаграмм описывает такие эффекты, как парапроводимость, подавление плотности состояний и рассеяние на сверхпроводящих флуктуациях. По отдельности же эти эффекты не могут быть отождествлены со стандартными скелетными диаграммами AL, DOS и MT. Это обстоятельство было осознано в ряде недавних публикаций [24–26], где были предложены альтернативные способы перегруппировки возникающих членов.

Полученное аналитическое выражение позволяет критически проанализировать имеющиеся в литературе результаты для флуктуационной проводимости. Большинство этих результатов было получено с помощью Мацубаровской диаграммной техники и применимо лишь в четырех асимптотических областях, отмеченных на Рис. 1.1.

В диффузионном пределе ($T\tau \ll 1$) полная температурная зависимость была недавно рассмотрена в работах [24–26]. Мы полностью воспроизводим результаты работ [25; 26] для флуктуационной поправки при произвольных температурах. Примечательно, что этот результат был получен тремя независимыми группами, которые использовали различные варианты Келдышевой техники.

В баллистическом пределе ($T\tau \gg 1$) нами впервые было получено аналитическое описание флуктуационной поправки при произвольных температурах. Здесь мы наблюдаем значительное расхождение с предыдущими результатами, полученными в Мацубаровской технике. Наши основные выводы можно резюмировать следующим образом:

- В окрестности T_c [область (с) на Рис. 1.1] только аномальная часть поправки МТ ведет себя по-разному в умеренно чистом (c') и сверхчистом (c'') пределах, см. Ур. (1.59) и (1.60). Остальные вклады не меняются при переходе от умеренно чистому к сверхчистому случаю. В этой области мы обнаружили сокращение членов растущих как $(T\tau)^2$, вопреки утверждениям работ [20; 21].
- При высоких температурах ($T \gg T_c$) мы обнаружили, что флуктуационная поправка содержит формально расходящийся температурно-независящий вклад, который должен быть включен в друдевскую проводимость. Оставшаяся температурно-зависящая поправка растет как $T\tau$ с точностью до некоторых логарифмических поправок [см. Ур. (1.69)]. Этот результат согласуется с работой [61] и противоречит затуханию $1/\epsilon^3$, найденному в работе [22], где предел $\tau \rightarrow \infty$ был взят до предела $\omega \rightarrow 0$.

На Рис. 1.6 представлена температурная зависимость полной флуктуационной поправки к проводимости пленки, полученная численно для различных сил беспорядка (здесь восстановлены физические единицы). Поскольку поправка ультрафиолетово расходится (см. обсуждение в Разделе 1.3.3), $\delta\sigma$ опреде-

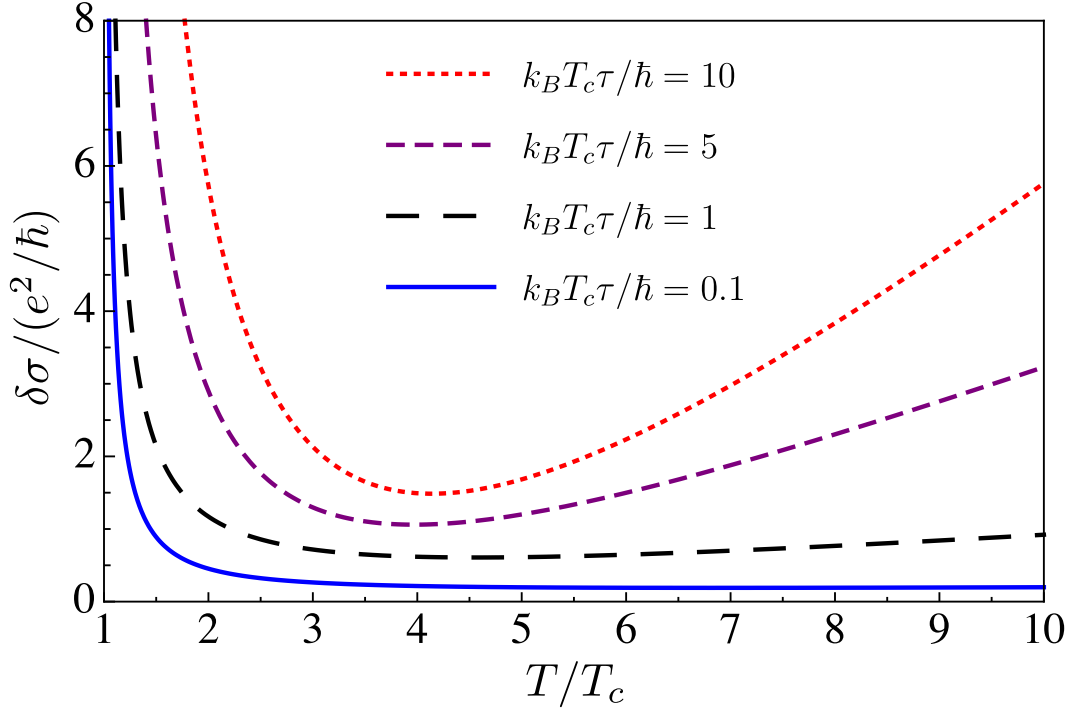


Рисунок 1.6 — Температурная зависимость флуктуационной поправки к проводимости двумерной пленки от куперовского канала в единицах e^2/\hbar выше перехода. Разные кривые соответствуют различной силе беспорядка, характеризуемой параметром $k_B T_c \tau / \hbar$: 0.1 (нижняя кривая, диффузионный случай), 1, 5 и 10 (верхняя кривая, баллистический случай). Время дефазировки принимается равным $\tau_\phi = 100\hbar/k_B T_c$ для всех кривых. Для ясности кривые сдвинуты по вертикали.

ляется с точностью до не зависящей от температуры константы, произвольно выбранной на Рис. 1.6.

Следует отметить две особенности температурной зависимости $\delta\sigma$. Во-первых, мы видим, что вблизи перехода поправка растет с τ . Поскольку Рис. 1.6 построен для слабой дефазировки, $\gamma \approx 0.004$, видимые части кривых при $T \rightarrow T_c$ описываются вкладом АМТ, а не универсальным вкладом АЛ. В диффузионном пределе поправка АМТ нечувствительна к τ , тогда как в баллистическом пределе она растет с τ в соответствии с Ур. (1.59) и (1.60). Во-вторых, сильно выше перехода флуктуационная поправка растет с T для любой силы беспорядка, в соответствии с Ур. (1.47) и (1.69). Даже для $k_B T_c \tau / \hbar = 0.1$ (самый грязный образец) $d\delta\sigma/dT > 0$ при $T/T_c = 10$. Таким образом, зависимость $\delta\sigma(T)$ имеет минимум для любой силы беспорядка.

Знание точного выражения для температурной зависимости флуктуационной проводимости представляет не только академический интерес. В сочетании со слабо локализационными поправками и поправками от взаимодействия [52; 61] оно обеспечивает мощный инструмент для высокоточного определения T_c из транспортных измерений [62]. Распространение теории на случай произвольного беспорядка, проделанное в данной Главе, открывает путь для применения того же подхода для чистых сверхпроводников (например, NbSe₂ [63] или органических сверхпроводников [64; 65]).

В качестве открытого вопроса можно упомянуть чувствительность флуктуационной поправки к микроскопическим деталям потенциала беспорядка, которые становятся важными в баллистическом пределе. В нашем анализе мы использовали простейшую форму гауссова беспорядка [см. (1.3)]. Это естественная модель для диффузионного предела, где наблюдаемые выражаются только через коэффициент диффузии D и не содержат отдельно времени свободного пробега τ . В баллистическом пределе результат, вообще говоря, является чувствительным к конкретному типу беспорядка и может различаться для белого шума и пуассоновских примесей [66; 67]. Эта замечание относится ко всем предыдущим исследованиям флуктуационных поправок к проводимости в баллистическом пределе и к другим сверхпроводящим флуктуационным эффектам в этом режиме (см., например, [68]).

Наконец, отметим интересное направление обобщения разработанной теории флуктуационной проводимости на случай необычных сверхпроводников. В этих материалах немагнитный беспорядок, как известно, действует как эффективный распариватель [69], так что система всегда находится в чистом пределе.

Глава 2. Перевернутый маятник под действием случайной горизонтальной силы

2.1 Введение

В этой главе исследуется стохастическая динамика перевернутого маятника под действием случайной силы в горизонтальном направлении (стохастическая задача Уитни), описываемая уравнением

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta + f(t) \cos \theta. \quad (2.1)$$

Если рассматривать решения этого уравнения на всей временной оси, то такая задача допускает единственное решение, которое всегда остается в верхней полуплоскости $|\theta(t)| < \pi/2$, такое решение мы будем называть *никогда не падающей траекторией* (ННПТ).

Чтобы проиллюстрировать концепцию ННПТ, мы приводим на Рис. 2.1 девять *непадающих траекторий* (НПТ) для краевой задачи для уравнения маятника (2.1) с $\theta(0) = -\pi/2, 0, \pi/2$ и $\theta(T) = -\pi/2, 0, \pi/2$, вычисленных для одной и той же заданной псевдослучайной реализации силы $f(t)$ на интервале $(0, T)$. Каждая траектория получается путем подбора начальной скорости $\dot{\theta}(0)$, чтобы траектория все время оставалась в полосе $|\theta(t)| < \pi/2$. В соответствии с [43], непадающее решение краевой задачи существует для любого начального и конечного значения в пределах полосы.

Заштрихованная область на Рис. 2.1 показывает пучок непадающих решений краевой задачи со всеми возможными начальными и конечными значениями θ . На достаточно большом интервале времени ($\omega T \gg 1$) эти траектории существенно отличаются друг от друга только вблизи концов интервала, тогда как для промежуточных значений t они слипаются. Чем больше T , тем меньше ширина пучка. Наконец, если мы расширим временной интервал, на котором мы изучаем непадающие решения на всю вещественную ось, пучок непадающих траекторий станет бесконечно тонким, определяя таким образом *единственную никогда не падающую траекторию*. ННПТ является аттрактором всех непадающих траекторий, определенных на конечном временном интервале. Этот

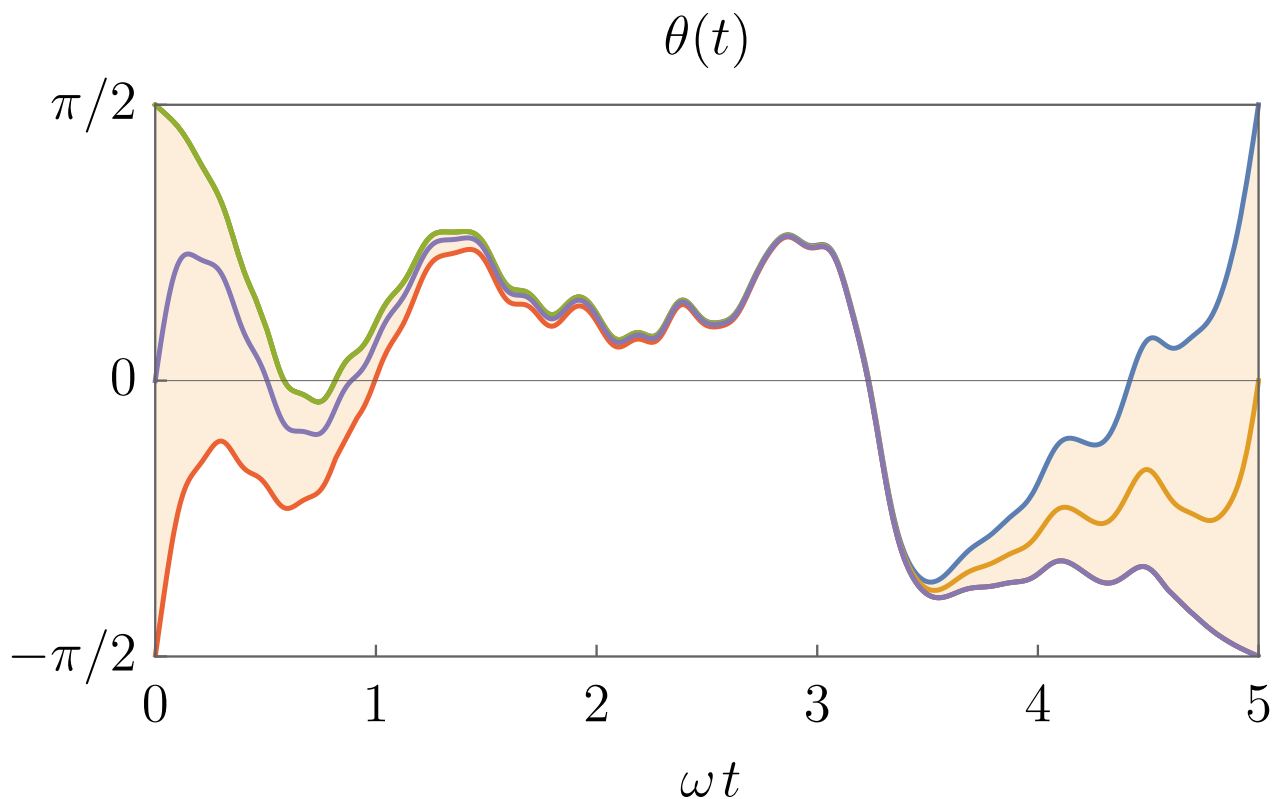


Рисунок 2.1 — Примеры непадающих траекторий Ур. (5), ограниченных полосой $|\theta(t)| < \pi/2$ для конкретной реализации силы $f(t)$ на интервале $(0, T)$ с $\omega T = 5$. Для любого начального θ_1 и конечного θ_2 внутри полосы существует уникальная траектория, удовлетворяющая граничным условиям $\theta(0) = \theta_1$ и $\theta(T) = \theta_2$. В пределе $T \rightarrow \infty$ расслоение этих траекторий (показанное заштрихованной областью) становится бесконечно тонким, определяя таким образом уникальную *никогда не падающую траекторию*, статистические свойства которой изучаются в Главе 2.

аттрактор абсолютно нестабилен: любое отклонение от него экспоненциально быстро выведет траекторию из полосы $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Ключевым для дальнейшего анализа является вопрос о единственности НПТ для краевой задачи для уравнения (5). Насколько нам известно, единственность НПТ никогда не обсуждалась в математической литературе. С одной стороны, этот факт легко проверить прямым численным моделированием. С другой стороны, это можно доказать с помощью леммы, утверждающей, что если две НПТ $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ такие, что $\theta_1(\tau) < \theta_2(\tau)$ и $\dot{\theta}_1(\tau) < \dot{\theta}_2(\tau)$, то $\theta_1(t) < \theta_2(t)$ для всех $t > \tau$. Доказательство единственности НПТ приведено в Приложении Б.1.

ННПТ является сложным функционалом от горизонтальной силы $f(t)$, получение которого для заданной $f(t)$ эквивалентно решению обратной задачи в теории управления [70]. Однако, если маятник приводится в движение нерегулярной силой (шумом), вместо восстановления конкретной формы ННПТ более естественно обратиться к изучению ее статистических свойств.

В качестве модели для случайной горизонтальной силы мы выбираем модель белого шума с коррелятором

$$\langle f(t)f(t') \rangle = 2\alpha\delta(t - t'). \quad (2.2)$$

Такая модель может применяться, если время корреляции $f(t)$ намного меньше характерного времени движения маятника, в большинстве случаев это период колебаний, $2\pi/\omega$. В такой постановке статистика ННПТ зависит от единственного безразмерного параметра α/ω^3 .

2.2 Случай слабого шума (линейное уравнение)

Для начала, рассмотрим простейший случай слабого шума, $\alpha \ll \omega^3$, когда угол отклонения ННПТ от вертикали остается небольшим, и Ур. (2.1) может быть линеаризовано. Тогда мы получаем *линейную* задачу с *аддитивным* шумом,

$$\ddot{\theta} = \omega^2\theta + f(t), \quad (2.3)$$

которая может быть немедленно решена с помощью метода функций Грина. Требование, чтобы траектория при всех временах оставалась вблизи начала координат, диктует выбор фейнмановской функции Грина

$$G_F(t) = -\exp(-\omega|t|)/2\omega, \quad (2.4)$$

которая затухает как в будущем, так и в прошлом. Выбор фейнмановской, а не запаздывающей или опережающей функции Грина отражает особенность нашей задачи, которая не относится к задачам эволюционного типа. Таким образом, можно получить явное выражение для ННПТ как функционал от управ-

ляющей силы:

$$\theta(t) = \int G_F(t - t') f(t') dt'. \quad (2.5)$$

Мы видим, что, действительно, ННПТ однозначно определена для каждой данной силы $f(t)$.

Одноточечная функция распределения

Рассмотрим мгновенную функцию распределения угла θ и скорости $p = d\theta/dt$ ННПТ:

$$P(\theta, p) = \langle \delta(\theta - \theta(0)) \delta(p - \theta'(0)) \rangle. \quad (2.6)$$

Для ее вычисления воспользуемся известным интегральным представлением дельта-функции $\delta(x) = \int \exp(ikx) dk/2\pi$, после чего усредним экспоненту по гауссовому шуму с помощью тождества $\langle \exp[A(f)] \rangle_f = \exp[\langle A(f)^2 \rangle_f / 2]$, где A — линейный функционал от $f(t)$, в нашем случае равный (2.5). После окончательного интегрирования по вспомогательным переменным мы получаем гауссову функцию распределения вероятностей (PDF) мгновенной координаты и скорости:

$$P(\theta, p) = \frac{\omega^2}{\pi\alpha} \exp\left(-\frac{\omega^3}{\alpha} \theta^2 - \frac{\omega}{\alpha} p^2\right). \quad (2.7)$$

Как приближенное выражение, Ур. (2.7) применимо при $\alpha/\omega^3 \ll 1$, когда типичный угол $\theta(t)$ мал и ННПТ не достигает границ $\theta = \pm\pi/2$.

Двухточечная функция распределения углов

Аналогичным образом можно вычислить и более сложные корреляционные функции ННПТ. В качестве примера рассмотрим функцию распределения двух углов взятых в разные моменты времени:

$$\mathcal{P}_2(\theta, \phi, t) = \langle \delta(\theta - \theta(0)) \delta(\phi - \theta(t)) \rangle. \quad (2.8)$$

Повторяя описанные выше шаги, а именно, представление дельта-функции с помощью интегралов по вспомогательным переменным k и p и усреднение экспоненты, получаем в качестве промежуточного ответа

$$\langle \exp \{ -ik\theta(0) - ip\theta(t) \} \rangle = \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4\omega^3} (k^2 + 2kpY(t) + p^2) \right\}, \quad (2.9)$$

где мы определили

$$Y(t) = e^{-\omega t}(1 + \omega t). \quad (2.10)$$

Вычисляя интегралы по вспомогательным переменным k и p , находим

$$\mathcal{P}_2(\theta, \phi, t) = \frac{\omega^3}{\pi\alpha\sqrt{1-Y(t)^2}} \exp \left(-\frac{\omega^3 (\theta^2 - 2\theta\phi Y(t) + \phi^2)}{\alpha(1-Y^2(t))} \right). \quad (2.11)$$

Анализируя полученное выражение (2.11), мы видим, что в рассматриваемом пределе ($\alpha \ll \omega^3$) корреляции углов затухают на временном масштабе ω^{-1} . Проще всего это увидеть на примере корреляционной функции

$$\langle \theta(0)\theta(t) \rangle = \frac{\alpha}{2\omega^3} Y(t). \quad (2.12)$$

Поскольку двухточечная PDF (2.11) является гауссовой, высшие корреляторы $\theta(t)$ могут быть вычислены с помощью теоремы Вика. Например,

$$\langle \theta^2(t)\theta^2(0) \rangle = \langle \theta^2(t) \rangle \langle \theta^2(0) \rangle + 2\langle \theta(t)\theta(0) \rangle^2 = \frac{\alpha^2}{4\omega^6} (1 + 2Y^2(t)) \quad (2.13)$$

Общее выражение (2.11) может быть исследовано в двух предельных случаях большого и малого ωt .

- В пределе $t \gg \omega^{-1}$ двухточечная функция распределения распадается на произведение двух независимых одноточечных:

$$\mathcal{P}_2(\theta, \phi, t) \approx \frac{\omega^3}{\pi\alpha} \exp \left(-\frac{\omega^3}{\alpha} (\theta^2 + \phi^2) \right) = P(\theta) \cdot P(\phi), \quad (2.14)$$

где функция распределения угла

$$P(\theta) = \sqrt{\frac{\omega^3}{\pi\alpha}} \exp \left(-\frac{\omega^3}{\alpha} \theta^2 \right) \quad (2.15)$$

может быть получена из Ур. (2.7) интегрированием по импульсу. Действительно, если моменты времени сильно разнесены, то угловая память исчезает.

- Для анализа предела $t \ll \omega^{-1}$ проще вернуться на шаг назад к интегральному представлению и взять предел первым:

$$\mathcal{P}_2(\theta, \phi, t) \approx \int \frac{dp}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega^3}{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^3}{\alpha}\theta^2 + ip(\theta-\phi)} = \delta(\theta - \phi) P(\theta). \quad (2.16)$$

Как и следовало ожидать, в этом пределе углы совпадают, так что двухточечная функция распределения сводится к одноточечной.

2.3 Разработка общего метода решения

При большем шуме нелинейность уравнения движения (2.1) становится важной, и явное выражение для ННПТ при заданной $f(t)$ оказывается невозможным. Поэтому для того, чтобы описать статистику ННПТ при произвольном α/ω^3 , необходимо использовать существенно иную технику, которая не опирается на точное решение Ур. (2.1), но способна осуществить усреднение по беспорядку на начальном этапе рассмотрения. Можно было бы подумать, что подходящим подходом является уравнение Фоккера-Планка (ФП) записываемое для плотности вероятности $P(\theta, p)$ [71]. Однако такой подход не может быть использован для описания ННПТ по следующим причинам. Во-первых, уравнение ФП описывает ансамбль всех траекторий, тогда как ННПТ является единственной траекторией («мерой нуль»). Во-вторых, уравнение ФП относится к эволюционному типу, в то время как ННПТ хранит информацию как о прошлом, так и о будущем поведении управляющей силы $f(t)$.

Для решения задачи описания статистики ННПТ мы предлагаем использовать сиперсимметричный формализм, разработанный Паризи и Сурла [40; 41] в русле теоретико-полевых подходов к стохастической классической динамике, предложенных в 1970-х годах [72; 73]. Идея этого формализма состоит в том, чтобы представить суммирование по решениям некоторого классического уравнения движения, $L(t) = 0$, для динамической переменной t функциональным

интегралом по всем t , взвешенным с дельта-функцией $\delta[L(t)]$. Далее эта дельта-функция представляется в виде экспоненты от аргумента, посредством еще одного интеграла по вспомогательному полю λ , а возникающий из-за изменения переменных детерминант записывается в виде функционального интеграла по паре грассмановских полей $\bar{\chi}$, χ .

В результате, теория формулируется в терминах суперсимметричного действия $S[t, \lambda, \bar{\chi}, \chi]$, которое может быть легко усреднено по шуму. Хотя метод Паризи-Сурла характерен для стохастической динамики, его подход соответствует общей философии теоретического описания неупорядоченных систем, где ключевым моментом является сведение к функциональному представлению (метод реплик [74; 75], суперсимметрия [76] или техника Келдыша [53; 77]), подходящего для усреднения по беспорядку.

2.3.1 Представление в виде функционального интеграла

Для реализации описанной процедуры в применении к уравнению движения маятника (2.1) запишем производящую функцию в виде функционального интеграла по всем траекториям $\theta(t)$:

$$Z = \int \mathcal{D}\theta(t) \delta[-\partial_t^2 \theta + F(\theta)] |\det[-\partial_t^2 + F'(\theta)]|, \quad (2.17)$$

где $F(\theta) = \omega^2 \sin \theta + f(t) \cos \theta$. Следуя стандартной процедуре [41; 78], мы вводим бозонное поле $\lambda(t)$, чтобы поднять аргумент дельта-функции в экспоненту, и пару Грассмановых полей $\chi(t)$ и $\bar{\chi}(t)$, чтобы представить определитель в таком же виде. Это приводит к функциональному интегралу

$$Z = \int \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{D}\lambda(t) \mathcal{D}\bar{\chi}(t) \mathcal{D}\chi(t) e^S, \quad (2.18)$$

с действием $S[\theta, \lambda, \bar{\chi}, \chi]$, дающимся выражением

$$S = \int dt \{ i\lambda[-\partial_t^2 \theta + F(\theta)] + \bar{\chi}[-\partial_t^2 + F'(\theta)]\chi \}. \quad (2.19)$$

В случае белого шума (2.2), усреднение по реализациям управляющей силы генерирует эффективное действие, которое по-прежнему может быть записано как интеграл от локального во времени лагранжиана, см. Приложение Б.2.1.

Ключевой трюк для переписывания Ур. (2.17) в виде (2.18) заключается в замене модуля детерминанта самим детерминантом. Такая замена неявно опирается на предположение, что детерминант положителен для всех решений уравнения движения [41; 78]. Для произвольного стохастического уравнения это неверно, и поэтому подход Паризи-Сурла, вообще говоря, не работает, поскольку он взвешивает различные решения с произвольными знаками. Для работы с абсолютным значением детерминанта приходится прибегать к гораздо более изощренным приемам [79; 80].

Однако проблемы со знаком детерминанта не возникает, если решение стохастического динамического уравнения единственно. Именно это и имеет место в случае ННПТ для управляемого перевернутого маятника. Следовательно, именно единственность ННПТ обосновывает использование метода Паризи-Сурла для описания ее статистики.

2.3.2 Трансфер-матричный гамильтониан и его нулевая мода

Одномерная теория поля (2.18) может быть точно переформулирована как эффективная квантовая механика [42] с трансфер-матричным гамильтонианом \mathcal{H} , действующим на волновую функцию $\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \bar{\chi}, \chi)$. Тогда вычисление функционального интеграла сводится к решению уравнения Шредингера во мнимом времени: $\partial \hat{\Psi} / \partial t = -\mathcal{H} \hat{\Psi}$. Наиболее важным обстоятельством, делающим возможным статистическое описание ННПТ, является его экспоненциально слабая чувствительность к граничным условиям (см. Раздел 2.1). Как и в теории локализации Андерсона [76], это означает, что ННПТ соответствует *нулевой моде* суперсимметричного трансфер-матричного гамильтониана: $\mathcal{H} \hat{\Psi} = 0$.

Выделяя явно зависимость волновой функции от грассмановых переменных,

$$\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \bar{\chi}, \chi) = \Psi(\theta, \lambda) + \Phi(\theta, \lambda) \bar{\chi} \chi, \quad (2.20)$$

мы можем представить гамильтониан как обычный 2×2 дифференциальный оператор, действующий на вектор (Ψ, Φ) , см. Приложение Б.2.2. Вследствие симметрии Бекки-Руэ-Стора-Тютина (БРСТ) теории [78], существует связь между Ψ и Φ , что позволяет написать уравнение на одну функцию. В данном случае эта редукция имеет вид $\Phi = -i\partial_\theta\Psi/\lambda$ (см. Б.2.4), что приводит к следующему уравнению:

$$(\lambda\partial_\lambda\partial_\theta\lambda^{-1} + \omega^2\lambda\sin\theta + i\alpha\lambda^2\cos^2\theta)\Psi(\theta,\lambda) = 0. \quad (2.21)$$

Структура дифференциального оператора предполагает переход к новой функции $\psi(\theta,\lambda) = i\Psi(\theta,\lambda)/\lambda$, которая и будет основным объектом в нашей теории. Также сделаем преобразование Фурье по переменной λ к сопряженному импульсу p : $\psi(\theta,\lambda) = \int \psi(\theta,p)e^{ip\lambda}dp$. В терминах функции $\psi(\theta,p)$, Ур. (2.21) принимает вид:

$$(p\partial_\theta + \omega^2\sin\theta\partial_p - \alpha\cos^2\theta\partial_p^2)\psi(\theta,p) = 0. \quad (2.22)$$

Примечательно, что Ур. (2.22) математически совпадает с уравнением ФП для стохастической динамики (2.1) (в его линеаризованной форме, известной как уравнение Крамерса [71; 81]). Существенное различие, однако, заключается в том, что независящее от времени уравнение ФП описывает стационарную функцию распределения $P(\theta,p)$ *всех траекторий*, тогда как Ур. (2.22) записывается для вспомогательной функции $\psi(\theta,p)$, которая связана со статистикой *единственной* ННПТ.

Для того, чтобы выразить мгновенную $P(\theta,p)$ в терминах $\psi(\theta,p)$, нужно вычислить интеграл (2.17) с дополнительным множителем $\delta[\theta - \theta(t)]\delta[p - d\theta(t)/dt]$. Вычисление, приведенное в Приложении Б.2.5, дает

$$P(\theta,p) = \{\psi(\theta,p), \psi(\theta, -p)\}_{\theta,p}, \quad (2.23)$$

где $\{f,g\}_{\theta,p} = (\partial_\theta f)(\partial_p g) - (\partial_p f)(\partial_\theta g)$ – скобка Пуассона. Билинейная зависимость PDF от ψ отражает тот факт, что ННПТ содержит знания как о прошлом ($p > 0$), так и о будущем ($p < 0$) [ср. вычисление с помощью фейнмановской функции Грина, которая приводит к Ур. (2.7)]. Аналогичная билинейная зависимость корреляций одноточечной волновой функции от нулевой моды гамильтониана хорошо известна в теории квазиодномерной локализации Андерсона [42; 82; 83].

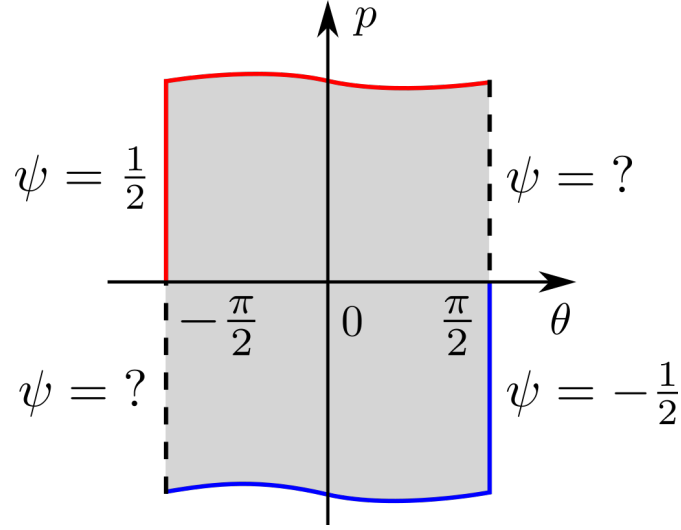


Рисунок 2.2 — Граничные условия (2.24) к Ур. (2.22) для функции $\psi(\theta, p)$. Последняя подлежит определению внутри заштрихованной области и на двух пунктирных отрезках границы.

2.3.3 Граничные условия для нулевой моды

Важным элементом нашей теории являются *граничные условия* для Ур. (2.22), которые гарантируют, что траектория никогда не покидает область $|\theta(t)| < \pi/2$. Это означает, что ННПТ должна приближаться к границам $\theta = \pm\pi/2$ с нулевой скоростью: $P(\pi/2, p) = P(-\pi/2, p) = 0$. В соответствии с выражением (2.23), это означает, что ψ должна быть постоянной на границе. Однако, поскольку PDF является билинейной по ψ , оказывается возможным ослабить это требование и наложить граничные условия только на половине линий $\theta = \pm\pi/2$:

$$\psi(\pi/2, p < 0) = \psi(\theta, -\infty) = -1/2, \quad (2.24a)$$

$$\psi(-\pi/2, p > 0) = \psi(\theta, \infty) = 1/2. \quad (2.24b)$$

Эти граничные условия показаны на Рис. 2.2. Поскольку PDF (2.23) выражается в терминах производных ψ , ее точное значение на границе может быть выбрано произвольным. Однако единичная нормировка $P(\theta, p)$ накладывает ограничение $\psi(\theta, \infty) - \psi(\theta, -\infty) = 1$, см. Приложение Б.3. Разрешая его симметричным образом, мы приходим к Ур. (2.24).

Отметим, что условия (2.24) не принадлежат ни к одному известному типу граничных условий для уравнения ФП, обсуждаемых в литературе (поглощающая стенка [84], идеально отражающая стенка [71], неупруго отражающая стенка [85]). Все эти граничные условия относятся к стандартной ситуации, когда речь идет о временной эволюции функции распределения. Напротив, граничные условия (2.24) к эффективному уравнению ФП (2.22) описывают поведение единственной ННПТ.

В какой-то степени наши граничные условия напоминают условия для поглощающих стенок [84]: оба они не задают распределение для исходящих импульсов и фиксируют распределение для входящих импульсов. Однако в то время как поглощающая стенка не отражает частицы обратно, условия (2.24) действует как источник входящих частиц с независимым от импульса потоком, который имеет разные знаки на противоположных участках границы.

2.4 Решение для ψ в разных режимах.

Решение уравнения ФП (2.22) с граничными условиями (2.24) представляет собой довольно нетривиальную задачу в силу своей нелокальности: функция ψ на части границы, $\psi(\pi/2, p > 0)$ и $\psi(-\pi/2, p < 0)$, должна быть найдена одновременно с решением внутренней задачи. Ниже мы покажем, что система Ур. (2.22) и (2.24) действительно дает полное статистическое описание ННПТ. В предельных случаях решение будет получено аналитически, тогда как при произвольных α/ω^3 следует прибегнуть к численному моделированию. Результаты для функции $\psi(\theta, p)$ показаны на рис. 2.3 в пределе слабого ($\alpha/\omega^3 \ll 1$) и сильного ($\alpha/\omega^3 \gg 1$) шума.

2.4.1 Отсутствие горизонтальной силы

В этом тривиальном случае $\alpha = 0$, уравнение ФП становится уравнением первого порядка и может быть элементарно решено:

$$\psi(\theta, p) = \frac{1}{2} \text{sign}(p - 2\omega \sin \theta/2). \quad (2.25)$$

Тогда две производные в скобке Пуассона (2.23) порождают две дельта-функции в PDF: $P(\theta, p) = \delta(\theta)\delta(p)$, как и ожидалось, поскольку ННПТ в этом случае является просто неустойчивым верхним положением маятника.

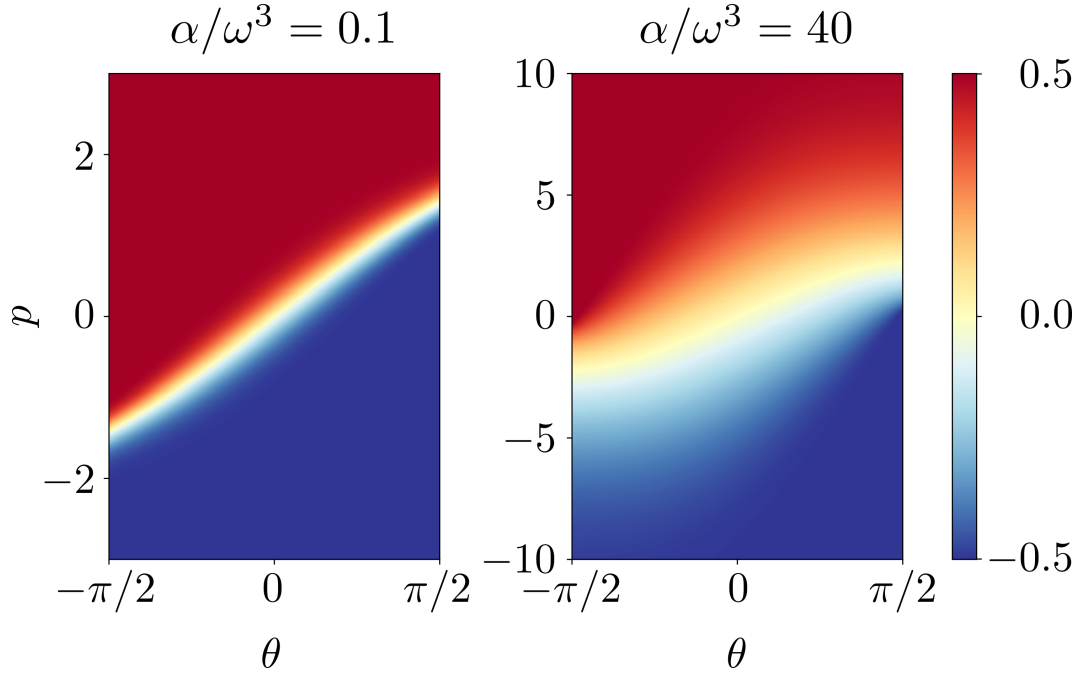


Рисунок 2.3 — Нулевые моды $\psi(\theta, p)$ для $\alpha/\omega^3 = 0.1$ (слабый шум) и 40 (сильный шум), полученные численным решением уравнения (2.22) с граничными условиями (2.24).

2.4.2 Случай слабого шума

В случае $\alpha \ll \omega^3$ резкий скачок на линии $p = 2\omega \sin \theta/2$ размазывается, как видно на Рис. 2.3(а). Чтобы найти PDF, которая локализована на малых

углах, оператор в Ур. (2.22) может быть заменен его линеаризованной версией: $p\partial_\theta + \omega^2\theta\partial_p - \alpha\partial_p^2$. Тогда нулевая мода принимает вид

$$\psi(\theta, p) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}[\kappa(p - \omega\theta)], \quad (2.26)$$

где $\kappa = (\omega/2\alpha)^{1/2}$; в этом пределе $\kappa\omega \gg 1$. Подставляя $\psi(\theta, p)$ в выражение (2.23), мы приходим к известному нам результату для слабого шума (2.7). Таким образом, мы продемонстрировали, что наш подход, основанный на уравнении ФП (2.22) с граничными условиями (2.24), легко воспроизводит статистику ННПТ в пределе слабого шума.

2.4.3 Точное решение в пределе $\omega \rightarrow 0$.

Другим частным случаем, когда статистика ННПТ может быть найдена аналитически, является предел *исчезающей вертикальной силы*, $\omega = 0$ (либо бесконечно сильный шум). Тогда, один из трех членов в операторе ФП в Ур. (2.22) исчезает, и последний может быть приведен к канонической форме путем разделения переменных:

$$\partial_\tau \psi = q^{-1} \partial_q^2 \psi, \quad (2.27)$$

где τ и q — новые координата и скорость, определяемые выражениями:

$$\tau = \frac{4}{\pi} \int_0^\theta \cos^2 \theta' d\theta' = \frac{2\theta + \sin 2\theta}{\pi}, \quad q = \left(\frac{4}{\pi\alpha} \right)^{1/3} p. \quad (2.28)$$

Нормировка τ выбрана так, что границы $\theta = \pm\pi/2$ переходят в $\tau = \pm 1$.

Решение Ур. (2.27), удовлетворяющего граничным условиям (2.24), может быть получено с помощью мультипликативного преобразования Эйри [86] и дается формулой (см. Приложение Б.4)

$$\psi(\tau, q) = \frac{3 \operatorname{Ai}'(0)}{\operatorname{Ai}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{Ai}[(3/2)^{2/3} \mu^2] \operatorname{Ai}(\mu q) e^{\mu^3 \tau}. \quad (2.29)$$

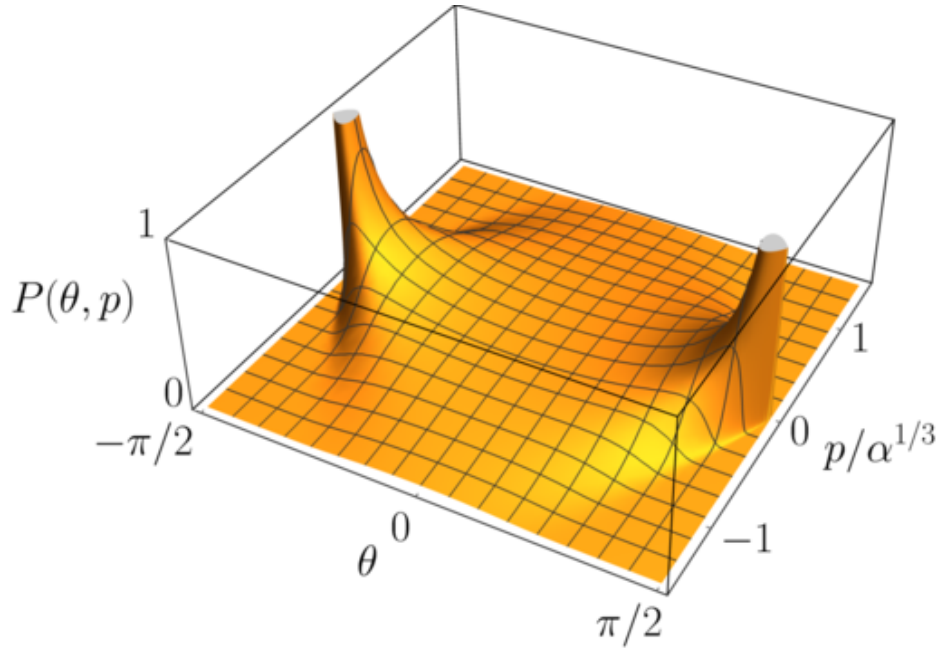


Рисунок 2.4 — Совместная функция распределения угла и импульса ННПТ для случая $\omega = 0$, задаваемая уравнением (2.32).

Производная по импульсу, необходимая для вычисления PDF, вычисляется так, как описано в Приложении Б.4:

$$\partial_q \psi = -\frac{3^{1/6} \text{Ai}'(0) \text{Ai}(s^2) \exp\left(\frac{2}{3}\tau s^3\right)}{\text{Ai}(0) (1 - \tau^2)^{1/6}}, \quad (2.30)$$

где $s = q/[6(1 - \tau^2)]^{1/3}$. Производная по координате $\partial_\tau \psi$ может быть легко получена прямо из Ур. (2.27). Благодаря структуре скобки Пуассона в Ур. (2.23), нормированная функция распределения в переменных τ и q дается аналогичным выражением: $P(\tau, q) = \{\psi(\tau, q), \psi(\tau, -q)\}_{\tau, q}$, и мы приходим к

$$P(\tau, q) = -\frac{2^{4/3}}{3^{1/3}} \left(\frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} \right)^2 \frac{\text{Ai}(s^2) \text{Ai}'(s^2)}{1 - \tau^2}. \quad (2.31)$$

Совместная функция распределения исходного угла и скорости получается из $P(\tau, q)$ преобразованием переменных. Она имеет вид

$$P(\theta, p) = \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial p} P(\tau, q) = -\frac{16 \cos^2 \theta}{3^{1/3} \pi^{4/3} \alpha^{1/3}} \left(\frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} \right)^2 \frac{\text{Ai}(s^2) \text{Ai}'(s^2)}{1 - \tau^2} \quad (2.32)$$

и показана на Рис. 2.4. Когда θ приближается к краям $\pm\pi/2$, функция распределения сжимается в направлении p , так что маятник касается горизонтального положения с нулевой скоростью: $P(\pm\pi/2, p) = 0.338 \delta(p)$.

Интегрируя по q помощью Ур. (Б.52), мы получим функцию распределения по координате τ :

$$P(\tau) = \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)\Gamma(1/2)} \frac{1}{(1 - \tau^2)^{2/3}}, \quad (2.33)$$

тут $\Gamma(z)$ — гамма функция. Сингулярности $P(\tau)$ вблизи краев ($\tau \rightarrow \pm 1$) исчезают в функции распределения $P(\theta) = (\partial\tau/\partial\theta)P(\tau)$ исходного угла θ :

$$P(\theta) = \frac{4}{\pi^{1/6}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \frac{\cos^2 \theta}{[\pi^2 - (2\theta + \sin 2\theta)^2]^{2/3}}, \quad (2.34)$$

которая показана сплошной красной линией на Рис. 2.5(d). Примечательно, что $P(\theta)$ почти не зависит от угла, с минимумом 0.303 в вертикальном положении и максимумом 0.338 в горизонтальном положении маятника ($\theta = \pm\pi/2$).

2.4.4 Случай произвольной силы шума

При произвольных значениях α/ω^3 Ур. (2.22) с граничными условиями (2.24) нужно решать численно. Стандартный метод конечных элементов, естественным образом обобщенный для включения частей границы с неизвестными $\psi(\theta, p)$, оказывается устойчивым. Два решения для $\psi(\theta, p)$, полученные численно при репрезентативных значениях α/ω^3 , показаны на Рис. 2.3. Соответствующие функции распределения угла на ННПТ, $P(\theta)$, полученные путем интегрирования $P(\theta, p)$, найденных из Ур. (2.23), по p , показаны сплошными синими линиями на Рис. 2.5(b,c).

На рисунке 2.5 также показаны результаты прямого численного моделирования уравнения маятника (2.1) со случайно сгенерированными реализациями $f(t)$ и подбором начальных условий, реализующих непадающую траекторию. Соответствующие гистограммы для $P(\theta)$ показаны зеленым цветом.

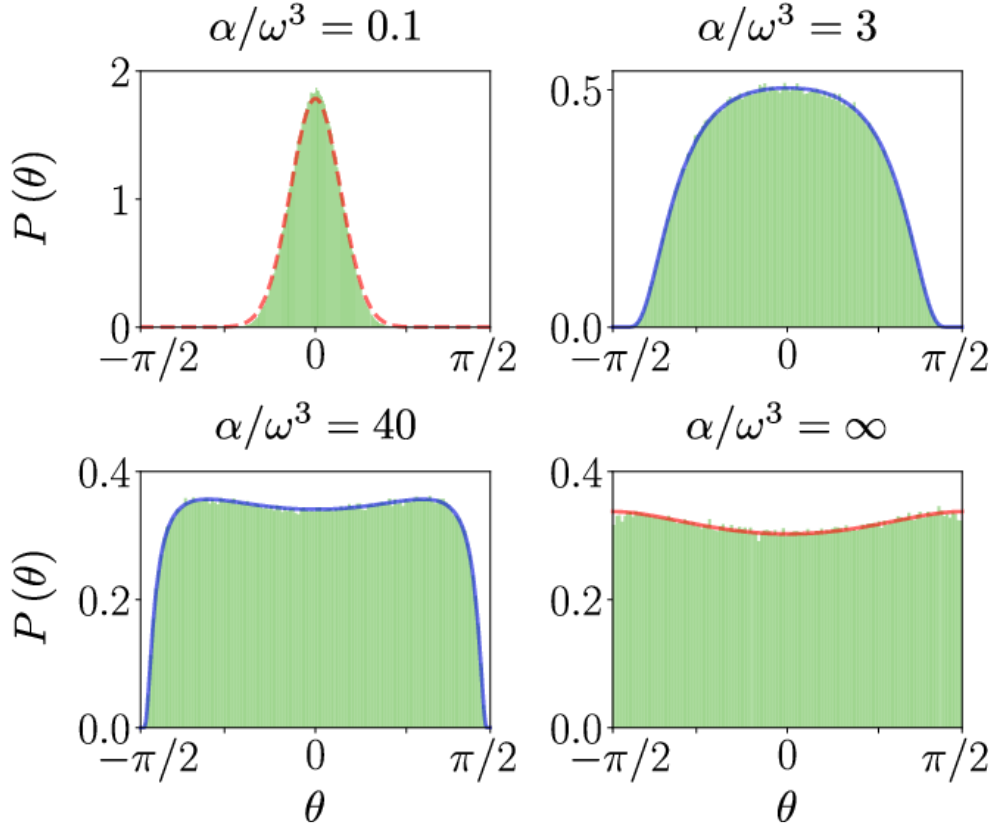


Рисунок 2.5 — Функция распределения углов ННПТ, $P(\theta)$, для нескольких значений α/ω^3 : (a) 0.1, (b) 3, (c) 40, (d) ∞ . Зеленые гистограммы получены прямым моделированием методом Монте-Карло уравнения (2.1). Пунктирная красная линия на панели (a) — решение (2.7) для слабой накачки. Численные решения Ур. (2.22) и (2.24) показаны синими линиями. Сплошная красная линия на панели (d) — аналитическое решение (2.34) для $\omega = 0$.

Идеальное согласие между $P(\theta)$, полученными из Ур. (2.22)–(2.24) и прямым численным моделированием Ур. (2.1), подтверждает обоснованность нашего теоретического описания статистики ННПТ, где усреднение беспорядка выполняется на начальном этапе вычислений.

С увеличением силы шума α узкое гауссово распределение (2.7) (красная пунктирная линия на рис. 2.5(a)) становится шире, и при $\alpha/\omega^3 \sim 1$ распространяется почти на весь интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Дальнейшее увеличение α приводит к сжатию малодоступных областей вблизи $|\theta| = \pi/2$ и образованию минимума при $\theta = 0$ (вертикальное положение) при $\alpha/\omega^3 \gtrsim 7$. В пределе $\alpha/\omega^3 \rightarrow \infty$ функция распределения становится почти плоской, с 10 % понижением при $\theta = 0$.

2.4.5 Универсальный скейлинг дальних хвостов по скорости

Теперь обсудим импульсную зависимость функции распределения $P(\theta, p)$ на больших p . Ее гауссова форма при малых α [Ур. (2.7)] переходит к распределению (2.31), связанном с функциями Эйри, в пределе больших α . В последнем случае дальняя по p асимптотика имеет вид

$$P_{\text{asympt}}(p) \propto \exp \left[-8|p|^3/9\pi\alpha(1 - \tau^2) \right]. \quad (2.35)$$

Такая форма далекого хвоста является характерной для нелинейных стохастических задач и возникает, например, при описании большого положительно-го градиента скорости в случайном уравнение Бюргера [87–89] и статистики экстремумов в случайном потенциале [90]. Как мы покажем ниже, такая форма описывает далекий хвост ННПТ для перевернутого маятника при произвольных значениях α . Действительно, подставляя в Ур. (2.22) решение в виде $\psi \propto \exp[-g(\theta)|p|^\beta]$, мы замечаем, что при больших $|p|$ членом пропорциональным ω^2 можно пренебречь. Отсюда однозначно фиксируется значение $\beta = 3$, и с помощью Ур. (2.23) мы приходим к Ур. (2.35). Асимптотическое выражение (2.35) применимо для $|p| > \omega \cos^{1/2} \theta$, при условии, что число в экспоненте велико.

Экспоненциальный хвост функции распределения (2.35) можно физически понять в терминах оптимальной флуктуации. Чтобы разогнать маятник до большого импульса p за время Δt , нужно приложить силу $f \sim p/\Delta t$. Вероятность P такой флуктуации можно оценить как $-\ln P \sim f^2 \Delta t / \alpha \sim p^2 / \alpha \Delta t$. Поскольку длительность импульса ограничена требованием невыхода за границу $|\theta| < \pi/2$, мы имеем $\Delta t \lesssim 1/p$ и, следовательно, $-\ln P \sim p^3 / \alpha$, в соответствии с Ур. (2.35).

2.5 ННПТ как минимайзер

Наконец, мы предлагаем взглянуть на непадающую траекторию (ННПТ) с другой точки зрения. Рассмотрим краевую задачу для Ур. (2.1) на конечном

временном интервале с $\theta(0) = \theta_1$ и $\theta(T) = \theta_2$, где как начальная, так и конечная точки расположены внутри полосы $|\theta_{1,2}| < \pi/2$. Численное моделирование показывает, что решение этой краевой задачи перестает быть единственным, если мы ослабим условие, что траектория остается внутри полосы $|\theta(t)| < \pi/2$. В дополнение к НПТ, которые существуют для всех T (см. 2.1), другие решения, которые покидают полосу, а затем возвращаются, появляются для более длинных интервалов, $T \gtrsim 1/\omega$. Мы можем сопоставить каждому решению $\theta(t)$ значение соответствующего классического механического действия, определяемого интегралом

$$A[\theta(t)] = \int_{t_1}^{t_2} [\dot{\theta}^2/2 + \omega^2(1 - \cos \theta) + f(t) \sin \theta] dt. \quad (2.36)$$

Численный анализ показывает, что НПТ обеспечивает глобальный минимум для $A[\theta(t)]$ среди всех решений краевой задачи и поэтому является *минимайзером* [88]. Этот факт обеспечивает связь между НПТ и уравнением Бюргерса (характеристики которого описываются уравнением типа маятника) и, в более широком смысле, с проблематикой одномерной турбулентности [87; 91; 92].

2.5.1 Средний лагранжиан на ННПТ без гравитации

Поскольку НПТ является минимайзером, интересно посмотреть, чему равен минимум этого действия. В пределе бесконечного временного интервала, когда речь идет о ННПТ, имеет смысл говорить о средней плотности действия, то есть, о среднем лагранжиане $\langle L \rangle$.

Для его вычисления исключим случайную силу $f(t)$ из интеграла (2.36), используя уравнение движения (2.1):

$$A[\theta(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\theta}^2/2 - \omega^2 \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} + \ddot{\theta} \tan \theta \right] dt. \quad (2.37)$$

Интегрируя член с $\ddot{\theta}$ по частям и пренебрегая граничными слагаемыми, получим

$$A[\theta(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - \omega^2 \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \right] dt. \quad (2.38)$$

Таким образом, среднее значение лагранжиана для ННПТ может быть записано в виде

$$\langle L \rangle = \langle K \rangle - \langle U_{\text{eff}} \rangle, \quad (2.39)$$

где $\langle K \rangle = \langle p^2 \rangle / 2$ — среднее значение кинетической энергии, а величина

$$\langle U_{\text{eff}} \rangle = \left\langle \frac{p^2}{\cos^2 \theta} \right\rangle + \omega^2 \left\langle \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \right\rangle \quad (2.40)$$

имела бы смысл среднего значения потенциальной энергии, если бы речь шла о стационарной задаче.

Используя полученные выше результаты, можно вычислить $\langle K \rangle$ и $\langle U_{\text{eff}} \rangle$ в случае слабого и сильного шума.

- В случае слабого шума ($\alpha \ll \omega^3$), используя (2.7), находим

$$\langle K \rangle = \frac{\alpha}{4\omega}, \quad \langle U_{\text{eff}} \rangle = 3\langle K \rangle. \quad (2.41)$$

- В случае сильного шума ($\alpha \gg \omega^3$), используя функцию распределения (2.32) и вычисляя интеграл с помощью формулы (Б.53), находим

$$\langle K \rangle = \frac{(\pi\alpha)^{2/3}}{3^{1/34}} \left(\frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} \right)^2 \approx 0.198 \alpha^{2/3}, \quad \langle U_{\text{eff}} \rangle = 4\langle K \rangle. \quad (2.42)$$

С большой долей условности, полученные результаты можно интерпретировать в духе вириальной теоремы, как если бы речь шла о движении в детерминистическом потенциале вида $U(x) \propto |\theta|^\beta$. В этом случае средние кинетическая и потенциальная энергии связаны соотношением $\langle U \rangle = (2/\beta)\langle K \rangle$. Поэтому можно сказать, что ННПТ в некотором смысле похожа на движение в потенциале $|\theta|^{2/3}$ при слабом шуме и в потенциале $|\theta|^{1/2}$ при сильном шуме.

2.6 Заключение

Главным результатом данной главы является развитие качественно нового подхода для описания статистики ННПТ управляемого перевернутого маятника под действием случайной горизонтальной силы со статистикой белого шума, позволяющего получить полное решение задачи. Используя теоретико-полевые методы статистической физики и физики конденсированных сред, мы выразили мгновенную совместную функцию распределения $P(\theta, p)$ через вспомогательную функцию ψ , удовлетворяющую уравнению Фоккера-Планка с новым типом граничных условий. В пределе очень сильного шума (без гравитации) выражение для функции распределения найдено аналитически. Для произвольной силы шума полученные уравнения могут быть легко решены численно, что гораздо проще и эффективнее, чем прямое численное моделирование ННПТ из уравнения движения с накоплением статистики. Мы показали, что оба подхода дают один и тот же результат.

В более широком контексте, задача о никогда не падающей траектории имеет много интересных связей с другими задачами математической физики: теорией минимайзеров (ННПТ — глобальный минимайзер классического действия), турбулентностью Бюргерса, редкими событиями в стохастических дифференциальных уравнениях и т. д. Мы ожидаем, что наш подход будет также востребован в теории управления. Результаты этой главы могут быть естественным образом обобщены на другие уравнения с ланжевеновским шумом, которые допускают непадающие траектории. Также можно рассмотреть сферический маятник, для которого также выполняется существование и единственность решения для произвольной силы. В последующих главах мы будем обобщать теорию на случай конечных временных интервалов, а также применим развитый метод к одномерному уравнению Узаделя.

Глава 3. Показатель Ляпунова и разновременные корреляционные функции НПТ

В этой главе мы продолжаем описание непадающих траекторий в стохастической задаче Уитни и рассматриваем круг вопросов, связанных с ляпуновской экспонентой для НПТ. Ляпуновская экспонента определяет как закон сходимости НПТ на конечном временном интервале к ННПТ на бесконечном временном интервале (см. Рис. 3.1), так и затухание разновременных корреляторов на ННПТ. С технической точки зрения, наш результат состоит в описании всего спектра трансфер-матричного гамильтониана, в то время как в Гл. 2 была исследована только его нулевая мода. На этом языке ляпуновская экспонента определяется энергией первого возбужденного состояния. Развитая теория позволяет вычислять любые корреляционные функции на НПТ на бесконечном, полубесконечном и конечных интервалах.

Мы покажем, что ляпуновская экспонента в задаче Уитни с накачкой в виде белого шума (2.2) может быть записана в виде

$$\lambda = \omega g(\alpha/\omega^3), \quad (3.1)$$

где функция $g(x)$ имеет следующие асимптотики:

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{8}x - \frac{525}{1024}x^2 + \dots, & x \ll 1; \\ 0.66 x^{1/3} + 0.26 + 0.30 x^{-1/3} \dots, & x \gg 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

В отсутствие накачки ($\alpha = 0$) ляпуновская экспонента $\lambda = \omega$ определяется экспоненциальной неустойчивостью траекторий вблизи верхнего положения маятника. При слабой накачке ($\alpha/\omega^3 \ll 1$) типичный угол НПТ имеет порядок $\theta \sim (\alpha/\omega^3)^{1/2}$, и нелинейность уравнения (2.1) приводит к увеличению ляпуновской экспоненты, которая может быть разложена в асимптотический ряд по степеням малого параметра α/ω^3 . Наконец, при сильной накачке ($\alpha/\omega^3 \gg 1$) ляпуновская экспонента становится независимой от ω , выходя на предельное значение $\lambda \approx 0.66 \alpha^{1/3}$. Найденная численно зависимость ляпуновской экспоненты от параметра α/ω^3 показана на Рис. 3.2.

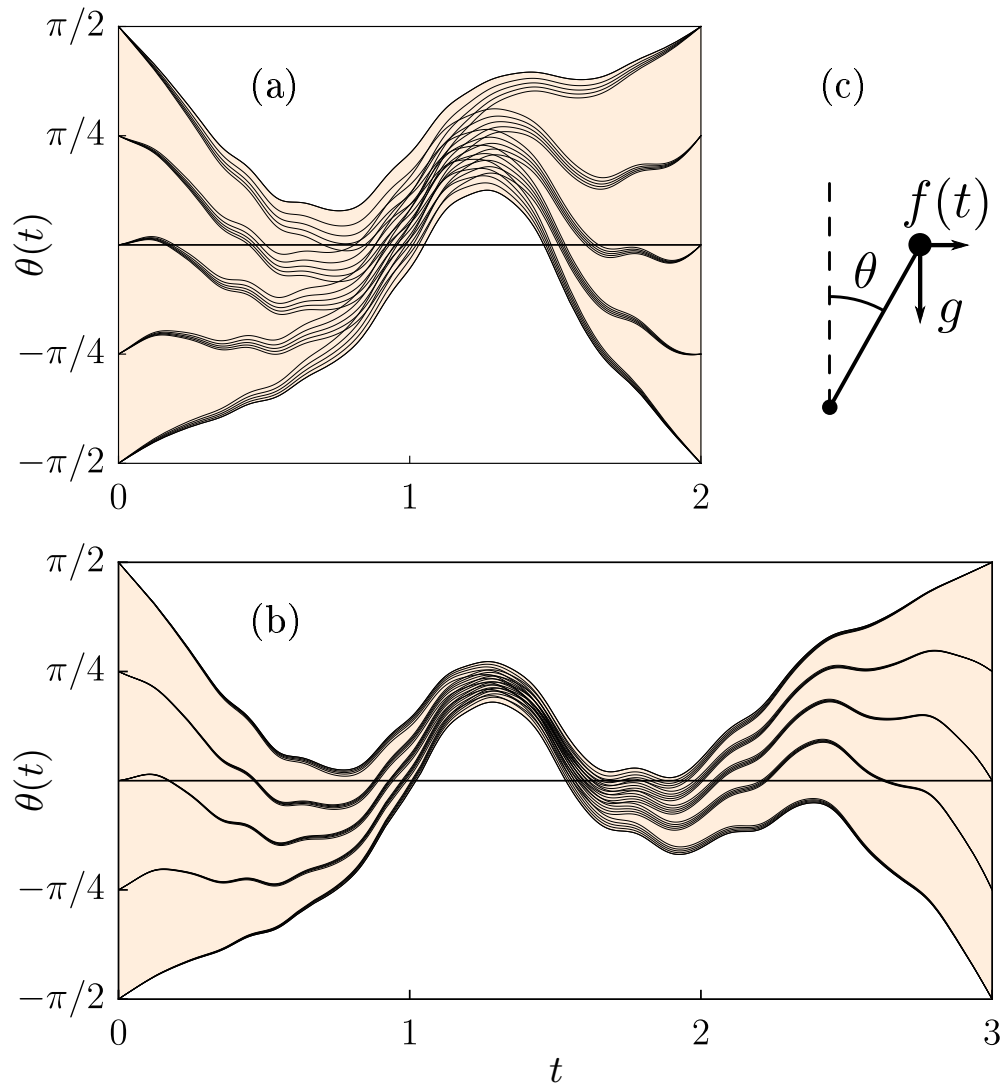


Рисунок 3.1 — Примеры непадающих траекторий для уравнения движения маятника (2.1), рассматриваемого на двух временных интервалах: (а) $T = 2/\omega$ и (б) $T = 3/\omega$. Для любого выбора θ_1 и θ_2 в верхней полуплоскости ($|\theta| < \pi/2$) существует единственное непадающее решение, удовлетворяющее граничным условиям $\theta(0) = \theta_1$ и $\theta(T) = \theta_2$. На графиках потроено по 25 таких траекторий с $\theta_{1,2} = (-1, -0.5, 0, 0.5, 1) \times \pi/2$. В обоих случаях возбуждающая сила выбрана в виде $f(t) = 4 \sum_{n=1}^{40} \cos(kt + k^4)$. (в) Перевернутый маятник под действием горизонтальной силы.

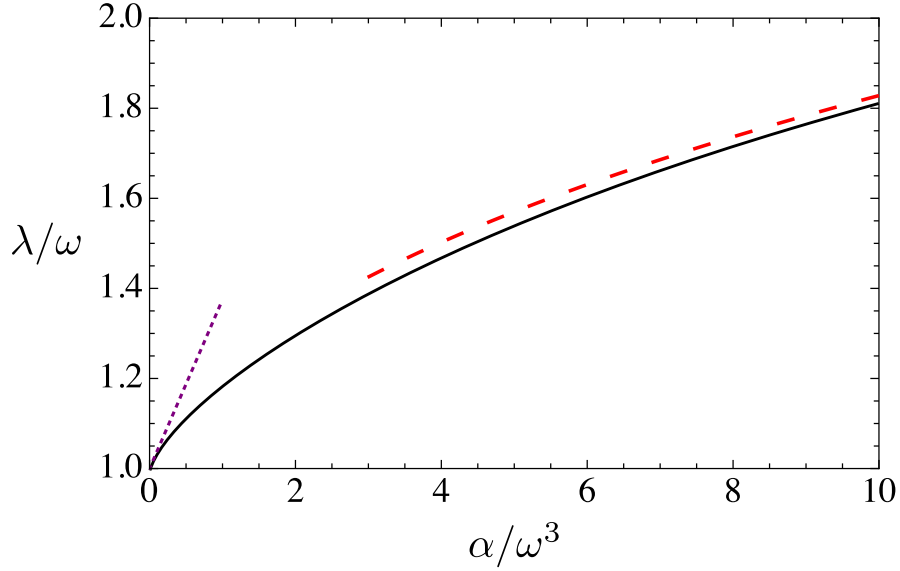


Рисунок 3.2 — Зависимость ляпуновской экспоненты для НПТ от силы накачки, измеряемой параметром α/ω^3 . Пунктиром показана линейная часть асимптотики при малых α , а штриховой линией — первые три члена разложения (3.2) на больших x .

3.1 Временное трансфер-матричное уравнение

Согласно подходу, развитому в Главе 2, статистические свойства НПТ выражается через двухкомпонентную «волновую функцию» $\hat{\Psi}(\theta, p) = (\Psi, \Phi)^T$, чья эволюция дается уравнением Шредингера во мнимом времени с соответствующим трансфер-матричным гамильтонианом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = -\mathcal{H} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} L & -1 \\ V_2 & L \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где L — оператор Фоккера-Планка для задачи Крамерса [71]:

$$L = p\partial_\theta + \omega^2 \sin \theta \partial_p - \alpha \cos^2 \theta \partial_p^2, \quad (3.4)$$

а потенциал V_2 имеет вид

$$V_2 = -\omega^2 \cos \theta - \alpha \sin 2\theta \partial_p. \quad (3.5)$$

В Главе 2 мы исследовали одноточечную корреляционную функцию ННПТ на бесконечном временном интервале, которая определяется нулевой модой $\hat{\Psi}_0$ гамильтониана \mathcal{H} . Нахождение нулевой моды значительно упрощается благодаря наличию БРСТ симметрии действия стохастической динамики в представлении Паризи и Сурла [78], что позволяет выразить обе компоненты $\hat{\Psi}(\theta, p)$ через скалярный суперпотенциал $\psi(\theta, p)$ посредством

$$\Psi = \partial_p \psi, \quad \Phi = -\partial_\theta \psi. \quad (3.6)$$

При этом временная эволюция суперпотенциала ψ определяется оператором Фоккера-Планка L :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -L\psi. \quad (3.7)$$

Однако редукция (3.6) не работает ни для вычисления разновременных корреляционных функций ННПТ, ни для описания статистики НПТ на интервалах с краем. В первом случае БРСТ симметрия нарушается операторами физически наблюдаемых величин, действующих одинаково на Ψ и Φ компоненты волновой функции, а во втором — БРСТ-несимметричным начальным условием на краю интервала (см. уравнение (3.8) ниже). В обоих случаях для описания статистики НПТ необходимо работать с двухкомпонентной волновой функцией (Ψ, Φ) и понимать свойства гамильтониана \mathcal{H} .

3.1.1 Описание границы

Обсудим, как выглядит начальное условие для волновой функции на краю интервала. Для обеспечения единственности НПТ необходимо зафиксировать значение θ на краю. (Вообще говоря, можно задавать значение $\dot{\theta}$ или даже линейную комбинацию θ и $\dot{\theta}$, но для простоты будем считать, что фиксирован угол.) По построению, волновая функция $\hat{\Psi}$ тесно связана со статистической суммой суперсимметричного функционального интеграла. На краю интервала она не может содержать грасмановых переменных, что приводит к занулению компоненты Φ . Таким образом, волновая функция на краю интервала, где за-

фиксировано значение $\theta = \theta_0$, имеет вид

$$\hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} = \begin{pmatrix} \omega^{-1} \delta(\theta - \theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим краевую задачу на интервале $[T_L, T_R]$ с граничными условиями $\theta(t_L) = \theta_L$ и $\theta(t_R) = \theta_R$. Суть сведения функционального интеграла Пари́зи-Сурла к квантовой механике (3.3) заключается в том, что корреляционная функция $\langle O_1(t_1) O_2(t_2) \dots \rangle$ физических величин O_i в моменты времени t_i ($t_1 < t_2 < \dots$) может быть представлена как матричный элемент

$$\langle \hat{\Psi}_{\theta_R}^{(b)} | \dots O_2(t_2) e^{-\mathcal{H}(t_2-t_1)} O_1(t_1) e^{-\mathcal{H}(t_1-t_L)} | \hat{\Psi}_{\theta_L}^{(b)} \rangle, \quad (3.9)$$

где скалярное произведение двух волновых функций определено как

$$\langle \hat{\Psi} | \hat{\Psi}' \rangle = \int d\theta dp [\Psi(\theta, p) \Phi'(\theta, -p) + \Phi(\theta, p) \Psi'(\theta, -p)]. \quad (3.10)$$

В Главе 2 мы изучали одновременную совместную функцию распределения $P(\theta, p)$ угла и скорости для ННПТ, которая соответствует оператору $O = \delta(\theta - \theta_0) \delta(p - p_0)$. Заменяя $\hat{\Psi}_{L,R}$ на нулевую моду и используя уравнение (3.6), можно выразить $P(\theta, p)$ через скобку Пуассона от суперпотенциала ψ :

$$P(\theta, p) = \{ \psi(\theta, p), \psi(\theta, -p) \}_{\theta, p}. \quad (3.11)$$

Неэрмитовость оператора Фоккера-Планка

Гамильтониан \mathcal{H} в уравнении (3.3), равно как и оператор Фоккера-Планка (3.4), является неэрмитовым. Такие операторы, вообще говоря, могут не иметь полной системы собственных функций. Известно, однако, что в присутствии вязкости оператор Фоккера-Планка может быть приведен к диагональному виду [71], что позволяет построить систему биортогональных собственных функций и работать с ними практически как с собственными функциями эрмитового оператора [93]. В нашем случае вязкость отсутствует, поэтому следует ожидать,

что операторы \mathcal{H} и L приводятся к нормальной жордановой форме. Следствием этого является не простое экспоненциальное затухание корреляторов при $t \rightarrow \infty$, а появление дополнительных степеней времени (как это видно, например, в выражении (3.28)).

3.1.2 Предел слабого шума

Для иллюстрации развитого подхода остановимся подробно на случае *слабого шума* ($\alpha/\omega^3 \ll 1$), когда жорданова структура операторов \mathcal{H} и L может быть исследована аналитически. Начнем с оператора Фоккера-Планка. В рассматриваемом пределе отклонение маятника от вертикали мало ($\theta \ll 1$), и оператор (3.4) может быть заменен на

$$L = p\partial_\theta + \omega^2\theta\partial_p - \alpha\partial_p^2. \quad (3.12)$$

Нулевая мода этого оператора, отвечающая ННПТ, имеет вид:

$$\psi_0(\theta, p) = \operatorname{erf}(z)/2, \quad (3.13)$$

где мы ввели «голоморфную» и «антиголоморфную» координаты, отличающиеся знаком импульса:

$$z = \kappa(p - \omega\theta), \quad \bar{z} = -\kappa(p + \omega\theta), \quad (3.14)$$

где $\kappa = \sqrt{\omega/2\alpha}$. Спектр оператора (3.12) может быть найден с помощью тождества $[L, \partial_z] = \omega\partial_z$, что позволяет получать собственные функции, последовательно дифференцируя нулевую моду по z . Таким образом находим собственную функцию n -го возбужденного состояния ($n = 1, 2, 3, \dots$) с энергией $\epsilon_n = n\omega$:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} H_{n-1}(z) e^{-z^2}, \quad (3.15)$$

где $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} d^n e^{-z^2} / dz^n$ — полиномы Эрмита (в физическом определении). Однако построенные таким образом функции $\psi_n(\theta, p)$ зависят только от

разности $p - \omega\theta$ (не содержат \bar{z}) и, следовательно, не образуют полного базиса. Данное обстоятельство связано с тем, что неэрмитов оператор (3.4) приводится к жордановой нормальной форме, и помимо собственных имеет ряд присоединенных функций, отвечающих тому же самому собственному числу ϵ_n . Легко убедиться, что собственная функция ψ_n имеет $n - 1$ присоединенных функций, которых мы выберем в виде

$$\psi_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} H_k(\bar{z}) H_{n-k-1}(z) e^{-z^2}, \quad (3.16)$$

где индекс k пробегает значения от 1 до $n - 1$. Вместе с $\psi_{n,0} = \psi_n$ они образуют базис жордановой клетки размерности n , отвечающей энергии $\epsilon_n = n\omega$:

$$L\psi_{n,k} = \epsilon_n \psi_{n,k} + \omega \psi_{n,k-1} \quad (3.17)$$

(чтобы оборвать цепочку на собственной функции $\psi_{n,0}$, положим $\psi_{n,-1} = 0$).

Построенная система функций является полной. Произвольная функция может быть разложена по базису $\psi_{n,k}$, используя соотношения ортогональности

$$\langle \psi_{n,k} | \psi_{n',k'} \rangle_z = (-1)^{n-1} \delta_{n,n'} \delta_{k+k'+1,n}, \quad (3.18)$$

где скалярное произведение $\langle \cdot | \cdot \rangle_z$ определено как

$$\langle \psi | \psi' \rangle_z = \int dz d\bar{z} \psi(\bar{z}, z) \psi'(z, \bar{z}), \quad (3.19)$$

так что перестановка аргументов в одной из функций согласована со сменой знака p в уравнении (3.10). Отметим, что меры интегрирования в уравнениях (3.10) и (3.19) связаны посредством $dz d\bar{z} = 2\omega\kappa^2 d\theta dp$.

При эволюции волновой функции $\psi_{n,k}$ под действием оператора L к ней подмешиваются другие состояния жордановой клетки, отвечающие той же энергии, что приводит к появлению степеней t на фоне экспоненциального затухания:

$$e^{-Lt} \psi_{n,k} = e^{-n\omega t} \sum_{m=0}^k \frac{(-\omega t)^m}{m!} \psi_{n,k-m}. \quad (3.20)$$

Перейдем теперь к изучению спектральных свойств гамильтониана \mathcal{H} в уравнении (3.3). В рассматриваемом случае слабого шума уравнение (3.5) да-

ет $V_2 = -\omega^2$, что разбивает пространство состояний \mathcal{H} на четный и нечетный сектора с волновыми функциями $\hat{\Psi}_{e,o} = (\Psi, \pm \omega\Psi)^T$, которые эволюционируют независимо с гамильтонианами $\mathcal{H}_{e,o} = L \mp \omega$. Таким образом, построенная выше система собственных и присоединенных функций оператора L позволяет полностью описать эволюцию дублета $\hat{\Psi}$ под действием гамильтониана \mathcal{H} .

Найдем, как в пределе $\alpha/\omega^3 \ll 1$ происходит эволюция волновой функции (3.8) при удалении от границы. Раскладывая ее на четную и нечетную компоненты, получаем

$$e^{-\mathcal{H}t}\hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} = \begin{pmatrix} \cosh \omega t \\ \omega \sinh \omega t \end{pmatrix} e^{-Lt}\delta(\theta - \theta_0). \quad (3.21)$$

Для вычисления эволюции дельта функции, разложим ее по базису $\psi_{n,k}$:

$$\delta(\theta - \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} \psi_{n,k}. \quad (3.22)$$

Коэффициенты $c_{n,k}$ находятся с помощью соотношений ортогональности (3.18) и свойства полиномов Эрмита

$$H_n(x+y) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (2y)^{n-m} H_m(x), \quad (3.23)$$

следующего из разложения в ряд Тейлора, и даются формулой

$$c_{n,k} = (-1)^{n-1} 2\kappa\omega \frac{(2\kappa\omega\theta_0)^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!}. \quad (3.24)$$

Эволюции дельта функции в уравнении (3.21) находится из разложения (3.22) и соотношений (3.20). Память о границе забывается за характерное время ω^{-1} (обратная ляпуновская экспонента). За это время теряется различие между двумя компонентами волновой функции $\hat{\Psi}$, и обе они выходят на значение, определяемое состоянием $\psi_{1,0}$, отвечающим минимальной энергии $\epsilon_1 = \omega$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mathcal{H}t}\hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} = \hat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} \kappa\psi_{1,0}, \quad (3.25)$$

что и есть нулевая мода уравнения (3.3) в пределе $\alpha/\omega^3 \ll 1$.

3.1.3 Корреляционные функции

Покажем, как построенная спектральная теория операторов \mathcal{H} и L позволяет систематически вычислять различные корреляционные функции НПТ в случае слабого шума. Результаты данного раздела могут быть получены и напрямую, используя явное выражение для НТП через $f(t)$ с последующим усреднением по гауссовому белому шуму (2.2), как это сделано в Разделе 2.2. Однако их вывод с помощью трансфер-матричного формализма представляется методически важным, так как иллюстрирует общую схему и позволяет убедиться в ее работоспособности.

Начнем рассмотрение с вычисления парного коррелятора углов для НН-ПТ на всей действительной оси. Подставляя в общую формулу (3.9) нулевую моду в виде (3.25) и учитывая, что в результате остается только четный сектор теории, искомый коррелятор можно выразить через скалярное произведение (3.19) в z -представлении следующим образом:

$$\langle \theta(0)\theta(t) \rangle = \langle \psi_{1,0} | \theta e^{-(L-\omega)t} \theta | \psi_{1,0} \rangle_z. \quad (3.26)$$

С помощью уравнений (3.14) и (3.16) можно выразить $\theta\psi_{1,0}$ через функции $\psi_{2,0}$ и $\psi_{2,1}$. Используя закон эволюции (3.20), находим

$$e^{-(L-\omega)t} \theta \psi_{1,0} = e^{-\omega t} \frac{\psi_{2,1} - (1/2 + \omega t)\psi_{2,0}}{2\kappa\omega}. \quad (3.27)$$

Считая матричный элемент (3.26) как перекрытие между состояниями $e^{-(L-\omega)t} \theta \psi_{1,0}$ и $\theta \psi_{1,0}$ с помощью соотношений (3.18), находим искомый парный коррелятор [ср. с выражением (2.12)]:

$$\langle \theta(0)\theta(t) \rangle = \langle \theta^2 \rangle (1 + \omega t) e^{-\omega t}, \quad (3.28)$$

где средний квадрат угла на ННПТ

$$\langle \theta^2 \rangle = \alpha / 2\omega^3. \quad (3.29)$$

Появление на фоне $e^{-\omega t}$ линейно растущего со временем вклада связано с возбуждением состояний $\psi_{2,0}$ и $\psi_{2,1}$, отвечающих жорданову блоку размерности 2.

Аналогичным образом можно вычислить и более сложные корреляторы ННПТ. Например [ср. с выражением (2.13)],

$$\langle \theta^2(0)\theta^2(t) \rangle = \langle \theta^2 \rangle^2 [1 + 2(1 + \omega t)^2 e^{-2\omega t}]. \quad (3.30)$$

Формально, здесь оператор θ^2 , примененный к $\psi_{1,0}$, возбуждает жорданов триплет $\psi_{3,0}$, $\psi_{3,1}$, $\psi_{3,2}$, что приводит к появлению членов вплоть до t^2 на фоне экспоненциального убывания. Структура же коррелятора (3.30) связана с гауссовой статистикой θ на ННПТ, позволяющей выразить его через парный коррелятор (3.28) с помощью теоремы Вика. Обобщение развитого формализма на многоточечные корреляторы также не представляет труда.

В качестве следующего примера рассмотрим вычисление среднего значения угла $\langle \theta(t) \rangle_{\theta_0}$ для НПТ на полубесконечном временном интервале $t > 0$ с граничным условием $\theta(0) = \theta_0$. Согласно уравнению (3.9), средний угол дается матричным элементом $\langle \theta(t) \rangle_{\theta_0} = \langle \hat{\Psi}_0 | \theta e^{-\mathcal{H}t} | \hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} \rangle$. Проще всего его вычислить, свернув найденное выше выражение (3.27) с волновой функцией на границе (3.8). Интегрируя по импульсу, видим, что вклад от $\psi_{2,0} = 2ze^{-z^2}/\sqrt{\pi}$ исчезает в силу нечетности по z , и получаем простое экспоненциальное убывание

$$\langle \theta(t) \rangle_{\theta_0} = \theta_0 e^{-\omega t}. \quad (3.31)$$

Этот же ответ можно получить и другим способом, посчитав матричный элемент θ между нулевой модой $\psi_{1,0}$ и проэволюционированной граничной волновой функцией (3.21). Такие матричные элементы отличны от нуля только с жордановым дублетом $\psi_{2,0}$ и $\psi_{2,1}$. Однако, согласно (3.24), $\psi_{2,1}$ не входит в разложение дельта функции, а $\psi_{2,0}$ является собственной и не генерирует при эволюции линейного члена. В результате, мы снова приходим к выражению (3.31).

Сравнение выражений (3.28) и (3.31) показывает, что, несмотря на наличие дополнительного множителя ωt в уравнении (3.28), ляпуновская экспонента может быть стандартным образом определена из асимптотического поведения

как одного, так и другого коррелятора на больших временах:

$$\lambda = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \ln \langle \theta(0) \theta(t) \rangle}{\partial t} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \ln \langle \theta(t) \rangle_{\theta_0}}{\partial t}. \quad (3.32)$$

3.2 Ляпуновская экспонента

Остановимся теперь на вопросе о вычислении ляпуновской экспоненты для НПТ при произвольных значениях параметра α/ω^3 . Ляпуновская экспонента, определяющая затухание корреляций на больших временах, определяется энергией первого возбужденного состояния. Как мы показали выше, в случае слабой накачки $\lambda = \omega$. При увеличении параметра α/ω^3 ангармонизм маятника приводит к отклонению λ от ω .

3.2.1 Слабый шум: пертурбативный анализ

При малом значении параметра $\alpha/\omega^3 \ll 1$ нелинейные члены в уравнении (3.4) могут быть учтены по теории возмущений, что позволяет получить как поправку к собственной функции ψ_n , которая становится зависящей и от «антиголоморфной» координаты \bar{z} , так и поправку к собственному значению ϵ_n . Особенно просто данная процедура выглядит для первого возбужденного состояния, которое не вырождено и не имеет присоединенных собственных функций. Для этого представим собственную функцию и соответствующую энергию как ряды по степеням малого параметра $x = \alpha/\omega^3$:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [1 + h_1(z, \bar{z})x + h_2(z, \bar{z})x^2 + \dots] e^{-z^2}, \\ \epsilon_1 &= \omega(1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots), \end{aligned}$$

где $h_m(z, \bar{z})$ — полином степени не выше $4m$. Подставляя эти выражения в уравнение $L\psi_1 = \epsilon_1\psi_1$ и последовательно разрешая в каждом порядке по x , можно

вычислить несколько первых полиномов $h_m(z, \bar{z})$ и коэффициентов γ_m . Результат для ϵ_1 , определяющий ляпуновскую экспоненту, приведен в уравнении (3.2).

Отметим, что аналогичный подход позволяет найти поправки и к нулевой моде (3.13) суперпотенциала ψ_0 по степеням α/ω^3 . Как и следовало ожидать, ее энергия остается нулевой в силу суперсимметрии теории. Найденные поправки позволяют получить аналитическое разложение для одноточечной статистики ННПТ, численно изученной в Гл. 2. В частности, они позволяют уточнить формулу (3.29) для $\langle \theta^2 \rangle$:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{x}{2} - \frac{13}{16}x^2 + \frac{26989}{12288}x^3 + \dots, \quad (3.33)$$

а также описать негауссовость функции распределения $P(\theta)$, характеризующейся четвертым кумулянтном $\langle\langle \theta^4 \rangle\rangle = \langle \theta \rangle^4 - 3\langle \theta^2 \rangle^2$:

$$\langle\langle \theta^4 \rangle\rangle = -\frac{241}{256}x^3 + \frac{64725}{8192}x^4 + \dots \quad (3.34)$$

Отметим, что отличие от нормального распределения, измеряемое куртозисом $\langle\langle \theta^4 \rangle\rangle/\langle \theta^2 \rangle^2$, возникает лишь в первом порядке по $x = \alpha/\omega^3$. Отрицательное значение $\langle\langle \theta^4 \rangle\rangle$ отвечает подавлению хвостов $P(\theta)$ за счет конечности интервала $(-\pi/2, \pi/2)$.

3.2.2 Произвольный шум: численное решение

В случае произвольной силы шума возбужденные состояния оператора (3.4) могут быть построены только численно. Для определения ляпуновской экспоненты $\lambda = \epsilon_1$ необходимо найти первое возбужденное состояние, решив уравнение $L\psi = \epsilon_1\psi$ с граничными условиями

$$\psi(\pi/2, p < 0) = \psi(\theta, -\infty) = 0, \quad (3.35a)$$

$$\psi(-\pi/2, p > 0) = \psi(\theta, \infty) = 0. \quad (3.35b)$$

Данные граничные условия схожи с граничными условиями (2.24) для нулевой моды суперпотенциала, выведенными в Гл. 2. Единственное отличие заключа-

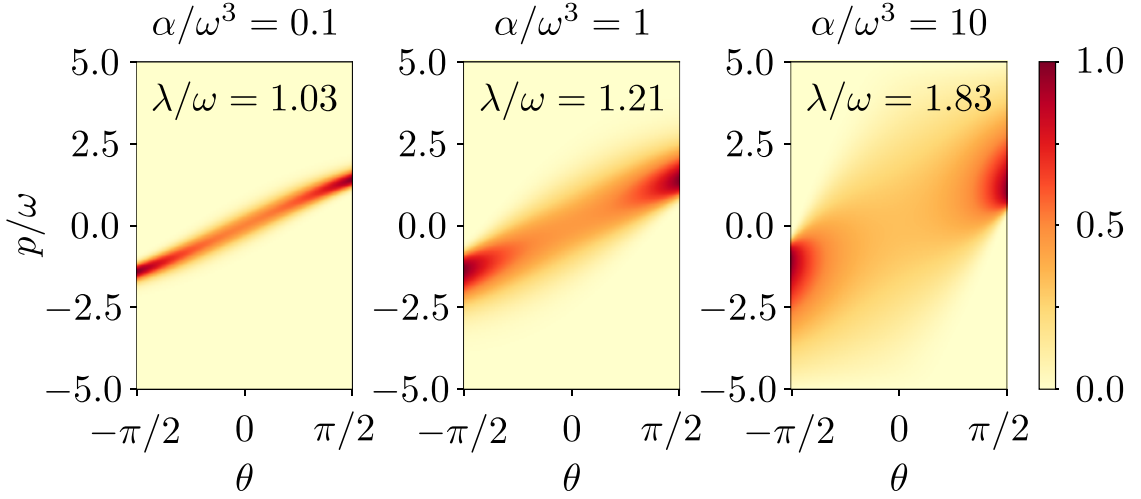


Рисунок 3.3 — Первое возбужденное состояние $\psi_1(\theta, p)$ оператора (3.4) при трех значениях параметра $\alpha/\omega^3 = 0.1, 1, 10$. Волновая функция нормирована на максимальное значение.

ется в том, что в той части границы, где волновая функция задана, ее значение равно нулю, а не $\pm 1/2$.

Результаты численного определения первого возбужденного состояния для различных значений параметра α/ω^3 представлены на рис. 3.3. При малом α/ω^3 функция $\psi_1(\theta, p)$ близка к гауссиане $\psi_{1,0}(z)$, слегка увеличиваясь вблизи $\theta = \pm\pi/2$. По мере увеличения α/ω^3 максимумы $\psi_1(\theta, p)$ вблизи краев интервала становятся более выраженными, так что при $\alpha/\omega^3 \rightarrow \infty$ первая мода имеет два горба, локализованных вблизи краев. Энергия первой моды, определяющая ляпуновскую экспоненту, как функция параметра α/ω^3 построена на рис. 3.2. При малых α/ω^3 численный счет согласуется с выражением (3.2), полученным с помощью теории возмущений, вплоть до значений $\alpha/\omega^3 \approx 0.25$. При больших значениях ляпуновская экспонента в единицах ω раскладывается по степеням $(\alpha/\omega^3)^{-1/3}$ с ведущим членом $\lambda \approx 0.66 \alpha^{1/3}$.

3.3 Заключение

Развитая в этой Главе теория является обобщением суперсимметричного подхода, предложенного в Главе 2, на случай НПТ, рассматриваемых на конечных временных интервалах, и одновременных корреляционных функций.

Построенная классификация возбужденных состояний трансфер-матричного гамильтониана завершает построение теории статистических свойств непадающих траекторий в задаче Уитни со случайной короткопериодной накачкой. Предложенный формализм позволяет находить произвольные корреляционные функции на непадающей траектории путем решения уравнений в частных производных типа Фоккера-Планка со специфическими граничными условиями.

Глава 4. Флуктуации в неоднородных сверхпроводящих проволоках

4.1 Введение

Для описания неоднородных сверхпроводников можно использовать феноменологическую модель со случайным параметром порядка, возникающую как промежуточный шаг в модели Ларкина и Овчинникова [4]. В пространственных размерностях 3D и 2D такая модель сводится к задаче о сверхпроводнике с магнитными примесями [3], в которой модификация сверхпроводящего состояния может быть описана безразмерным параметром $\eta = 1/(\Delta_0\tau_{\text{деп}})$, где $\tau_{\text{деп}}$ — среднее время разрушения куперовской пары. В случае же модели со случайным параметром порядка в роли такого параметра выступает интеграл:

$$\eta = \frac{2}{\Delta_0} \int \frac{f(q)}{Dq^2} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}, \quad (4.1)$$

где $f(q) = \langle\langle\Delta_1\Delta_1\rangle\rangle_q$ — коррелятор пространственно неоднородной части параметра порядка.

Плотность состояний для сверхпроводника с магнитными примесями показана на Рис. 4.1. Щель в спектре сохраняется, однако ее положение E_g больше не совпадает с параметром порядка $\Delta(r)$ и задается формулой:

$$E_g = \Delta_0(1 - \eta^{2/3})^{3/2}. \quad (4.2)$$

Вблизи края спектра теория предсказывает корневое поведение плотности состояний: $\nu(E) \propto (E - E_g)^{1/2}$.

Учет пространственных флуктуаций в задаче о случайном параметре порядка размывает корневую сингулярность на краю спектра и приводят к появлению состояний под щелью. Для их описания необходимо выйти за приближение среднего поля. В работе [4] плотность подщелевых состояний была вычислена с помощью метода оптимальной флуктуации, где источником флуктуаций были длинноволновые компоненты параметра порядка. С экспоненциальной точно-

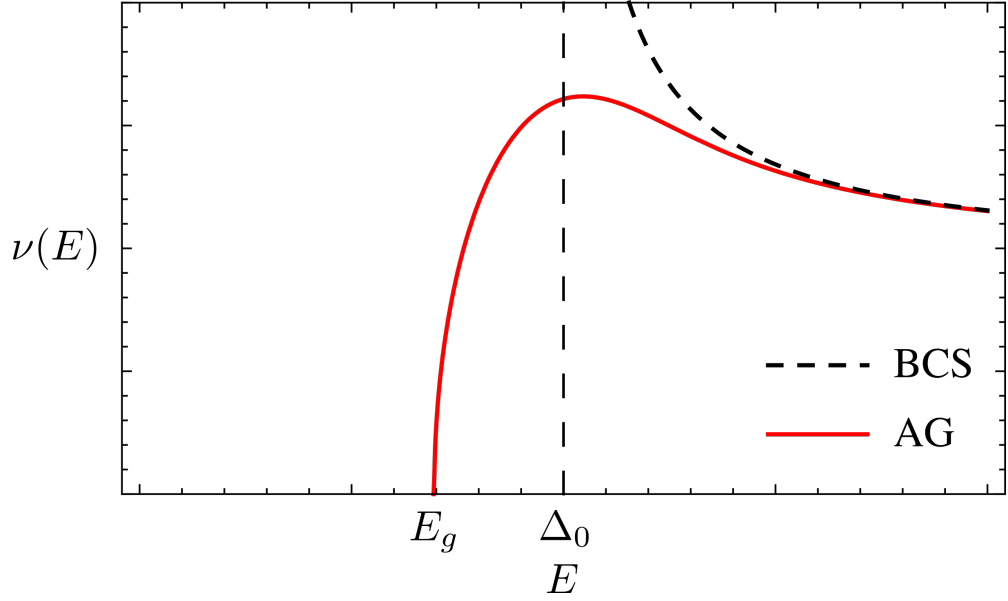


Рисунок 4.1 — Размытие плотности состояний в теории БКШ (пунктирная кривая) магнитными примесями (сплошная красная кривая) в случае $\eta = 0.1$.

стью плотность состояний при $E < E_g$ дается выражением

$$\langle \nu(E) \rangle \propto \exp \left(-\alpha_d \frac{\Delta_0^2 \xi^d}{f(0)} \left(\frac{E_g - E}{E_g} \right)^{(8-d)/4} \right). \quad (4.3)$$

Отметим, что подщелевая плотность состояний может возникать не только за счет флуктуаций параметра порядка, но и за счет мезоскопических флуктуаций примесей [94; 95]. Однако такой эффект обычно пренебрежимо мал на фоне выражения (4.3).

Существенным условием для того, чтобы подход Ларкина и Овчинникова был самосогласованным, является малость ширины хвоста, которую можно оценить из Ур. (4.3), по сравнению с размытием пика БКШ, то есть с $|\Delta_0 - E_g|$. Для маломасштабных флуктуаций $\Delta(\mathbf{r})$ такое условие хорошо выполняется в трехмерных и маргинально — в двумерных системах.

В одномерной геометрии интеграл (4.1) расходится на малых импульсах, что указывает на разрушение теории среднего поля. При этом из-за отсутствия самоусреднения описание плотности состояний в терминах средней величины становится не очень репрезентативно, и следует рассматривать всю функцию распределения DOS при заданной энергии.

4.2 Уравнение Узаделя со случайным параметром порядка

В отсутствие сверхтока квазиклассическая функция Грина в сверхпроводящем состоянии может быть параметризована стандартным образом с помощью спектрального угла θ (в нормальном состоянии $\theta = 0$). В грязном пределе с неоднородным параметром порядка зависящий от энергии E и координаты \mathbf{r} спектральный угол подчиняется уравнению Узаделя:

$$-\frac{D}{2}\nabla^2\theta + iE\sin\theta + \Delta(\mathbf{r})\cos\theta = 0, \quad (4.4)$$

где $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 + \Delta_1(\mathbf{r})$. Плотность состояний выражается посредством

$$\frac{\nu(E)}{\nu_0} = \text{Re} \cos \theta. \quad (4.5)$$

В одномерной геометрии уравнение (4.4) может быть записано в безразмерном виде как

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + i\epsilon\sin\theta + \cos\theta + f(x)\cos\theta = 0, \quad (4.6)$$

где $\epsilon = E/\Delta_0$ — энергия в единицах щели, а x — координата вдоль провода в единицах длины когерентности $\xi_0 = \sqrt{D/2\Delta_0}$. Функция $f(x) = \Delta_1(r)/\Delta_0$ в уравнении (4.6) описывает случайную в пространстве часть параметра порядка. Мы будем предполагать, что радиус корреляции беспорядка $\Delta_1(r)$ не превышает ξ_0 . Соответственно, поле $f(x)$ будем считать гауссовым белым шумом с коррелятором

$$\langle f(x)f(x') \rangle = 2\alpha\delta(x-x'). \quad (4.7)$$

Уравнение Узаделя (4.6) с беспорядком (4.7) похоже на уравнение маятника со случайной горизонтальной силой, поэтому мы применим к нему разработанный в Главах 2 и 3 суперсимметричный подход. Основное отличие от стохастической задачи Уитни состоит в том, что в случае сверхпроводящего провода спектральный угол $\theta(x)$ является комплексной функцией. Это приводит к четырехмерному фазовому пространству, в то время как для обычного маятника оно было двумерным.

В отсутствие неоднородностей уравнение Узаделя имеет не зависящее от координат решение со спектральным углом θ_0 , удовлетворяющим уравнению

$$\tan \theta_0 = i/\epsilon, \quad (4.8)$$

что приводит к известному результату для плотности состояний в теории БКШ:

$$\frac{\nu(E)}{\nu_0} = \operatorname{Re} \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}. \quad (4.9)$$

Неоднородности приводят к размытию когерентного пика [4].

4.3 Суперсимметричный подход

Флуктуации в одномерной геометрии являются настолько сильными, что плотность состояний $\nu(E)$ вблизи пика перестает быть самоусредняемой величиной. В такой ситуации имеет смысл изучать не среднюю $\langle \nu(E) \rangle$, а всю функцию распределения $P(\nu(E))$. Для этого требуется описать статистику θ для заданной энергии E , как это было сделано для случая ННПТ в стохастической задаче Уитни. Условие, отличающее физические решения от нефизических, диктуется требованием неотрицательности плотности состояний. С учетом выражения (4.5), оно принимает вид

$$|\operatorname{Re} \theta| < \pi/2. \quad (4.10)$$

Такое условие из многих решений уравнений Узаделя выделяет только одно физически реализуемое решение, так же как и условие невыхода из полосы $|\theta| < \pi/2$ для перевернутого маятника выделяет одну ННПТ. Поэтому следует ожидать, что суперсимметричный подход, разработанный в Главах 2 и 3, будет работать и для рассматриваемой задачи. Однако в случае одномерного уравнения Узаделя θ является комплексной величиной, что потребует существенного обобщения развитого метода.

По аналогии с маятником, мы запишем статистическую сумму для уравнения Узаделя (4.6) в виде функционального интеграла по всем траекториям

$\theta(x)$ и $\theta^*(x)$:

$$Z = \int \mathcal{D}\theta(x) \mathcal{D}\theta^*(x) \delta[-\partial_x^2\theta + F] \delta[-\partial_x^2\theta^* + G] |\det[-\partial_x^2 + F']| |\det[-\partial_x^2 + G']|, \quad (4.11)$$

где мы ввели обозначения

$$F = -i\epsilon \sin \theta - (1 + f(x)) \cos \theta, \quad (4.12a)$$

$$G = i\epsilon \sin \theta^* - (1 + f(x)) \cos \theta^*. \quad (4.12b)$$

Следуя стандартной схеме, мы вводим два бозонных поля $\lambda(x)$ и $\lambda^*(x)$, чтобы поднять аргументы дельта-функций в экспоненту, а также две пары грассмановых полей $\chi(x)$, $\bar{\chi}(x)$ и $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ для представления детерминанта. Это приводит к статсумме

$$Z = \int \mathcal{D}\theta(x) \mathcal{D}\theta^*(x) \mathcal{D}\lambda(x) \mathcal{D}\lambda^*(x) \mathcal{D}\bar{\chi}(x) \mathcal{D}\chi(x) \mathcal{D}\bar{\eta}(x) \mathcal{D}\eta(x) e^S \quad (4.13)$$

с эффективным действием $S[\theta, \theta^*, \lambda, \lambda^*, \bar{\chi}, \chi, \bar{\eta}, \eta]$, дающимся выражением

$$S = \int dx \{ i\lambda[-\partial_x^2\theta + F] + i\lambda^*[-\partial_x^2\theta^* + G] + \bar{\chi}[-\partial_x^2 + F']\chi + \bar{\eta}[-\partial_x^2 + G']\eta \}. \quad (4.14)$$

4.3.1 Усреднение по беспорядку

Усреднение статистической суммы по беспорядку $f(x)$ с коррелятором (4.7) генерирует эффективное действие с локальным во времени лагранжианом

$$L_{\text{eff}} = i\partial_x\lambda\partial_x\theta + i\partial_x\lambda^*\partial_x\theta^* + \partial_x\bar{\chi}\partial_x\chi + \partial_x\bar{\eta}\partial_x\eta + \mathcal{V}. \quad (4.15)$$

Для дальнейшего удобства, потенциал \mathcal{V} можно разделить на части, характеризующиеся различным количеством грассмановых переменных:

$$\mathcal{V} = V_{00} + V_{10}\bar{\chi}\chi + V_{01}\bar{\eta}\eta + V_{11}\bar{\chi}\chi\bar{\eta}\eta. \quad (4.16)$$

Здесь часть без грассмановых переменных имеет вид

$$V_{00} = \epsilon (\lambda \sin \theta - \lambda^* \sin \theta^*) - i (\lambda \cos \theta + \lambda^* \cos \theta^*) - \alpha (\lambda \cos \theta + \lambda^* \cos \theta^*)^2, \quad (4.17)$$

а остальные компоненты потенциала могут быть получены посредством дифференцирования потенциала V_{00} :

$$V_{10} = -\frac{i\partial_\theta}{\lambda} V_{00}, \quad V_{01} = -\frac{i\partial_{\theta^*}}{\lambda^*} V_{00}, \quad V_{11} = -\frac{\partial_\theta \partial_{\theta^*}}{\lambda \lambda^*} V_{00}. \quad (4.18)$$

Как мы знаем, такая связь тесно связана с BRST-симметрией теории и означает, что потенциал можно представить в виде

$$\mathcal{V} = V_{00} \left(\lambda, \lambda^*, \theta - i\frac{\bar{\chi}\chi}{\lambda}, \theta^* - i\frac{\bar{\eta}\eta}{\lambda^*} \right). \quad (4.19)$$

4.3.2 Трансфер-матричный гамильтониан

Для построения шредингеровского представления нам необходимо ввести «волновую функцию» с помощью одностороннего функционального интеграла. Повторяя процедуру перехода от одномерной теории поля к эффективному трансфер-матричному описанию, изложенную в Приложении [Б.2.2](#), получаем

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} = \hat{\mathcal{H}} \hat{\Psi}, \quad (4.20)$$

где гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = i\partial_\lambda \partial_\theta + i\partial_{\lambda^*} \partial_{\theta^*} + \partial_\chi \partial_{\bar{\chi}} + \partial_\eta \partial_{\bar{\eta}} + \mathcal{V}, \quad (4.21)$$

что является обобщением выражения [\(Б.17\)](#) на случай четырехмерного фазового пространства.

Чтобы избавиться от грассмановых переменных, по аналогии с выражением [\(2.20\)](#), представим $\hat{\Psi}$ в следующем виде:

$$\hat{\Psi} = \Psi_{00} + \Psi_{10} \bar{\chi}\chi + \Psi_{01} \bar{\eta}\eta + \Psi_{11} \bar{\chi}\chi \bar{\eta}\eta. \quad (4.22)$$

Выделяя в уравнении разные грассмановы компоненты, мы получаем четыре уравнения, определяющие четыре функции Ψ_{ij} , где $i, j = 0, 1$. Как мы видели в Главе 2, для описания одноточечной статистики достаточно знать нулевую моду гамильтониана (4.21) (в отличие от многоточечных корреляционных функций, для которых, вообще говоря, нужен весь спектр, см. Главу 3). Соответствующая нулевая мода содержится в БРСТ-симметричном секторе. С учетом этой симметрии четыре уравнения сводятся к одному уравнению на функцию Ψ_{00} .

4.3.3 БРСТ-симметричная нулевая мода

Соотношение между Ψ_{ij} может быть получено как следствие БРСТ симметрии теории. Эффективный лагранжиан (4.15) оказывается инвариантным относительно бесконечно малых вращений грассмановыми полями ε и ε^* согласно соотношениям: $\delta\theta = \varepsilon\chi$, $\delta\bar{\chi} = -i\varepsilon\lambda$ и $\delta\theta^* = \varepsilon^*\eta$, $\delta\bar{\eta} = -i\varepsilon^*\lambda^*$. Это означает, что существуют два различных нильпотентных БРСТ-оператора по числу действительных компонент поля θ :

$$\hat{\mathcal{D}}_1 = i\lambda\partial_{\bar{\chi}} - \chi\partial_{\theta}, \quad \hat{\mathcal{D}}_2 = i\lambda^*\partial_{\bar{\eta}} - \eta\partial_{\theta^*}. \quad (4.23)$$

Как следствие, лагранжиан теории удовлетворяет уравнению $\hat{\mathcal{D}}_1\hat{\mathcal{D}}_2L_{\text{eff}} = 0$ [ср. с уравнением (Б.28)] и может быть записан до усреднения по шуму в виде

$$L = \hat{\mathcal{D}}_1(\bar{\chi}[-\partial_x^2\theta + F(\theta)]) + \hat{\mathcal{D}}_2(\bar{\eta}[-\partial_x^2\theta + G(\theta^*)]). \quad (4.24)$$

БРСТ симметрия лагранжиана транслируется в БРСТ симметрию волновых функций в гамильтоновом представлении: $\hat{\mathcal{D}}_1\hat{\mathcal{D}}_2\hat{\Psi} = 0$. Следовательно, должен существовать суперпотенциал ψ , такой что что

$$\hat{\Psi} = \hat{\mathcal{D}}_2\hat{\mathcal{D}}_1(\bar{\chi}\bar{\eta}\psi). \quad (4.25)$$

Прямое сопоставление (4.22) с (4.25) приводит к следующим выражениям для функций Ψ_{ij} через суперпотенциал ψ :

$$\Psi_{00} = -\lambda\lambda^*\psi, \quad \Psi_{10} = i\lambda^*\partial_\theta\psi, \quad \Psi_{01} = i\lambda\partial_{\theta^*}\psi, \quad \Psi_{11} = \partial_\theta\partial_{\theta^*}\psi. \quad (4.26)$$

Отметим для полноты картины, что не все волновые функции принадлежат БРСТ-симметричному сектору (см. обсуждение в Разделе 3.1).

4.3.4 Уравнение Фоккера-Планка

Используя обусловленные БРСТ симметрией нулевой моды соотношения (4.26), можно свести систему четырех уравнений (4.20) к единственному уравнению на суперпотенциал ψ :

$$(i\partial_\lambda\partial_\theta + i\partial_{\lambda^*}\partial_{\theta^*} + V_{00})\psi = 0. \quad (4.27)$$

Также мы сделаем преобразование Фурье от λ и λ^* к переменным p и p^* согласно

$$F(\lambda, \lambda^*) = \int F(p, p^*) \exp(ip\lambda + ip^*\lambda^*) dp dp^*. \quad (4.28)$$

Как мы увидим ниже, p и p^* напрямую связаны с производными $d\theta/dx$ и $d\theta^*/dx$. После преобразования Фурье уравнение на нулевую моду запишется в виде:

$$(p\partial_\theta + p^*\partial_{\theta^*} - V_{00})\psi = 0 \quad (4.29)$$

с потенциалом

$$V_{00} = i\epsilon (\sin\theta\partial_p - \sin\theta^*\partial_{p^*}) + (\cos\theta\partial_p + \cos\theta^*\partial_{p^*}) + \alpha (\cos\theta\partial_p + \cos\theta^*\partial_{p^*})^2. \quad (4.30)$$

4.3.5 Одноточечная функция распределения

Для нахождения одноточечной функции распределения нужно усреднить подставить в функциональный интеграл (4.13) оператор

$$\hat{O} = \delta(\theta(x) - \theta) \delta(\theta^*(x) - \theta^*) \delta(\partial_x \theta - p) \delta(\partial_x \theta^*(x) - p^*). \quad (4.31)$$

После простого, но громоздкого вычисления, аналогичного проделанному в Приложении Б.2.5, получим

$$P(\theta, \theta^*, p, p^*) = \bar{\Psi}_{00} \Psi_{11} + \bar{\Psi}_{11} \Psi_{00} + \bar{\Psi}_{10} \Psi_{01} + \bar{\Psi}_{01} \Psi_{10}, \quad (4.32)$$

где мы ввели обозначение

$$\bar{\Psi}_{ij}(\theta, \theta^*, p, p^*) = \Psi_{ij}(\theta, \theta^*, -p, -p^*). \quad (4.33)$$

Отметим, что уравнение (4.32) естественным образом обобщает выражение (Б.32) на случай четырехкомпонентного фазового пространства.

4.3.6 Граничные условия

Осталось понять, как написать граничные условия на суперпотенциал ψ . Выше мы работали в терминах комплексных переменных θ и θ^* , что позволяло сохранить наиболее компактную форму выражений. Однако при анализе граничных условий удобнее использовать вещественные переменные, поскольку условие (4.10), выделяющее физические решения, записано через действительную часть функции θ . В отличие от Раздела 2, в данной задаче мы имеем дело с четырехмерным фазовым пространством Ω , задаваемым векторами $(\theta', \theta'', p', p'')$, где $\theta' = \text{Re } \theta$, $\theta'' = \text{Im } \theta$ и аналогично для p' и p'' . При этом θ' ограничено полосой $\theta' \in (-\pi/2, \pi/2)$, а остальные переменные могут принимать произвольные значения: $\theta'', p', p'' \in \mathbb{R}$. Рассматривая требование непокидания физической об-

ласти Ω , мы приходим к следующим условиям на функцию Ψ_{00} :

$$\Psi_{00}(\theta' = \pi/2, p' > 0) = \Psi_{00}(\theta' = -\pi/2, p' < 0) = 0. \quad (4.34)$$

которые должны выполняться при произвольных значениях θ'' и p'' . Условия (4.34) обобщают граничные условия (2.24) для маятника и означают отсутствие траекторий, подходящих к границе области Ω с положительной проекцией скорости на нормаль к границе.

Последняя часть граничных условий связана с нормировкой функции распределения. Обобщая условие нормировки в случае маятника (Б.40) на случай уравнения Узаделя, получаем

$$\Psi_{00}(\theta, \theta^*, \lambda = \lambda^* = 0) = 1. \quad (4.35)$$

В импульсном представлении это условие имеет вид

$$\int \Psi_{00}(\theta', \theta'', p', p'') dp' dp'' = 1. \quad (4.36)$$

4.3.7 Уравнение в действительных переменных

Поскольку граничные условия (4.34) и (4.36) записываются в терминах действительных переменных, уравнение Фоккера-Планка (4.29) также следует переписать в таком же виде:

$$\begin{aligned} & (p' \partial_{\theta'} + p'' \partial_{\theta''}) \psi + \alpha (\cos \theta' \cosh \theta'' \partial_{p'} - \sin \theta' \sinh \theta'' \partial_{p''})^2 \psi \\ & = [\cos \theta' (\epsilon \sinh \theta'' + \cosh \theta'') \partial_{p'} - \sin \theta' (\epsilon \cosh \theta'' + \sinh \theta'') \partial_{p''}] \psi. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Обратим внимание, что уравнение Фоккера-Планка (4.37) и граничные условия записаны в терминах разных функций: ψ и Ψ_{00} . Для замыкания системы уравнений их нужно связать с помощью первого из соотношений (4.26). В импульсном представлении такая связь записывается в виде соотношения

$$\Delta_p \psi = \Psi_{00}, \quad (4.38)$$

где $\Delta_p = \partial_{p'}^2 + \partial_{p''}^2$.

Таким образом, замкнутая система уравнений включает уравнения (4.37) и (4.38) вместе с граничными условиями (4.34) и (4.36). Подставляя решение этой системы в уравнение (4.32) и интегрируя по импульсам, мы можем получить функцию распределения для спектрального угла $\theta(E)$. Функция распределения плотности состояний $\nu(E)$ дается интегралом

$$P(\nu(E)) = \int P(\theta', \theta'') \delta(\nu/\nu_0 - \cos \theta' \cosh \theta'') d\theta' d\theta''. \quad (4.39)$$

В общем случае, описанную выше процедуру можно выполнить только с привлечением численного счета, поскольку уравнение (4.37) в четырехмерной области параметров Ω не имеет аналитического решения.

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы.

В Главе 1 мы изучили вклад куперовского канала во флуктуационную проводимость неупорядоченных s -волновых сверхпроводников выше температуры перехода. Работая в ведущем однопетлевом приближении по флуктуационному пропагатору, мы вывели общее выражение для флуктуационной поправки, справедливое для произвольных температур $T > T_c$ и сил беспорядка, характеризуемого параметром $T\tau$. Далее результат, полученный для произвольной размерности пространства, был детально проанализирован в экспериментально актуальном двумерном случае.

Полученное аналитическое выражение использовано для критического пересмотра обширного набора предыдущих результатов для флуктуационной проводимости. Большинство этих результатов было получено с помощью Мацубаровской диаграммной техники и применимо только в одной из четырех асимптотических областях, показанных на Рис. 1.1.

В диффузионном пределе ($T\tau \ll 1$) полная температурная зависимость была недавно рассмотрена в работах [24–26]. Мы полностью воспроизводим результаты из работ [25; 26] для флуктуационной поправки при произвольных температурах.

В баллистическом пределе ($T\tau \gg 1$) мы приводим первое аналитическое описание флуктуационной поправки при произвольных температурах. Здесь мы наблюдаем значительное расхождение с предыдущими расчетами, полученными в Мацубаровской технике. Наши основные выводы можно резюмировать следующим образом:

- В окрестности T_c [область (с) на Рис. 1.1] только аномальная часть поправки МТ ведет себя по-разному в умеренно чистом (c') и сверхчистом (c'') пределах, см. Ур. (1.59) и (1.60). Все остальные вклады нечувствительны к кроссоверу из умеренно чистому к сверхчистому пределу. В этой области мы не обнаружили членов, растущих как $(T\tau)^2$, вопреки утверждениям работ [20; 21].
- При высоких температурах ($T \gg T_c$) флуктуационная поправка содержит формально расходящийся температурно-независимый вклад, кото-

рый должен быть включен в друдевскую проводимость. Оставшаяся температурно-зависящая поправка растет как $T\tau$ с точностью до некоторых логарифмических поправок (см. Ур. (1.69)). Этот результат согласуется с работой [61] и противоречит убыванию $1/\epsilon^3$, обнаруженному в работе [22], где предел $\tau \rightarrow \infty$ был взят ранее предела $\omega \rightarrow 0$.

В Главе 2 мы ввели понятие единственной никогда не падающей траектории (ННПТ) для горизонтально управляемого перевернутого маятника и формулируем задачу его статистического описания. Для случайной силы со статистикой белого шума мы предоставили полное решение этой задачи. Используя теоретико-полевые методы статистической физики и физики конденсированных сред, мы выразили мгновенную совместную функцию распределения угла отклонения маятника и его скорости (импульса) в терминах вспомогательной функции, удовлетворяющей уравнению Фоккера-Планка с новым типом граничных условий. В пределе очень сильного шума (без гравитации) выражение для функции распределения получено аналитически. Для произвольной силы шума полученные уравнения могут быть легко решены численно, что гораздо проще и эффективнее, чем прямое численное моделирование никогда не падающей траектории из уравнения движения с накоплением статистики. Мы показали, что оба подхода дают один и тот же результат.

В более широком контексте задача о никогда не падающей траектории имеет много заметных пересечений с другими задачами математической физики: теорией минимайзеров (ННПТ — глобальный минимайзер классического действия), турбулентностью Бюргерса, редкими событиями в стохастических дифференциальных уравнениях и т. д. Мы ожидаем, что наш подход будет также востребован в теории управления. Результаты этой главы могут быть естественным образом обобщены на другие уравнения типа Ланжевена, которые допускают непадающие траектории. К таким случаям может быть отнесен сферический маятник, для которого также выполняется существование и единственность решения для произвольной силы.

В Главе 3 мы обобщили суперсимметричную теорию, предложенную в Главе 2, на случай непадающих траекторий, рассматриваемых на конечных временных интервалах, и многоточечных корреляционных функций. Построенная классификация возбужденных состояний трансфер-матричного гамильтониана

завершает построение теории статистических свойств непадающих траекторий в задаче Уитни со случайной короткопериодной накачкой. Предложенный формализм позволяет находить произвольные корреляционные функции на непадающей траектории путем решения уравнений в частных производных типа Фоккера-Планка со специфическими граничными условиями. Также мы применили теорию возмущения по малой силе шума для нулевой моды и первого возбужденного состояния, определив пертурбативное разложение для Ляпуновской экспоненты.

В Главе 4 мы обсудили, как суперсимметричный теоретико-полевой подход Паризи и Сурла должен быть обобщен для описания физически релевантных решений уравнения Узаделя со случайным параметром порядка. Основная сложность заключается в том, что в этом случае уравнение Фоккера-Планка должно быть записано для 4 вещественных (2 комплексных) переменных. Мы вывели модифицированное граничное условие для уравнения Фоккера-Планка и показали, как PDF может быть выражена в терминах решения уравнения Фоккера-Планка с соответствующими граничными условиями. Полученная задача не может быть решена аналитически и требует серьезного численного расчета.

Несмотря на то, что мы не завершили решение этой задачи, разработанный подход, как мы полагаем, является адекватным (а может быть, и единственно возможным) способом решения проблемы описания DOS в неоднородных сверхпроводящих проводках.

Список сокращений и условных обозначений

1D — одномерный

2D — двумерный

3D — трехмерный

AL — поправка Асламазова-Ларкина

DOS — поправка от изменения плотности состояний

MT — поправка Маки-Томпсона

TRS — симметрия по обращению времени (time reversal symmetry)

БКШ — теория Бардина, Купера и Шриффер

БРСТ — симметрия Бекки-Руэ-Стора-Тютинина

НПТ — непадающая траектория (для конечных временных интервалов)

ННПТ — никогда не падающая траектория (на всей временной оси)

ФП — уравнение Фоккера-Планка

Список литературы

1. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* Theory of Superconductivity // *Phys. Rev.* — 1957. — т. 108, вып. 5. — с. 1175—1204. — DOI: [10.1103/PhysRev.108.1175](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175).
2. *Anderson P.* Theory of dirty superconductors // *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* — 1959. — т. 11, № 1/2. — с. 26—30. — DOI: [10.1016/0022-3697\(59\)90036-8](https://doi.org/10.1016/0022-3697(59)90036-8).
3. *Abrikosov A., Gor'kov L.* Zh. É ksp. Teor. Fiz. 39, 1781 1960 *Sov. Phys* // *ЖЭТФ.* — 1961. — т. 12. — с. 1243.
4. *Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н.* Плотность состояний в неоднородных сверхпроводниках // *ЖЭТФ.* — 1971. — т. 61. — с. 2147.
5. *Semenov A. D., Gol'tsman G. N., Korneev A. A.* Quantum detection by current carrying superconducting film // *Physica C: Superconductivity.* — 2001. — т. 351, № 4. — с. 349—356. — DOI: [10.1016/s0921-4534\(00\)01637-3](https://doi.org/10.1016/s0921-4534(00)01637-3).
6. *Gol'tsman G. N., Okunev O., Chulkova G., Lipatov A., Semenov A., Smirnov K., Voronov B., Dzardanov A., Williams C., Sobolewski R.* Picosecond superconducting single-photon optical detector // *Applied Physics Letters.* — 2001. — т. 79, № 6. — с. 705—707. — DOI: [10.1063/1.1388868](https://doi.org/10.1063/1.1388868).
7. *Douçot B., Ioffe L. B.* Physical implementation of protected qubits // *Reports on Progress in Physics.* — 2012. — т. 75, № 7. — с. 072001. — DOI: [10.1088/0034-4885/75/7/072001](https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/072001).
8. *Peltonen J. T., Coumou P. C. J. J., Peng Z. H., Klapwijk T. M., Tsai J. S., Astafiev O. V.* Hybrid rf SQUID qubit based on high kinetic inductance // *Scientific Reports.* — 2018. — т. 8, № 1. — с. 10033. — DOI: [10.1038/s41598-018-27154-1](https://doi.org/10.1038/s41598-018-27154-1).
9. *Sacépé B., Feigel'man M., Klapwijk T. M.* Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials // *Nature Physics.* — 2020. — т. 16, № 7. — с. 734—746. — DOI: [10.1038/s41567-020-0905-x](https://doi.org/10.1038/s41567-020-0905-x).
10. *Glover R.* Ideal resistive transition of a superconductor // *Physics Letters A.* — 1967. — т. 25, № 7. — с. 542—544.

11. *Aslamazov L. G., Larkin A. I.* // Fiz. Tverd. Tela **10**, 1104 [Sov. Phys. Solid State, **10**, 875]. — 1968.
12. *Maki K.* Critical Fluctuation of the Order Parameter in a Superconductor. I // Progress of Theoretical Physics. — 1968. — т. 40, № 2. — с. 193—200. — DOI: [10.1143/PTP.40.193](https://doi.org/10.1143/PTP.40.193).
13. *Thompson R. S.* Microwave, Flux Flow, and Fluctuation Resistance of Dirty Type-II Superconductors // Phys. Rev. B. — 1970. — т. 1, вып. 1. — с. 327—333. — DOI: [10.1103/PhysRevB.1.327](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.1.327).
14. *Altshuler B. L., Aronov A. G., Khmel'nitsky D. E.* Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1982. — т. 15, № 36. — с. 7367—7386. — DOI: [10.1088/0022-3719/15/36/018](https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/36/018).
15. *Larkin A. I., Varlamov A. A.* Theory of fluctuations in superconductors. — Clarendon Press, Oxford, 2005.
16. *Aslamazov L. G., Varlamov A. A.* Fluctuation conductivity in intercalated superconductors // Journal of Low Temperature Physics. — 1980. — т. 38, № 1. — с. 223—264.
17. *Al'tshuler B. L., Varlamov A. A., Reizer M. Y.* Interelection effects and the conductivity of disordered two-dimensional electron systems // Zh. Eksp. Teor. Fiz. **84**, 2280 [Sov. Phys. JETP **57**, 1329]. — 1983.
18. *Aronov A. G., Hikami S., Larkin A. I.* Gauge invariance and transport properties in superconductors above T_c // Phys. Rev. B. — 1995. — т. 51, вып. 6. — с. 3880—3885. — DOI: [10.1103/PhysRevB.51.3880](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.3880).
19. *Randeria M., Varlamov A. A.* Effect of superconducting fluctuations on spin susceptibility and NMR relaxation rate // Phys. Rev. B. — 1994. — т. 50, вып. 14. — с. 10401—10404. — DOI: [10.1103/PhysRevB.50.10401](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.10401).
20. *Dorin V. V., Klemm R. A., Varlamov A. A., Buzdin A. I., Livanov D. V.* Fluctuation conductivity of layered superconductors in a perpendicular magnetic field // Phys. Rev. B. — 1993. — т. 48, вып. 17. — с. 12951—12965. — DOI: [10.1103/PhysRevB.48.12951](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.48.12951).

21. *Livanov D. V., Savona G., Varlamov A. A.* Strong compensation of the quantum fluctuation corrections in a clean superconductor // *Phys. Rev. B.* — 2000. — т. 62, вып. 13. — с. 8675—8678. — DOI: [10.1103/PhysRevB.62.8675](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.8675).
22. *Reggiani L., Vaglio R., Varlamov A. A.* Fluctuation conductivity of layered high- T_c superconductors: A theoretical analysis of recent experiments // *Phys. Rev. B.* — 1991. — т. 44, вып. 17. — с. 9541—9546. — DOI: [10.1103/PhysRevB.44.9541](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.44.9541).
23. *Galitski V. M., Larkin A. I.* Superconducting fluctuations at low temperature // *Phys. Rev. B.* — 2001. — т. 63, вып. 17. — с. 174506. — DOI: [10.1103/PhysRevB.63.174506](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.174506).
24. *Glatz A., Varlamov A. A., Vinokur V. M.* Fluctuation spectroscopy of disordered two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2011. — т. 84, вып. 10. — с. 104510. — DOI: [10.1103/PhysRevB.84.104510](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.104510).
25. *Tikhonov K. S., Schwiete G., Finkel'stein A. M.* Fluctuation conductivity in disordered superconducting films // *Phys. Rev. B.* — 2012. — т. 85, вып. 17. — с. 174527. — DOI: [10.1103/PhysRevB.85.174527](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.174527).
26. *Petković A., V. V.* Pairing fluctuation ac conductivity of disordered thin films // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2013. — т. 25, № 35. — с. 355701. — DOI: [10.1088/0953-8984/25/35/355701](https://doi.org/10.1088/0953-8984/25/35/355701).
27. *Xu Z. A., Ong N. P., Wang Y., Kakeshita T., Uchida S.* Vortex-like excitations and the onset of superconducting phase fluctuation in underdoped $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ // *Nature.* — 2000. — т. 406, № 6795. — с. 486—488. — DOI: [10.1038/35020016](https://doi.org/10.1038/35020016).
28. *Pourret A., Aubin H., Lesueur J., Marrache-Kikuchi C. A., Bergé L., Dumoulin L., Behnia K.* Observation of the Nernst signal generated by fluctuating Cooper pairs // *Nature Physics.* — 2006. — т. 2, № 10. — с. 683—686. — DOI: [10.1038/nphys413](https://doi.org/10.1038/nphys413).
29. *Ussishkin I., Sondhi S. L., Huse D. A.* Gaussian Superconducting Fluctuations, Thermal Transport, and the Nernst Effect // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — т. 89, вып. 28. — с. 287001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.287001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.287001).
30. *Serbin M. N., Skvortsov M. A., Varlamov A. A., Galitski V.* // *Phys. Rev. Lett.* **102**, 067001. — 2009.

31. *Michaeli K., Finkel'stein A. M.* Fluctuations of the superconducting order parameter as an origin of the Nernst effect // EPL (Europhysics Letters). — 2009. — т. 86, № 2. — с. 27007. — DOI: [10.1209/0295-5075/86/27007](https://doi.org/10.1209/0295-5075/86/27007).
32. *Sacépé B., Chapelier C., Baturina T. I., Vinokur V. M., Baklanov M. R., Sanquer M.* Disorder-Induced Inhomogeneities of the Superconducting State Close to the Superconductor-Insulator Transition // Phys. Rev. Lett. — 2008. — т. 101, вып. 15. — с. 157006. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.157006](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.157006).
33. *Chand M., Saraswat G., Kamlapure A., Mondal M., Kumar S., Jesudasan J., Bagwe V., Benfatto L., Tripathi V., Raychaudhuri P.* // Physical Review B. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 014508.
34. *Noat Y., Cherkez V., Brun C., Cren T., Carbillet C., Debontridder F., Ilin K., Siegel M., Semenov A., Hübers H.-W., [et al.]* // Physical Review B. — 2013. — Vol. 88, no. 1. — P. 014503.
35. *Lotnyk D., Onufriienko O., Samuely T., Shylenko O., Komanicky V., Szabó P., Feher A., Samuely P.* // Low Temperature Physics. — 2017. — Vol. 43, no. 8. — P. 919–923.
36. *Carbillet C., Caprara S., Grilli M., Brun C., Cren T., Debontridder F., Vignolle B., Tabis W., Demaille D., Largeau L., [et al.]* // Physical Review B. — 2016. — Vol. 93, no. 14. — P. 144509.
37. *Feigel'man M. V., Skvortsov M. A.* Universal Broadening of the Bardeen-Cooper-Schrieffer Coherence Peak of Disordered Superconducting Films // Phys. Rev. Lett. — 2012. — т. 109, вып. 14. — с. 147002. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.147002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.147002).
38. *Driessen E. F. C., Coumou P. C. J. J., Tromp R. R., Visser P. J. de, Klapwijk T. M.* Strongly Disordered TiN and NbTiN *s*-Wave Superconductors Probed by Microwave Electrodynamics // Phys. Rev. Lett. — 2012. — т. 109, вып. 10. — с. 107003. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.107003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.107003).
39. *Usadel K. D.* Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys // Phys. Rev. Lett. — 1970. — т. 25, вып. 8. — с. 507–509. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.25.507](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.507).

40. *Parisi G., Sourlas N.* Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions // *Phys. Rev. Lett.* — 1979. — т. 43, вып. 11. — с. 744—745. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.43.744](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.744).
41. *Parisi G., Sourlas N.* Supersymmetric field theories and stochastic differential equations // *Nuclear Physics B.* — 1982. — т. 206, № 2. — с. 321—332.
42. *Efetov K. B., Larkin A. I.* // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **85**, 764 [*Sov. Phys. JETP* **58**, 444]. — 1983.
43. *Courant R., Robbins H.* What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods. — Oxford University Press, 1996.
44. *Poston T.* // *Manifold* **18**, 6. — 1976.
45. *Szrednicki R.* On periodic solutions in the Whitney's inverted pendulum problem // *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S.* — 2019. — т. 12, № 7. — с. 2127.
46. *Shen A.* // arXiv:1907.01598 (in Russian). — 2018.
47. *BROMAN A.* A MECHANICAL PROBLEM BY H. WHITNEY // *Nordisk Matematisk Tidskrift.* — 1958. — т. 6, № 2. — с. 78—82.
48. *Arnold V.* What is mathematics? (in Russian). — MCCME, Moscow, 2002.
49. *Polekhin I. Y.* Examples of topological approach to the problem of inverted pendulum with moving pivot point // *Nelineinaya Dinamika.* — 2014. — т. 10. — с. 465—472. — DOI: [10.20537/nd1404006](https://doi.org/10.20537/nd1404006).
50. *Zubelevich O.* Bounded solutions to a system of second order ODEs and the Whitney pendulum // *Applicationes Mathematicae.* — 2015. — т. 42, № 2/3. — с. 159—165.
51. *Bolotin S. V., Kozlov V. V.* Calculus of variations in the large, existence of trajectories in a domain with boundary, and Whitney's inverted pendulum problem // *Izvestiya: Mathematics.* — 2015. — т. 79, № 5. — с. 894.
52. *Al'tshuler B. L., Aronov A. G.* Electron-Electron Interactions in Disordered Conductors. — Elsevier Science, North-Holland, Amsterdam, 1985.
53. *Kamenev A., Andreev A.* Electron-electron interactions in disordered metals: Keldysh formalism // *Phys. Rev. B.* — 1999. — т. 60, вып. 4. — с. 2218—2238. — DOI: [10.1103/PhysRevB.60.2218](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.2218).

54. *Feigel'man M. V., Larkin A. I., Skvortsov M. A.* Keldysh action for disordered superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2000. — т. 61, вып. 18. — с. 12361—12388. — DOI: [10.1103/PhysRevB.61.12361](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.12361).
55. *Kamenev A.* Field theory of Non-Equilibrium System. — Cambridge University Press, New York, 2011.
56. *Gor'kov L. P.* // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **37**, 1407 [*Sov. Phys. JEPT* **10**, 998. — 1960.
57. *Patton B. R.* Fluctuation Theory of the Superconducting Transition in Restricted Dimensionality // *Phys. Rev. Lett.* — 1971. — т. 27, вып. 19. — с. 1273—1276. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.27.1273](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.27.1273).
58. *Keller J., Korenman V.* Fluctuation-Induced Conductivity of Superconductors above the Transition Temperature: Regularization of the Maki Diagram // *Phys. Rev. B.* — 1972. — т. 5, вып. 11. — с. 4367—4375. — DOI: [10.1103/PhysRevB.5.4367](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.5.4367).
59. *Reizer M. Y.* Fluctuation conductivity above the superconducting transition: Regularization of the Maki-Thompson term // *Phys. Rev. B.* — 1992. — т. 45, вып. 22. — с. 12949—12958. — DOI: [10.1103/PhysRevB.45.12949](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.45.12949).
60. *Bieri J. B., Maki K.* Magnetoresistance of high- T_c superconductors in the fluctuation regime // *Phys. Rev. B.* — 1990. — т. 42, вып. 7. — с. 4854—4856. — DOI: [10.1103/PhysRevB.42.4854](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.42.4854).
61. *Zala G., Narozhny B. N., Aleiner I. L.* Interaction corrections at intermediate temperatures: Longitudinal conductivity and kinetic equation // *Phys. Rev. B.* — 2001. — т. 64, вып. 21. — с. 214204. — DOI: [10.1103/PhysRevB.64.214204](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.214204).
62. *Sacepe B., Chapelier C., Baturina T. I., Vinokur V. M., Baklanov M. R., Sanquer M.* Pseudogap in a thin film of a conventional superconductor // *Nature Communications.* — 2010. — т. 1, № 1. — с. 1—6.
63. *Tsen A., Hunt B., Kim Y., Yuan Z., Jia S., Cava R., Hone J., Kim P., Dean C., Pasupathy A.* Nature of the quantum metal in a two-dimensional crystalline superconductor // *Nature Physics.* — 2016. — Vol. 12, no. 3. — P. 208.

64. *Ishiguro T., Yamaji K., Saito G.* Organic Superconductors. — Springer, Berlin, 1998.
65. *Analytis J. G., Ardavan A., Blundell S. J., Owen R. L., Garman E. F., Jeynes C., Powell B. J.* // Physical review letters. — 2006. — Vol. 96, no. 17. — P. 177002.
66. *Ostrovsky P. M., Gornyi I. V., Mirlin A. D.* Electron transport in disordered graphene // Phys. Rev. B. — 2006. — т. 74, вып. 23. — с. 235443. — DOI: [10.1103/PhysRevB.74.235443](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.235443).
67. *Fominov Y. V., Skvortsov M. A.* Subgap states in disordered superconductors with strong magnetic impurities // Phys. Rev. B. — 2016. — т. 93, вып. 14. — с. 144511. — DOI: [10.1103/PhysRevB.93.144511](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.144511).
68. *Levchenko A.* Transport theory of superconductors with singular interaction corrections // Phys. Rev. B. — 2010. — т. 81, вып. 1. — с. 012507. — DOI: [10.1103/PhysRevB.81.012507](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.012507).
69. *Larkin A. I.* // Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **2**, 205 [Sov. Phys. JETP Lett. **2**, 130]. — 1965.
70. *Hauser J., Saccon A., Frezza R.* On the driven inverted pendulum // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. — IEEE. 2005. — с. 6176—6180.
71. *Risken H.* The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications. — Springer, Berlin, 1996.
72. *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* Statistical Dynamics of Classical Systems // Phys. Rev. A. — 1973. — т. 8, вып. 1. — с. 423—437. — DOI: [10.1103/PhysRevA.8.423](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.8.423).
73. *Halperin B. I., Hohenberg P. C., Ma S.-k.* Renormalization-group methods for critical dynamics: I. Recursion relations and effects of energy conservation // Phys. Rev. B. — 1974. — т. 10, вып. 1. — с. 139—153. — DOI: [10.1103/PhysRevB.10.139](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.10.139).
74. *Edwards S. F., Anderson P. W.* Theory of spin glasses // Journal of Physics F: Metal Physics. — 1975. — т. 5, № 5. — с. 965.

75. *Wegner F.* The mobility edge problem: continuous symmetry and a conjecture // Zeitschrift für Physik B Condensed Matter. — 1979. — т. 35, № 3. — с. 207—210.
76. *Efetov K. B.* Supersymmetry in Disorder and Chaos. — Cambridge University Press, 1996.
77. *Horbach M. L., Schön G.* Dynamic nonlinear σ -model of electron localization // Annalen der Physik. — 1993. — т. 505, № 1. — с. 51—78.
78. *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. — Clarendon Press, Oxford, 2015.
79. *Kurchan J.* Replica trick to calculate means of absolute values: applications to stochastic equations // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1991. — т. 24, № 21. — с. 4969—4979. — DOI: [10.1088/0305-4470/24/21/011](https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/21/011).
80. *Fyodorov Y. V.* Complexity of Random Energy Landscapes, Glass Transition, and Absolute Value of the Spectral Determinant of Random Matrices // Phys. Rev. Lett. — 2004. — т. 92, вып. 24. — с. 240601. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.240601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.240601).
81. *Kramers H.* Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. — 1940. — т. 7, № 4. — с. 284—304. — DOI: [10.1016/s0031-8914\(40\)90098-2](https://doi.org/10.1016/s0031-8914(40)90098-2).
82. *Mirlin A. D.* Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems // Physics Reports. — 2000. — т. 326, № 5/6. — с. 259—382.
83. *Skvortsov M. A., Ostrovsky P. M.* // Pis'ma v ZhETF **85**, 79[JETP Lett. **85**, 72]. — 2007.
84. *Masoliver J., Porrà J. M.* Exact solution to the exit-time problem for an undamped free particle driven by Gaussian white noise // Phys. Rev. E. — 1996. — т. 53, вып. 3. — с. 2243—2256. — DOI: [10.1103/PhysRevE.53.2243](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.2243).
85. *Burkhardt T. W., Franklin J., Gawronski R. R.* Statistics of a confined, randomly accelerated particle with inelastic boundary collisions // Phys. Rev. E. — 2000. — т. 61, вып. 3. — с. 2376—2381. — DOI: [10.1103/PhysRevE.61.2376](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.2376).

86. *Rieder M.-T., Micklitz T., Levchenko A., Matveev K. A.* Interaction-induced backscattering in short quantum wires // *Phys. Rev. B.* — 2014. — т. 90, вып. 16. — с. 165405. — DOI: [10.1103/PhysRevB.90.165405](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.165405).
87. *Polyakov A. M.* Turbulence without pressure // *Phys. Rev. E.* — 1995. — т. 52, вып. 6. — с. 6183—6188. — DOI: [10.1103/PhysRevE.52.6183](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.6183).
88. *E W., Khanin K., Mazel A., Sinai Y.* Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing // *Annals of Mathematics.* — 2000. — с. 877—960.
89. *Balkovsky E., Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V.* Intermittency of Burgers' Turbulence // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — т. 78, вып. 8. — с. 1452—1455. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.78.1452](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.1452).
90. *Le Doussal P., Monthus C.* Exact solutions for the statistics of extrema of some random 1D landscapes, application to the equilibrium and the dynamics of the toy model // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2003. — т. 317, № 1/2. — с. 140—198.
91. *Gurarie V., Migdal A.* Instantons in the Burgers equation // *Phys. Rev. E.* — 1996. — т. 54, вып. 5. — с. 4908—4914. — DOI: [10.1103/PhysRevE.54.4908](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.54.4908).
92. *Bec J., Khanin K.* Burgers turbulence // *Physics Reports.* — 2007. — т. 447, № 1/2. — с. 1—66. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.04.002>.
93. *Shilov G. E.* *Linear Algebra.* — Dover, 1977.
94. *Meyer J. S., Simons B. D.* Gap fluctuations in inhomogeneous superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2001. — т. 64, вып. 13. — с. 134516. — DOI: [10.1103/PhysRevB.64.134516](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.134516).
95. *Skvortsov M. A., Feigel'man M. V.* Subgap states in disordered superconductors // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 2013. — т. 117, № 3. — с. 487—498. — DOI: [10.1134/s106377611311006x](https://doi.org/10.1134/s106377611311006x).
96. *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzyaloshinskii I. Y.* *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics.* — Pergamon Press, Oxford, 1965.
97. *Akkermans E., Montambaux G.* *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons.* — Cambridge University Press, New York, 2007.
98. *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* *Table of Integrals, Series, and Products.* — Academic Press, San Diego, 2000.

99. *Vallee O., Soares M.* Airy Functions And Applications To Physics. — Imperial College Press, London, 2004.
100. *Prudnikov A. P., Brychkov Y. A., Marichev O. I.* Integral and series, Vol. 2. — Gordon, Brech, London, 1986.
101. *Bateman H., Erdélyi A.* Higher Transcendental Functions, Vol. 2. — McGraw-Hill, New York, 1953.

Приложение А

Флуктуационная сверхпроводимость: детали вычислений

А.1 Исходные выражения для диаграмм

Аналитические выражения для скелетных диаграмм, приведенных на Рис. 1.2, имеют вид:

$$\begin{aligned}
Q^{\text{DOS}}(\omega) &= \frac{i}{2} \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 L_{ab}(\Omega; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\
&\quad \times \text{tr} \left\{ \sigma_1 \hat{v}_x G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \gamma^a \tilde{G}_{E-\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \gamma^b G_E(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \hat{v}_x G_{E-\omega}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_1 \hat{v}_x G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_3) \hat{v}_x G_{E-\omega}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) \gamma^a \tilde{G}_{E-\Omega-\omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \gamma^b G_{E-\omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \right\}, \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{\text{MT}}(\omega) &= -\frac{i}{2} \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 L_{ab}(\Omega; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \\
&\quad \times \text{tr} \left\{ \sigma_1 \hat{v}_x G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \gamma^a \tilde{G}_{E-\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{v}_x \tilde{G}_{E-\Omega-\omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \gamma^b G_{E-\omega}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) \right\}, \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{\text{AL}}(\omega) &= -2 \left(\frac{i}{2} \right)^2 \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{dE'}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_5 \\
&\quad \times \text{tr} \left\{ \sigma_1 \hat{v}_x G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \gamma^a \tilde{G}_{E-\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \gamma^b G_{E-\omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \right\} \\
&\quad \times \text{tr} \left\{ \hat{v}_x G_{E'-\omega}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \gamma^c \tilde{G}_{E'-\Omega}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5) \gamma^d G_{E'}(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_3) \right\} \\
&\quad \times L_{ad}(\Omega; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5) L_{cb}(\Omega - \omega; \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2). \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Здесь tr действует только в пространстве Келдыша (нижний латинский индекс), поскольку след в пространстве Намбу уже взят, используя диагональность функции Грина (1.8).

Выражения для токовых ядер (A.1)–(A.3) должны быть усреднены по беспорядку. Используя Ур. (1.9) и вычисляя след по пространству Келдыша, получаем сумму произведений нескольких G^R и G^A , которые должны быть усреднены с помощью стандартной крестовой техники.

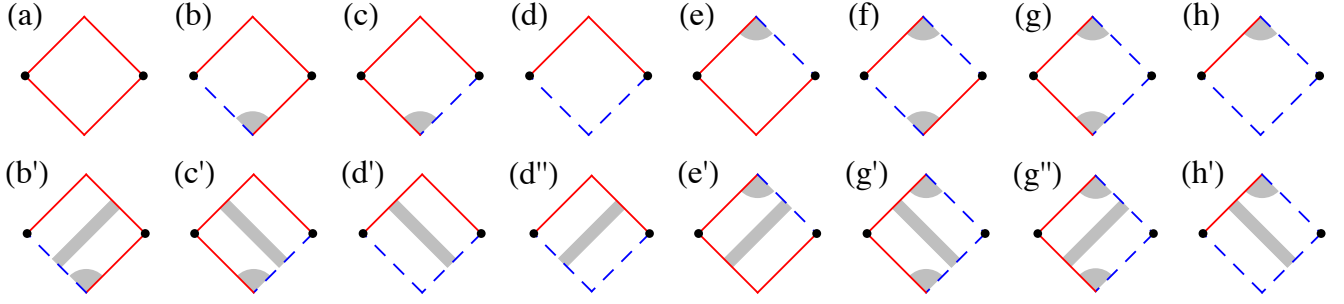


Рисунок А.1 — Усреднение по потенциальному беспорядку различных блоков, которые возникают при вычислении диаграммы МТ, показанной на Рис. 1.2. Сплошные красные линии обозначают G^R , а пунктирные синие линии — G^A ; купероны показаны серым цветом, а токовые вершины изображены точками.

Также должны быть учтены зеркальные диаграммы с заменой $G^R \leftrightarrow G^A$.

Вторая строка показывает результаты усреднения с дополнительным купероном, обозначаемые как МТ(2). В диффузионном режиме важны только диаграммы с наибольшим числом куперонов [(f), (g), (g') и (g'')]. Диаграмма (f) отвечает за аномальный вклад МТ.

А.2 Усреднение по беспорядку

В этом Приложении на примере вклада МТ мы проиллюстрируем, как работает общая процедура усреднения по беспорядку, описанная в Приложении А.1. При вычислении следа в Ур. (А.2) мы получаем $2^4 = 16$ блоков (нумеруемые индексом n) из четырех линий, где каждая функция Грина может быть либо G^R , либо G^A . Усредняя их независимо от флуктуационного пропагатора, можно привести ядро к сумме вкладов вида:

$$Q_{(n)}^{\text{MT}}(\omega) = \frac{i}{2} \int (d\Omega)(d\mathbf{q})(dE) \mathcal{B}_{(n)}^{\text{MT}} \mathcal{L}_{(n)}^{\text{MT}}, \quad (\text{A.4})$$

где \mathcal{B}_n — усредненный блок, в то время как \mathcal{L}_n содержит как флуктуационный пропагандатор, так и функцию распределения [возникающую из G^K в Ур. (1.9)]. Здесь и ниже мы используем обозначения $(d\Omega) \equiv d\Omega/2\pi$ и $(d\mathbf{q}) = d\mathbf{q}/(2\pi)^d$.

Всевозможные блоки и способы их усреднения по беспорядку показаны на Рис. А.1. Как обычно, базовым элементом является одиочастичная функция Грина, усредненная в приближении непересекающихся пунктиров: $G^{R,A}(E, p) =$

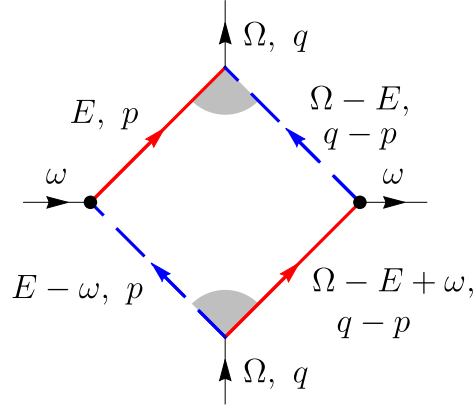


Рисунок A.2 — Диаграмма для АМТ вклада, показанная на Рис. A.1(f), с обозначением энергий и импульсов функций Грина.

$1/[E - \xi \pm i/2\tau]$, где $\xi(p) = p^2/2m - \mu$ [96]. Затем следует нарисовать все возможные примесные линии без пересечений, что формирует ряд примесных лестниц (обобщенных куперонов) [97].

Рассмотрим, например, усреднение типичного блока, показанного на Рис. A.1(f), который отвечает за вклад АМТ. Аргументы функций Грина показаны на Рис. A.2. Предполагая, что импульс q , переносимый флуктуационным пропагатором, удовлетворяет условию $q \ll p_F$, получим для соответствующего блока:

$$\mathcal{B}_{(f)}^{\text{MT}} = - \int (d\mathbf{p}) v_x^2 \langle G_E^R G_{\Omega-E}^A G_{E-\omega}^A G_{\Omega+\omega-E}^R \rangle, \quad (\text{A.5})$$

где v_x — x -компонента скорости, а знак обусловлен ее противоположными направлениями в левой и правой токовых вершинах. После усреднения возникают два обобщенных куперона $\gamma_{2E-2\omega-\Omega}^A(q)$ и $\gamma_{-2E+\Omega}^A(q)$ в нижнем и верхнем углах, соответственно. Интегрируя сначала по ξ , а затем усредняя по направлениям импульса на поверхности Ферми с помощью Ур. (1.23a), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(f)}^{\text{MT}}(E, \Omega, \omega, q) = & -2\pi\nu D\tau^2 \gamma_{2E-2\omega-\Omega}^A(q) \gamma_{-2E+\Omega}^A(q) \\ & \times \frac{f_1^A(2E - 2\omega - \Omega, q) + f_1^A(-2E + \Omega, q)}{(1 - i\omega\tau)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Часть с пропагатором и функциями распределения, отвечающая блоку на Рис. A.1(f), имеет вид

$$\mathcal{L}_{(f)}^{\text{MT}} = [F_{E-\Omega} - F_{E-\Omega-\omega}] [F_E L_\Omega^A + L_\Omega^K - F_{E-\omega} L_\Omega^R]. \quad (\text{A.7})$$

В итоге, АМТ вклад $Q_{(f)}^{\text{MT}}(\omega)$ определяется Ур. (A.4), (A.6) и (A.7).

Такая процедура должна быть проделана и с остальными блоками, содержащими G^R и G^A , а затем и с другими диаграммами, что приводит к окончательному выражению для ядра $Q(\omega)$. Чтобы найти статическую проводимость, необходимо извлечь линейный по ω член из $Q(\omega)$. После этого мы упрощаем общее выражение, сдвигая переменную $E \rightarrow E - \Omega$ в ряде членов и интегрируя по E по частям. Дополнительное упрощение достигается за счет использования уравнения детального баланса

$$B_{\Omega}(F_E - F_{E-\Omega}) = 1 - F_E F_{E-\Omega} \quad (\text{A.8})$$

и его производных.

A.3 Вклад AL и его разбиение

Начиная с Ур. (A.3) и следуя процедуре, описанной в Приложениях A.1 и A.2, после ряда вычислений можно получить следующее выражение для AL вклада:

$$\delta\sigma^{\text{AL}} = 2\pi^2 D\tau^3 \int (d\Omega)(dq) \left\{ B'_{\Omega} [L^R L^A (\Phi^R + \Phi^A)^2 - 2(L^R \Phi^R + L^A \Phi^A)^2] + 2B_{\Omega} [(L^R)^2 \Phi^R \Psi^R + (L^A)^2 \Phi^A \Psi^A] \right\}, \quad (\text{A.9})$$

где аргументами функций в квадратных скобках являются Ω и q . В Ур. (A.9), функции Φ и Ψ , возникающие в результате усреднения блоков с тремя функциями Грина, задаются формулами:

$$\Phi^R(\Omega, q) = \int (dE) F_E g_2^A (\gamma^A)^2, \quad (\text{A.10a})$$

$$\Psi^R(\Omega, q) = \int (dE) F'_E [2g_1^A \gamma^A + g_2^A (\gamma^A)^2]. \quad (\text{A.10b})$$

где в аргументах функций g_m и γ стоят $2E - \Omega$ и q . Вклад AL (A.9) может быть естественным образом разбит на сумму членов с одним (AL1) и двумя (AL2) флуктуационными пропагаторами. С этой целью заметим, что функция

Φ^R может быть представлена как производная от обратного флуктуационного пропагатора:

$$\Phi^R(\Omega, q) = -\frac{i}{2\pi\tau l} \frac{\partial [L^R(\Omega, q)]^{-1}}{\partial q}. \quad (\text{A.11})$$

Поэтому член пропорциональный B_Ω в Ур. (A.9) может быть выражен через производную от одного пропагатора:

$$\delta\sigma^{\text{AL1}} = -\frac{4\pi D\tau^2}{l} \int (d\Omega)(dq) B_\Omega \text{Im}(\Psi^R \partial_q L^R). \quad (\text{A.12})$$

Интегрируя далее по $|q|$ по частям, можно преобразовать $\delta\sigma^{\text{AL1}}$ к виду Ур. (1.25) и (1.26h). Наконец, с помощью Ур. (A.11) оставшаяся часть с двумя пропагаторами, $\delta\sigma^{\text{AL2}} = \delta\sigma^{\text{AL}} - \delta\sigma^{\text{AL1}}$, может быть записана в виде (1.27), содержащем только флуктуационные пропагаторы.

A.4 Эквивалентность результатам [25] в диффузионной области

В этом Приложении мы покажем, что наше выражение для флуктуационной поправки полностью совпадает с результатом, полученном в работе [25] при нулевом магнитном поле. С этой целью перепишем $\delta\sigma^{(\text{dos})}$ и $\delta\sigma^{(\text{sc})}$, дающиеся Ур. (77) и (79) из работы [25], в представлении (1.29). Переходя к пределу нулевого магнитного поля и выражая все в терминах функции $G(z)$ [см. (1.31)], мы получим

$$\zeta^{(\text{dos})} = -b \text{Im} \frac{G''}{G} - b' \frac{\text{Im} G \text{Im} G'}{|G|^2}, \quad (\text{A.13})$$

$$\zeta^{(\text{sc})} = bx \text{Im} \frac{G'G''}{G^2} + b'x \left(4 \frac{\text{Re} G' \text{Im} G}{|G|^2} \text{Im} \frac{G'}{G} - \text{Im} G' \text{Im} \frac{G'}{G^2} \right). \quad (\text{A.14})$$

Чтобы сравнить $\delta\sigma^{(\text{dos})} + \delta\sigma^{(\text{sc})}$ с $\delta\sigma^{\text{REG}} + \delta\sigma^{\text{AL2}}$, для начала мы запишем G'/G^2 в первом члене Ур. (A.14) как $-\partial G^{-1}/\partial x$ и проинтегрируем по x по частям. Эта процедура приводит к сокращению линейного по b члена в разнице:

$$\delta\zeta = \zeta^{\text{REG}} + \zeta^{\text{AL2}} - \zeta^{(\text{dos})} - \zeta^{(\text{sc})}, \quad (\text{A.15})$$

где интегрирование по x производится согласно Ур. (1.29). Затем мы выделим в $\delta\zeta$ члены, которые не содержат множителя x (происходящие от $\delta\zeta^{\text{REG}} - \delta\zeta^{(\text{dos})}$), подставим туда $G' + xG - \partial(xG')/\partial x$ и проинтегрируем по x по частям. Используя тождество

$$\text{Im} \frac{G'}{|G|^2} + \text{Im} \frac{G'}{G^2} = 2 \text{Re} \frac{G}{|G|^2} \text{Im} \frac{G'}{G}, \quad (\text{A.16})$$

можно свести разницу к выражению

$$\delta\zeta = 4b'x \text{Im} \frac{G'}{G} \frac{\text{Im} G' \text{Re} G - \text{Re} G' \text{Im} G - \text{Im} G' G^*}{|G|^2}, \quad (\text{A.17})$$

которое равно нулю в виду тождества $\text{Im} A \text{Re} B - \text{Re} A \text{Im} B = \text{Im} AB^*$. Наконец, легко проверить, $\delta\sigma^{(\text{an})} = \delta\sigma^{\text{AMT}}$, что завершает доказательство полной эквивалентности нашего подхода и подхода, предложенного в работе [25].

A.5 Аномальная поправка МТ в диффузионной области вблизи перехода

В этом Приложении мы вычисляем $\delta\sigma^{\text{AMT}}$ в окрестности перехода ($\epsilon \ll 1$). Скорость сбоя фазы предполагается малой, $\gamma \ll 1$, но соотношение между ϵ и γ может быть произвольным.

Наиболее сингулярный вклад [12; 13] приходит от малых x и y , где можно заменить G на $G_0 = (\pi^2/2)(x + iy) + \epsilon$, а $b(y)$ — ее ведущей асимптотикой $b_0(y) = 1/(2\pi y)$. Затем подставляем Ур. (1.35) в Ур. (1.29) и, интегрируя по y , приходим к

$$\delta\sigma_0^{\text{AMT}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{x + x_*} \frac{1}{x + x_\epsilon}, \quad (\text{A.18})$$

где $x_\epsilon = (2/\pi^2)\epsilon$. Таким образом, легко восстанавливается ведущая асимптотика, даваемая первым членом в Ур. (1.42).

Члены, опущенные при выводе вклада (A.18), можно записать в виде

$$\delta\sigma_1^{\text{AMT}} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x + x_*} \int_{-\infty}^\infty dy H(x, y, \epsilon), \quad (\text{A.19})$$

где

$$H(x, y, \epsilon) = b'(y) \frac{\text{Im}^2 G(z)}{|G(z)|^2} - b'_0(y) \frac{\text{Im}^2 G_0(z)}{|G_0(z)|^2}. \quad (\text{A.20})$$

Для извлечения ведущего вклада из Ур. (A.19) при малых ϵ , необходимо изучить поведение функции $H(x, y, \epsilon)$ в пределе $x, \epsilon \rightarrow 0$. Это должно быть сделано аккуратно, так как она содержит как гладкую часть, затухающую при $y \sim 1$, так и резкую δ -образную функцию, приходящую из первого члена в Ур. (A.20):

$$H(x, y, \epsilon) \approx b'(y) \frac{\text{Im}^2 \psi(1/2 + iy)}{|\psi(1/2 + iy) - \psi(1/2)|^2} - b'_0(y) + \frac{14\zeta(3)}{\pi^4} \frac{(x + x_e)(x^2 + 2xx_e + y^2)}{[(x + x_e)^2 + y^2]^2}. \quad (\text{A.21})$$

Подставляя Ур. (A.21) в Ур. (A.19), мы приходим к

$$\delta\sigma_1^{\text{AMT}} = - \left[\frac{7\zeta(3)}{\pi^4} + \kappa \right] \ln \frac{1}{\gamma} + \frac{7\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{\epsilon[\epsilon \ln(\epsilon/\gamma) - \epsilon + \gamma]}{(\epsilon - \gamma)^2} + O(1), \quad (\text{A.22})$$

где $\kappa = 0.1120$ — численное значение интеграла

$$\kappa = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\infty dy \left[\frac{1}{y^2} - \frac{[\psi'(1/2)]^2 \text{sech}^4(\pi y)}{|\psi(1/2 + iy) - \psi(1/2)|^2} \right]. \quad (\text{A.23})$$

A.6 Функции L^R , Σ^R и Σ^Z в чистом пределе

В этом Приложении мы вычислим основные ингредиенты, входящие в Ур. (1.53) (L^R , Σ^R и Σ^Z), в баллистическом пределе. Для функций Σ^R и Σ^Z мы используем Ур. (1.54) и (1.55), которые дают ведущее асимптотическое поведение при $\tau \rightarrow \infty$.

Флуктуационный пропагатор

В баллистическом пределе функция f_1^R , определенная в Ур. (1.23a), ведет себя как $1/\tau$, и флуктуационный пропагатор (1.17) становится не зависящим от τ . Суммирование по мацубаровским частотам может быть легко выполнено,

что приводит к

$$(L^R)^{-1} = \epsilon + \langle \psi(1/2 + ix \cos \theta - iy) \rangle - \psi(1/2), \quad (\text{A.24})$$

где безразмерный импульс x и частота y в баллистической области определены соотношениями (1.52), а $\langle \dots \rangle = \int (\dots) d\theta / 2\pi$ обозначает усреднение по углу в 2D. Уравнение (A.24) можно привести к форме, более удобной для дальнейшей работы, с помощью интегрального представления для дигамма функции [98], которое мы запишем для аргумента $z + 1/2$:

$$\psi(1/2 + z) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{2 \sinh t/2} \right] dt. \quad (\text{A.25})$$

Теперь угловое усреднение может быть легко выполнено, и мы получим

$$(L^R)^{-1} = \epsilon + \int_0^\infty \frac{1 - J_0(xt)e^{iyt}}{2 \sinh t/2} dt, \quad (\text{A.26})$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого индекса.

Функция Σ^R

В ведущем порядке при $\tau \rightarrow \infty$ функция Σ^R задается Ур. (1.54). Запишем ее как $\Sigma^{R(11)} + \Sigma^{R(2)}$, в соответствии с двумя слагаемыми в Ур. (1.54). При вычислении $\Sigma^{R(11)}$ воспользуемся явной формой $f_1^A(2E - \Omega, q) = f_1^R(\Omega - 2E, q)$, даваемой Ур. (1.16), и деформируем контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, зацепляя полюса F_E . В ведущем порядке по $1/\tau$ получаем

$$\begin{aligned} \Sigma^{R(11)} &= -\frac{4iT}{\tau^2} \sum_{\epsilon > 0} \frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{(2iE - i\Omega)^2 + q^2 v^2} \Big|_{E=-i\epsilon} \\ &= -i \frac{\psi'(1/2 + ix - iy) - \psi'(1/2 - ix - iy)}{16\pi^3 x T^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

С другой стороны, для вычисления $\Sigma^{R(2)}$ удобнее сохранить f_2 в исходном виде (1.23a), что позволяет выполнить интегрирование по E аналогично Ур. (A.27):

$$\begin{aligned} \Sigma^{R(2)} &= \frac{4iT}{\tau^2} \sum_{\epsilon>0} \frac{\partial}{\partial E} \left\langle \frac{1}{(2iE - i\Omega + iqv \cos \theta)^2} \right\rangle \Big|_{E=-i\epsilon} \\ &= -\frac{\langle \psi''(1/2 + ix \cos \theta - iy) \rangle}{8\pi^3 T^2 \tau^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

где еще предстоит провести угловое усреднение.

Поскольку $\Sigma^R = \Sigma^{R(11)} + \Sigma^{R(2)}$, удобно привести Ур. (A.27) и (A.28) к одинаковому виду. Это может быть сделано с помощью Ур. (A.25), что дает

$$\Sigma^R = \frac{1}{8\pi^3 T^2 \tau^2} \int_0^\infty \frac{t^2 [J_0(xt) - S_0(xt)] e^{iyt}}{2 \sinh t/2} dt, \quad (\text{A.29})$$

где $S_0(z) \equiv \sin(z)/z$. Члены с J_0 и S_0 возникают от $\Sigma^{R(2)}$ и $\Sigma^{R(11)}$, соответственно.

Функция Σ^Z

В ведущем порядке при $\tau \rightarrow \infty$ функция Σ^Z определяется Ур. (1.55). В этом приближении можно пренебречь куперонами, и, следовательно, специальная область низких импульсов, $ql \ll 1$, показанная на Рис. 1.5(a), несущественна. Следуя Ур. (1.55), мы запишем Σ^Z как $\Sigma^{Z(11)} + \Sigma^{Z(2)}$. Первый член, $\Sigma^{Z(11)}$, включает произведение $f_1^R f_1^A$, которое имеет разрезы как в верхней, так и в нижней полуплоскостях комплексной E , как показано на Рис. 1.5(b). Поэтому его можно записать как сумму вкладов от полюсов, $\Sigma_{\tanh}^{Z(11)}$, и от разреза, Σ_{sing}^Z . Первый вычисляется аналогично (A.27):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tanh}^{Z(11)} &= \text{Re} \frac{8iT}{\tau^2} \sum_{\epsilon>0} \frac{1}{(2iE - i\Omega)^2 + q^2 v^2} \Big|_{E=-i\epsilon} \\ &= \frac{\text{Re}[\psi(1/2 + ix - iy) - \psi(1/2 - ix - iy)]}{4\pi^2 x T \tau^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

В пределе $T\tau \rightarrow \infty$ вклад от разреза содержит дополнительную логарифмическую особенность, возникающую из-за схлопывания разрезов с верхней и нижней полуплоскостей [см. Рис. 1.5(b)]. Сдвигая энергию $E = E' + \Omega/2$, получаем:

$$\Sigma_{\text{sing}}^Z \approx -\frac{8}{\tau^2} \int_{-qv/2+1/\tau}^{qv/2-1/\tau} \frac{dE F(E' + \Omega/2)}{2\pi q^2 v^2 - (2E')^2}. \quad (\text{A.31})$$

Логарифмическая расходимость по энергии обрезается на $|E'| - qv/2 \sim 1/\tau$, этот масштаб связан с расстоянием между точками ветвления. С логарифмической точностью получаем

$$\Sigma_{\text{sing}}^Z \approx -\frac{\tanh \pi(x+y) - \tanh \pi(x-y)}{4\pi^2 T \tau^2 x} \ln T \tau x. \quad (\text{A.32})$$

Вычисляя вклад $\Sigma^{Z(2)}$ аналогично $\Sigma^{R(2)}$ из Ур. (A.28), находим

$$\begin{aligned} \Sigma^{Z(2)} &= \text{Re} \frac{8iT}{\tau^2} \sum_{\epsilon>0} \left\langle \frac{1}{(2iE - i\Omega + iqv \cos \theta)^2} \right\rangle \Big|_{E=-i\epsilon} \\ &= \frac{\text{Re} i \langle \psi'(1/2 + ix \cos \theta - iy) \rangle}{2\pi^2 T \tau^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Далее, с помощью Ур. (A.25) мы можем объединить полюсные вклады (A.30) и (A.33), получив более компактное выражение:

$$\Sigma_{\text{tanh}}^Z = -\frac{1}{2\pi^2 T \tau^2} \int_0^\infty \frac{t [J_0(xt) + S_0(xt)] \sin(yt)}{2 \sinh t/2} dt. \quad (\text{A.34})$$

Результирующее выражение для $\Sigma^Z = \Sigma_{\text{tanh}}^Z + \Sigma_{\text{sing}}^Z$ дается суммой двух вкладов (A.34) и (A.32), соответственно.

Коэффициенты в уравнениях (1.67) и (1.68)

Коэффициенты $\alpha_p \approx 0.458$ и $\alpha_c \approx 0.190$ в Ур. (1.67) и (1.68) определяются следующими интегралами:

$$\alpha_p = \int_0^\infty x dx \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty ds \int_0^\infty t dt \frac{J_0(xs)[J_0(xt) + S_0(xt)] \sin(ys) \sin(yt)}{\sinh(s/2) \sinh(t/2) \sinh^2(2\pi y)}, \quad (\text{A.35})$$

$$\alpha_c = \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty dx \int_0^\infty dt \frac{J_0(xt) \sin(yt) \tanh \pi(x+y) - \tanh \pi(x-y)}{\sinh t/2 \sinh^2(2\pi y)}. \quad (\text{A.36})$$

Приложение Б

Теоретико-полевое описание ННПТ

Б.1 Доказательство единственности НПТ для задачи Уитни

В этом Приложении мы докажем Теорему о *единственности* непадающей траектории для краевой задачи (2.1) на отрезке времени $[t_1, t_2]$ с граничными условиями $\theta(t_1) = \theta_L$ и $\theta(t_2) = \theta_R$ и произвольной зависимостью горизонтальной силы от времени $f(t)$. *Существование* непадающего решения, остающегося в полосе $\theta(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$, многократно доказано в математической литературе [45; 47; 49; 50].

Для доказательства единственности решения задачи Уитни удобно перейти к новой переменной

$$\xi = \ln \tan \frac{\theta + \pi/2}{2}. \quad (\text{Б.1})$$

Преобразование (Б.1) отображает полосу $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ на всю действительную ось $\xi \in \mathbb{R}$. В терминах переменной $\xi(t)$ уравнение движения маятника (2.1) принимает вид

$$\ddot{\xi} = \xi^2 \tanh \xi + \omega^2 \sinh \xi + f(t). \quad (\text{Б.2})$$

Рассмотрим теперь два разных решения уравнения (Б.2), $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, совпадающих в начальный момент времени $t = 0$: $\xi_1(0) = \xi_2(0)$. Пусть в начальный момент времени первое решение обгоняет второе: $\dot{\xi}_1(0) > \dot{\xi}_2(0)$. Тогда в некотором интервале $0 < t < \tau$ с положительным τ будем иметь

$$\xi_1(t) > \xi_2(t), \quad \dot{\xi}_1(t) > \dot{\xi}_2(t). \quad (\text{Б.3})$$

Лемма о невозможности догнать. Неравенства (Б.3) выполняются до тех пор, пока одна из траекторий не достигнет концов интервала $\xi = \pm\infty$ и уравнение (Б.2) не станет неприменимым.

Доказательство Леммы. Допустим противное и рассмотрим момент времени t_* , когда неравенства (Б.3) впервые нарушаются. Очевидно, что первым нару-

шается неравенство на скорости:

$$\dot{\xi}_1(t_*) = \dot{\xi}_2(t_*). \quad (\text{Б.4})$$

Запишем уравнение (Б.2) для $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ и вычтем одно из другого, сократив тем самым неизвестную силу $f(t)$:

$$\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2 = \dot{\xi}_1^2 \tanh \xi_1 - \dot{\xi}_2^2 \tanh \xi_2 + \omega^2(\sinh \xi_1 - \sinh \xi_2). \quad (\text{Б.5})$$

Рассмотрим это равенство в момент времени $t = t_*$. С одной стороны, его правая часть оказывается строго положительной:

$$a \equiv \dot{\xi}_1^2(t_*)[\tanh \xi_1(t_*) - \tanh \xi_2(t_*)] + \omega^2[\sinh \xi_1(t_*) - \sinh \xi_2(t_*)] > 0, \quad (\text{Б.6})$$

что следует из монотонности функций \tanh и \sinh и выполняющегося по-прежнему условия $\xi_1(t_*) > \xi_2(t_*)$. С другой стороны, для того, чтобы относительная скорость $\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2$ стала отрицательной при $t = t_*$, необходимо, чтобы относительное ускорение $a = \ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2$ в момент времени t_* было отрицательным: $a < 0$. Возникающее противоречие доказывает Лемму.

Теорема о единственности решения задачи Уитни очевидным образом следует из Леммы о невозможности догнать.

Б.2 Формализм Паризи-Сурла

Б.2.1 Суперсимметричное функциональное представление и усреднение по шуму

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_t^2 \theta(t) = F(\theta(t)), \quad (\text{Б.7})$$

где $F(\theta)$ может быть нелинейной функцией с произвольной зависимостью от времени. Для маятника под действием гравитации и горизонтальной силы

$$F(\theta) = \omega^2 \sin \theta + f(t) \cos \theta. \quad (\text{Б.8})$$

Пусть $\mathcal{A}[\theta]$ — функционал от какой-то траектории $\theta(t)$. Тогда сумма $\mathcal{A}[\theta]$ по всем решениям дифференциального уравнения (Б.7) может быть записана как функциональный интеграл по всем функциям $\theta(t)$ [40; 41; 78]:

$$\sum_{\text{solutions}} \mathcal{A}[\theta] = \int \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{A}[\theta(t)] \delta[-\partial_t^2 \theta + F(\theta)] |\det[-\partial_t^2 + F'(\theta)]|, \quad (\text{Б.9})$$

где дельта-функция гарантирует, что $\theta(t)$ действительно удовлетворяет уравнению, а абсолютное значение детерминанта возникает, поскольку в аргументе дельта-функции стоит уравнение, а не его решение. В общем случае, когда Ур. (Б.7) обладает многими решениями, знак определителя в Ур. (Б.9) может быть разным на разных решениях. Однако единственность НПТ для задачи Уитни гарантирует, что определитель положителен, так что функционал \mathcal{A} от нее может быть записан с самим определителем, а не его модулем:

$$\mathcal{A}[\theta_{\text{NFT}}] = \int \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{A}[\theta(t)] \delta[-\partial_t^2 \theta + F(\theta)] \det[-\partial_t^2 + F'(\theta)]. \quad (\text{Б.10})$$

Далее, следуя подходу Паризи-Сурла [40; 41; 78], мы перепишем дельта-функцию, используя дополнительное бозонное поле $\lambda(t)$, и определитель, используя пару Грассмановых полей $\bar{\chi}(t)$ и $\chi(t)$:

$$\mathcal{A}[\theta_{\text{NFT}}] = \int \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{D}\lambda(t) \mathcal{D}\bar{\chi}(t) \mathcal{D}\chi(t) \mathcal{A}[\theta(t)] e^S, \quad (\text{Б.11})$$

с действием в виде

$$S = \int L dt, \quad L = i\lambda[-\partial_t^2 \theta + F(\theta)] + \bar{\chi}[-\partial_t^2 + F'(\theta)]\chi. \quad (\text{Б.12})$$

Теперь мы можем усреднить по реализациям случайной силы $f(t)$, предполагая гауссову статистику белого шума с корреляционной функцией (2.2).

Интегрируя по частям в кинетическом члене, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}[\theta_{\text{NFT}}] \rangle &= \int \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{D}\lambda(t) \mathcal{D}\bar{\chi}(t) \mathcal{D}\chi(t) \mathcal{A}[\theta(t)] \\ &\quad \times \exp \left[\int dt (i \partial_t \lambda \partial_t \theta + \partial_t \bar{\chi} \partial_t \chi + \mathcal{V}) \right], \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

где суперпотенциал \mathcal{V} дается формулой

$$\mathcal{V} = \omega^2 (i\lambda \sin \theta + \bar{\chi}\chi \cos \theta) + \alpha (i\lambda \cos \theta - \bar{\chi}\chi \sin \theta)^2. \quad (\text{Б.14})$$

Б.2.2 Вывод трансфер-матричного гамильтониана

Одномерная теория поля (Б.13) может быть интерпретирована как фейнмановский интеграл по траекториям, являющийся представлением некоторой квантовой механики. Альтернативное, но полностью эквивалентное представление, как известно, основывается на зависящем от времени уравнении Шредингера для волновой функции $\hat{\Psi}$ с соответствующим трансфер-матричным гамильтонианом. Идея сведения функционального интеграла к решению соответствующего уравнения Шредингера оказалась очень плодотворной в теории квазиодномерной локализации Андерсона [42; 76]. Для построения уравнения Шредингера введем $\Psi(\lambda, \theta, \bar{\chi}, \chi|t)$ как односторонний функциональный интеграл (Б.13) с фиксированным граничным условием:

$$\hat{\Psi}(\lambda, \theta, \bar{\chi}, \chi|t) = \int \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{D}\lambda(t) \mathcal{D}\bar{\chi}(t) \mathcal{D}\chi(t) \exp \left[\int_{-\infty}^t dt (i\lambda' \theta' + \bar{\chi}' \chi' + \mathcal{V}) \right]. \quad (\text{Б.15})$$

Рассмотрим близкие моменты времени t и $t + \epsilon$ (где $\epsilon \rightarrow 0$) и запишем изменение функции Ψ :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\lambda_1, \theta_1, \bar{\chi}_1, \chi_1|t + \epsilon) &\approx \int \frac{d\lambda}{2\pi} d\theta d\bar{\chi} d\chi \\ &\quad \times \exp \left(i \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\theta_1 - \theta)}{\epsilon} + \frac{(\bar{\chi}_1 - \bar{\chi})(\chi_1 - \chi)}{\epsilon} + \epsilon \mathcal{V} \right) \hat{\Psi}(\lambda, \theta, \bar{\chi}, \chi|t). \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Интеграл по бозонным переменным λ и θ определяется окрестностью λ_1 и θ_1 из-за кинетического члена в экспоненте. Экспонента должна быть разложена до первого порядка по потенциалу \mathcal{V} и кинетической энергии грассмановых полей. Оставляя только главный порядок по малому параметру ϵ , получаем эволюционное уравнение

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = (i\partial_\lambda \partial_\theta + \partial_\chi \partial_{\bar{\chi}} + \mathcal{V}) \hat{\Psi}. \quad (\text{Б.17})$$

Это уравнение можно разделить на грассманову и обычную части, используя естественное представление для волновой функции:

$$\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \bar{\chi}, \chi) = \Psi(\theta, \lambda) + \Phi(\theta, \lambda) \bar{\chi} \chi. \quad (\text{Б.18})$$

В терминах функций $\Psi(\theta, \lambda)$ и $\Phi(\theta, \lambda)$ уравнение Шредингера (Б.17) может быть записано в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\partial_\lambda \partial_\theta + \mathcal{V}_1 & 1 \\ \mathcal{V}_2 & i\partial_\lambda \partial_\theta + \mathcal{V}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.19})$$

где $\mathcal{V}_{1,2}$ компоненты суперпотенциала (Б.14) разложенные по грассмановому базису: $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \bar{\chi} \chi$.

Как и в теории локализации Андерсона [42; 76], экспоненциально слабая чувствительность НПТ к граничным условиям указывает на то, что для описания статистики ННПТ достаточно ограничиться *нулевой модой* трансфер-матричного гамильтониана:

$$\begin{pmatrix} i\partial_\lambda \partial_\theta + \mathcal{V}_1 & 1 \\ \mathcal{V}_2 & i\partial_\lambda \partial_\theta + \mathcal{V}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{Б.20})$$

Б.2.3 Редукция к скалярному уравнению и оператор Фоккера-Планка

По построению теории коэффициенты суперпотенциала (Б.14) подчиняются соотношению

$$i\lambda\mathcal{V}_2 = \partial_\theta\mathcal{V}_1. \quad (\text{Б.21})$$

Как следствие, функции Ψ и Φ становятся связанными таким же соотношением:

$$i\lambda\Phi = \partial_\theta\Psi, \quad (\text{Б.22})$$

а система (Б.20) сводится к одному скалярному уравнению для функции $\Psi(\theta, \lambda)$:

$$(i\lambda\partial_\lambda\partial_\theta\lambda^{-1} + i\omega^2\lambda\sin\theta - \alpha\lambda^2\cos^2\theta)\Psi = 0. \quad (\text{Б.23})$$

Удобно ввести новую функцию

$$\psi(\theta, \lambda) = i\Psi(\theta, \lambda)/\lambda \quad (\text{Б.24})$$

и сделать Фурье-преобразование по переменной λ согласно

$$\psi(\theta, \lambda) = \int \psi(\theta, p)e^{ip\lambda}dp. \quad (\text{Б.25})$$

Суперпотенциал $\psi(\theta, p)$ будет играть ключевую роль в нашем анализе. Через него уравнение на нулевую моду (Б.23) принимает простейшую возможную форму, формально совпадающую с уравнением Фоккера-Планка для перевернутого маятника:

$$(p\partial_\theta + \omega^2\sin\theta\partial_p - \alpha\cos^2\theta\partial_p^2)\psi(\theta, p) = 0. \quad (\text{Б.26})$$

В то же время, функции $\Psi(\theta, p)$ и $\Phi(\theta, p)$ имеют элегантное представление в терминах функции $\psi(\theta, p)$:

$$\Psi = \partial_p\psi, \quad \Phi = -\partial_\theta\psi. \quad (\text{Б.27})$$

Б.2.4 БРСТ симметрия

Соотношение (Б.22) между Ψ и Φ , позволяющее получить одно уравнение для функции Ψ , является следствием симметрии Бекки-Руэ-Стора-Тютина (БРСТ) теории Паризи-Сурла для стохастических дифференциальных уравнений [78]. Лагранжиан теории, определенный в уравнении (Б.12), оказывается инвариантным по отношению к бесконечно малым вращениям грассмановым полем ε : $\delta\theta = \varepsilon\chi$ и $\delta\bar{\chi} = -i\varepsilon\lambda$. Это означает, что лагранжиан удовлетворяет уравнению $\hat{\mathcal{D}}L = 0$ и может быть записан в виде:

$$L = \hat{\mathcal{D}}(\bar{\chi}[-\partial_t^2\theta + F(\theta)]), \quad (\text{Б.28})$$

где $\hat{\mathcal{D}}$ — нильпотентный ($\hat{\mathcal{D}}^2 = 0$) БРСТ оператор:

$$\hat{\mathcal{D}} = i\lambda\partial_{\bar{\chi}} - \chi\partial_{\theta}. \quad (\text{Б.29})$$

БРСТ симметрия лагранжиана переводится в БРСТ симметрию волновых функций в гамильтоновом представлении: $\hat{\mathcal{D}}\hat{\Psi} = 0$. Следовательно, должна существовать такая функция (суперпотенциал) ψ , что

$$\hat{\Psi} = \hat{\mathcal{D}}(\bar{\chi}\psi). \quad (\text{Б.30})$$

Сравнивая с Ур. (Б.18) и (Б.22), мы видим, что определенная таким образом функция ψ совпадает (с точностью до общего знака) с той же функцией, введенной в Приложении Б.2.3.

Б.2.5 Совместная функция распределения угла и скорости

Мгновенная функция распределения угла и импульса ННПТ, $P(\theta, p)$, получается из уравнения (Б.13) при выборе функционала $\mathcal{A}[\theta] = \delta(\theta(t) - \theta)\delta(\dot{\theta}(t) - p)$. Такой функциональный интеграл можно вычислить, взяв два бесконечно близких момента времени, t и $t + \epsilon$, заменив функциональные интегралы по областям

$t' < t$ и $t' > t + \epsilon$ соответствующими нулевыми модами и дискретизировав действие на интервале $(t, t + \epsilon)$:

$$P(\theta, p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 d\chi_1 d\bar{\chi}_1 d\chi_2 d\bar{\chi}_2 \delta(\theta_1 - \theta) \delta\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\epsilon} - p\right) \\ \times \hat{\Psi}(\lambda_1, \theta_1, \bar{\chi}_1, \chi_1) \exp\left\{i \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\theta_2 - \theta_1)}{\epsilon} + \frac{(\bar{\chi}_2 - \bar{\chi}_1)(\chi_2 - \chi_1)}{\epsilon}\right\} \hat{\Psi}(\lambda_2, \theta_2, \bar{\chi}_2, \chi_2). \quad (\text{Б.31})$$

Подставляя $\hat{\Psi}$ из Ур. (Б.18), вычисляя все интегралы и переходя к импульсному представлению согласно (Б.25), мы получим

$$P(\theta, p) = \Psi(\theta, p)\Phi(\theta, -p) + \Psi(\theta, -p)\Phi(\theta, p). \quad (\text{Б.32})$$

В терминах суперпотенциала ψ , функция распределения ННПТ принимает удивительно компактную форму:

$$P(\theta, p) = \{\psi(\theta, p), \psi(\theta, -p)\}_{\theta, p}, \quad (\text{Б.33})$$

где скобка Пуассона определена стандартным образом как

$$\{f, g\}_{\theta, p} = (\partial_\theta f)(\partial_p g) - (\partial_p f)(\partial_\theta g). \quad (\text{Б.34})$$

Б.3 Граничные условия для суперпотенциала

Чтобы завершить формулировку теории для статистики ННПТ, мы должны наложить граничные условия на функцию $\psi(\theta, p)$ при $\theta = \pm\pi/2$, которые обеспечат, что маятник никогда не покинет верхнюю полуплоскость. В терминах PDF это означает, что $P(\pm\pi/2, p)$ должна зануляться для всех $p \neq 0$. Структура Ур. (Б.33) допускает, что достаточно занулить $\psi(\pm\pi/2, p)$ не для всех p , а только на половине оси. Мы считаем удобным разрешить это ограничение

путем наложения следующих граничных уравнений:

$$\psi(\pi/2, p < 0) = -1/2, \quad (\text{Б.35a})$$

$$\psi(-\pi/2, p > 0) = 1/2. \quad (\text{Б.35b})$$

Как следствие уравнения Фоккера-Планка (Б.26), отсюда будет следовать, что

$$\psi(\theta, \pm \infty) = \pm 1/2. \quad (\text{Б.36})$$

Продемонстрируем, что уравнение Фоккера-Планка (Б.26) с граничными условиями (Б.35) генерирует $P(\theta, p)$, которая оказывается автоматически нормированной на единицу. Используя Ур. (Б.33) и интегрируя один из двух членов в скобке Пуассона по частям по θ и по p , мы получаем, что интегральные члены обращаются в нуль и только граничные вносят вклад:

$$\int P(\theta, p) d\theta dp = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \psi(\theta, -p) \partial_{\theta} \psi(\theta, p) \Big|_{p=-\infty}^{p=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(\theta, -p) \partial_p \psi(\theta, p) \Big|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}. \quad (\text{Б.37})$$

Первый член обнуляется вследствие Ур. (Б.36), тогда как второй член сводится к интегралам по двум лучам p согласно граничным условиям (Б.35):

$$\int P(\theta, p) d\theta dp = - \int_0^{\infty} dp \psi(\pi/2, -p) \partial_p \psi(\pi/2, p) + \int_{-\infty}^0 dp \psi(-\pi/2, -p) \partial_p \psi(-\pi/2, p). \quad (\text{Б.38})$$

Здесь $\psi(\pm\pi/2, -p)$ — константы, заданные условием $\psi(\theta, \mp\infty) = \pm 1/2$, поэтому остается проинтегрировать только полные производные. Используя непрерывность $\psi(\theta, p)$, мы приходим к

$$\int P(\theta, p) d\theta dp = [\psi(\theta, \infty) - \psi(\theta, -\infty)]^2 = 1, \quad (\text{Б.39})$$

это дает правильную нормировку для PDF. Проще всего условие нормировки записывается в λ -представлении:

$$\Psi(\theta, \lambda = 0) = 1. \quad (\text{Б.40})$$

Наконец, обсудим степень свободы в определении граничных условий (Б.35). Первая неопределенность связана с тем, что функция $\psi(\theta, p)$ входит в физические наблюдаемые только через свои производные [см. (Б.27) и (Б.33)]. Поэтому она определяется с точностью до аддитивной константы. Нормировка PDF гарантирует, что $\psi(\theta, \infty) - \psi(\theta, -\infty) = 1$. В наших граничных условиях (Б.35) мы разрешаем это ограничение симметричным образом. Вторая неопределенность связана с выбором полупрямых импульса на границах, где $\psi(\pm\pi/2, p)$ должна быть постоянной. Помимо условий (Б.35), существует альтернативный способ фиксации $\psi(\pi/2, p > 0)$ и $\psi(-\pi/2, p < 0)$ на других полупрямых p , который соответствовал бы изменению знака импульса. Однако, поскольку PDF является билинейной функцией $\psi(\theta, p)$ и $\psi(\theta, -p)$, такой выбор приводит к тому же выражению для PDF.

Б.4 Точное решение в отсутствии гравитации ($\omega = 0$)

Б.4.1 Разложение по функциям Эйри

В отсутствие вертикальной силы функция распределения ННПТ может быть получена точно. В этом пределе уравнение Фоккера-Планка (2.22) содержит только два члена, что позволяет разделить переменные. В терминах новых координаты и импульса, введенных в уравнении (2.28), уравнение (2.22) переписывается в виде

$$\partial_\tau \psi = q^{-1} \partial_q^2 \psi. \quad (\text{Б.41})$$

Собственные функции оператора в правой части Ур. (Б.41) — это функции Эйри $\phi_\mu(q) = \text{Ai}(\mu q)$ [99], параметризуемые непрерывным индексом $\mu \in \mathbb{R}$, с соответствующими собственными значениями $\epsilon_\mu = \mu^3$. Поэтому общее решение Ур. (Б.41) может быть записано как интеграл

$$\psi(\tau, q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu c(\mu) \text{Ai}(\mu q) \exp(\mu^3 \tau), \quad (\text{Б.42})$$

где $c(\mu)$ — коэффициенты *мультипликативного* преобразования Эйри [86] функции ψ на линии $\tau = 0$ (верхнее положение маятника).

Б.4.2 Решение для $c(\mu)$

Функция $\psi(\tau, q)$, записанная в терминах интегрального представления (Б.42), решает уравнение (Б.41) во внутренней области $|\tau| < 1$ (т. е. $|\theta| < \pi/2$). Неизвестная функция $c(\mu)$ должна быть определена из граничных условий (Б.35) при $|\theta| = \pi/2$. Здесь мы покажем, что удовлетворяющая этим условиям $c(\mu)$ дается выражением:

$$c(\mu) = \frac{3 \operatorname{Ai}'(0) \operatorname{Ai}[(3/2)^{2/3} \mu^2]}{\operatorname{Ai}(0) \mu}. \quad (\text{Б.43})$$

Идея, лежащая в основе анзаца (Б.43), заключается в том, что вклад больших μ имеет тенденцию взрываться при большом $|\tau|$ из-за экспоненциального фактора в Ур. (Б.42) с неограниченным спектром: $\epsilon_\mu = \mu^3$. Поэтому, чтобы сделать интеграл (Б.42) сходящимся при $|\tau| \leq 1$, коэффициенты $c(\mu)$ должны затухать не медленнее, чем $\exp(-|\mu|^3)$. При больших $|\mu|$ функция (Б.43) действительно ведет себя как $c(\mu) \sim \operatorname{sign} \mu \exp(-|\mu|^3)/|\mu|^{3/2}$ [см. Ур. (Б.50)]. Прямо на границе, $|\tau| = 1$, ведущие растущие и убывающие экспоненты полностью компенсируют друг друга, что и приводит к особенностям.

Что бы доказать, что $\psi(\tau, q)$ в виде (Б.42) с $c(\mu)$ из Ур. (Б.43) удовлетворяет граничным условиям (Б.35), достаточно показать, что (i) $\psi(\pm 1, q)$ имеет постоянное значение для $q < 0$ ($q > 0$) и (ii) ее асимптотика при $q \rightarrow \pm\infty$ есть $\frac{1}{2} \operatorname{sign} q$.

Первое утверждение может быть доказано путем вычисления производной по импульсу от ψ с помощью Ур. (Б.54):

$$\partial_q \psi(\tau, q) = -\frac{3^{1/6} \operatorname{Ai}'(0) \operatorname{Ai}(s^2) \exp\left(\frac{2}{3} \tau s^3\right)}{\operatorname{Ai}(0) (1 - \tau^2)^{1/6}}, \quad (\text{Б.44})$$

где мы ввели обозначения

$$s = \frac{q}{[6(1 - \tau^2)]^{1/3}} = \frac{2^{1/3}p}{[3\pi\alpha(1 - \tau^2)]^{1/3}}. \quad (\text{Б.45})$$

Вычисляя предел $|\tau| \rightarrow 1$, используя асимптотическое разложение (Б.50) и тождества (Б.49), мы получаем:

$$\partial_q \psi(\pm 1, q) = \frac{3^{2/3}}{2^{1/6} \Gamma(1/6)} \frac{\exp(-|q|^3/18)}{|q|^{1/2}} \theta(\pm q). \quad (\text{Б.46})$$

Таким образом, мы установили, что $\partial_q \psi(\pm 1, q)$ действительно обращается в нуль для $q < 0$ ($q > 0$), в соответствии с граничными условиями (Б.35).

Второе утверждение (связанное с нормировкой) доказывается рассмотрением асимптотического поведения $\psi(\tau, q)$ при $q \rightarrow \pm\infty$. В этом пределе основной вклад в интеграл (Б.42) приходит с малых $\mu \sim 1/q$, что позволяет положить $\mu = 0$ во всех остальных функциях, кроме $\text{Ai}(\mu q)$. С помощью Ур. (Б.51) получаем:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \psi(\tau, q) = 3 \text{Ai}'(0) \int d\mu \frac{\text{Ai}(\mu q)}{\mu} = 3 \text{Ai}'(0) \text{sign } q \int d\mu \frac{\text{Ai}(\mu)}{\mu} = \frac{\text{sign } q}{2}, \quad (\text{Б.47})$$

как и диктуется граничными условиями (Б.35). Это завершает доказательство того, что Ур. (Б.42) и (Б.43) обеспечивают точное аналитическое решение для функции $\psi(\tau, q)$ в пределе нулевых ω .

Б.5 Математическое дополнение: Интегралы с функциями Эйри

Б.5.1 Основные тождества и интегралы для функций Эйри

Здесь собраны полезные тождества для функции Эйри, которые необходимы для решения задачи о перевернутом маятнике в пределе $\omega = 0$. Многие факты о функции Эйри можно найти в подробной монографии [99].

Интегральное представление для функции Эйри:

$$\text{Ai}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \exp\left(i\frac{t^3}{3} + ixt\right). \quad (\text{Б.48})$$

Значения функции Эйри и ее производной в начале координат:

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}, \quad \text{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}. \quad (\text{Б.49})$$

Асимптотическое разложение при $x \gg 1$:

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}{x^{1/4}}. \quad (\text{Б.50})$$

Другие полезные интегралы:

$$\int dx \frac{\text{Ai}(x)}{x} = \int_0^{\infty} dx \frac{\text{Ai}(x) - \text{Ai}(-x)}{x} = \frac{1}{6 \text{Ai}'(0)}, \quad (\text{Б.51})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \text{Ai}(x^2) \text{Ai}'(x^2) = -\frac{\text{Ai}(0)}{2^{4/3}}, \quad (\text{Б.52})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \text{Ai}(x^2) \text{Ai}'(x^2) = -\frac{1}{24}. \quad (\text{Б.53})$$

Формула (Б.51) может быть получена напрямую из интегрального представления (Б.48), между тем как формулы (Б.52) и (Б.53) могут быть выведены с помощью Ур. 2.16.33.1 из книги [100].

Б.5.2 Ключевой интеграл с функциями Эйри

Здесь мы докажем тождество

$$\begin{aligned} I(p, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{Ai}(x^2) \text{Ai}'(px) \exp\left(\frac{2}{3}x^3\tau\right) \\ &= -\frac{\exp\left(\frac{p^3\tau}{6(1-\tau^2)}\right)}{2^{1/3}3^{1/2}(1-\tau^2)^{1/6}} \text{Ai}\left(\frac{p^2}{2^{4/3}(1-\tau^2)^{2/3}}\right). \end{aligned} \quad (\text{Б.54})$$

Это ключевой интеграл, который определяет функцию распределения угла и импульса ННПТ в отсутствие гравитации ($\omega = 0$), см. Приложение Б.4. Он отсутствует в стандартных таблицах интегралов [98; 100] и справочниках специальных функций [99; 101].

Приведение кубической формы к каноническому виду

Используя интегральное представление (Б.48) и переходя к мнимой τ , мы можем записать $I(i\tau, p)$ в виде тройного интеграла:

$$\begin{aligned} I(i\tau, p) &= \int \text{Ai}(x^2) \text{Ai}'(px) \exp(2ix^3\tau/3) dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dt ds dx is \exp i \left(\frac{t^3}{3} + x^2t + \frac{s^3}{3} + xps + \frac{2}{3}x^3\tau \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.55})$$

В качестве вспомогательного шага перемасштабируем переменную x :

$$I(i\tau, p) = \frac{1}{(2\tau)^{1/3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dt ds dx is \exp i \left(\frac{t^3}{3} + \frac{x^2t}{(2\tau)^{2/3}} + \frac{s^3}{3} + \frac{xps}{(2\tau)^{1/3}} + \frac{x^3}{3} \right). \quad (\text{Б.56})$$

Чтобы привести кубическую форму к каноническому виду, сделаем линейное преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{(e^\theta + e^{-\theta})^{2/3}} \begin{pmatrix} e^{\theta/3}(e^\theta - e^{-\theta})^{1/3} & -e^{-\theta/3}(e^\theta - e^{-\theta})^{1/3} \\ e^{-2\theta/3} & e^{2\theta/3} \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.57})$$

где угол θ определен условием $\tau = \sinh \theta$. Якобиан такого преобразования имеет вид

$$J = \det M = (\tanh \theta)^{1/3} = \frac{\tau^{1/3}}{(1 + \tau^2)^{1/6}}. \quad (\text{Б.58})$$

Таким образом, получаем

$$I(i\tau, p) = \frac{1}{2^{1/3}(1+\tau^2)^{1/6}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int ds du dv \times is \exp i \left(\frac{s^3 + u^3 + v^3}{3} + P(e^{\theta/3}u - e^{-\theta/3}v)s \right), \quad (\text{Б.59})$$

где

$$P = \frac{p}{(e^\theta + e^{-\theta})^{2/3}} = \frac{p}{2^{2/3}(1+\tau^2)^{1/3}}. \quad (\text{Б.60})$$

Сравнивая с формулой (Б.54), мы видим, что она эквивалентна следующему тождеству:

$$L(\tau, P) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int ds du dv is \exp i \left(\frac{s^3 + u^3 + v^3}{3} + P(e^{\theta/3}u - e^{-\theta/3}v)s \right) = -\frac{1}{3^{1/2}} \exp \left(\frac{2P^3}{3} i\tau \right) \text{Ai}(P^2). \quad (\text{Б.61})$$

Это соотношение и будет доказано ниже.

Вспомогательный интеграл

Рассмотрим интеграл

$$K(x, y) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int du ds dv is \exp i \left(\frac{s^3 + u^3 + v^3}{3} + (xu + yv)s \right). \quad (\text{Б.62})$$

Его Фурье преобразование по x и y может быть легко вычислено:

$$K(p, q) = \int dx dy e^{-ipx - iqy} K(x, y) = -\frac{2\pi}{3} J_0 \left[\frac{2}{3} (p^3 + q^3)^{1/2} \right] \theta(p^3 + q^3). \quad (\text{Б.63})$$

Теперь выполним обратное преобразование:

$$K(x, y) = -\frac{2\pi}{3} \int \frac{dp dq}{(2\pi)^2} \theta(p + q) J_0 \left[\frac{2}{3} (p^3 + q^3)^{1/2} \right] e^{ipx + iqy}. \quad (\text{Б.64})$$

Вводя новые переменные $p + q = u$, $p - q = v$ и $s = (x + y)/2$, $r = (x - y)/2$, мы получим:

$$K(x, y) = -\frac{1}{12\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv J_0 \left[\frac{1}{3}(u^3 + 3uv^2)^{1/2} \right] e^{isu+irv}. \quad (\text{Б.65})$$

Вначале возьмем интеграл по v :

$$V \equiv \int_{-\infty}^\infty dv J_0 \left[\frac{1}{3}(u^3 + 3uv^2)^{1/2} \right] e^{irv} = \int_{-\infty}^\infty dv J_0 \left[\frac{u^{1/2}}{3^{1/2}}(u^2/3 + v^2)^{1/2} \right] \cos rv. \quad (\text{Б.66})$$

Запишем $u^2/3 + v^2 = z^2$ и $a = u/\sqrt{3}$ и перейдем к интегрированию по z :

$$V = 2 \int_a^\infty dz \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} J_0 \left[\frac{u^{1/2}}{3^{1/2}} z \right] \cos r \sqrt{z^2 - a^2}. \quad (\text{Б.67})$$

Это интеграл 2.12.22.6 из книги [100]:

$$V = 2 \frac{\cos[(u/\sqrt{3})\sqrt{u/3 - r^2}]}{\sqrt{u/3 - r^2}} \theta(u/3 - r^2). \quad (\text{Б.68})$$

Следовательно, выражение (Б.65) упрощается ($u = 3r^2z$):

$$K(x, y) = -\frac{r}{2\pi} \int_1^\infty dz e^{3ir^2sz} \frac{\cos[\sqrt{3}r^3z\sqrt{z-1}]}{\sqrt{z-1}}. \quad (\text{Б.69})$$

Производя очередную замену переменных $z = 1 + k^2$, мы получим:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -\frac{r}{\pi} \int_0^\infty dk e^{3ir^2s(1+k^2)} \cos[\sqrt{3}r^3k(1+k^2)] \\ &= -\frac{r}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk e^{3ir^2s(1+k^2)+i\sqrt{3}r^3k(1+k^2)}. \end{aligned} \quad (\text{Б.70})$$

Наконец, исключая квадратичное слагаемое ($k = (t - s)/r\sqrt{3}$), мы получаем интеграл Эйри:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^\infty dt \exp i \left(\frac{t^3}{3} + t(r^2 - s^2) + \frac{2}{3} (3r^2s + s^3) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \exp i \left(\frac{2}{3} (3r^2s + s^3) \right) \text{Ai}(r^2 - s^2). \end{aligned} \quad (\text{Б.71})$$

В исходных переменных x и y ,

$$K(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(i\frac{x^3 + y^3}{3}\right) \text{Ai}(-xy). \quad (\text{B.72})$$

Последний шаг

Используя формулы (B.61), (B.62) и (B.72), получаем

$$L(\tau,P) = K(Pe^{\theta/3}, -Pe^{-\theta/3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(i\frac{2P^3\tau}{3}\right) \text{Ai}(P^2) \quad (\text{B.73})$$

Как обсуждалось выше, это выражение эквивалентно доказательству соотношения (B.54).