

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГЕЛАШ АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ МОДУЛЯЦИОННОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Захаров Владимир Евгеньевич
академик РАН,
профессор

Новосибирск — 2014

Содержание

Введение	3
Глава 1. Метод одевания для	
нелинейного уравнения Шредингера	10
1.1 Схема метода одевания	10
1.2 Общее N -солитонное решение	13
1.3 N -солитонное решение на фоне конденсата	18
Глава 2. Солитонные решения нелинейного	
уравнения Шредингера на фоне конденсата	25
2.1 Односолитонное решение	25
2.2 Двухсолитонное решение	33
2.3 Солитонные атомы	41
2.4 N -солитонное решение на фоне солитона Перегринна	43
2.5 Аннигиляция солитонов	47
Глава 3. Суперрегулярные решения	50
3.1 Суперрегулярные двухсолитонные решения	50
3.2 Вырожденные решения	55
3.3 Суперрегулярные $2N$ -солитонные решения	64
3.4 Возможность экспериментального наблюдения суперрегу- лярных решений	67
Глава 4. Векторное нелинейное уравнение	
Шредингера на фоне конденсата	73
4.1 Метод одевания для векторного нелинейного уравнения Шредингера	73
4.2 N -солитонное решение на фоне конденсата	76
4.3 Односолитонное решение	78

4.4	Возможность существования векторных аналогов суперрегулярных решений	82
	Заключение	85
	Литература	87
	Публикации автора по теме диссертации	94

Введение

Фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является одной из важнейших моделей для изучения распространения квазимонохроматических волн в слабонелинейных средах. В частности НУШ описывает волны на глубокой воде [1], волны в оптическом волокне [2], Ленгмюровские волны в плазме [3] и Бозе-конденсат с притяжением [4].

Покажем, как НУШ может быть получено для квазимонохроматического (узкого в k - пространстве) волнового пакета [5], [6]. Ограничимся одномерным случаем, хотя данные рассуждения можно без труда обобщить и на случай размерности $D = 2, 3$. Мы имеем дело с гамильтоновой системой. Уравнения движения записываются в виде:

$$\frac{a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \frac{\delta H_{int}}{\delta a_k^*} \quad (1)$$

Где a, a^* - нормальные координаты, а H_{int} - часть гамильтониана, отвечающая за взаимодействие. Т.к. волновой пакет узкий в k - пространстве, то все волновые вектора лежат вблизи k_0 (а все частоты вблизи ω_0) и по этой причине процессы, меняющие число волн (такие как $1 \rightarrow 2 + 3$ и $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$) являются нерезонансными. Поэтому в первом приближении гамильтониан взаимодействия отвечает четырехволновому взаимодействию ($1 + 2 \rightarrow 3 + 4$) и уравнение движения (1) имеет вид:

$$\frac{a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \int T_{k,k_1,k_2,k_3} a_1^* a_2 a_3 \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (2)$$

Где T_{k,k_1,k_2,k_3} - матричный элемент четырехволнового взаимодействия, который вычисляется исходя из свойств конкретной нелинейной среды. Более того, для квазимонохроматического волнового пакета мы можем считать $T_{k,k_1,k_2,k_3} \approx T(k_0, k_0, k_0, k_0) = T$. Обозначим отклонение волнового вектора от k_0 как q : $|k - k_0| = |q| \ll |k_0|$. Разложим $\omega(k)$ вблизи k_0 :

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + qv_{gr} + \frac{1}{2}\omega''q^2. \quad (3)$$

Где $v_{gr} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}$. Мы исследуем плоскую волну и ее медленно меняющуюся огибающую Ψ :

$$a_k = \Psi(q, t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (4)$$

Наша задача - найти уравнение, которому подчиняется $\Psi(x, t)$. Подставив (4) в (2) и с учетом (3), получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i v_{gr} q + \frac{i\omega''}{2} q^2 \right) \Psi(q, t) = -iT \int \Psi_1^* \Psi_2 \Psi_3 \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (5)$$

После чего, совершая Фурье преобразование от (5) находим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_{rg} \Psi_x - \frac{i\omega''}{2} \Psi_{xx} = -iT |\Psi|^2 \Psi \quad (6)$$

Можно избавиться от члена, содержащего Ψ_x с помощью перехода в систему отсчёта, движущуюся с групповой скоростью: $x \rightarrow x - v_{gr} t$. Домножив обе части уравнения на i , получаем одномерное НУШ:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\omega''}{2} \Psi_{xx} - T |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (7)$$

НУШ имеет простое решение - монохроматическую волну с частотой, зависящей от амплитуды - конденсат:

$$\Psi_0(x, t) = A e^{-iT A^2 t} \quad (8)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости конденсата, относительно малых возмущений. Для этого напишем возмущённое решение в виде

$$\Psi(x, t) = (A + \delta\Psi(x, t)) e^{-iT A^2 t} \quad (9)$$

Линеаризуем НУШ (7) относительно конденсата, получим:

$$i\delta\Psi_t + \frac{\omega''}{2} \delta\Psi_{xx} - T A^2 (\delta\Psi + \delta\Psi^*) = 0 \quad (10)$$

Затем прибавим и вычтем комплексно сопряжённое, получим систему

$$\begin{aligned} i(\delta\Psi - \delta\Psi^*)_t + \frac{\omega''}{2} (\delta\Psi + \delta\Psi^*)_{xx} - 2T A^2 (\delta\Psi + \delta\Psi^*) &= 0, \\ i(\delta\Psi + \delta\Psi^*)_t + \frac{\omega''}{2} (\delta\Psi - \delta\Psi^*)_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем новые переменные

$$\delta\Psi - \delta\Psi^* = u, \quad \delta\Psi + \delta\Psi^* = v. \quad (12)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} i v_t + \frac{\omega''}{2} u_{xx} - 2T A^2 u &= 0, \\ i u_t + \frac{\omega''}{2} v_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Мы считаем возмущение $\delta\Psi$ периодичным в пространстве, поэтому, переменные u и v можем представить в виде:

$$u = u e^{\Gamma t} e^{i k x}, \quad v = v e^{\Gamma t} e^{i k x}. \quad (14)$$

Подставив эти выражения в систему (13), получаем в качестве условия разрешимости выражение для Γ :

$$\Gamma^2 = -(T \omega'' A^2 k^2 + \omega''^2 k^4 / 4) \quad (15)$$

Вид ω'' и T зависит от свойств конкретной нелинейной среды. Когда $\omega'' T > 0$ - конденсат устойчив, что соответствует дефокусирующей версии НУШ. В этом случае (15) есть не что иное как спектр Боголюбова [7].

Нас же будет интересовать случай, когда $\omega'' T < 0$ (т.н. критерий Лайтхилла). В этом случае решение (8) неустойчиво (модуляционная неустойчивость), а (15) представляет собой инкремент неустойчивости, график которого (в безразмерных переменных, которые будут введены далее) изображен на Рис. (1). Таким образом, линейная стадия модуляционной неустойчивости (МН) представляет собой экспоненциальный рост начального возмущения. Но как выглядит поведение решения на больших временах - нелинейная стадия (история изучения МН хорошо изложена в работе [8])? Для пространственной размерности $D=2, 3$, ответ известен - МН приводит к формированию сингулярных решений за конечное время - коллапсов. В размерности $D=1$ коллапсы запрещены (см. [6] §3.3.3, где приведено простое и наглядное объяснение наличия

или отсутствия коллапсов в разных размерностях), однако теперь развитие МН может приводить к формированию волн экстремально большой амплитуды (т.н. "волн-убийц") [9–11]. Поэтому, изучение последствий развития модуляционной неустойчивости на больших временах является задачей, важной с практической точки зрения, ключевой для создания теории волн-убийц в океане и теории экстремальных волн в оптическом волокне.

Как уже было отмечено, НУШ является лишь моделью первого приближения. Для поверхности жидкости эта модель описывает слабонелинейный волновой пакет с крутизной не более чем 0.15 [12]. В нелинейной оптике его приложения также ограничены [4]. В настоящее время разработано большое количество моделей, обобщающих НУШ. Для поверхностных волн это уравнения Дысте [13, 14], для волн в оптическом волокне это уравнения включающие третью производную по времени и более сложные формы нелинейности (см. [15, 16]). Также волны-убийцы в океане изучались с помощью численного моделирования в рамках точных уравнений Эйлера для потенциального течения со свободной границей [9, 17]. Однако, многие явления сохраняются на качественном уровне и в более точных моделях, что делает исследование интегрируемого НУШ чрезвычайно актуальным. К тому же, в настоящее время уровень экспериментальных установок позволяет создавать условия, необходимые для выполнения НУШ. При этом аналитические решения НУШ на фоне конденсата воспроизводятся в лабораторных экспериментах по изучению волн в оптоволокне и водных бассейнах с превосходной точностью [18–20].

С 1972 г. известно, что НУШ является системой, которая может быть полностью проинтегрирована с помощью метода обратной задачи рассеяния [21]. С тех пор сотни статей и несколько монографий были посвящены этой теме (см., например, [3, 22–24]). Среди них можно найти и работы посвящённые применению метода обратной задачи к фокусирующему НУШ на фоне конденсата [25], [26], [29]. Тем не менее, важнейший вопрос о том какова нелинейная стадия модуляционной неустойчивости был не решен.

НУШ обладает большим количеством аналитических решений. Поэтому естественно надеяться, что нелинейное развитие модуляционной неустойчивости описывается некоторыми из них. Далее мы будем говорить, в основном, о неустойчивости, возникающей из локализованных возмущений конденсата. Исторически, первое подобное решение было найдено Перегрином в 1983 [30] (т.н. солитон Перегрина). Это полностью гомоклинический сценарий развития модуляционной неустойчивости. Развитие неустойчивости начинается с конденсата при $t \rightarrow -\infty$, и возвращается к нему при $t \rightarrow +\infty$. При этом максимальное значение амплитуды решения в три раза превышает амплитуду невозмущённого конденсата. Позже решение Перегрина было независимо получено в работе А.Р. Итса, А.В. Рыбина и М.А. Салля [33], в которой оно было названо эксультонном. В последнее время это решение привлекает к себе много внимания [31], [32]. Было экспериментально подтверждено его воспроизведение в гидродинамике и оптике [19, 20]. В 1985 был найден двухсолитонный аналог этого решения [34], а в настоящее время В.Б. Матвеевым, П. Дюбардом и их соавторами активно изучаются мульти-Перегриновские решения (см. [36], [37]). Важно, что подобные решения можно обнаружить не только для НУШ. Так в недавней работе [38] тех же самых авторов рассматривается обобщение на уравнение КП-I.

Однако, результаты численного моделирования [28], [14] демонстрируют формирование осциллирующих структур - бризеров. Поэтому, мы полагаем, что гомоклинический сценарий развития модуляционной неустойчивости является не самым правдоподобным.

В бессолитонном случае решение (волновая функция) вспомогательной линейной системы Захарова-Шабата [21] аналитична в правой полуплоскости спектрального параметра $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ с разрезом вдоль действительной оси $0 < \lambda_R < A$, где A - амплитуда конденсата. Каждое солитонное решение добавляет простой полюс в некоторой точке правой полуплоскости, включая разрез (в работе [21] использовалась параметризация НУШ при которой разрез проходит

вдоль мнимой оси. Мы используем несколько иной вариант записи НУШ (16) и, во избежании путаницы, ведем изложение в рамках данной параметризации).

Первое решение НУШ на фоне конденсата было найдено Е.А. Кузнецовым в 1977 [25]. Позже оно было вновь получено другими авторами [26, 29]. В этом случае полюс расположен на действительной оси, вне разреза $\lambda_R > A$. Солитон Кузнецова - это локализованное решение, которое стоит на месте и осциллирует. Период осцилляций растет при $\lambda_R \rightarrow A$ и становится бесконечным при $\lambda_R = A$. В этом пределе солитон Кузнецова переходит в решение Перегринна.

В 1985 г. Н. Ахмедиев, В. Елеонский и Н. Кулагин обнаружили решение периодичное в пространстве и локализованное во времени - т.н. бризер Ахмедиева [34]. Это решение почти гомоклинично. Оно начинается с конденсата и возвращается также к конденсату, но уже с другой фазой. В случае бризера Ахмедиева полюс расположен на разрезе $0 < \lambda_R < A$.

В общем случае полюс может быть расположен в любой точке правой полуплоскости. При этом решение движется с определённой групповой скоростью и осциллирует. При $x \rightarrow \pm\infty$ оно переходит в конденсат обладающий одинаковыми амплитудами, но различными фазами. В явном виде такое решение было впервые представлено в упомянутой работе А.Р. Итса, А.В. Рыбина и М.А. Салля [33]. Позднее оно было получено другими методами и обсуждалось в контексте теории волн-убийц в работах А. Слюняева и соавторов [39, 40] и Н. Ахмедиева и соавторов [32, 41]. В 2011 г. общее односолитонное решение было получено нами с помощью метода $\bar{\partial}$ -проблемы [42]. Общее двухсолитонное решение и N -солитонное решение было предложено Таджири и Ватанабе [43] в 1998 г. Некоторые типы двухсолитонного решения, а также соответствующие вырожденные случаи (см. §3.2) недавно были рассмотрены в статье [45].

В данной работе мы опишем общее N -солитонное решение НУШ в присутствии конденсата с помощью наиболее удобного, с нашей точки зрения, инструмента - метода одевания. Преимущества данного метода будут особенно хорошо видны в §2.4 где котором решена задача об одевании на фоне бризера

Перегрина. Отметим, что существует ещё один удобный подход, который часто используется в подобных задачах - это метод преобразования Дарбу [44].

N -солитонное решение, в общем случае переходит в конденсат с различной фазой при $x \rightarrow \pm\infty$. Мы же выделим класс регулярных решений для которых фаза одинаковая. Только они могут описывать локализованные возмущения конденсата. В общем случае эти возмущения никогда не являются малыми, однако нам удалось обнаружить подкласс регулярных решений, которые являются малыми возмущениями конденсата в начальный момент времени (скажем $t = 0$). Они представляют собой пары квази-Ахмедиевских бризеров, разбегающихся в разные стороны, и описывают нелинейную стадию модуляционной неустойчивости.

Исследование суперрегулярных решений составляет основную часть диссертации. Также, в §3.4 обсуждается возможность экспериментального наблюдения суперрегулярных решений в гидродинамике и оптике, и приводятся первые результаты экспериментов с гравитационными волнами на воде, которые продемонстрировали хорошее согласие с нашими теоретическими предсказаниями.

Помимо этого в Главе 4 сделано обобщение результатов на векторный случай - систему Манакова [51]. Векторное нелинейное уравнение Шредингера (ВНУШ) было впервые рассмотрено С.В. Манаковым в 1973 г. в качестве модели распространения электромагнитной волны произвольной поляризации в среде с кубической нелинейностью и обладающей эффектом двойного лучепреломления. С помощью метода обратной задачи С.В. Манаковым показал, что ВНУШ является полностью интегрируемой системой. Он обнаружил первое точное решение - общее односолитонное решение на нулевом фоне. В настоящее время приложения ВНУШ известны в теории Бозе-конденсата [53], волнах на воде [55] и экономике [54], а в последние годы возник интерес к ВНУШ на фоне конденсата в связи с задачей о волнах-убийцах [49, 50].

Глава 1. Метод одевания для нелинейного уравнения Шредингера

1.1 Схема метода одевания

Мы записываем НУШ в следующей форме:

$$i\varphi_t - \frac{1}{2}\varphi_{xx} - (|\varphi|^2 - |A|^2)\varphi = 0, \quad (16)$$

и изучаем решения с неубывающими граничными условиями $|\varphi|^2 \rightarrow |A|^2$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Без потери общности полагаем, что A - действительная константа. Уравнение (16) является условием совместности следующей переопределенной системы на матричную функцию Ψ [21]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \widehat{U}\Psi, \quad (17)$$

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\lambda\widehat{U} + \widehat{W})\Psi, \quad (18)$$

где \widehat{U} и \widehat{W} определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{U} &= I\lambda + U, & \widehat{W} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\varphi|^2 - A^2 & \varphi_x \\ \varphi_x^* & -|\varphi|^2 + A^2 \end{pmatrix}, \\ I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & U &= \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (17) и (18) получаем систему уравнений на Ψ^{-1} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x} &= -\Psi^{-1}\widehat{U}, \\ i\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial t} &= -\Psi^{-1}(\lambda\widehat{U} + \widehat{W}), \end{aligned} \quad (20)$$

а также сопряженную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^+}{\partial x} &= \Psi^+\widehat{U}^+, \\ i\frac{\partial \Psi^+}{\partial t} &= -\Psi^+(\lambda^*\widehat{U}^+ + \widehat{W}^+). \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим сопряженную систему (21) в точке $\lambda = -\lambda^*$. Из определений (19) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\widehat{U}^+(-\lambda^*) &= -\widehat{U}(\lambda), \\ \widehat{W}^+ &= \widehat{W}.\end{aligned}\tag{22}$$

Системы (20) и (21) совпадают, следовательно они имеют класс решений Ψ удовлетворяющих условию

$$\Psi^+(-\lambda^*) = \Psi^{-1}(\lambda).\tag{23}$$

Далее мы везде полагаем условие (23) выполненным.

Идея метода одевания [46] состоит в следующем. Предположим, мы знаем некоторое решение φ_0 НУШ (16), а также соответствующее фундаментальное матричное решение $\Psi_0(x, t, \lambda)$, удовлетворяющее линейной системе:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} &= \widehat{U}_0 \Psi_0, \\ i \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} &= (\lambda \widehat{U}_0 + \widehat{W}_0) \Psi_0.\end{aligned}\tag{24}$$

Где \widehat{U}_0 и \widehat{W}_0 получены заменой φ на φ_0 в (19). Введем т.н. одевающую матричную функцию χ следующим образом:

$$\chi = \Psi \Psi_0^{-1}.\tag{25}$$

(Ψ неизвестна!) Мы требуем, чтобы χ была регулярна на бесконечности:

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &\rightarrow E + \frac{\tilde{\chi}}{\lambda} + \dots, & |\lambda| &\rightarrow \infty. \\ E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{26}$$

Очевидно, что χ удовлетворяет аналогичному (23) соотношению:

$$\chi^+(-\lambda^*) = \chi^{-1}(\lambda).\tag{27}$$

А также, аналогичной (20), (21) переопределенной системе линейных уравнений. Первое из которых есть

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \widehat{U}\chi - \chi\widehat{U}_0. \quad (28)$$

Или, что то же самое

$$\frac{\partial \chi^{-1}}{\partial x} = -\chi^{-1}\widehat{U} + \widehat{U}_0\chi^{-1}, \quad (29)$$

Последнее может быть переписано следующим образом

$$\widehat{U} = -\chi \left(\frac{\partial}{\partial x} - \widehat{U}_0 \right) \chi^{-1}. \quad (30)$$

Теперь, если мы выберем одевающую функцию χ так, что \widehat{U} , определенная из (30), не имеет особенностей на λ -плоскости - мы построим новое решение уравнения (17).

В соответствии с теоремой Лиувилля в этом случае функция \widehat{U} должна полностью определяться своими асимптотиками при $\lambda \rightarrow \infty$. Подстановкой (26) в (28) мы находим т.н. одевающую формулу:

$$U = U_0 + [\widetilde{\chi}, I]. \quad (31)$$

([,] - коммутатор.) Откуда следует

$$\varphi = \varphi_0 - 2\widetilde{\chi}_{12}. \quad (32)$$

До этого момента мы проводили одевание первого уравнения системы (17),(17).

Из второго уравнения мы можем получить следующее соотношение

$$\lambda\widehat{U} + \widehat{W} = -\chi \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\widehat{U}_0 - \widehat{W}_0 \right) \chi^{-1}. \quad (33)$$

Если теперь мы потребуем чтобы \widehat{U} и \widehat{W} не имели особенностей в λ - плоскости, включая бесконечность (другими словами, мы требуем чтобы \widehat{W} не зависела от λ), то мы произведём одевание обоих уравнений системы (17),(18).

После применения процедуры одевания и определения одевающей функции χ , функция

$$\Psi = \chi\Psi_0, \quad (34)$$

удовлетворяет исходной системе уравнений (17),(18) где φ определено из (32). Это и есть новое решение НУШ (16).

Существует несколько способов построения функции χ . Так в работе В.Е. Захарова и А.Б. Шабата [46] описан метод, основанный на проблеме Римана-Гильберта. Более современный способ заключается в применении $\bar{\partial}$ -проблемы. Это является темой наших дальнейших исследований. В данной работе мы используем упрощённую технику для построения многосолитонных решений - метод одевания.

1.2 Общее N -солитонное решение

В этом параграфе мы строим решения НУШ, следуя технике предложенной В.Е. Захаровым и А.В. Михайловым в работе [47]. Предположим, что $\Psi_0(x, t, \lambda)$ известна, а χ есть рациональная функция от λ :

$$\chi = E + \sum_m \frac{U_m}{\lambda - \lambda_m}. \quad (35)$$

Без потери общности мы можем считать, что $Re(\lambda_n) > 0$. Т.к. χ удовлетворяет условию (27), то χ^{-1} может быть записана так:

$$\chi^{-1} = E - \sum_m \frac{U_m^+}{\lambda + \lambda_m^*}. \quad (36)$$

Обозначим

$$\chi_n = \chi \Big|_{\lambda = -\lambda_n^*} = E - \sum \frac{U_m}{\lambda_n^* + \lambda_m}. \quad (37)$$

Далее рассмотрим тождество

$$\chi\chi^{-1} = E. \quad (38)$$

В точке $\lambda = -\lambda_n^*$ оно подразумевает, что

$$\chi_n U_n^+ = 0. \quad (39)$$

Откуда следует, что U_n и U_n^+ являются вырожденными матрицами. А это означает, что χ_n и χ_n^+ тоже вырождены. Тогда мы можем ввести два набора комплекснозначных векторов $p_{n,\alpha}$, $q_{n,\alpha}$ и представить U_n, U_n^+ в следующем виде:

$$U_{n,\alpha\beta} = p_{n,\alpha}q_{n,\beta}, \quad U_{n,\alpha\beta}^+ = q_{n,\alpha}^*p_{n,\beta}^*.$$

Условие (39) означает что

$$\chi_n q_{n,\alpha}^* = 0 \quad (40)$$

В свою очередь χ_n и χ_n^{-1} теперь записываются как

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_n \frac{p_{n,\alpha}q_{n,\beta}}{\lambda - \lambda_n}, \\ \chi_{\alpha\beta}^{-1} &= \delta_{\alpha\beta} - \sum_n \frac{q_{n,\alpha}^*p_{n,\beta}^*}{\lambda + \lambda_n^*}. \end{aligned} \quad (41)$$

Подставим (41) в уравнение (30). В общем случае функция \widehat{U} имеет полюсы в точках $\lambda = \lambda_n$ и $\lambda = -\lambda_n^*$. Для того, чтобы произвести одевание мы должны исключить все подобные особенности. Рассмотрим уравнение (30) в окрестности точки $\lambda = -\lambda_n^*$. Чтобы занулить все члены имеющие полюса в точке $\lambda = -\lambda_n^*$ мы требуем, чтобы

$$\chi_n \left(\frac{\partial}{\partial x} - \widehat{U}_0(-\lambda_n^*) \right) q_{n,\alpha}^* p_{n,\beta}^* = 0. \quad (42)$$

Откуда, используя (40), получим уравнение на вектора q_n^* (и соответственно на q_n):

$$\frac{\partial q_{n,\alpha}^*}{\partial x} - \widehat{U}_{0,\alpha\beta}(-\lambda_n^*) q_{n,\beta}^* = 0. \quad (43)$$

Которое можно разрешить следующим образом:

$$q_{n,\alpha}^* = \Psi_{0,\alpha\beta}(-\lambda_n^*) \xi_{n,\beta}. \quad (44)$$

Где ξ_α - произвольный постоянный комплекснозначный вектор. Здесь и далее мы используем обозначение

$$F_{n,\alpha\beta} = \Psi_{0,\alpha\beta}(-\lambda_n^*). \quad (45)$$

и предполагаем набор векторов q_n, q_n^* известным. Для того, чтобы найти второй набор векторов p_n, p_n^* , необходимо решить уравнение (40), которое эквивалентно следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_m \frac{(q_n \cdot q_m^*)}{\lambda_n + \lambda_m^*} p_m^* = q_n \quad (46)$$

Где $(q_n \cdot q_m^*) = q_{n,1}q_{m,1}^* + q_{n,2}q_{m,2}^*$ - скалярное произведение векторов q_n и q_m . Обозначим

$$M_{nm} = \frac{(q_n \cdot q_m^*)}{\lambda_n + \lambda_m^*},$$

и $M = \det(M_{nm})$. M является эрмитовой матрицей:

$$M_{nm}^* = M_{mn} = M_{nm}^T.$$

Тогда (46) можно переписать так:

$$\sum_m M_{nm}^T p_m = q_n^*. \quad (47)$$

В конечном итоге нам необходимо найти $\tilde{\chi}$ из асимптотического разложения χ (26). $\tilde{\chi}$ можно представить так:

$$\tilde{\chi}_{\alpha\beta} = \sum_n p_{n,\alpha} q_{n,\beta}.$$

Эта сумма вычисляется как отношение детерминантов:

$$\tilde{\chi}_{\alpha\beta} = -\frac{\tilde{M}_{\alpha\beta}}{M}. \quad (48)$$

Где

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & q_{1,\beta} & \cdots & q_{n,\beta} \\ q_{1,\alpha}^* & & & \\ \vdots & & M_{nm}^T & \\ q_{n,\alpha}^* & & & \end{vmatrix}. \quad (49)$$

В результате, мы находим решение НУШ (16) из условия (32) как:

$$\varphi = \varphi_0 + 2\frac{\tilde{M}_{12}}{M}. \quad (50)$$

В простейшем случае одевания на нулевом фоне, формулу (50) можно найти в известной книге Л.Д. Федеева и Л.А. Тахтаджяна [22]. Одевающая функция $\chi_{\alpha\beta}$ может быть представлена в виде следующего отношения детерминантов:

$$\chi_{\alpha\beta} = -\frac{\widehat{M}_{\alpha\beta}}{M}. \quad (51)$$

Где

$$\widehat{M}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\beta} & \frac{q_{1,\beta}}{\lambda-\lambda_1} & \cdots & \frac{q_{n,\beta}}{\lambda-\lambda_n} \\ q_{1,\alpha}^* & & & \\ \vdots & & M_{nm}^T & \\ q_{n,\alpha}^* & & & \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Запишем одевающую формулу (32) в явном виде. Обозначим

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \Psi_{011} & \Psi_{012} \\ \Psi_{021} & \Psi_{022} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

тогда

$$\Psi = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \widehat{M}_{11}\Psi_{011} + \widehat{M}_{12}\Psi_{021} & \widehat{M}_{11}\Psi_{012} + \widehat{M}_{12}\Psi_{022} \\ \widehat{M}_{21}\Psi_{011} + \widehat{M}_{22}\Psi_{021} & \widehat{M}_{21}\Psi_{012} + \widehat{M}_{22}\Psi_{022} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Заметим, что преобразование

$$q_n \rightarrow a_n q_n, \quad p_n \rightarrow \frac{1}{a_n} p_n, \quad (55)$$

где a_n - произвольные комплексные константы, не меняет результат одевания.

Тогда, можно положить

$$\xi_n = \begin{pmatrix} 1 \\ C_n \end{pmatrix}. \quad (56)$$

В результате, построенное, N -солитонное решение зависит от $2N$ комплексных чисел λ_n, C_n или от $4N$ действительных параметров. Как уже было отмечено, мы полагаем $Re(\lambda) > 0$. Действительно, этого достаточно, чтобы описать все возможные солитонные решения (строго говоря, этот факт нуждается в отдельном доказательстве). До тех пор пока $\lambda_n + \lambda_m^* \neq 0$, уравнения (46) всегда разрешимы.

Рассмотрим односолитонное решение. Тогда функция χ имеет только один полюс при $\lambda = \eta$, тогда как χ^{-1} имеет полюс в точке $\lambda = -\eta^*$. Матрицы χ и χ^{-1} можно представить в следующем виде (см. [21]):

$$\chi = E + \frac{U}{\lambda - \eta}, \quad \chi^{-1} = E - \frac{U^+}{\lambda + \eta^*}. \quad (57)$$

Как и ранее

$$U_{\alpha\beta} = p_\alpha q_\beta. \quad (58)$$

Вектора p и q связаны следующим соотношением:

$$p_\alpha = \frac{(\eta + \eta^*)q_\alpha^*}{|q_1|^2 + |q_2|^2}. \quad (59)$$

Как результат χ и χ^{-1} есть

$$\chi = E + \frac{(\eta + \eta^*)p}{\lambda - \eta}, \quad \chi^{-1} = E - \frac{(\eta + \eta^*)p^+}{\lambda + \eta^*}. \quad (60)$$

Где

$$P_{\alpha\beta} = \frac{q_\alpha^* q_\beta}{|q_1|^2 + |q_2|^2}. \quad (61)$$

P представляет собой проекционный оператор, т.к. $P^2 = P$. Как и ранее мы предполагаем, что матрица $\Psi_0(x, t, \lambda)$ известна. В соответствии с нашим определением (45)

$$F_{\alpha\beta} = \Psi_{0,\alpha\beta}(-\eta^*). \quad (62)$$

и компоненты вектора q могут быть найдены так:

$$\begin{aligned} q_1^* &= F_{11} + CF_{12}, \\ q_2^* &= F_{21} + CF_{22}. \end{aligned} \quad (63)$$

Где C - произвольная комплексная константа. В результате находим новое решение НУШ:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{2(\eta + \eta^*)q_1^* q_2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}. \quad (64)$$

Эта формула представляет односолитонное решение на произвольном фоне. Впервые она была найдена в 1988 А.Р. Итсом и М.А. Саллем [33] (см. также [44]).

Все результаты этого параграфа могут быть обобщаются на гораздо более широкий класс нелинейных волновых систем, которые могут быть представлены как условие совместности переопределенной линейной системы

$$\begin{aligned}\Psi_x &= \widehat{U}(\lambda)\Psi, \\ \Psi_t &= \widehat{V}(\lambda)\Psi.\end{aligned}\tag{65}$$

Где \widehat{U} и \widehat{V} являются рациональными матричными функциями 2×2 от переменной λ , удовлетворяющие следующему условию:

$$\begin{aligned}\widehat{U}^+(-\lambda^*) &= -\widehat{U}(\lambda), \\ \widehat{V}^+(-\lambda^*) &= -\widehat{V}(\lambda).\end{aligned}\tag{66}$$

В частности результаты могут быть обобщены на все высшие компоненты иерархии НУШ.

1.3 N -солитонное решение на фоне конденсата

Как уже было отмечено во введении, конденсат (16) $\varphi = \varphi_0 = A$ неустойчив относительно малых возмущений. Инкремент модуляционной неустойчивости

$$\Gamma(k) = k\sqrt{A^2 - k^2/4}.\tag{67}$$

Где k - волновое число возмущения. График действительной части инкремента (67), отвечающий за неустойчивость представлен на Рис. (1) Далее мы всегда рассматриваем одевание на фоне конденсата (за исключением особого случая, рассмотренного в §2.4, где в качестве фона выступает решение Перегринна), тогда

$$\widehat{U}_0 = \begin{pmatrix} \lambda & A \\ -A & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_0 = 0.\tag{68}$$

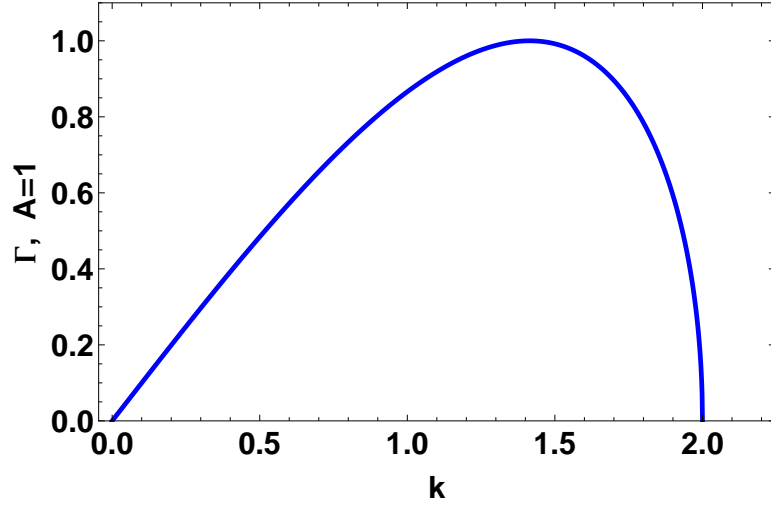


Рис. 1: Инкремент модуляционной неустойчивости.

В этом случае нетрудно найти решение Ψ_0 системы (24) в следующем виде:

$$\Psi_0(x, t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2(\lambda)}} \begin{pmatrix} \exp(\phi(x, t, \lambda)) & s(\lambda) \exp(-\phi(x, t, \lambda)) \\ s(\lambda) \exp(\phi(x, t, \lambda)) & \exp(-\phi(x, t, \lambda)) \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Где

$$\begin{aligned} \phi &= kx + \Omega t, & k^2 &= \lambda^2 - A^2, \\ \Omega &= -i\lambda k, & s &= -\frac{A}{\lambda + k}. \end{aligned}$$

Функция $k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - A^2}$ имеет разрез при $-A < \text{Re}(\lambda) < A$. $k(\lambda) \rightarrow \lambda$ при $\lambda \rightarrow \infty$, а Ψ_0^{-1} имеет вид:

$$\Psi_0^{-1}(x, t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2(\lambda)}} \begin{pmatrix} \exp(-\phi(x, t, \lambda)) & -s(\lambda) \exp(-\phi(x, t, \lambda)) \\ -s(\lambda) \exp(\phi(x, t, \lambda)) & \exp(\phi(x, t, \lambda)) \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Отметим важное свойство:

$$k^*(-\lambda^*) = -k(\lambda), \quad s^*(-\lambda^*) = -s(\lambda), \quad \phi^*(-\lambda^*) = -\phi(\lambda). \quad (71)$$

Легко убедиться, что

$$\Psi_0^{-1}(-\lambda^*) = \Psi_0^+(\lambda). \quad (72)$$

Для простоты обозначим

$$\phi_n = \phi_n(\lambda_n), \quad s_n = s(\lambda_n), \quad (73)$$

тогда, на основании (71)

$$\phi_n(-\lambda_n^*) = -\phi_n^*, \quad s_n(-\lambda_n^*) = -s_n^*. \quad (74)$$

В результате

$$F_n = \Psi_0(-\lambda_n^*) = \begin{pmatrix} \exp(-\phi_n^*) & -s_n^* \exp(\phi_n^*) \\ -s_n^* \exp(-\phi_n^*) & \exp(\phi_n^*) \end{pmatrix}, \quad q_n^* = F_n \begin{pmatrix} 1 \\ C_n \end{pmatrix}, \quad (75)$$

(фактор $(1 - s_n^2)^{-1/2}$ можно опустить, т.к. общий множитель не меняет результата одевания), а вектора q_n есть:

$$q_{n1} = \exp(-\phi_n) - C_n^* s_n \exp(\phi_n), \quad q_{n2} = -s_n \exp(-\phi_n) + C_n^* \exp(\phi_n). \quad (76)$$

Одевающая функция χ также представляет собой рациональную функцию в λ -плоскости с разрезом при $-A < \text{Re}(\lambda) < A$. Для того, чтобы упростить последующие вычисления мы производим преобразование Жуковского и отображаем нашу плоскость (верхний лист Римановой поверхности) на внешнюю часть круга единичного радиуса (см. Рис. 2).

$$\lambda = \frac{A}{2}(\xi + \xi^{-1}), \quad k = \frac{A}{2}(\xi - \xi^{-1}), \quad s = -\xi^{-1}. \quad (77)$$

Если полюс расположен в точке $\lambda = \lambda_n$, то $\lambda_n = \frac{A}{2}(\xi_n + \xi_n^{-1})$. В униформизованных переменных

$$F_n = \begin{pmatrix} \exp(-\phi_n^*) & \xi_n^{*-1} \exp(\phi_n^*) \\ \xi_n^{*-1} \exp(-\phi_n^*) & \exp(\phi_n^*) \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Вектора q_n , в свою очередь, можно записать так

$$q_{n1} = \exp(-\phi_n) + \xi_n^{-1} C_n^* \exp(\phi_n), \quad q_{n2} = \xi_n^{-1} \exp(-\phi_n) + C_n^* \exp(\phi_n). \quad (79)$$

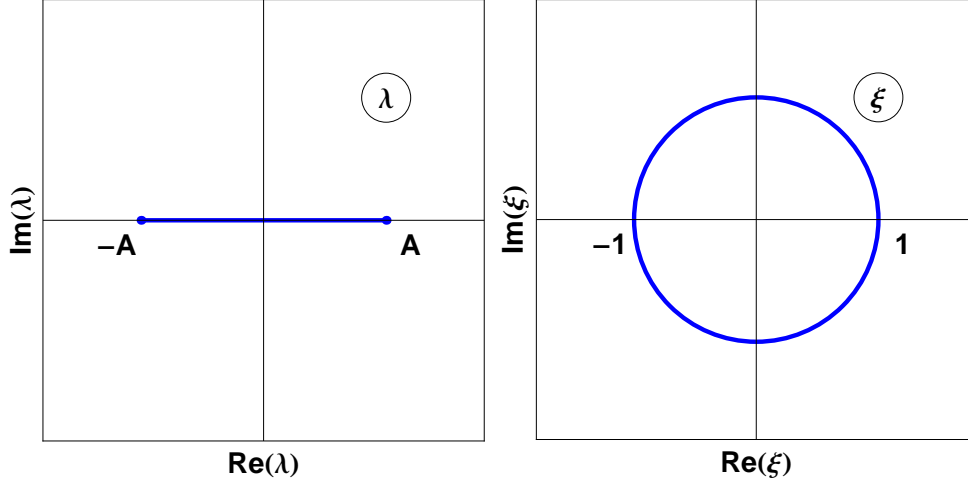


Рис. 2: Униформизация плоскости спектрального параметра с помощью преобразования Жуковского.

Окончательно, мы используем следующую параметризацию

$$\xi_n = R_n \exp(i\alpha_n), \quad C_n = \exp(i\theta_n + \mu_n). \quad (80)$$

Для удобства записи окончательных формул солитонных решений мы также будем пользоваться дополнительной параметризацией $R_n = \exp(z_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{A}{2}(R_n + R_n^{-1}) \cos \alpha_n + \frac{iA}{2}(R_n - R_n^{-1}) \sin \alpha_n \\ &= A(\cosh z_n \cos \alpha_n + i \sinh z_n \sin \alpha_n). \end{aligned} \quad (81)$$

А также, в некоторых случаях, параметризацией:

$$w_n = -i\alpha_n - z_n. \quad (82)$$

В таком случае

$$F_n = \begin{pmatrix} \exp(-\phi_n^*) & \exp(w_n^* + \phi_n^*) \\ \exp(w_n^* - \phi_n^*) & \exp(\phi_n^*) \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Упростим выражения для векторов q_n с помощью переопределения фазы ϕ_n , а именно

$$q_{n1} = \exp(-\phi_n) + \exp(w_n + \phi_n), \quad q_{n2} = \exp(w_n - \phi_n) + \exp(\phi_n). \quad (84)$$

Где

$$\begin{aligned}
\phi_n &= u_n + iv_n, \\
u_n &= \varkappa_n x - \gamma_n t + \mu_n/2, \\
v_n &= k_n x - \omega_n t - \theta_n/2, \\
\varkappa_n &= \frac{A}{2}(R_n - R_n^{-1}) \cos \alpha_n = A \sinh z_n \cos \alpha_n, \\
k_n &= \frac{A}{2}(R_n + R_n^{-1}) \sin \alpha_n = A \cosh z_n \sin \alpha_n, \\
\gamma_n &= -\frac{A^2}{4}(R_n^2 + R_n^{-2}) \sin 2\alpha_n = -\frac{A^2}{2} \cosh 2z_n \sin 2\alpha_n, \\
\omega_n &= \frac{A^2}{4}(R_n^2 - R_n^{-2}) \cos 2\alpha_n = \frac{A^2}{2} \sinh 2z_n \cos 2\alpha_n.
\end{aligned} \tag{85}$$

Запишем явные выражения для квадратичных комбинаций векторов q_n , которые будут полезны в дальнейших вычислениях:

$$\begin{aligned}
q_{n1}^* q_{n2} &= 2e^{-z_n} [\cos \alpha_n \cosh 2u_n + \\
&\quad \cosh z_n \cos 2v_n + i(\sin \alpha_n \sinh 2u_n + \sinh z_n \sin 2v_n)], \\
|q_{n1}|^2 - |q_{n2}|^2 &= 4e^{-z_n} (\sin \alpha_n \sin 2v_n - \sinh z_n \sinh 2u_n), \\
|q_n|^2 &= 4e^{-z_n} (\cos \alpha_n \cos 2v_n + \cosh z_n \cosh 2u_n).
\end{aligned} \tag{86}$$

Заметим, что N - солитонное решение инвариантно по отношению к сдвигам во времени и пространстве. Если мы заменим

$$x \rightarrow x - x_0, \quad t \rightarrow t - t_0. \tag{87}$$

Тогда, для того, чтобы решение осталось прежним необходимо также заменить

$$\mu_n \rightarrow \mu_n + 2(\varkappa_n x_0 + \gamma_n t_0), \quad \theta_n \rightarrow \theta_n - 2(k_n x_0 - \omega_n t_0). \tag{88}$$

Это означает, что сдвиги во времени и пространстве приводят к перенормировке константы C_n :

$$C_n \rightarrow C_n \exp[2(\varkappa_n x_0 + \gamma_n t_0) - 2i(k_n x_0 - \omega_n t_0)] \tag{89}$$

N -солитонное решение можно рассматривать как нелинейную суперпозицию N отдельных солитонов. Каждый из них характеризуется групповой скоростью

$$V_{Gr_n} = \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = -\frac{A \cosh 2z_n \sin \alpha_n}{\sinh z_n}, \quad (90)$$

и фазовой скоростью

$$V_{Ph_n} = \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{A \sinh z_n \cos 2\alpha_n}{\sin \alpha_n}. \quad (91)$$

Когда все $R_n > 1$ решение не содержит "Ахмедиевских компонент". Если все групповые скорости разные, N -солитонное решение асимптотически, при $t \rightarrow \pm\infty$ разделяется на суперпозицию индивидуальных солитонов, удаленных друг от друга. Этот факт позволяет определить асимптотические свойства N -солитонного решения при $x \rightarrow \pm\infty$, а именно:

$$\varphi \rightarrow -A \exp(i\alpha^\pm), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (92)$$

Очевидно, фазы α^\pm не меняются со временем. В следующем параграфе, мы увидим, что фаза односолитонного решения для случая $R \neq 1$ имеет вид

$$\varphi \rightarrow A \exp(\pm 2i\alpha), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (93)$$

Тогда, для N солитонов, находящихся далеко друг от друга

$$\alpha^+ = 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n), \quad \alpha^- = -2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n). \quad (94)$$

Что справедливо и в общем случае, в том числе, когда групповые скорости солитонов совпадают.

Если нас интересует N -солитонное решение локализованное в конечной области пространства и не возмущающее удаленный конденсат, мы должны потребовать чтобы

$$\alpha^+ = \alpha^-. \quad (95)$$

Т.е. фазы конденсата на бесконечностях совпадали. Мы называем решения, удовлетворяющие критерию (95) регулярными. Если мы предположим, что модуляционная неустойчивость развивается из локализованных возмущений, то только регулярные решения могут быть использованы в качестве модели ее нелинейного поведения. Из (94) мы заключаем, что N -солитонное решение регулярно, когда

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0, \pm \frac{\pi}{2}. \quad (96)$$

Среди односолитонных решений только решения Кузнецова и Перегринна являются регулярными. Однако, уже в двухсолитонном случае, можно построить широкий класс регулярных решений.

Когда все $R_n = 1$ решение представляет собой N -Ахмедиевский бризер, периодичный в пространстве и локализованный во времени. Тогда, следует изучать асимптотики решения при $t \rightarrow \pm\infty$. Результат аналогичен предыдущему случаю, но теперь фазы односолитонного решения (бризера Ахмедиева) есть

$$\varphi \rightarrow A \exp(\pm 2i|\alpha|), \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (97)$$

Знак модуля возникает в связи с тем, что бризеры Ахмедиева, отвечающие $\pm\alpha$ идентичны (см. следующий §). Тогда, для N -Ахмедиевского бризера

$$\varphi \rightarrow A \exp(i\alpha^\pm), \quad t \rightarrow \pm\infty \quad (98)$$

$$\alpha^+ = 2(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|), \quad \alpha^- = -2(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|). \quad (99)$$

Используя "Wolfram Mathematica" мы разработали программы позволяющие производить аналитические преобразования с N -солитонным решением. С помощью одной из них мы проверили соотношения (94) и (99) напрямую для $n = 2, 3$. В случае N -Ахмедиевского бризера, условие равенства фаз решения при $t \rightarrow \pm\infty$ выглядят следующим образом:

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (100)$$

В этом случае решение есть полностью гомоклинический бризер Ахмедиева.
(см. §2.2)

Глава 2. Солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера на фоне конденсата

2.1 Односолитонное решение

Односолитонное решение на фоне конденсата определяется одним собственным значением $\lambda_1 = \eta$ и одним комплексным параметром $C_1 = C$. В нашей параметризации

$$\xi = R \exp(i\alpha), \quad C = \exp(i\theta + \mu), \quad R = \exp(z).$$

Обозначим

$$\phi = \phi(\eta), \quad s = s(\eta). \quad (101)$$

Из (71) следует, что

$$\phi(-\eta^*) = -\phi^*, \quad s(-\eta^*) = -s^*. \quad (102)$$

В односолитонном случае нам необходим только один комплексный вектор \mathbf{q} , компоненты которого равны

$$q_1 = \exp(-\phi) + \exp(-i\alpha - z + \phi), \quad q_2 = \exp(-i\alpha - z - \phi) + \exp(\phi). \quad (103)$$

Где

$$\begin{aligned} \phi &= u + iv, \\ u &= \varkappa x - \gamma t + \mu/2, & v &= kx - \omega t - \theta/2, \\ \varkappa &= A \sinh z \cos \alpha, & \gamma &= -\frac{A^2}{2} \cosh 2z \sin 2\alpha, \\ k &= A \cosh z \sin \alpha, & \omega &= \frac{A^2}{2} \sinh 2z \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (104)$$

Общее односолитонное решение зависит от четырех действительных параметров R, α, θ, μ . Два из них - θ и μ , отвечают за сдвиги во времени и пространстве. Если положить $\mu = 0, \theta = 0$, то односолитонное решение может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi = & -A(\cosh z \cosh 2u + \cos \alpha \cos 2v)^{-1} \times \\ & (\cosh z \cos 2\alpha \cosh 2u + \cosh 2z \cos \alpha \cos 2v \\ & + i(\cosh z \sin 2\alpha \sinh 2u + \sinh 2z \cos \alpha \sin 2v)). \end{aligned} \quad (105)$$

Для того чтобы получить общее решение необходимо произвести замену $t \rightarrow t - t_0, x \rightarrow x - x_0$ где $x_0 = (\mu\omega + \theta\gamma)/2\Delta, t_0 = (\mu k + \theta\alpha)/2\Delta$, где $\Delta = k\gamma - \alpha\omega$. Если $R \neq 1$, решение локализовано в пространстве. В этом случае асимптотики (105) следующие

$$\begin{aligned} \varphi & \rightarrow -A \exp(-2i\alpha), & x & \rightarrow -\infty, \\ \varphi & \rightarrow -A \exp(2i\alpha), & x & \rightarrow +\infty, \\ |\varphi|^2 & = A^2, & x & \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (106)$$

Общее односолитонное решение (105) имеет одинаковые асимптотики при $x \rightarrow \pm\infty$ только в случае $\alpha = 0$, т.е. когда полюс находится на реальной оси. Расположение полюса определяет тип решения (см Рис. 3). Обсудим все возможные типы односолитонного решения. Начнем со случая $\alpha = 0, R > 1, z > 0$. Тогда решение представляет собой солитон Кузнецова. При $\mu = 0, \theta = 0$, решение центрировано при $x = 0$ и представимо в следующем виде:

$$\varphi = -A \frac{\cosh z \cosh 2u + \cosh 2z \cos 2v + i \sinh 2z \sin 2v}{\cosh z \cosh 2u + \cos 2v}. \quad (107)$$

Где

$$u = A \sinh(z)x, \quad v = -\frac{A^2}{2} \sinh(2z)t. \quad (108)$$

Солитон Кузнецова стоит на месте ($V_{Gr} = 0$) и осциллирует с периодом

$$T = \frac{4\pi}{A^2 \sinh 2z}. \quad (109)$$

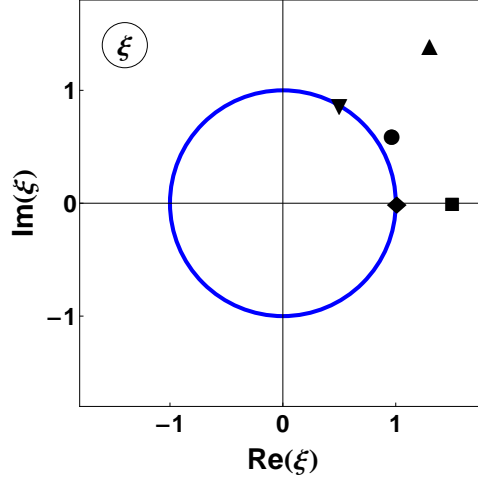


Рис. 3: Возможные типы односолитонного решения НУШ на фоне конденсата. ■ - солитон Кузнецова, ● - бризер Ахмедиева ▲ - общее односолитонное решение, ▼ - квази-Ахмедиевский бризер, ◆ - солитон Перегринна.

Заметим что $T \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$, $R \rightarrow 1$ и $T \rightarrow 0$, $z \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$. В 2012 г. солитон Кузнецова был обнаружен экспериментально в оптике [18]. Его типичное поведение представлено на Рис. 42. В пределе $R \rightarrow 1$, $T \rightarrow \infty$ решение Кузне-

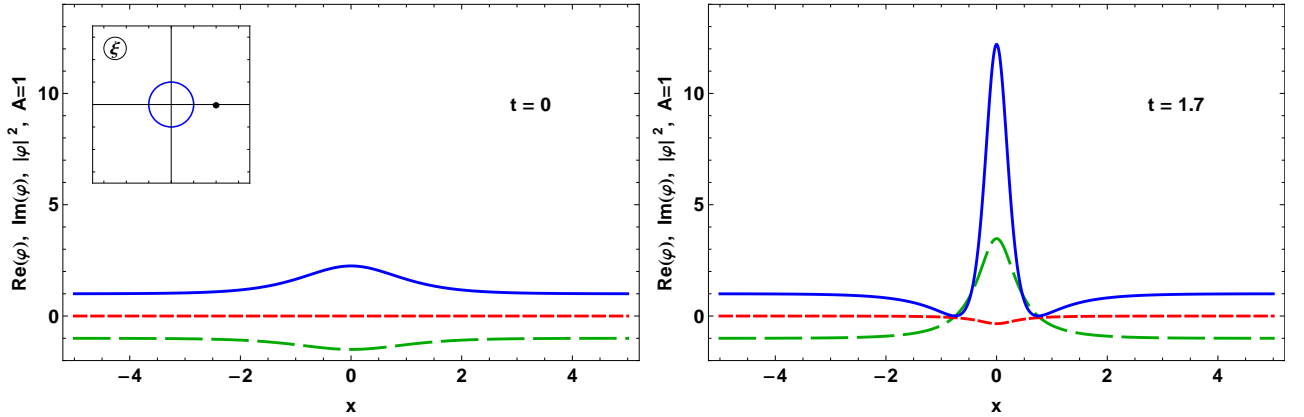


Рис. 4: Солитон Кузнецова φ в момент минимального (слева) и максимального (справа) значения величины амплитуды. $R = 2$, $\mu = 0$, $\theta = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

цова переходит в гомоклинический солитон Перегринна, который определяется выражением:

$$\varphi = -A + 4A \frac{1 - 2iA^2t}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2}. \quad (110)$$

Это решение является инстантоном, возникающем из конденсата и затем исчезающим. В самом деле, $\varphi \rightarrow A$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Решение Перегринна было экспериментально обнаружено в 2010 г. в оптике [19] и в 2011 г. в гидродинамике [20]. С помощью аналогичного предела для нескольких полюсов могут быть получены мультиинстантонные решения. Они описывают специальный сценарий развития модуляционной неустойчивости, когда рост возмущения со временем приводит к полному возвращению к конденсату, и по этой причине получили широкую известность в качестве простой аналитической модели волны-убийцы.

Теперь мы полагаем $R = 1$, $z = 0$. Для простоты вновь положим $\theta = 0$, $\mu = 0$. Мы получим бризер Ахмедиева, который является решением периодическим в пространстве и локализованным во времени.

$$\varphi = -A \frac{\cos 2\alpha \cosh 2u + \cos \alpha \cos 2v + i \sin 2\alpha \sinh 2u}{\cosh 2u + \cos \alpha \cos 2v}. \quad (111)$$

$$u = \frac{1}{2} A^2 \sin(2\alpha)t, \quad v = A \sin(\alpha)x.$$

Бризер Ахмедиева изображен на Рис. 5. Заметим, что это одно и тоже решение при α и $-\alpha$, что не удивительно, т.к. это соответствует одинаковым точкам в λ плоскости. Поэтому в выражениях для асимптотик при $t \rightarrow \pm\infty$ мы пишем знак модуля:

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow -A \exp(-2i|\alpha|), & t &\rightarrow -\infty \\ \varphi &\rightarrow -A \exp(2i|\alpha|), & t &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Бризер Ахмедиева не является полностью гомоклиническим решением. При $t \rightarrow \pm\infty$ совпадают модули ($|A^+|^2 = |A^-|^2$), но не фаза: $A^+ \neq A^-$. Это можно видеть сравнивая решения изображенные на Рис. 5 в моменты времени $t = -3$ и $t = 3$. В особо интересном случае $\alpha = \pi/4$, который отвечает максимуму инкремента модуляционной неустойчивости (67), мы видим, что $A^+ = -A^-$. Пространственный период бризера Ахмедиева:

$$L = \frac{2\pi}{A \sin \alpha}, \quad (112)$$

стремится к бесконечности при $\alpha \rightarrow 0$. В этом пределе решение стремится к периодической решетке солитонов Перегринна, удаленных друг от друга.

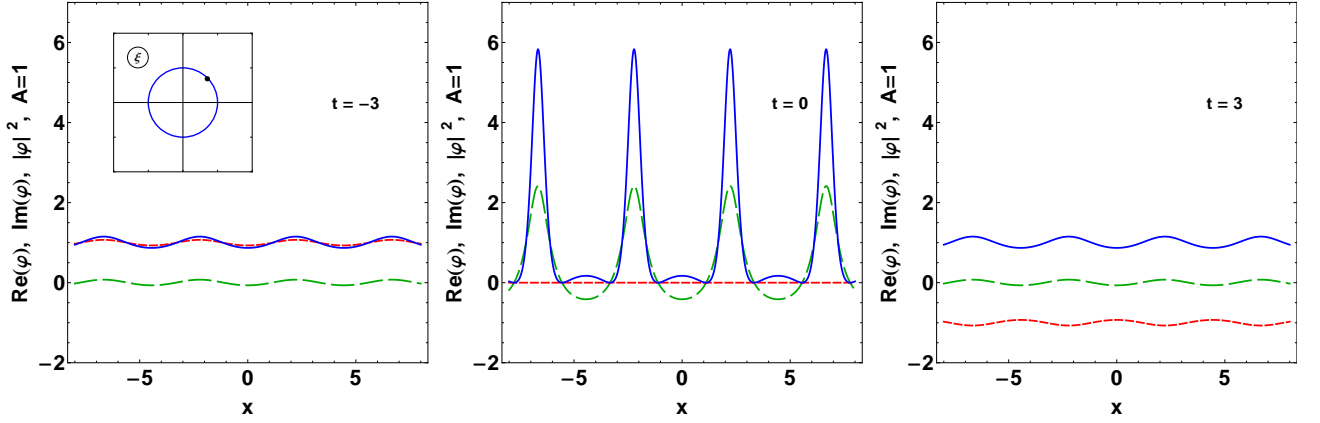


Рис. 5: Бризер Ахмедиева φ в моменты времени $t = -3$ (слева) и $t = 0$ (справа). $\alpha = \pi/4$, $\mu = 0$, $\theta = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

Вернемся к общему односолитонному решению. Это локализованный объект размера $l \approx (A \sinh z \cos \alpha)^{-1}$ распространяющийся вдоль конденсата со скоростью

$$V_{gr} = \frac{\gamma}{\varkappa} = -\frac{A \cosh 2z \sin \alpha}{\sinh z}. \quad (113)$$

Амплитуда солитона осциллирует с угловой частотой ω . Огибающая солитона заполнена несущей волной, обладающей фазовой скоростью:

$$V_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{A \sinh z \cos 2\alpha}{\sin \alpha}. \quad (114)$$

Когда $\alpha \rightarrow 0$ эта несущая волна исчезает. Типичное общее односолитонное решение представлено на Рис. 6.

Интересно усреднить квадрат модуля односолитонного решения (105) по периоду осцилляций $T = 2\pi/\omega$, т.к. это демонстрирует поведение средней величины интеграла числа частиц. Замечательно, что ответ может быть получен аналитически в очень простом виде. Для этого необходимо перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью солитона V_{gr} :

$$x \rightarrow x + \frac{\gamma}{\varkappa} t. \quad (115)$$

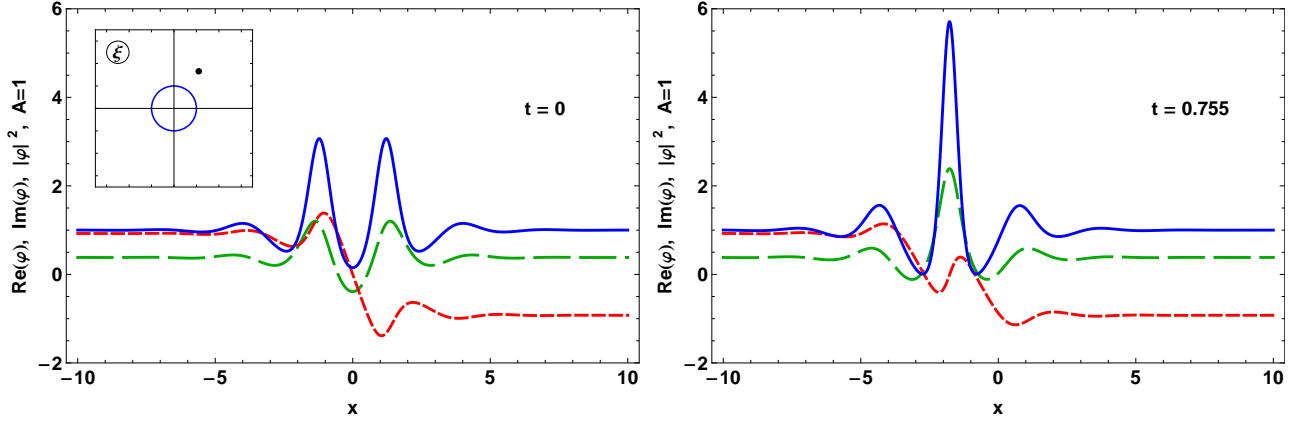


Рис. 6: Общее односолитонное решение φ в момент минимального (рисунок слева) и максимального (рисунок справа) значения величины его амплитуды. Параметры решения: $R = 2$, $\alpha = 5\pi/16$, $\mu = 0$, $\theta = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

Тогда зависимость от времени в гиперболических функциях исчезает и при интегрировании по времени мы можем считать их константами. В результате:

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \rangle_T = & \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau (\cosh z \cosh 2u + \cos \alpha \cos \tau)^{-2} \\ & [(\cosh z \cos 2\alpha \cosh 2u + \cosh 2z \cos \alpha \cos \tau)^2 \\ & + (\cosh z \sin 2\alpha \sinh 2u + \sinh 2z \cos \alpha \sin \tau)^2]. \end{aligned} \quad (116)$$

После стандартной замены переменных $w = \exp(i\tau)$, необходимо вычислить интеграл по контуру $|w| = 1$. Подынтегральная функция имеет один полюс первого порядка в точке $w_0 = 0$ и два полюса второго порядка в точках:

$$w_{1,2} = -\cosh z \cosh 2u \cos^{-1} \alpha \pm \sqrt{\cosh^2 z \cosh^2 2u \cos^{-2} \alpha - 1}. \quad (117)$$

Однако, как легко видеть, лишь точки w_0 и w_1 лежат внутри контура интегрирования. Поэтому окончательный ответ выглядит так:

$$A^2 + \frac{4A^2 \cosh 2u}{(\cosh^2 2u - \cos^2 \alpha \cosh^{-2} z)^{3/2}} \frac{\sinh^2 z \cos^2 \alpha (\sinh^2 z + \sin^2 \alpha)}{\cosh^2 z} \langle |\varphi|^2 \rangle_T = \quad (118)$$

Усредненное таким образом по времени односолитонное решение из Рис. 6, представлено на Рис. 7.

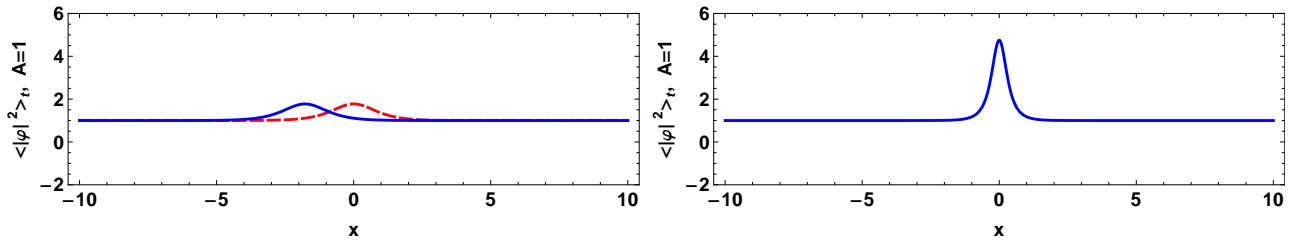


Рис. 7: Квадрат модуля односолитонного решения, усредненный по периоду осцилляций для решений с параметрами из Рис. 6 (слева) и соответствующих формуле 119 (справа). Пунктирные и непрерывные линии на рисунке слева отвечают моментам времени $t = 0$, $t = 0.755$.

Для солитона Кузнецова (107) усреднение приведет к следующему простому результату:

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_T = A^2 + A^2 \frac{\sinh^4 z}{\cosh^2 z}. \quad (119)$$

В частности, в предельном случае $R \rightarrow 1$, $z \rightarrow 0$ мы получим ожидаемый ответ:

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_T = A^2. \quad (120)$$

Обратим внимание на особенно важный тип общего односолитонного решения, который будет играть ключевую роль в дальнейшей теории. Когда $R \rightarrow 1$, $z \rightarrow 0$, решение представляет собой бризер очень большого размера L :

$$L \approx \frac{1}{Az \cos \alpha}. \quad (121)$$

движущийся с большой групповой скоростью:

$$V_{group} \approx -\frac{A \sin \alpha}{z}, \quad (122)$$

и малой фазовой скоростью:

$$V_{ph} \approx \frac{Az \cos 2\alpha}{\sin \alpha}. \quad (123)$$

Мы называем его "квази-Ахмедиевский" бризер, т.к. в пределе бесконечно больших размера и фазовой скорости он переходит в бризер Ахмедиева. Решение

имеет квазипериодическую структуру с характерным масштабом $l \approx 2\pi(A \sin \alpha)^{-1}$. Наблюдая его в некоторой фиксированной точке (например $x = 0$) мы увидим, что полное время прохождения этого решения можно оценить так:

$$T \approx \frac{L}{V_{group}} = \frac{1}{A^2 \cos \alpha \sin \alpha}. \quad (124)$$

$T \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$. Интересно, что это время не зависит от z . Квази-Ахмедиевский бризер оставляет после своего прохождения медленно исчезающие "хвосты".

Пример данного решения представлен на Рис. 8.

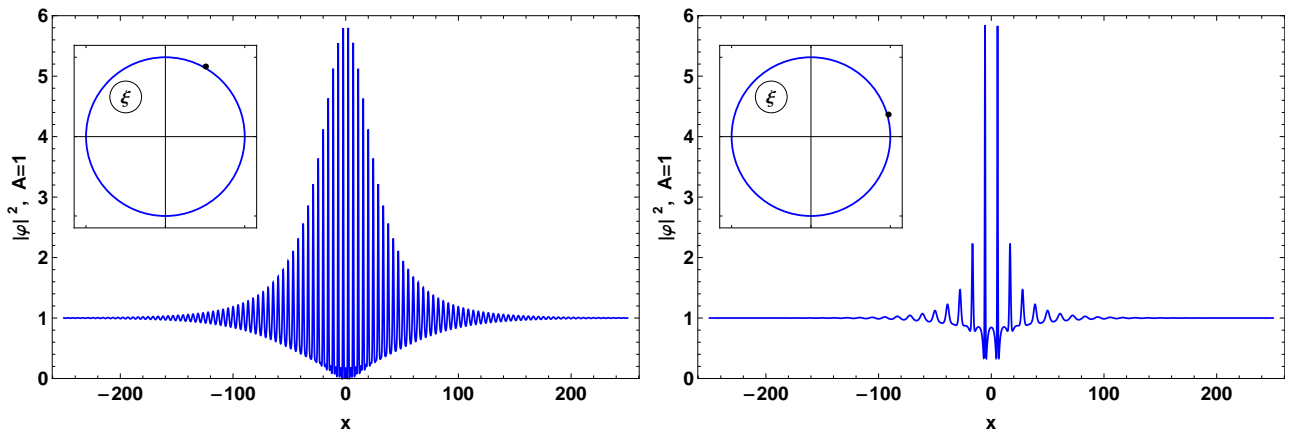


Рис. 8: Квадрат модуля "квази-Ахмедиевского"бризера φ при $t = 0$ с различными значениями параметра α . Слева: $R = 1.02$, $\alpha = \pi/3$, $\mu = 0$, $\theta = 0$, справа: $R = 1.02$, $\alpha = \pi/11$, $\mu = 0$, $\theta = 0$.

2.2 Двухсолитонное решение

Общее двухсолитонное решение на фоне конденсата может быть получено с помощью процедуры одевания, описанной в §2. Как и раньше мы пишем решение в униформизованных переменных. Однако, для промежуточных вычислений в этом и следующих параграфах более удобно использовать двухсолитонное решение, зависящее от переменной λ :

$$\begin{aligned} \varphi &= A - 2 \frac{N_\lambda}{\Delta_\lambda}, \\ N_\lambda &= \frac{|\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22}}{\lambda_1 + \lambda_1^*} - \frac{(\mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_2) q_{21}^* q_{12}}{\lambda_1^* + \lambda_2} - \frac{(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^*) q_{11}^* q_{22}}{\lambda_2^* + \lambda_1} + \frac{|\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12}}{\lambda_2 + \lambda_2^*}, \\ \Delta_\lambda &= \frac{|\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2}{(\lambda_1 + \lambda_1^*)(\lambda_2 + \lambda_2^*)} - \frac{(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^*)(\mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_2)}{(\lambda_1^* + \lambda_2)(\lambda_2^* + \lambda_1)}. \end{aligned} \quad (125)$$

В униформизованных переменных двухсолитонное решение записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= A - 2A \frac{N_\xi}{\Delta_\xi}, \quad N_\xi = \\ &H_1 |\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} + H_2 |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12} + iH_3 [(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*) q_{11}^* q_{22} - (\mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}_2) q_{21}^* q_{12}], \\ \Delta_\xi &= H_4 |\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2 - H_5 |(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*)|^2. \end{aligned} \quad (126)$$

Вектора \mathbf{q}_1 and \mathbf{q}_2 определяются из общего выражения 84), а константы H_i есть:

$$\begin{aligned} H_1 &= 2 \cos \alpha_2 \cosh z_2 [(\sin \alpha_1 \sinh z_1 - \sin \alpha_2 \sinh z_2)^2 - \\ &\quad \cos^2 \alpha_1 \cosh^2 z_1 + \cos^2 \alpha_2 \cosh^2 z_2], \\ H_2 &= 2 \cos \alpha_1 \cosh z_1 [(\sin \alpha_1 \sinh z_1 - \sin \alpha_2 \sinh z_2)^2 + \\ &\quad \cos^2 \alpha_1 \cosh^2 z_1 - \cos^2 \alpha_2 \cosh^2 z_2], \\ H_3 &= 4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cosh z_1 \cosh z_2 (\sin \alpha_1 \sinh z_1 - \sin \alpha_2 \sinh z_2), \\ H_4 &= (\sin \alpha_1 \sinh z_1 - \sin \alpha_2 \sinh z_2)^2 + (\cos \alpha_1 \cosh z_1 + \cos \alpha_2 \cosh z_2)^2, \\ H_5 &= 4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cosh z_1 \cosh z_2. \end{aligned} \quad (127)$$

Легко проверить, что выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} - (\mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}_2) q_{21}^* q_{12} - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*) q_{11}^* q_{22} + |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12} &\equiv 0, \\
(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*) q_{11}^* q_{22} - (\mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}_2) q_{21}^* q_{12} &\equiv \\
(|q_{11}|^2 - |q_{12}|^2) q_{21}^* q_{22} + (|q_{21}|^2 - |q_{22}|^2) q_{11}^* q_{12}, & \\
|\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2 - |(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*)|^2 = |q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21}|^2. & \quad (128)
\end{aligned}$$

Заметим, что когда полюса не находятся на действительной оси ($\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$) и групповые скорости не равны друг другу ($V_{Gr_1} \neq V_{Gr_2}$), можно добиться $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$ с помощью сдвигов решения по x и t . В таком случае солитоны сталкиваются при $(x = 0, t = 0)$. Здесь и далее в указанном случае мы полагаем $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$. Знаки параметров α_1 и α_2 определяют знаки групповых скоростей. В общем случае двухсолитонное решение меняет фазу конденсата. Пример двух солитонов, движущихся в одном направлении и затем сталкивающихся представлен на Рис. 9. Можно записать двухсолитонное решение в

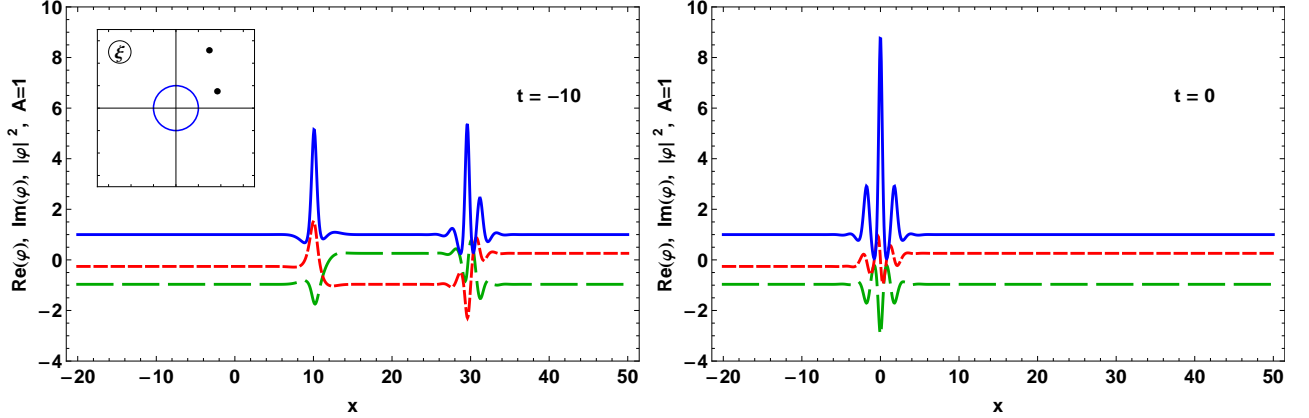


Рис. 9: Общее двухсолитонное решение φ в моменты времени $t = -10$ (слева) и $t = 0$ (справа) с параметрами: $R_1 = 2$, $\alpha_1 = \pi/8$, $R_2 = 3$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

явном виде с помощью выражений (86) и

$$\begin{aligned}
(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*) &= 4 \exp\left(\frac{z_2 - z_1}{2} + i \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \times \\
&\left[(\cos(v_1 - v_2) \cosh(u_1 + u_2) + i \sin(v_1 - v_2) \sinh(u_1 + u_2)) \times \right. \\
&\quad \left(\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cosh \frac{z_1 + z_2}{2} + i \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sinh \frac{z_1 + z_2}{2} \right) + \\
&\quad (\cos(v_1 + v_2) \cosh(u_1 - u_2) + i \sin(v_1 + v_2) \sinh(u_1 - u_2)) \times \\
&\quad \left. \left(\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cosh \frac{z_1 - z_2}{2} + i \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sinh \frac{z_1 - z_2}{2} \right) \right]. \quad (129)
\end{aligned}$$

Напишем еще одно полезное выражение

$$\begin{aligned}
q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} &= -4 \exp\left(-\frac{z_1 + z_2}{2} - i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \times \\
&\left[(\cos(v_1 + v_2) \cosh(u_1 + u_2) + i \sin(v_1 + v_2) \sinh(u_1 + u_2)) \times \right. \\
&\quad \left(\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cosh \frac{z_1 - z_2}{2} + i \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sinh \frac{z_1 - z_2}{2} \right) + \\
&\quad (\cos(v_1 - v_2) \cosh(u_1 - u_2) + i \sin(v_1 - v_2) \sinh(u_1 - u_2)) \times \\
&\quad \left. \left(\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cosh \frac{z_1 + z_2}{2} + i \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sinh \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \right]. \quad (130)
\end{aligned}$$

В §4 было установлено, что решение является регулярным когда сумма угловых параметров равна нулю или $\pm\pi/2$. В двухсолитонном случае это приводит к существованию двух типов регулярных решений. Мы называем первым типом случай, когда $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -\alpha$. Он представляет собой два солитона, которые движутся в противоположных направлениях и сталкиваются. Групповые скорости таковы:

$$V_{Gr1} = -\frac{A \cosh 2z_1 \sin \alpha}{\sinh z_1}, \quad V_{Gr2} = \frac{A \cosh 2z_2 \sin \alpha}{\sinh z_2}. \quad (131)$$

Мы полагаем $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, и в результате регулярное двухсолитонное решение первого типа зависит от пяти действительных параметров: $R_1, R_2, \alpha, \theta_1, \theta_2$. Пример такого решения представлен на Рис. 10. В особом симметричном случае $z_1 = z_2 = z$, собственные числа комплексно сопряжены. Тогда ϕ_1 и ϕ_2

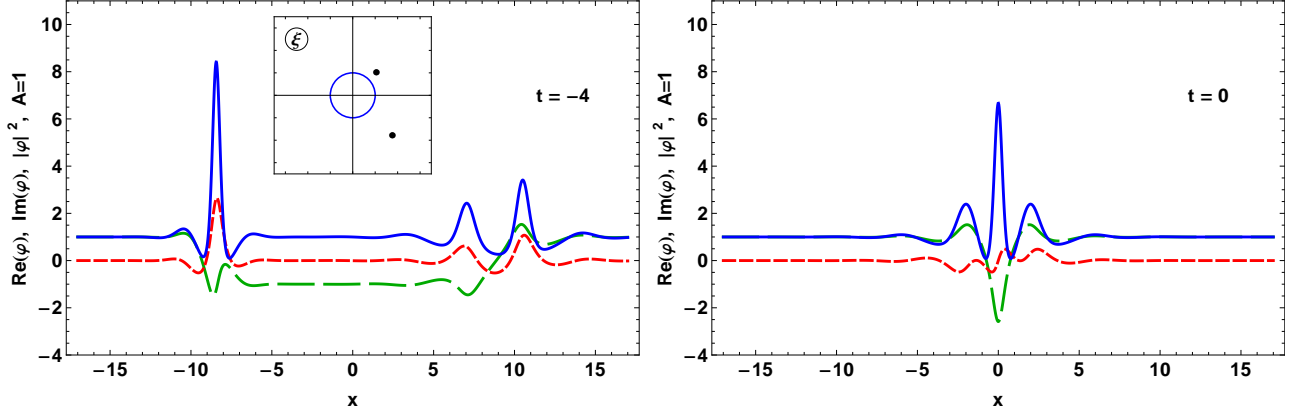


Рис. 10: Регулярное двухсолитонное решение φ первого типа в моменты времени $t = -4$ (слева) и $t = 0$ (справа). Параметры: $R_1 = 1.5$, $\alpha_1 = \pi/4$, $R_2 = 2.5$, $\alpha_2 = -\pi/4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

вычисляются из определений (85), с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned}
 \varkappa_2 &= \varkappa_1 = \varkappa = A \sinh z \cos \alpha, \\
 k_1 &= -k_2 = k = A \cosh z \sin \alpha, \\
 \gamma_1 &= -\gamma_2 = \gamma = -\frac{A^2}{2} \cosh 2z \sin 2\alpha, \\
 \omega_1 &= \omega_2 = \omega = \frac{A^2}{2} \sinh 2z \cos 2\alpha.
 \end{aligned} \tag{132}$$

А числитель и знаменатель N_ξ и Δ_ξ в униформизованных переменных (126) следующие:

$$\begin{aligned}
 N_\xi &= \sinh 2z \sinh z \sin 2\alpha \sin \alpha (|\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} + |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12}), \\
 &\quad + i \cosh z \cos \alpha ((\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*) q_{11}^* q_{22} - (\mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}_2) q_{21}^* q_{12}), \\
 \Delta_\xi &= 2 \cosh^2 z \cos^2 \alpha |q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21}|^2 + 2 \sinh^2 z \sin^2 \alpha |\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2.
 \end{aligned} \tag{133}$$

Где

$$\begin{aligned}
 q_{11} &= \exp(-\phi_1) + \exp(-i\alpha - z + \phi_1), \\
 q_{21} &= \exp(-\phi_2) + \exp(i\alpha - z + \phi_2), \\
 q_{12} &= \exp(-i\alpha - z - \phi_1) + \exp(\phi_1), \\
 q_{22} &= \exp(i\alpha - z - \phi_2) + \exp(\phi_2).
 \end{aligned} \tag{134}$$

Пример регулярного симметричного двухсолитонного решения первого типа приведен на Рис. 11.

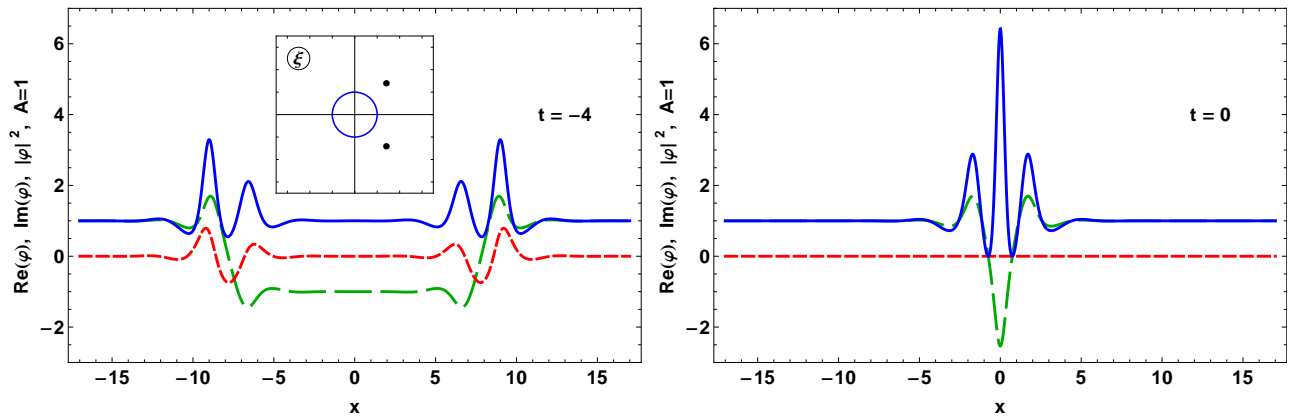


Рис. 11: Регулярное двухсолитонное решение φ первого типа в симметричном случае в моменты времени $t = -4$ (слева) и $t = 0$ (справа). Параметры: $R_1 = 2$, $\alpha_1 = \pi/4$, $R_2 = 2$, $\alpha_2 = -\pi/4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

Когда $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha$, $\alpha > 0$ или $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -\pi/2 - \alpha$, $\alpha < 0$, мы называем решение регулярным двухсолитонным решением второго типа. Оно представляет собой два солитона, движущихся в одном направлении, которые в общем случае (за исключением того случая, когда групповые скорости совпадают) сталкиваются. Мы обсудим лишь случай $\alpha > 0$ (в случае $\alpha < 0$ отличие будет лишь в направлении движения). Заметим, что теперь мы не можем одновременно положить $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, т.к. групповые скорости могут совпадать. Т.к. в этом случае условие $z_1 = z_2 = z$ не приводит к каким-либо существенным упрощениям, мы опустим явное выражение для этого решения. Регулярное двухсолитонное решение второго типа представлено на Рис. 12.

В случае $z_1 = z_2 = 0$ ($R_1 = R_2 = 1$) мы получим двойной бризер Ахмедиева. Это решение периодически в пространстве, локализовано во времени и в общем случае меняет фазу конденсата, т.к. при $t \rightarrow \pm\infty$, решение $\varphi \rightarrow \exp(\pm i(|\alpha_1| + |\alpha_2|))$. Выражение (126) теперь может быть упрощено так:

$$\varphi = A + 4A \frac{(\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2)(\cos \alpha_2 |\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} - \cos \alpha_1 |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12})}{(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)^2 |\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2 - 4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 |(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*)|^2}. \quad (135)$$

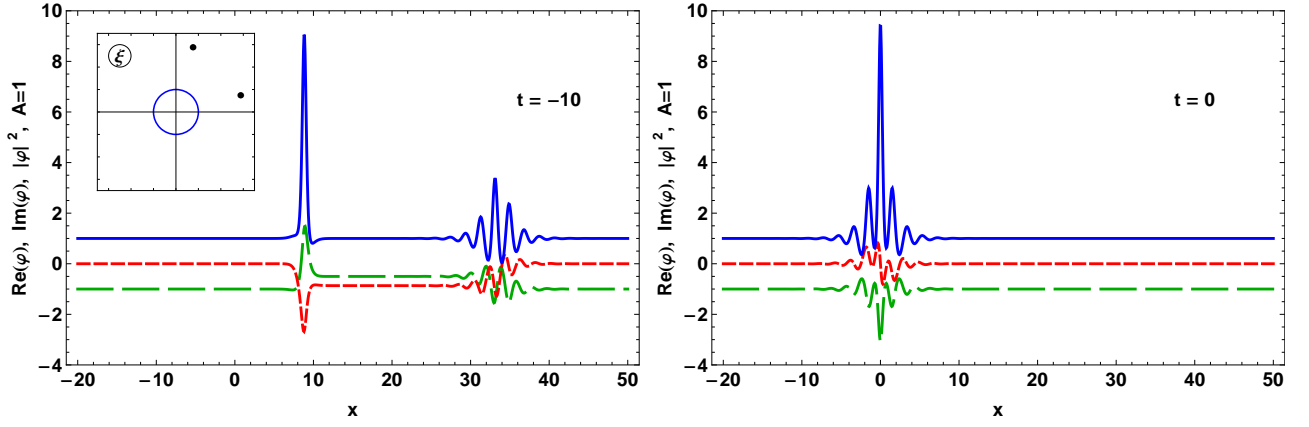


Рис. 12: Регулярное двухсолитонное решение φ второго типа в моменты времени $t = -10$ (слева) и $t = 0$ (справа). Параметры: $R_1 = 3$, $\alpha_1 = \pi/12$, $R_2 = 3$, $\alpha_2 = 5\pi/12$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

Двойной бризер Ахмедиева представлен на Рис.13. Мы можем положить $\mu_1 = 0$ и $\theta_1 = 0$. Обозначим $\mu_2 = \mu$ и $\theta_2 = \theta$. Теперь первая компонента двойного бризера центрирована по x и t , а μ и θ отвечают сдвигам по пространству и времени второй компоненты относительно первой. Тогда:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{A^2}{2} \sin(2\alpha_1)t + iA \sin(\alpha_1)x, \\
\phi_2 &= \frac{A^2}{2} \sin(2\alpha_2)t + \mu/2 + i(A \sin(\alpha_2)x - \theta/2), \\
q_{11} &= \exp(-\phi_1) + \exp(-i\alpha_1 + \phi_1), \\
q_{21} &= \exp(-\phi_2) + \exp(-i\alpha_2 + \phi_2), \\
q_{12} &= \exp(-i\alpha_1 - \phi_1) + \exp(\phi_1), \\
q_{22} &= \exp(-i\alpha_2 - \phi_2) + \exp(\phi_2).
\end{aligned} \tag{136}$$

Если $\mu \gg A^2 \sin 2\alpha_2$ решение переходит в два отдельных бризера Ахмедиева, возникающие в различные удаленные друг от друга моменты времени. В остальных случаях решение - это сложная нелинейная комбинация двух бризеров. Когда $|\alpha_2| = \pi/2 - |\alpha_1|$ решение полностью гомоклинично и может быть записано так:

$$\varphi = A + 4A \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\sin \alpha |\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} - \cos \alpha |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12})}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 |\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2 - 2 \sin 2\alpha |(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*)|^2}. \tag{137}$$

Где

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{A^2}{2} \sin(2\alpha)t + iA \sin(\alpha)x, \\
\phi_2 &= \frac{A^2}{2} \sin(2\alpha)t + \mu/2 + i(A \cos(\alpha)x - \theta/2), \\
q_{11} &= \exp(-\phi_1) + \exp(-i\alpha + \phi_1), \\
q_{21} &= \exp(-\phi_2) - i \exp(i\alpha + \phi_2), \\
q_{12} &= \exp(-i\alpha - \phi_1) + \exp(\phi_1), \\
q_{22} &= -i \exp(i\alpha - \phi_2) + \exp(\phi_2).
\end{aligned} \tag{138}$$

Фазы такого решения совпадают при $t \rightarrow \pm\infty$ (см. Рис. 13). В отличие от случая решений локализованных в пространстве, в периодическом случае, критерий равенства фаз уже не играет такой важной роли с физической точки зрения. Однако, не исключено, что полностью гомоклинические периодические решения в будущем найдут свое применение в теории модуляционной неустойчивости.

Когда оба полюса находятся на действительной оси ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$) решение является связанным состоянием. Теперь N_ξ и Δ_ξ из (126) даются выражениями:

$$\begin{aligned}
N_\xi &= 2 \cosh z_2 (\cosh^2 z_2 - \cosh^2 z_1) |\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} + \\
&\quad 2 \cosh z_1 (\cosh^2 z_1 - \cosh^2 z_2) |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12}, \\
\Delta_\xi &= (\cosh z_1 + \cosh z_2)^2 |\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2 - 4 \cosh z_1 \cosh z_2 |(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*)|^2
\end{aligned} \tag{139}$$

Как и в предыдущем случае можно положить $\mu_1 = 0, \theta_1 = 0, \mu_2 = \mu, \theta_2 = \theta$.

Тогда:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= A \sinh(z_1)x - i \frac{A^2}{2} \sinh(2z_1)t, \\
\phi_2 &= A \sinh(z_2)x + \mu/2 - i \left(\frac{A^2}{2} \sinh(2z_1)t - \theta/2 \right).
\end{aligned} \tag{140}$$

Пример связанного состояния представлен на Рис. 14.

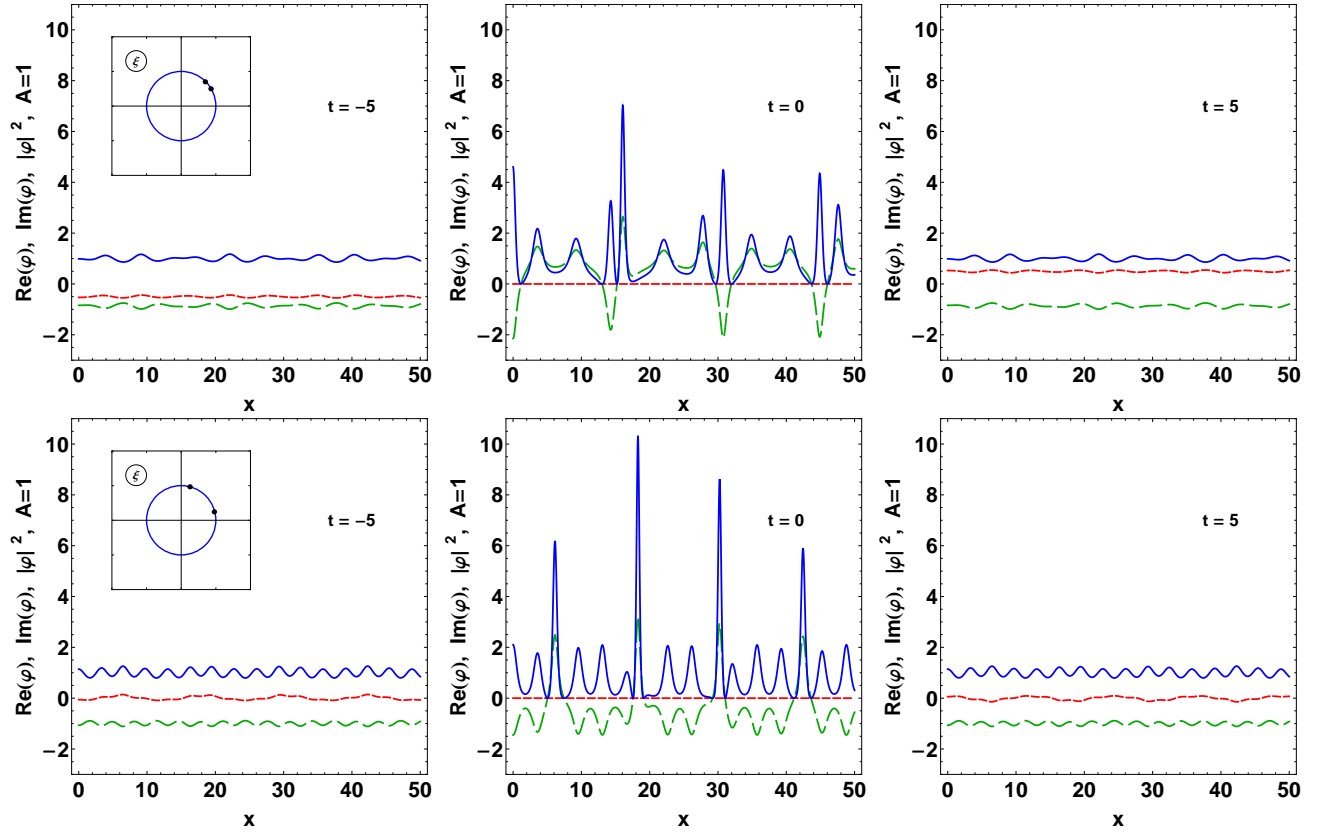


Рис. 13: Двойной бризер Ахмедиева φ в моменты времени $t = -5$ (слева), $t = 0$ (в центре) и $t = 5$ (справа). Верхние рисунки соответствуют параметрам $\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi/4$, $\mu = 0$, $\theta = 0$. Нижние рисунки соответствуют полностью гомоклиническому бризеру Ахмедиева с параметрами $\alpha_1 = \pi/12$, $\alpha_2 = 5\pi/12$, $\mu = 0$, $\theta = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

Как видно, возможны самые разнообразные комбинации солитонных решений. В заключении данного параграфа отметим еще один важный случай. Это комбинация бризера Ахмедиева и солитона Кузнецова представленная на Рис. 15.

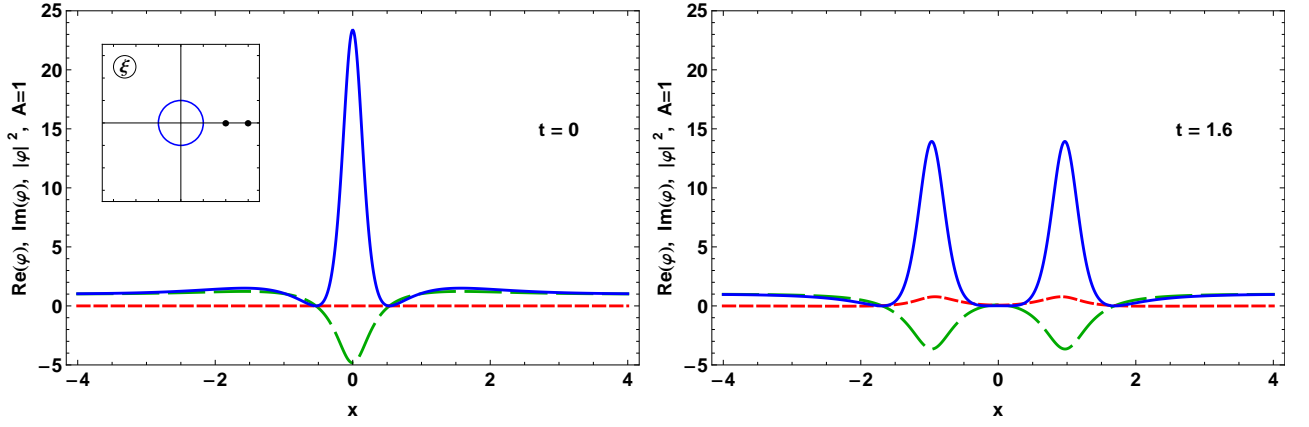


Рис. 14: Связанное двухсолитонное решение φ в момент столкновения (слева) и максимального отклонения (справа). Параметры: $R_1 = 2$, $\alpha_1 = 0$, $R_2 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

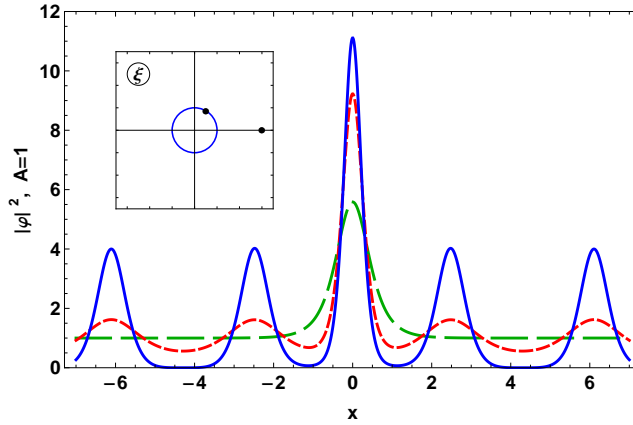


Рис. 15: Комбинация бризера Ахмедиева и солитона Кузнецова. Квадрат модуля решения φ в моменты времени: $t = -10$ (зеленые штрихованные линии), $t = -2$ (красные короткие штрихованные линии) и $t = 0$ (синие непрерывные линии). Параметры: $R_1 = 3$, $\alpha_1 = 0$, $R_2 = 1$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

2.3 Солитонные атомы

В случае когда все групповые скорости совпадают решение представляет собой т.н. солитонный атом. Это сложная нелинейная комбинация солитонов, движущихся совместно. Солитонный атом, состоящий из большого числа солитонов, следует описывать методами статистической механики и это задача для дальнейших исследований. В простейшем двухсолитонном случае:

$$\frac{\cosh 2z_1}{\sinh z_1} \sin \alpha_1 = \frac{\cosh 2z_2}{\sinh z_2} \sin \alpha_2. \quad (141)$$

Типичные примеры двух и трехсолитонных атомов представлены на Рис. 16 и Рис. 17.

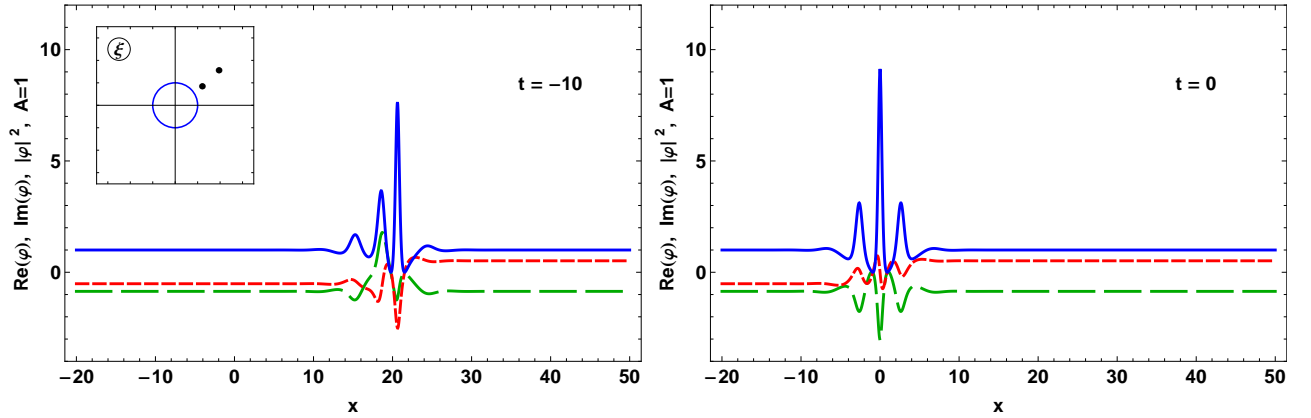


Рис. 16: Двухсолитонный атом φ в моменты времени $t = -10$ (слева) и $t = 0$ (справа). Параметры: $R_1 = 1.5$, $R_2 = 2.5$, $\alpha_1 = \pi/5$, $\alpha_2 = 0.6721$, $\mu_{1,2} = 0$, $\theta_{1,2} = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

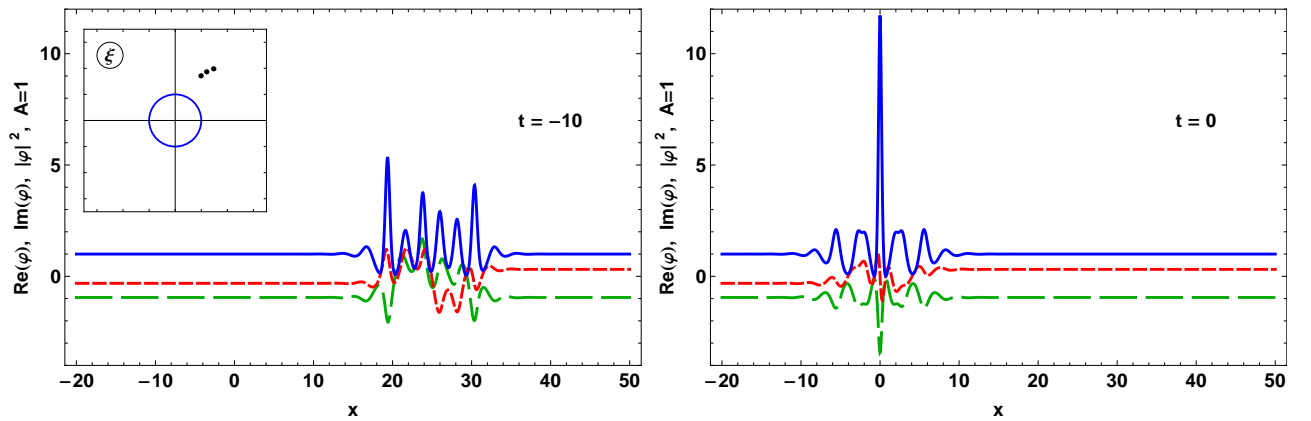


Рис. 17: Трехсолитонный атом φ в моменты времени $t = -10$ (слева) и $t = 0$ (справа). Параметры: $R_1 = 2$, $R_2 = 2.25$, $R_3 = 2.5$, $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = 1.00148$, $\alpha_3 = 0.933785$, $\mu_{1,2,3} = 0$, $\theta_{1,2,3} = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

Важно, что существует регулярный N -солитонный атом. Это возможно только когда

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (142)$$

Пример регулярного двухсолитонного атома представлен на Рис. 18.

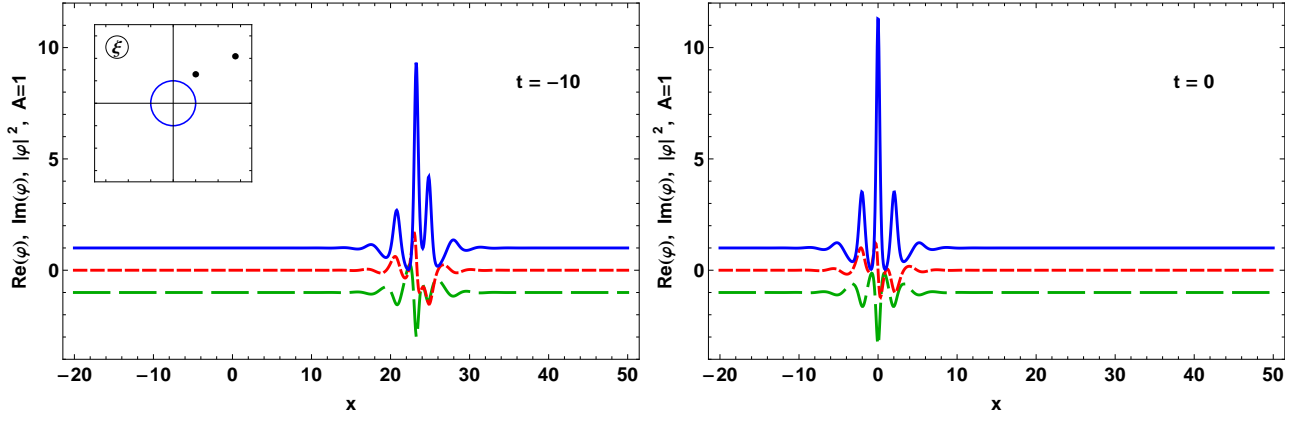


Рис. 18: Регулярный двухсолитонный атом φ . Параметры $R_1 = 3.5$, $R_2 = 1.66456$, $\alpha_1 = 5\pi/24$, $\alpha_2 = 7\pi/24$, $\mu_{1,2} = 0$, $\theta_{1,2} = 0$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

2.4 N -солитонное решение на фоне солитона Перегринна

Как уже не раз было отмечено ранее, решение Перегринна играет важную роль в теории волн-убийц, являясь по сути простейшей моделью волны экстремально высокой амплитуды, возникающей из ниоткуда и исчезающей без следа.

Работы [19] и [20] продемонстрировали, что, несмотря на неустойчивость, возможно создать начальное условие соответствующее решению Перегринна, которое в результате своего нелинейного развития хорошо воспроизведет теоретические предсказания. Однако, представляет отдельный интерес развитие подобного начального условия в комбинации с другими решениями НУШ или, что еще более важно, в комбинации с малыми возмущениями.

Впринципе, решение данной задачи содержится в общей формуле для N -солитонного решения на фоне конденсата, которая была получена в §1.3. Однако, в этом случае придется совершать предельный переход всякий раз при вычислении нового решения. Вместо этого мы решим задачу об N -солитонном решении на фоне решения Перегринна. Действительно, в §1.1 была получена общая формула для решения на произвольном фоне φ_0 (32). Вопрос лишь в том, как найти соответствующую матрицу Ψ_0 - решение условия совместности (24).

Зачастую это не просто или даже невозможно, несмотря на то, что система (24) линейна. В нашем случае роль фонового решения φ_P (здесь и далее для случая решения Перегринна мы используем индекс P , а индекс 0 для конденсата) играет решение Перегринна (110):

$$\varphi_P = -A + 4A \frac{1 - 2iA^2t}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2}. \quad (143)$$

При этом матрицы $\widehat{\mathbf{U}}_P$ и $\widehat{\mathbf{W}}_P$ выглядят довольно сложным образом и найти матрицу Ψ_P непросто. Поэтому, вместо решения системы (24) мы применим метод одеваания последовательно дважды. На первом шаге мы оденем конденсат до решения Перегринна, что уже делали ранее. Однако на этот раз, с помощью одевающей формулы (34) вычислим матрицу Ψ_P :

$$\Psi_P = \chi_P \Psi_0 \quad (144)$$

Одевающая матрица χ на произвольном фоне в односолитонном случае дается формулой (57). Подставляя значения вектора q для случая конденсата (103) и производя предельный переход $R \rightarrow 1$, соответствующий случаю Перегринна, получаем:

$$\chi_P = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{4Ax}{1+4A^2x^2+4A^4t^2} & 1 - 2\frac{1-2iA^2t}{1+4A^2x^2+4A^4t^2} \\ 1 - 2\frac{1+2iA^2t}{1+4A^2x^2+4A^4t^2} & \lambda + \frac{4Ax}{1+4A^2x^2+4A^4t^2} \end{pmatrix} \quad (145)$$

Откуда, перемножая, в соответствии с (144) матрицы (145) и (75) получаем,

что компоненты матрицы Ψ_P равны:

$$\begin{aligned}
\Psi_{P,11}(x, t, \lambda) &= \left(\lambda - \frac{4Ax}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) e^{\phi(x,t,\lambda)} + \\
&\quad \left(1 - 2\frac{1 - 2iA^2t}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) s(\lambda) e^{\phi(x,t,\lambda)} \\
\Psi_{P,12}(x, t, \lambda) &= \left(\lambda - \frac{4Ax}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) s(\lambda) e^{-\phi(x,t,\lambda)} + \\
&\quad \left(1 - 2\frac{1 - 2iA^2t}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) e^{-\phi(x,t,\lambda)} \\
\Psi_{P,21}(x, t, \lambda) &= \left(1 - 2\frac{1 + 2iA^2t}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) e^{\phi(x,t,\lambda)} + \\
&\quad \left(\lambda + \frac{4Ax}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) s(\lambda) e^{\phi(x,t,\lambda)} \\
\Psi_{P,22}(x, t, \lambda) &= \left(1 - 2\frac{1 + 2iA^2t}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) s(\lambda) e^{-\phi(x,t,\lambda)} + \\
&\quad \left(\lambda + \frac{4Ax}{1 + 4A^2x^2 + 4A^4t^2} \right) e^{-\phi(x,t,\lambda)} \tag{146}
\end{aligned}$$

Где, как и ранее

$$\phi = kx + \Omega t, \quad k^2 = \lambda^2 - A^2, \quad \Omega = -i\lambda k, \quad s = -\frac{A}{\lambda + k}.$$

Для случая односолитонного решения, на фоне солитона Перегринна, соответствующего выбору полюса одевающей функции в точке η (см. 57) мы стандартным образом определяем матрицу F_P :

$$F_{P,\alpha\beta} = \Psi_{P,\alpha\beta}(-\eta^*), \tag{147}$$

и аналогично (63), получаем, что компоненты вектора q_P могут быть найдены так:

$$\begin{aligned}
q_{P1}^* &= F_{P,11} + CF_{P,12}, \\
q_{P2}^* &= F_{P,21} + CF_{P,22}. \tag{148}
\end{aligned}$$

А общее односолитонное решение на фоне солитона Перегринна дается выражением:

$$\varphi = \varphi_P - \frac{2(\eta + \eta^*)q_{P1}^*q_{P2}}{|q_{P1}|^2 + |q_{P2}|^2}. \tag{149}$$

Ввиду сложности выражения для явного вида (149), мы ограничимся лишь иллюстрациями. На Рис. 19 и Рис. 20 представлены наиболее интересные примеры нелинейного взаимодействия солитона Перегринна с общим односолитонным решением, солитоном Кузнецова и бризером Ахмедиева. Как видно, во всех случаях, в определенный момент времени возникает максимум, амплитудой существенно больше $3A$.

На этом мы остановимся в анализе данной ситуации, которая, вне всяких сомнений заслуживает отдельного изучения. Аналогичные результаты были недавно получены в работе [45], однако в ней предельный переход производился непосредственно в формулах для двухсолитонных решений. На сколько нам известно, мы впервые предлагаем подобный простой способ изучения нелинейного взаимодействия солитона Перегринна с произвольным N -солитонным решением. Это, в очередной раз, демонстрирует удобство и универсальность метода одевания.

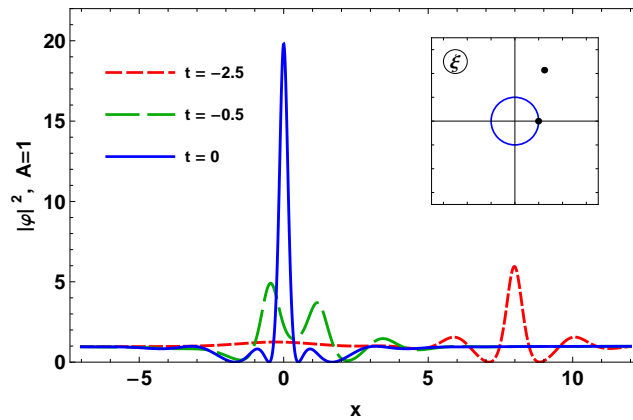


Рис. 19: Квадрат модуля нелинейной суперпозиции солитона Перегринна и общего односолитонного решения в различные моменты времени. Параметры односолитонного решения

$$R_1 = 2.5, \alpha_1 = \pi/3, \theta = \pi.$$

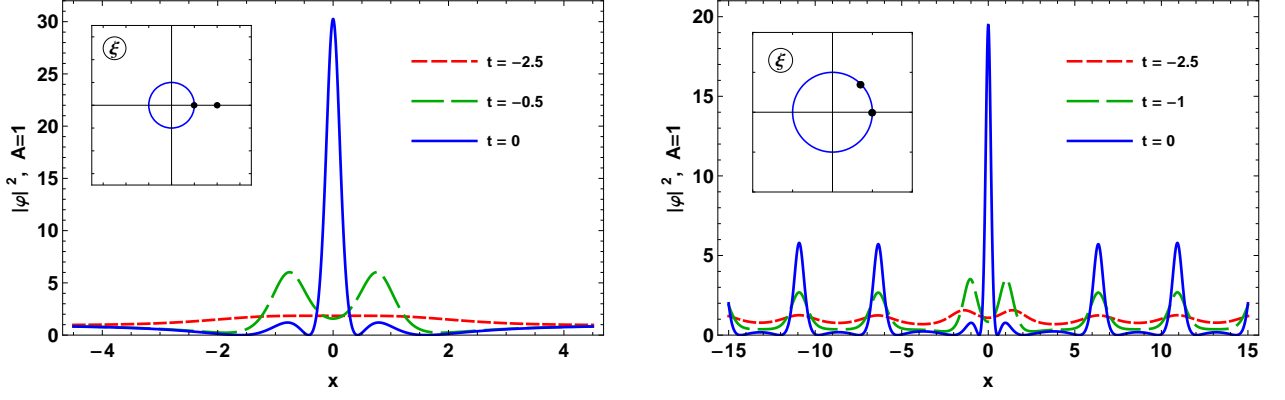


Рис. 20: Квадрат модуля нелинейной суперпозиции солитона Перегринна и солитона Кузнецова (слева), бризера Ахмедиева (справа) в различные моменты времени. Прамаметры солитона Кузнецова: $R_1 = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\theta = \pi$. Прамаметры бризера Ахмедиева: $R_1 = 1$, $\alpha_1 = \pi/4$, $\theta = \pi$.

2.5 Аннигиляция солитонов

Изучим следующий следующий предельный случай

$$R_1 = R_2 = 1, \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha. \quad (150)$$

В этом параграфе мы используем переменную λ , тогда

$$\lambda_1 = \lambda_1^* = \lambda_2 = \lambda_2^* = A \cos \alpha. \quad (151)$$

а также (см. (128))

$$N_\lambda = \frac{|\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} - (\mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}_2) q_{21}^* q_{12} - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*) q_{11}^* q_{22} + |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12}}{2A \cos \alpha} \equiv 0, \quad \Delta_\lambda = \frac{|q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21}|^2}{4A^2 \cos^2 \alpha}. \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \\ k_1 = -k_2 = k = A \sin \alpha, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma = \frac{A^2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} u_1 = -\gamma t + \mu_1/2, \quad u_2 = \gamma t + \mu_2/2, \\ v_1 = kx - \theta_1/2, \quad v_2 = -kx - \theta_2/2. \end{aligned} \quad (154)$$

Вектора $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ являются периодическими функциями x и экспоненциальными функциями t . Обозначим:

$$\mu_1 \pm \mu_2 = \mu^\pm, \quad \theta_1 \pm \theta_2 = \theta^\pm. \quad (155)$$

Из (130) получим, что

$$q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} = -4 \sin \alpha \left(\cos \frac{\theta^+}{2} \sinh \frac{\mu^+}{2} - i \sin \frac{\theta^+}{2} \cosh \frac{\mu^+}{2} \right). \quad (156)$$

В результате:

$$\Delta_\lambda = \frac{4 \sin^2 \alpha}{A^2 \cos^2 \alpha} \left(\cos^2 \frac{\theta^+}{2} \sinh^2 \frac{\mu^+}{2} + \sin^2 \frac{\theta^+}{2} \cosh^2 \frac{\mu^+}{2} \right). \quad (157)$$

Оказывается, что в этом случае, знаменатель Δ не зависит от x и t - это просто число. $\Delta \neq 0$ если $\theta^+ \neq 0$ или $\mu^+ \neq 0$ (здесь мы не обсуждаем специальный случай решения Перегринна $\alpha = 0$). Т.к. $N = 0$, это означает, что в общем случае $\theta^+ \neq 0$ два бризера Ахмедиева с противоположными значениями α полностью аннигилируют друг с другом. Тогда одевающая функция χ является следующей матрицей:

$$\chi = \left(1 + \frac{2A \cos \alpha}{\lambda - A \cos \alpha} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (158)$$

Когда $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$ и $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$, числитель N и знаменатель Δ в (193) оба равны нулю. Мы обсудим этот случай отдельно.

Аннигиляция солитонов имеет место также и для общего случая $2N$ пар полюсов. Это можно показать строго математически. Теперь

$$R_{N+k} = R_k = 1, \quad \alpha_{N+k} = -\alpha_k. \quad (159)$$

Где $k = 1, \dots, N$. Рассмотрим систему (47):

$$\sum_m \frac{(\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_m^*)}{\lambda_n + \lambda_m^*} \mathbf{p}_m^* = \mathbf{q}_n. \quad (160)$$

Она может быть решена точно, если мы предположим, что все λ_n действительны. Их общее число равно $2N$ и

$$\lambda_{N+k} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (161)$$

Введем следующие переменные

$$X_n = p_{n,1}q_{n,1} + p_{N+n,1}q_{N+n,1}, \quad Y_n = p_{n,1}q_{n,2} + p_{N+n,1}q_{N+n,2}. \quad (162)$$

Мы удовлетворим системе (160) если $Y_n = 0$, а X_k подчиняются такой системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \frac{X_k}{\lambda_n + \lambda_k} = 1. \quad (163)$$

(163) имеет единственное решение если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при условии известных X_k . Если мы предположим что $S_n = q_{n,1}q_{N+n,2} - q_{n,2}q_{N+n,1} \neq 0$, то тогда

$$p_{n,1} = \frac{1}{q_{n,1}q_{N+n,2} - q_{n,2}q_{N+n,1}} \begin{vmatrix} X_n & q_{N+n,1} \\ 0 & q_{N+n,2} \end{vmatrix} = \frac{X_n q_{N+n,2}}{q_{n,1}q_{N+n,2} - q_{n,2}q_{N+n,1}},$$

$$p_{N+2,1} = \frac{1}{q_{n,1}q_{N+n,2} - q_{n,2}q_{N+n,1}} \begin{vmatrix} q_{n,1} & X_n \\ q_{n,2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{X_n}{S_n}. \quad (164)$$

Одевающая функция χ диагональна:

$$\chi = E \left(1 + \sum_k \frac{X_k}{\lambda - \lambda_k} \right). \quad (165)$$

Однако, условие $Y_n = 0$ эквивалентно попарной аннигиляции солитонов, что и требовалось доказать. Важно, что мы не конкретизировали форму векторов \mathbf{q}_n . Это означает, что аннигиляция солитонов может происходить не только на фоне конденсата, но и на фоне широкого класса других решений, в частности на фоне N -солитонных решений и на фоне бризера Перегринна, рассматриваемых в данной работе.

Глава 3. Суперрегулярные решения

3.1 Суперрегулярные двухсолитонные решения

Эта глава является центральной в нашей работе. Замечательный факт полной аннигиляции двух бризеров Ахмедиева с противоположными значениями параметра α , делает возможным построение специального и очень важного класса $2N$ -солитонных решений, описывающих эволюцию сколь угодно малых возмущений конденсата. Эти решения представляют собой подкласс регулярных решений. Мы называем их суперрегулярными солитонными решениями. Начнём со случая $N = 1$ и предположим, что R_1 и R_2 близки к единице:

$$R_1 \simeq 1 + \varepsilon, \quad R_2 \simeq 1 + a\varepsilon, \quad (166)$$

$\varepsilon > 0$, $a > 0$, $|\varepsilon| \ll 1$. Мы называем такие два полюса - суперрегулярной парой. (см. Рис. 21). Обозначим $\delta\varphi$ - отклонение решения от конденсата в момент

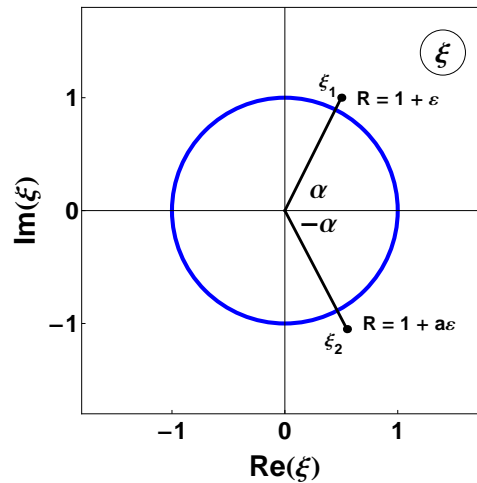


Рис. 21: Суперрегулярная пара полюсов, отвечающая малому возмущению конденсата.

столкновения солитонов:

$$\varphi = A + \delta\varphi. \quad (167)$$

Вновь проделаем промежуточные вычисления в переменных λ . $\delta\varphi$ дается следующим выражением:

$$\delta\varphi = -2 \frac{\delta N_\lambda}{\widetilde{\Delta}_\lambda}. \quad (168)$$

Где δN_λ - это отклонение числителя от нуля, в то время как $\tilde{\Delta}_\lambda$ - модифицированная версия знаменателя, в котором оставляем лишь главные члены. Для вычисления подобных "модифицированных" функций мы будем пренебрегать параметром ε , за исключением случая, когда ε входит в виде произведения εx (оно встречается в функциях ϕ_n). Т.к. значения x неограничены, то при $x > \varepsilon^{-1}$ подобный множитель уже не является малым. По этой причине мы и используем термин "модифицированной" функции, т.к. вообще говоря это уже не есть главный член разложения по ε . В свою очередь δN_λ окажется комбинацией разложения до первого порядка по ε и "модифицированных" векторов \tilde{q}_n (см. далее). Прежде всего, заметим что

$$\lambda_1 \approx A \cos \alpha + i\varepsilon A \sin \alpha, \quad (169)$$

$$\lambda_2 \approx A \cos \alpha - i\varepsilon A \sin \alpha, \quad (170)$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2^* &= 2A \cos \alpha + i(1+a)\varepsilon A \sin \alpha, \\ \lambda_1^* + \lambda_2 &= 2A \cos \alpha - i(1+a)\varepsilon A \sin \alpha. \end{aligned} \quad (171)$$

Тогда, разлагая числитель и знаменатель в ряд по ε , получим:

$$\begin{aligned} \delta N_\lambda &= \frac{i\varepsilon(1+a)\sin \alpha}{4A \cos^2 \alpha} ((\tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2^*)\tilde{q}_{11}^*\tilde{q}_{22} - (\tilde{\mathbf{q}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2)\tilde{q}_{21}^*\tilde{q}_{12}). \\ \tilde{\Delta}_\lambda &= \frac{|\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22} - \tilde{q}_{12}\tilde{q}_{21}|^2}{4A^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (172)$$

Где, модифицированные вектора $\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2$ вычисляются из общей формулы (138) с помощью замены, учитывающей малость ε :

$$\begin{aligned} k_1 &= -k_2 = k = A \sin \alpha, \\ \varkappa_1 &= \varepsilon A \cos \alpha = \varepsilon \zeta, \\ \varkappa_2 &= a\varepsilon A \cos \alpha = a\varepsilon \zeta. \end{aligned} \quad (173)$$

Здесь мы обозначили $\zeta = A \cos \alpha$. Здесь и далее в данном параграфе мы полагаем $\mu_1 = \mu_2 = 0$, что отвечает столкновению солитонов при $x = 0, t = 0$.

Тогда

$$\phi_1 = ikx + \varepsilon\zeta x - i\theta_1/2, \quad \phi_2 = -ikx + a\varepsilon\zeta x - i\theta_2/2. \quad (174)$$

В результате вектора $\tilde{\mathbf{q}}_1$ и $\tilde{\mathbf{q}}_2$ имеют следующие компоненты

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{11} &= \exp(-ikx - \varepsilon\zeta x + i\theta_1/2) + \exp(-i\alpha + ikx + \varepsilon\zeta x - i\theta_1/2), \\ \tilde{q}_{21} &= \exp(ikx - a\varepsilon\zeta x + i\theta_2/2) + \exp(i\alpha - ikx + a\varepsilon\zeta x - i\theta_2/2), \\ \tilde{q}_{12} &= \exp(-i\alpha - ikx - \varepsilon\zeta x + i\theta_1/2) + \exp(ikx + \varepsilon\zeta x - i\theta_1/2), \\ \tilde{q}_{22} &= \exp(i\alpha + ikx - a\varepsilon\zeta x + i\theta_2/2) + \exp(-ikx + a\varepsilon\zeta x - i\theta_2/2). \end{aligned} \quad (175)$$

Теперь мы можем полностью вычислить $\tilde{\Delta}$ полагая $\theta^+ \neq 0$

$$\tilde{\Delta}_\lambda = \frac{4 \sin^2 \alpha}{A^2 \cos^2 \alpha} \left(\cos^2 \frac{\theta^+}{2} \sinh^2(\varepsilon(1+a)\zeta x) + \sin^2 \frac{\theta^+}{2} \cosh^2(\varepsilon(1+a)\zeta x) \right). \quad (176)$$

Знаменатель является функцией медленно осциллирующей в пространстве. В свою очередь, произведения $\tilde{q}_{12}\tilde{q}_{22}$ и $\tilde{q}_{21}\tilde{q}_{11}^*$, входящие в числитель содержат как быстро так и медленно меняющиеся компоненты. Поэтому, мы представим $\delta\varphi$ как сумму двух указанных компонент:

$$\delta\varphi = \delta\varphi_{slow} + \delta\varphi_{fast}. \quad (177)$$

Где $\delta\varphi_{slow}$ - функция медленно меняющаяся в пространстве:

$$\delta\varphi_{slow} \approx \frac{\varepsilon A i (1+a) \sin \theta^+}{\cos^2 \frac{\theta^+}{2} \sinh^2(\varepsilon(1+a)\zeta x) + \sin^2 \frac{\theta^+}{2} \cosh^2(\varepsilon(1+a)\zeta x)}, \quad (178)$$

В то время как $\delta\varphi_{fast}$ - функция быстро осциллирующая в пространстве:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{fast} \approx & \left[-\varepsilon A (1+a) \sin \alpha (\sinh(2\varepsilon a \zeta x) \sin(2kx - \theta_1) + \right. \\ & \left. \sinh(2\varepsilon \zeta x) \sin(2kx + \theta_2)) + \right. \\ & \left. i \cos \alpha (\cosh(2\varepsilon a \zeta x) \sin(2kx - \theta_1) - \right. \\ & \left. \cosh(2\varepsilon \zeta x) \sin(2kx + \theta_2)) - i \sin \theta^+ \right] \div \\ & \left[\cos^2 \frac{\theta^+}{2} \sinh^2(\varepsilon(1+a)\zeta x) + \sin^2 \frac{\theta^+}{2} \cosh^2(\varepsilon(1+a)\zeta x) \right]. \end{aligned} \quad (179)$$

В симметричном случае $a = 1$, числитель и знаменатель δN_λ и $\tilde{\Delta}_\lambda$ принимают более простой вид:

$$\begin{aligned}\delta N_\lambda &= 2\varepsilon \sin \alpha \sinh(2\varepsilon\zeta x) \sin\left(2kx - \frac{\theta^-}{2}\right) \cos \frac{\theta^+}{2} \\ &- i \cos \alpha \cosh(2\varepsilon\zeta x) \cos\left(2kx - \frac{\theta^-}{2}\right) \sin \frac{\theta^+}{2} - i \sin \theta^+ \\ \tilde{\Delta}_\lambda &= \cos^2 \frac{\theta^+}{2} \sinh^2(2\varepsilon\zeta x) + \sin^2 \frac{\theta^+}{2} \cosh^2(2\varepsilon\zeta x).\end{aligned}\quad (180)$$

А наиболее простой случай, удобный для анализа, возникает, когда не только $a = 1$, но еще $\theta^+ = \pi$:

$$\delta\varphi \approx 4i\varepsilon A \frac{\cos \alpha \cos\left(2kx - \frac{\theta^-}{2}\right)}{\cosh(2\varepsilon\zeta x)}.\quad (181)$$

Эти возмущения вначале растут экспоненциально, что описывается хорошо известными уравнениями для линейной стадии модуляционной неустойчивости (см. инкремент МН (67)). Это также видно из разложения $\delta\varphi$ при малых временах. Напишем лишь простейшее из них, соответствующее случаю (181).

$$\delta\varphi \approx 2i\varepsilon A \frac{(\exp(i\alpha - 2\gamma t) + \exp(-i\alpha + 2\gamma t)) \cos\left(2kx - \frac{\theta^-}{2}\right)}{\cosh(2\varepsilon\zeta x)}.\quad (182)$$

Здесь $\gamma = -\frac{A^2}{2} \sin 2\alpha$, а разложение справедливо вплоть до времен $\exp(\gamma t) \lesssim \varepsilon^{-1}$.

Найденное двухсолитонное решение описывает следующий физический процесс. Малое локализованное начальное возмущение конденсата порождает пару квази-Ахмедиевских бризеров, распространяющихся в противоположных направлениях и как правило имеющих большую групповую скорость. В симметричном случае $a = 1$ эти бризеры одинаковы и решение симметрично. Типичные примеры развития суперрегулярных солитонных решений представлены на Рис. 22 и Рис. 23, а примеры начальных возмущений на Рис. 23. Как видно из Рис. 22, после разбегания бризеров, на месте возмущения остается

конденсат с другой фазой (отличие от фазы на бесконечности составляет 4α). Двухсолитонное суперрегулярное решение описывается с помощью пяти параметров $\alpha, \varepsilon, a, \theta^+, \theta^-$, а также может быть сдвинуто по x и t . Таким образом, полное число свободных параметров равно семи. Заметим, что возникающие

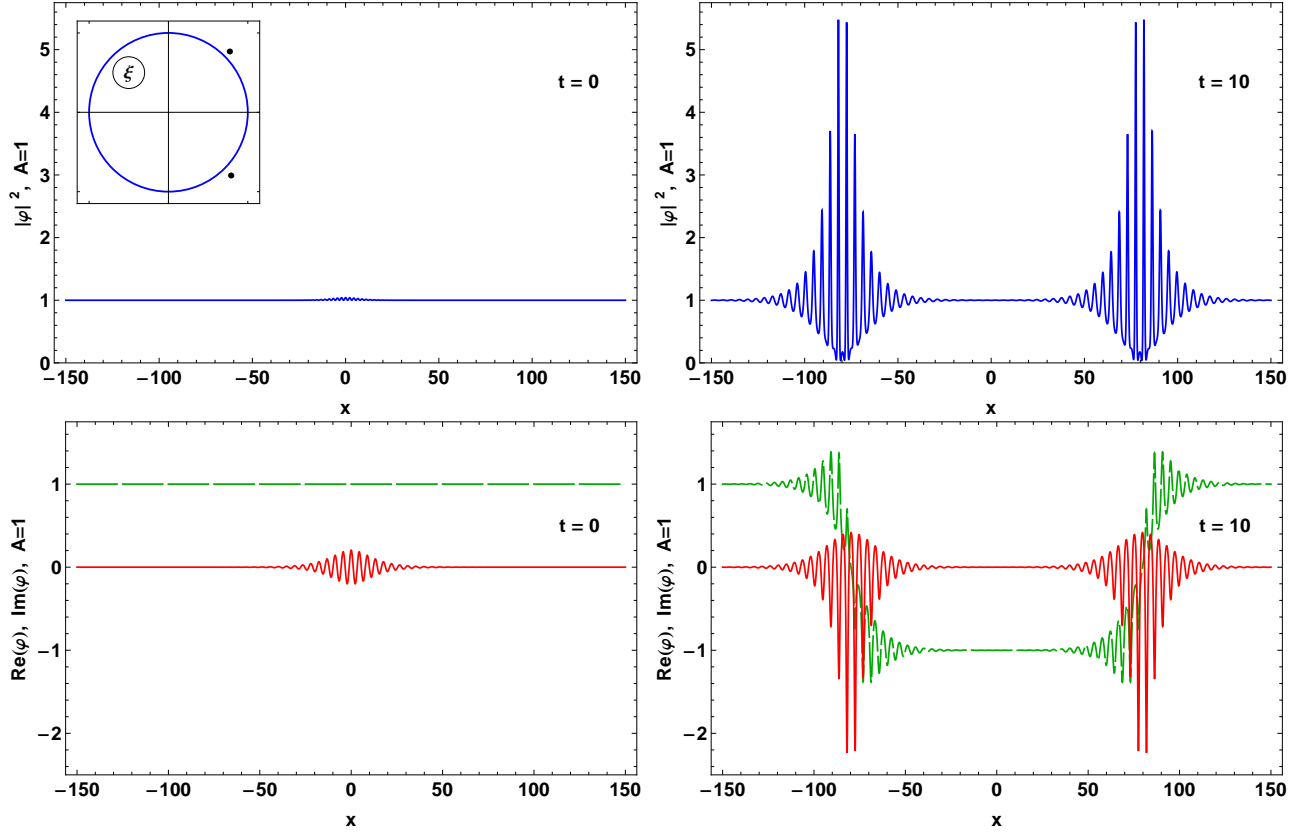


Рис. 22: Суперрегулярное двухсолитонное решение φ с параметрами: $R_1 = R_2 = 1.075$, $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = -\pi/4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. Квадрат модуля решения φ (верхние рисунки, синие сплошные линии), действительная (нижние рисунки, зеленые штрихованные линии) и мнимая (нижние рисунки, красные короткие штрихованные линии) части решения φ в моменты времени $t = 0$ (рисунки слева) и $t = 10$ (рисунки справа).

бризеры имеют небольшое число осцилляций, если параметр α выбран вблизи нуля. Рис. 34 демонстрирует пример такой ситуации. Далее мы продемонстрируем, что эти результаты могут быть существенно обобщены. Мы построим $2N$ -солитонное суперрегулярное решение, представляющее в начальный момент времени малое локализованное возмущение конденсата.

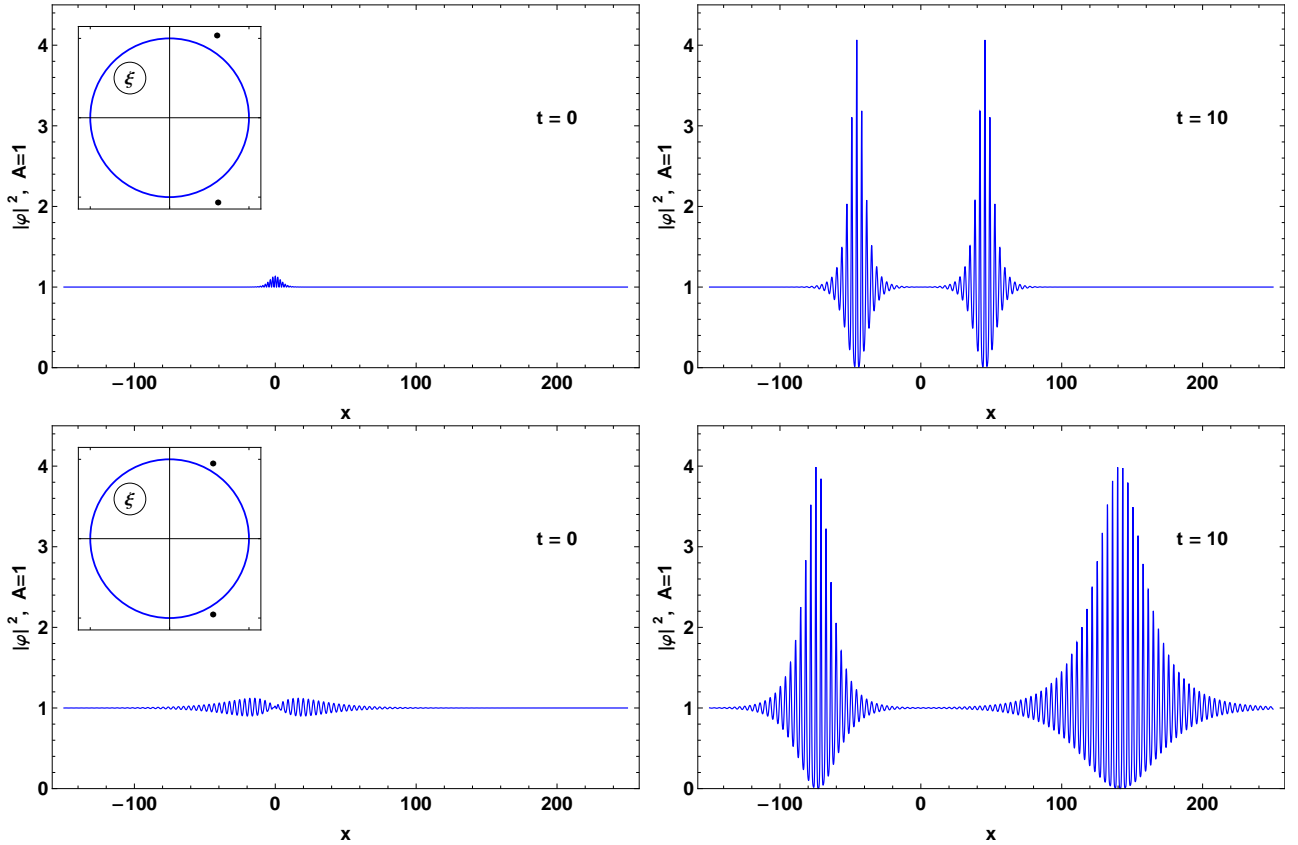


Рис. 23: Суперрегулярные двухсолитонные решения с параметрами: $R_1 = R_2 = 1.2$, $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = -\pi/3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ (верхние рисунки) и $R_1 = 1.1$, $R_2 = 1.05$, $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = -\pi/3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ (нижние рисунки). Квадрат модуля решения φ в моменты времени $t = 0$ (рисунки слева) и $t = 10$ (рисунки справа).

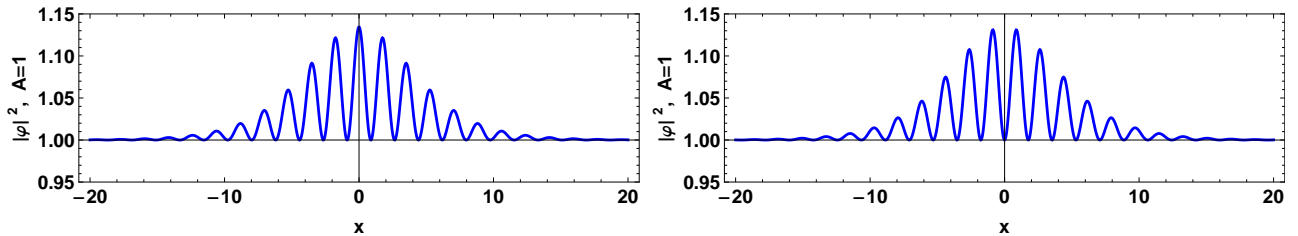


Рис. 24: Возмущения конденсата, соответствующие двухсолитонным суперрегулярным решениям в начальный момент времени $t = 0$. Рисунок слева соответствует верхнему решению Рис. 23, а рисунок справа - тому же самому, но с другими константами C_1, C_2 :

$$\mu_1 = 0, \theta_1 = 0, \mu_2 = 0, \theta_2 = \pi.$$

3.2 Вырожденные решения

Начнём параграф с обсуждения вырожденного случая на разрезе при $\theta^+ = 0$, упомянутого ранее. Тогда числитель и знаменатель двухсолитонного решения равны нулю. Эта неопределённость (второго порядка) может быть

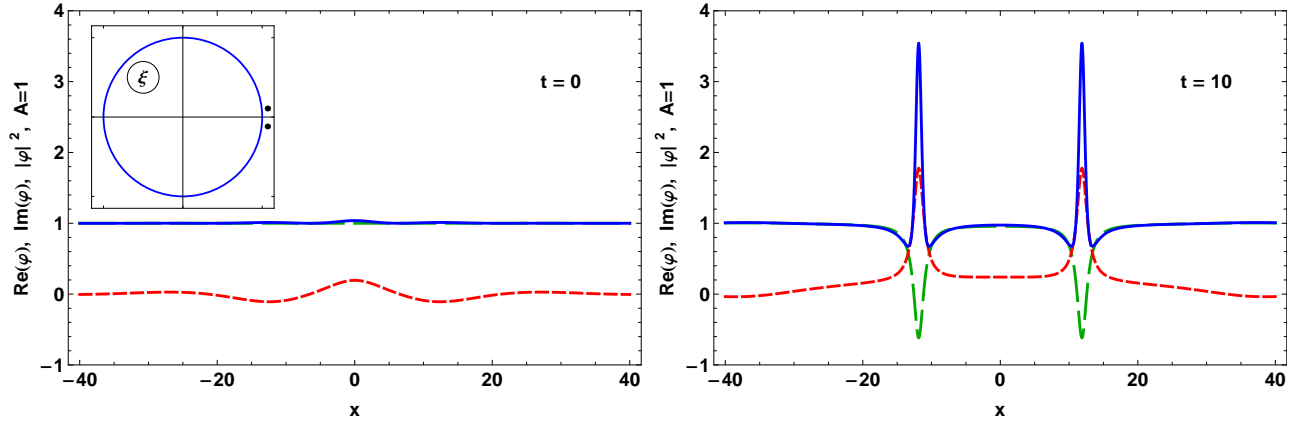


Рис. 25: Суперрегулярное двухсолитонное решение φ с малой величиной параметра α в моменты времени $t = 0$ (слева) и $t = 10$ (справа). Параметры: $R_1 = R_2 = 1.05$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = -0.1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. Зеленые штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

разрешена по правилу Лопиталя. Выберем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $R_{1,2} = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$, $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$ в выражении (133). Затем, разложим числитель и знаменатель в ряд по ε до второго порядка. Удобно использовать явные формулы (86,129,130) для квадратичных функций вектора \mathbf{q}_n и его компонент. Если, для простоты, положить $\theta = 0$, $\mu = 0$, то получится вырожденное решение следующего вида.

$$\varphi = A - 2A \sin 2\alpha \frac{M - iK}{H}. \quad (183)$$

Где

$$\begin{aligned} M &= \sin \alpha (\cosh 2\gamma t + \cos \alpha \cos 2kx) (\cos \alpha \cosh 2\gamma t + \cos 2kx) + \\ &\quad \cos \alpha \sin \alpha \sinh 2\gamma t (\sinh 2\gamma t - 2\Omega t \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 2kx) + \\ &\quad \cos \alpha \sin \alpha \sin 2kx (2\zeta x \sin \alpha \cosh 2\gamma t + \sin 2kx), \\ K &= \sin^2 \alpha \sinh 2\gamma t (\cosh 2\gamma t + \cos \alpha \cos 2kx) - \\ &\quad \cos \alpha (\sinh 2\gamma t - 2\Omega t \sin \alpha \cos 2kx) (\cos \alpha \cosh 2\gamma t + \cos 2kx) - \\ &\quad 2 \cos \alpha \sin \alpha \sin 2kx (\zeta x \cos \alpha \sinh 2\gamma t - \Omega t \sin 2kx), \end{aligned} \quad (184)$$

$$H = \cos^2 \alpha [(2\zeta x \sin \alpha + \sin 2kx \cosh 2\gamma t)^2 + (\cos 2kx \sinh 2\gamma t - 2\Omega t \sin \alpha)^2] + \sin^2 \alpha (\cosh 2\gamma t + \cos \alpha \cos 2kx)^2. \quad (185)$$

$$\begin{aligned} k &= A \sin \alpha, & \gamma &= -\frac{A^2}{2} \sin 2\alpha, \\ \zeta &= A \cos \alpha, & \Omega &= A^2 \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (186)$$

Решение представляет собой комбинацию гиперболических, тригонометрических и полиномиальных функций. Пример представлен на Рис. 26. Второй

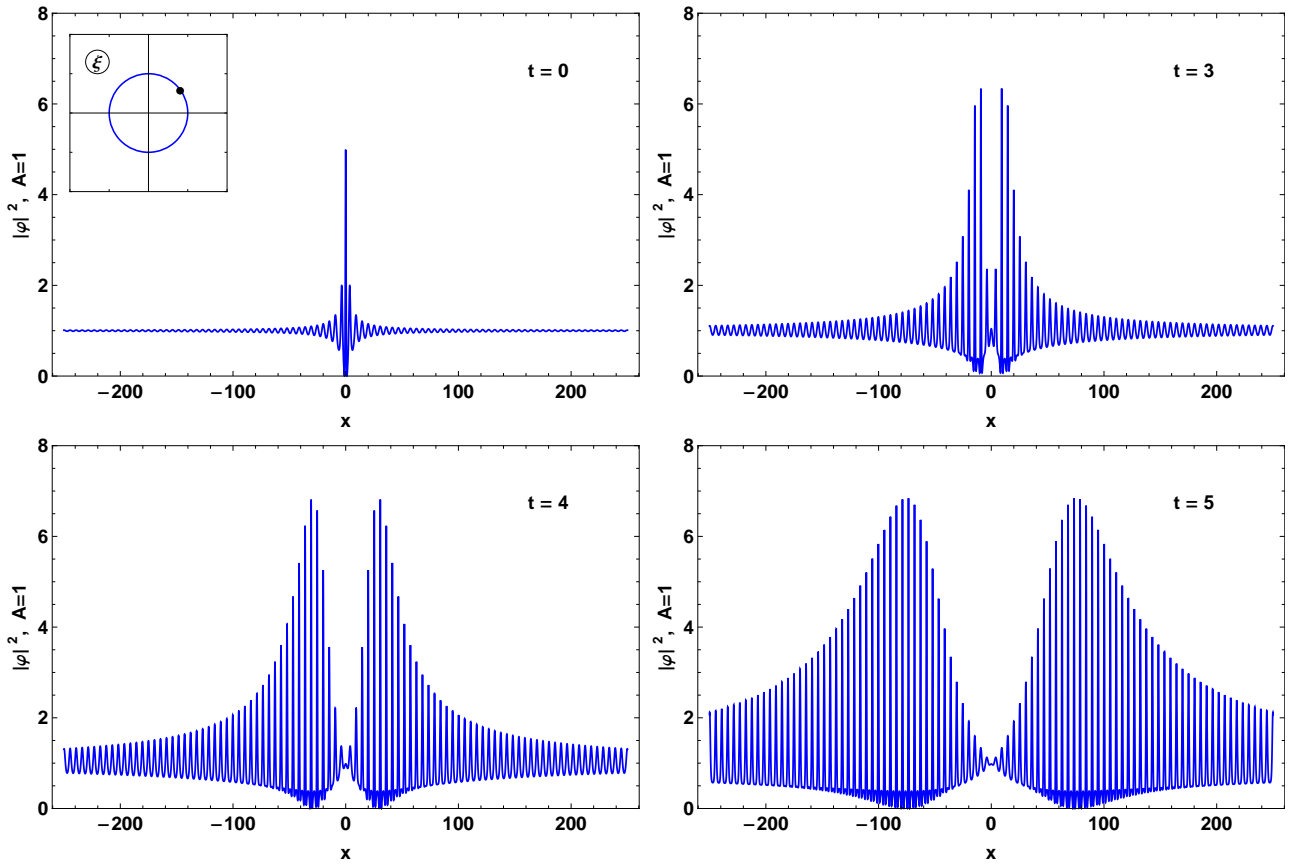


Рис. 26: Вырожденное двухсолитонное решение. Квадрат модуля решения φ в разные моменты времени. Полюс расположен на разрезе: $R = 1$, $\alpha_1 = \pi/5$, $\mu = 0$, $\theta = 0$.

вопрос, который необходимо обсудить, заключается в следующем. Числитель обращается в ноль не только, когда координаты полюсов комплексно сопряжены и расположены на разрезе, но также, когда они совпадают в произвольной точке $\lambda_1 = \lambda_2$. Действительно, в этом случае

$$R_1 = R_2 = R, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (187)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = A \cosh z \cos \alpha + iA \sinh z \sin \alpha. \quad (188)$$

Тогда

$$N_\lambda = \frac{|\mathbf{q}_1|^2 q_{21}^* q_{22} - (\mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}_2) q_{21}^* q_{12} - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^*) q_{11}^* q_{22} + |\mathbf{q}_2|^2 q_{11}^* q_{12}}{2A \cosh z \cos \alpha + 2iA \sinh z \sin \alpha} \equiv 0, \quad (189)$$

$$\Delta_\lambda = \frac{|q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21}|^2}{4A^2 \cosh^2 z \cos^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa &= A \sinh z \cos \alpha, & \omega_1 = \omega_2 = \omega &= \frac{A^2}{2} \sinh 2z \cos 2\alpha, \\ k_1 = k_2 = k &= A \cosh z \sin \alpha, & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma &= -\frac{A^2}{2} \cosh 2z \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (190)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \varkappa x - \gamma t + \mu_1/2, & u_2 &= \varkappa x - \gamma t + \mu_2/2, \\ v_1 &= kx - \omega t - \theta_1/2, & v_2 &= kx - \omega t - \theta_2/2. \end{aligned} \quad (191)$$

Вектора $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ вновь являются периодическими функциями от x и экспоненциальными функциями времени, но теперь

$$q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21} = -4 \sin \alpha \left(\cos \frac{\theta^-}{2} \sinh \frac{\mu^-}{2} - i \sin \frac{\theta^-}{2} \cosh \frac{\mu^-}{2} \right), \quad (192)$$

и

$$\Delta_\lambda = \frac{4 \sin^2 \alpha}{A^2 \cosh^2 z \cos^2 \alpha} \left(\cos^2 \frac{\theta^-}{2} \sinh^2 \frac{\mu^-}{2} + \sin^2 \frac{\theta^-}{2} \cosh^2 \frac{\mu^-}{2} \right). \quad (193)$$

Знаменатель Δ снова не зависит от x и t . Но теперь $\Delta \neq 0$ при $\theta^- \neq 0$ или $\mu^- \neq 0$. Таким образом, вырожденный случай возникает при $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Однако, как мы увидим далее, при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ аннигиляции солитонов не происходит и поэтому малые возмущения не возникают. Это можно объяснить тем, что малое возмущение не в состоянии изменить фазу при $x \rightarrow \pm\infty$, поэтому в произвольной точке ξ -плоскости они возникать не могут. Но как в таком случае происходит предельный переход к невозмущённому конденсату в указанном пределе $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$?

Начнём со случая, когда оба полюса расположены на единичной окружности, т.е. мы имеем дело с двойным бризером Ахмедиева. Такое решение периодически в пространстве. Оказывается, что в интересующем нас пределе, а

именно, когда $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ возникают биения на разностной частоте. Их амплитуда стремится к постоянной величине, а вот расстояние между ними L обратно пропорционально величине разности $\alpha_1 - \alpha_2$. В то же время решение между двумя биениями стремится невозмущенному конденсату - см. Рис. 27. Таким образом, предел невозмущенного конденсата достигается разбеганием биений на бесконечность при $L \rightarrow \infty$ и малые возмущения не возникают.

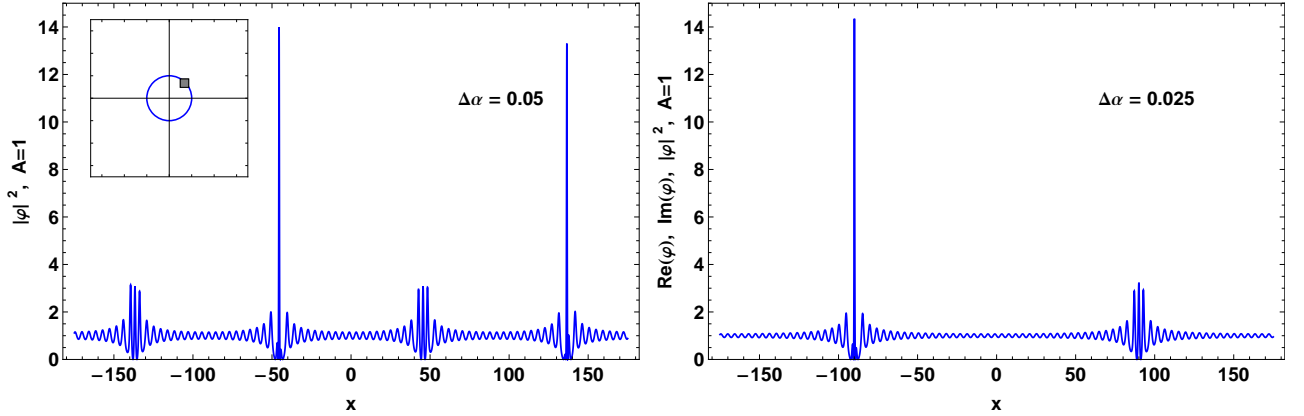


Рис. 27: Квадрат модуля двухсолитонного решения φ в момент времени $t = 0$. Полоса расположены на единичной окружности близко друг к другу (область расположения полюсов отмечена серым квадратом). Разность $\alpha_1 - \alpha_2$ равна 0.05 (слева) и 0.025 (справа). Полный набор параметров: $R_1 = R_2 = 1$, $\alpha_1 = 3\pi/4 + 0.05$ (слева), $\alpha_1 = 3\pi/4 + 0.025$ (справа), $\alpha_2 = 3\pi/4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = -\pi/2$.

Рассмотрим случай, когда полюса не лежат на единичной окружности. Значения координат двух полюсов близки, поэтому солитоны движутся в одном направлении. Если мы положим $\mu_1 = \mu_2 = 0$, они будут сталкиваться при $x = 0$, $t = 0$. Но расстояние на котором происходит это взаимодействие вообще говоря может быть ненулевым. В самом деле, на Рис. 28 представлены солитоны в момент столкновения. Видно, что характерное расстояние на котором происходит взаимодействие находится в обратной пропорции с логарифмом разности координат полюсов. Это означает, что в данном случае предел невозмущенного конденсата достигается с помощью бесконечного роста расстояния между солитонами.

Для того, чтобы получить вырожденное решение в общем случае необ-

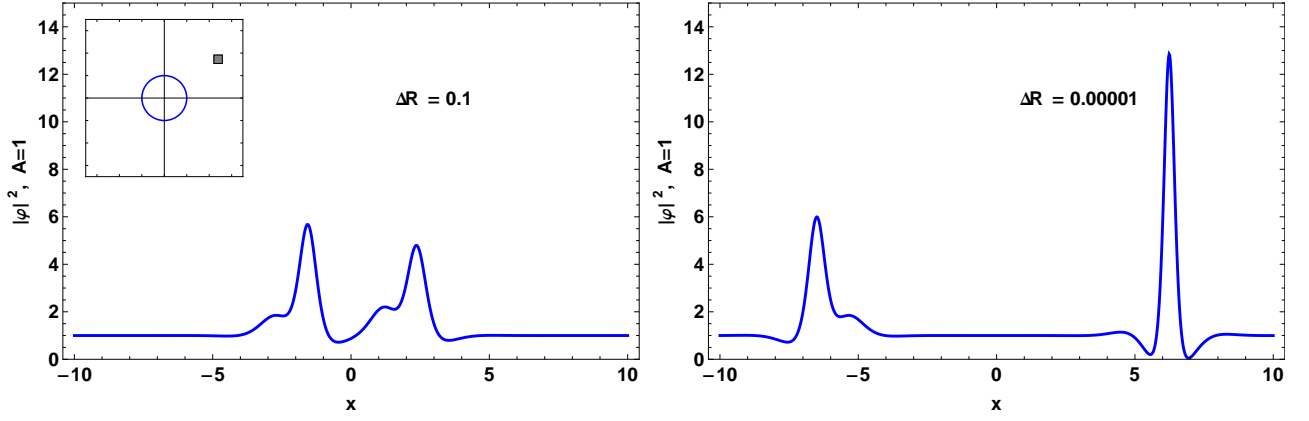


Рис. 28: Квадрат модуля двухсолитонного решения φ в момент времени $t = 0$. Полуса расположены в некоторой произвольно выбранной точке близко друг к другу (область расположения полюсов отмечена серым квадратом). Расстояние между координатами полюсов 0.1 (слева) и 0.00001 (справа). Полный набор параметров: $R_1 = 2.9$ (слева), $R_1 = 2.99999$ (справа), $R_2 = 3$, $\alpha_1 = \pi/5$, $\alpha_2 = \pi/5$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 0$.

ходимо положить $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. И затем применить правило Лопиталья к общему двухсолитонному решению (126) в котором возникает неопределённость второго порядка. Результат - два солитона которые движутся и осциллируют во времени. В определённый момент они сталкиваются. Расстояние между ними меняется логарифмически со временем. Это вновь комбинация гиперболических, тригонометрических и полиномиальных функций. Явное выражение для решения выглядит весьма громоздко, поэтому мы не будем его выписывать, ограничившись иллюстрацией на Рис. 29.

Когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (связанное состояние) ситуация схожа с предыдущей: при $R_1 \rightarrow R_2$ расстояние между солитонами в момент столкновения логарифмически растёт. Вырожденное решение можно записать в следующем явном виде:

$$\varphi = A - 2A \sinh 2z \frac{M - iK}{H}. \quad (194)$$

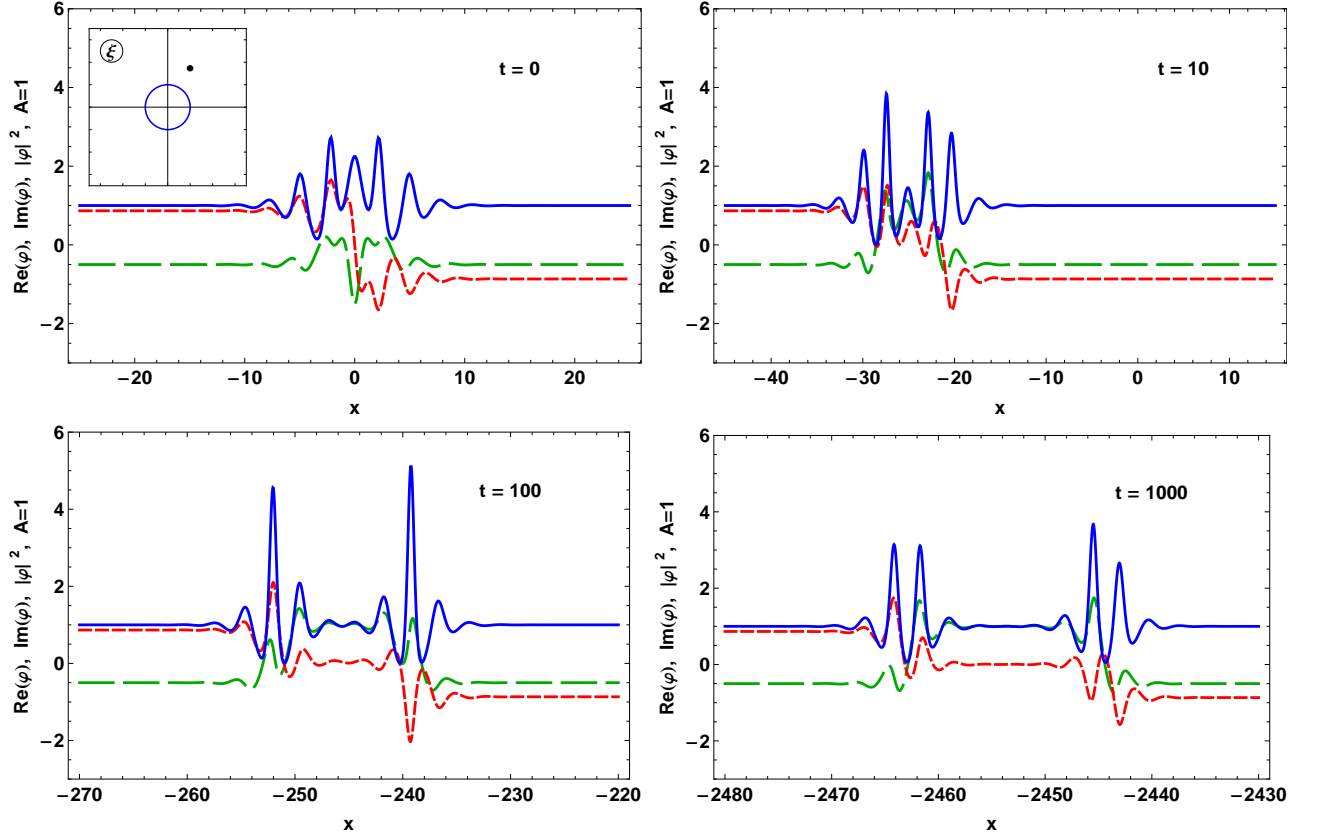


Рис. 29: Квадрат модуля двухсолитонного решения φ в моменты времени $t = 0, 10, 100, 1000$. Параметры: $R = 2, \alpha = \pi/3, \mu = 0, \theta = 0$. Зелёные штрихованные линии - действительная часть φ , красные короткие штрихованные линии - мнимая часть φ , синие непрерывные линии - φ по модулю в квадрате.

Где

$$\begin{aligned}
M &= \sinh z (\cosh 2\alpha x + \cosh z \cos 2\omega t) (\cos 2\omega t + \cosh z \cosh 2\alpha x) - \\
&\quad \sinh z \cosh z \sinh 2\alpha x \cos 2\omega t (\cos 2\omega t \sinh 2\alpha x + 2\zeta x \sinh z) - \\
&\quad \sinh z \cosh z \cosh 2\alpha x \sin 2\omega t (\sin 2\omega t \cosh 2\alpha x + 2\Omega t \sinh z), \\
K &= \sinh^2 z \sin 2\omega t (\cos 2\omega t + \cosh z \cosh 2\alpha x) - \\
&\quad \cosh^2 z \sinh 2\alpha x \sin 2\omega t (\cos 2\omega t \sinh 2\alpha x + 2\zeta x \sinh z) + \\
&\quad \cosh z (\cosh 2\alpha x \cos 2\omega t \cosh z + 1) (\sin 2\omega t \cosh 2\alpha x + 2\Omega t \sinh z), \\
H &= \cosh^2 z [(\cos 2\omega t \sinh 2\alpha x + 2\zeta x \sinh z)^2 + \\
&\quad (\sin 2\omega t \cosh 2\alpha x + 2\Omega t \sinh z)^2] + \\
&\quad \sinh^2 z (\cos 2\omega t + \cosh z \cosh 2\alpha x)^2 \quad (195)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{æ} &= A \sinh z, & \omega &= \frac{A^2}{2} \sinh 2z, \\
\zeta &= A \cosh z, & \Omega &= A^2 \cosh 2z.
\end{aligned}
\tag{196}$$

Это два солитона, расстояние между которыми логарифмически меняется со временем. Пример приведен на Рис. 30. Заметим, что для частного случая нулевого фона этот результат хорошо известен и был упомянут ещё в самой первой работе В.Е. Захарова и А.Б. Шабата по фокусирующему НУШ [21].

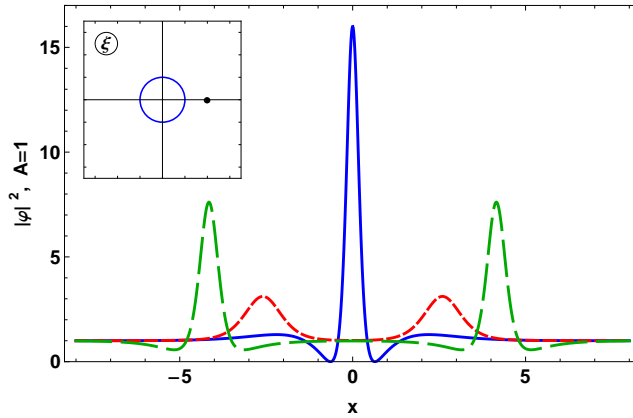


Рис. 30: Вырожденное двухсолитонное решение. Квадрат модуля решения φ в моменты времени $t = 0$ (синие сплошные линии), 10 (красные короткие штрихованные линии) и 100 (зеленые штрихованные линии). Полюс расположен на действительной оси: $R = 2$, $\alpha = 0$, $\mu = 0$, $\theta = 0$.

В заключении параграфа обсудим случай вырожденных суперрегулярных солитонных решений. В самом деле, можно построить решение из суперрегулярной пары вырожденных полюсов ($\alpha_3 = \alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_4 = \alpha_2 = -\alpha$) как предел $R_3 \rightarrow R_1$ и $R_4 \rightarrow R_2$, ($\mu_3, \theta_3 = \mu_1, \theta_1$, $\mu_4, \theta_4 = \mu_2, \theta_2$, вновь $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$). В результате получим малое локализованное возмущение, которое развивается в четыре квази-Ахмедиевских бризера, которые, в общем случае, движутся с большой групповой скоростью (она определяется величиной α и расстоянием от полюсов до разреза, см. §3.1). Но расстояние между двумя соседними бризерами растёт только логарифмически со временем. Это ожидаемый результат данного параграфа, который, тем не менее нелегко показать аналитически, т.к. способ вычисления вырожденных решений применяемый нами (устранение неопре-

делённости по Лопиталю) приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям. Мы полагаем, что можно разработать модификацию метода одевания, позволяющую написать общую формулу для вырожденного N - солитонного решения. На сколько нам известно, эта задача пока что не решена. Для того, чтобы продемонстрировать правильность нашего вывода о поведении вырожденного суперрегулярного решения мы устранили неопределённость по Лопиталю с помощью программы написанной в "Wolfram Mathematica". Рис. 31 полностью подтверждает наше предположение. Нет никаких сомнений, что вырожденное суперрегулярное солитонное решение с одной парой вырожденных полюсов может быть обобщено на случай N -пар (см. следующий §), но это исследование выходит за рамки данной работы.

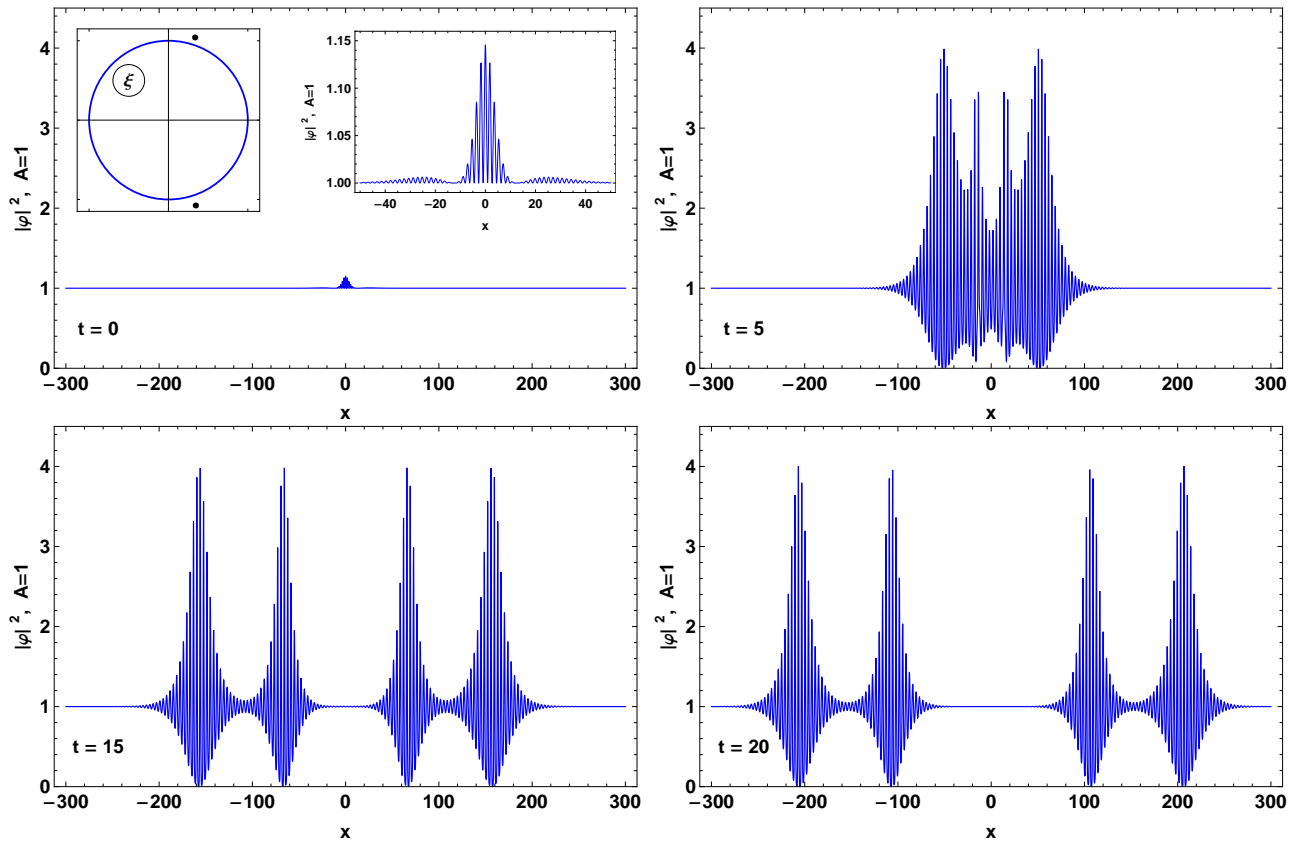


Рис. 31: Вырожденное четырехсолитонное суперрегулярное решение. Квадрат модуля решения φ в разные моменты времени. Параметры: $R_1 = R_2 = 1.1$, $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = -\pi/3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$.

3.3 Суперрегулярные $2N$ -солитонные решения

В этом параграфе мы обсудим случай N суперрегулярных пар полюсов. Теперь

$$\alpha_n = -\alpha_{n+N}, \quad R_n = 1 + \varepsilon, \quad R_{n+N} = 1 + a_n \varepsilon. \quad (197)$$

Где $n = 1, \dots, N$ - число пар полюсов. Разложение по малому параметру общей формулы (50) задача довольно трудная. К счастью, схема метода одевания позволяет эту трудность обойти, т.к. мы можем, начиная с конденсата φ_0 последовательно "одевать" решение суперрегулярными парами. Этот прием уже был использован в §2.4.

Обозначим как φ_n , χ_n , Ψ_n решение, одевающую функцию и матрицу Ψ , которые отвечают решению с n суперрегулярными парами полюсов. $\varphi_0 = A$ и Ψ_0 (см. (75)), как обычно, отвечают конденсату. Тогда φ_n могут быть найдены с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\varphi_n = \varphi_{(n-1)} - 2\tilde{\chi}_{(n),12}. \quad (198)$$

Мы знаем как найти функцию χ_n , зная Ψ_n (см. §6). Поэтому основная задача - построить рекуррентное соотношение для функции Ψ_n . Предположим, что мы знаем решение φ_{n-1} и соответствующую матрицу Ψ_{n-1} , χ_{n-1} . Тогда Ψ_n может быть найдена с помощью (25) как $\Psi_n = \chi_n \Psi_{n-1}$ и в результате:

$$\Psi_n = \chi_n \chi_{n-1} \cdots \chi_1 \Psi_0 \quad (199)$$

из (41) напишем одевающую функцию:

$$\chi_{n,\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{p_{1,\mu} q_{1,\nu}}{\lambda - \lambda_n} + \frac{p_{2,\mu} q_{2,\nu}}{\lambda - \lambda_{n+N}} = \delta_{\mu\nu} + \frac{(\lambda - \cos \alpha_n)(p_{1,\mu} q_{1,\nu} + p_{2,\mu} q_{2,\nu}) - i\varepsilon \sin \alpha_n (p_{1,\mu} q_{1,\nu} - p_{2,\mu} q_{2,\nu})}{(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \lambda_{n+N})}. \quad (200)$$

Теперь \mathbf{q}_n и \mathbf{p}_n вектора намного более сложные, чем те что были получены для двухсолитонного решения на фоне конденсата, т.к. они являются результатом

одевания на $2(n - 1)$ солитонном фоне. χ_n можно представить в следующем виде:

$$\chi_n = \chi_n^{(0)} E + \chi_n^{(1)} + \chi_n^{(2)} + \cdots + \chi_n^{(n)} \quad (201)$$

Где $\chi_n^{(0)}$ это первый порядок разложения. Это результат одевания на фоне конденсата. $\chi_n^{(1)}$ пропорциональна ε , $\chi_n^{(2)}$ пропорциональна ε^2 и т.д. (результаты предыдущего одевания). $\chi_n^{(0)}$ может быть вычислена как предел $\varepsilon \rightarrow 0$ в(200):

$$\chi_n^{(0)} = \left(1 + \frac{2A \cos \alpha_n}{\lambda - A \cos \alpha_n} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (202)$$

Заметим, что это в точности формула (158) с $\alpha = \alpha_n$. $\chi_n^{(0)}$ удовлетворяет условию

$$\chi_n^{(0)*}(-\lambda^*) = \chi_n^{(-1)}(\lambda) \quad (203)$$

Теперь, если мы разложим (205) и удержим лишь члены первого порядка, мы получим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^n (\chi_n^{(0)} \cdots \chi_{k+1}^{(0)} \chi_k^{(1)} \chi_{k-1}^{(0)} \cdots \chi_1^{(0)}) \Psi_0 \quad (204)$$

Однако, в соответствии с (55), умножение одевающей матрицы на скалярный фактор, такой как $\chi_n^{(0)}$ не меняет результата одевания. Тогда, в первом порядке мы пишем (205) так:

$$\Psi_n = (E + \chi_n^{(1)} + \chi_{n-1}^{(1)} + \cdots + \chi_1^{(1)}) \Psi_0 \quad (205)$$

Это доказывает, что φ_n есть линейная сумма возмущений $\delta\varphi_m$ отвечающих m -й паре полюсов:

$$\varphi_n = A + \sum_{m=1}^N \delta\varphi_m. \quad (206)$$

При этом каждый φ_n вычисляется в первом порядке по формуле (177) со своими собственными параметрами.

Примеры развития малых локализованных возмущений конденсата для четырёх- и шестисолитонных решений приведены на Рис. 32 и Рис. 33. На Рис.

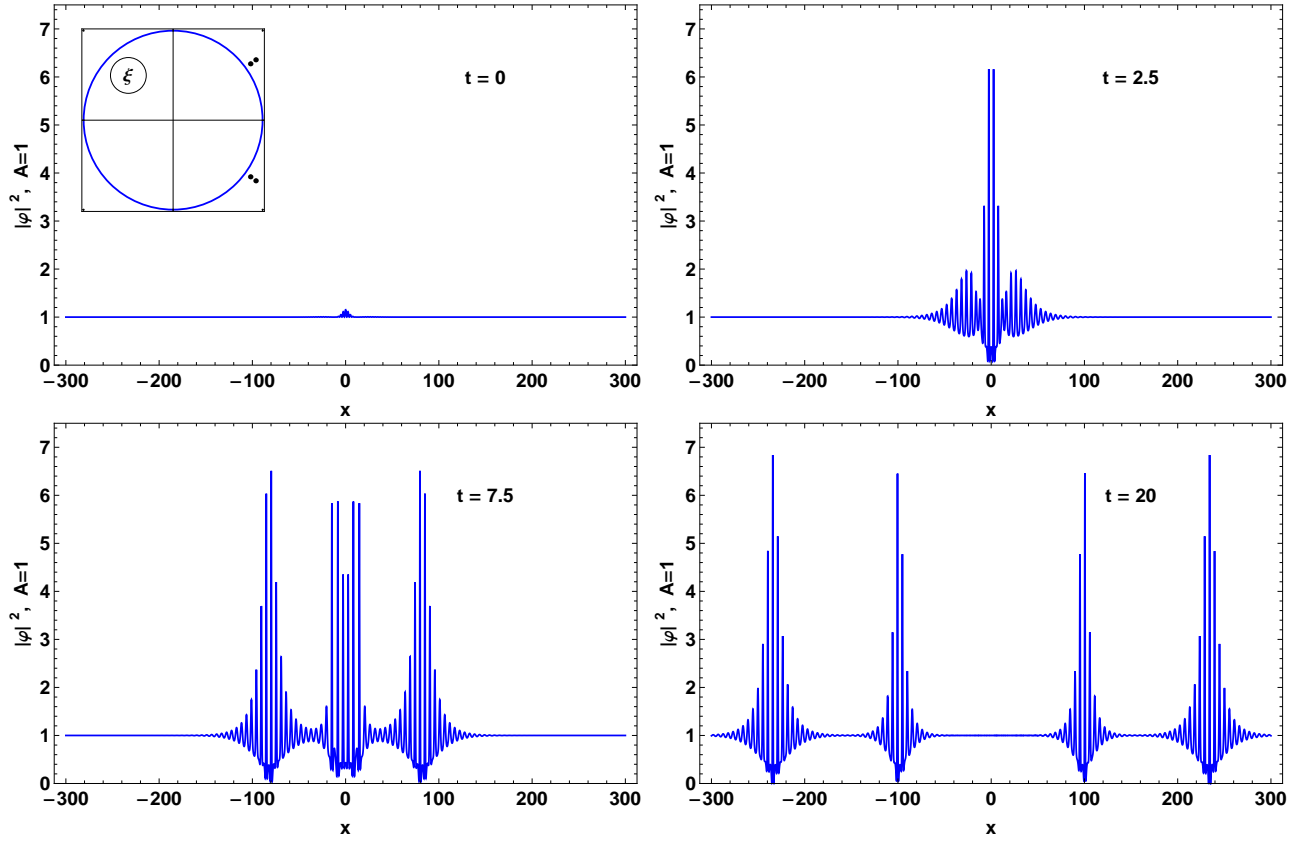


Рис. 32: Развитие четырехсолитонного суперрегулярного решения φ . Квадрат модуля φ в разные моменты времени. Параметры: $R_1 = 1.05$, $R_3 = 1.05$, $\alpha_1 = \pi/5$, $\alpha_3 = -\pi/5$, $\mu_1 = \mu_3 = 0$, $\theta_1 = \theta_3 = \pi/2$; $R_2 = 1.075$, $R_4 = 1.075$, $\alpha_2 = \pi/5$, $\alpha_4 = -\pi/5$, $\mu_2 = \mu_4 = 0$, $\theta_2 = \theta_4 = \pi/2$.

34. приведены соответствующие возмущения в момент времени $t = 0$. Заметим, что на Рис. 32 суперрегулярные пары имеют одинаковый параметр α .

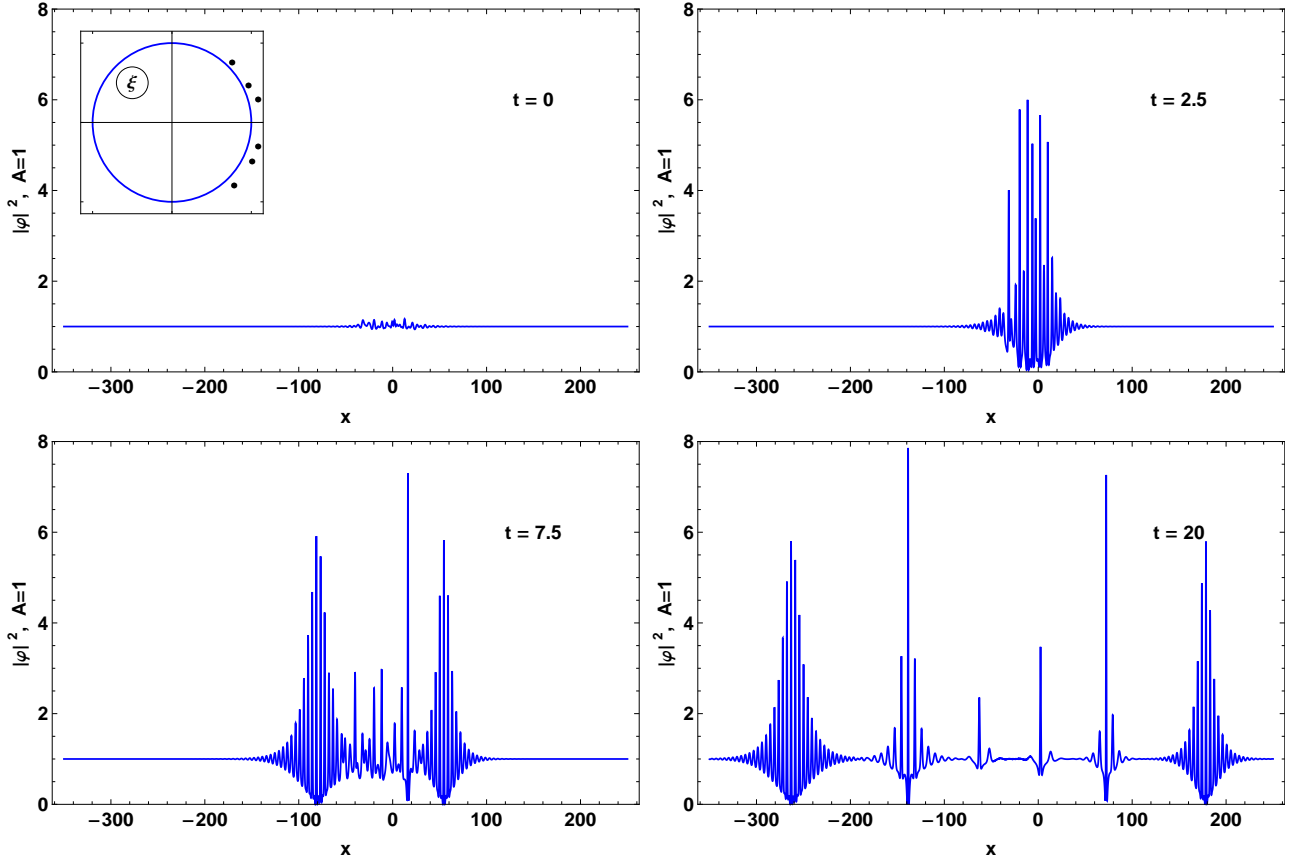


Рис. 33: Развитие шести-солитонного суперрегулярного решения φ . Квадрат модуля φ в разные моменты времени. Параметры: $R_1 = 1.05$, $R_4 = 1.075$, $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_4 = -\pi/4$, $\mu_1 = \mu_4 = 0$, $\theta_1 = \theta_4 = \pi/2$; $R_2 = 1.05$, $R_5 = 1.1$, $\alpha_2 = \pi/7$, $\alpha_5 = -\pi/7$, $\mu_1 = \mu_5 = 0$, $\theta_1 = \theta_5 = \pi/2$; $R_3 = 1.1$, $R_6 = 1.1$, $\alpha_3 = \pi/12$, $\alpha_6 = -\pi/12$, $\mu_3 = \mu_6 = 5$, $\theta_3 = \theta_6 = \pi/2$

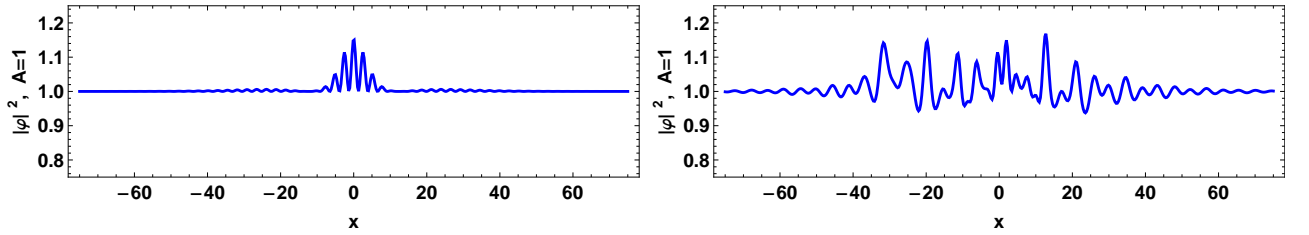


Рис. 34: Возмущения конденсата в момент времени $t = 0$ соответствующие случаям из Рис. 32 (слева) и из Рис. 33 (справа).

3.4 Возможность экспериментального наблюдения суперрегулярных решений

В этом параграфе мы обсудим возможность экспериментального наблюдения суперрегулярных решений в гидродинамике, а также представим первые результаты экспериментов с гравитационными волнами в бассейне, которые

отлично согласуются с теоретическими предсказаниями, полученными в диссертации.

Гравитационные волны на глубокой воде можно описывать с помощью НУШ впервые полученного В.Е. Захаровым [1] в 1968 г:

$$i\left(\frac{\partial a}{\partial t} + c_{gr}\frac{a}{\partial x}\right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\omega_0 k_0^2}{2}|a|^2 a = 0 \quad (207)$$

Где $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$ - закон дисперсии для гравитационных волн в линейной теории (ср. с (7)). $c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} = \frac{\omega_0}{2k_0}$ - групповая скорость. Величина, которую мы измеряем в эксперименте - это высота поверхности жидкости $\eta(x, t)$, которая даётся выражением (см. [1]):

$$\eta(x, t) = Re\{a(x, t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]\} \quad (208)$$

Переход от НУШ в нашей параметризации (16) к (207) осуществляется следующим преобразованием:

$$t \rightarrow \frac{\omega_0}{4k_0^2}t, \quad x \rightarrow x - c_{gr}t, \quad (209)$$

и затем

$$\varphi \rightarrow \sqrt{2}k_0^2 a \exp(iA^2 t). \quad (210)$$

Как было отмечено ранее, работы А. Чабчоуба и коллег убедительно показали возможность экспериментального воспроизведения решения Перегринна ([20], см. также [48]) Поэтому мы начали совместную с А. Чабчоубом работу по воспроизведению суперрегулярных решений в бассейне.

Одним из основных экспериментальных ограничений является длина бассейна - это 9.5 метров. Эксперимент построен так, что волна, которая дошла до конца бассейна записывается и затем вновь создаётся генератором волн в начале бассейна. Можно произвести около 3-4 подобных итераций, пока не начнут сказываться процессы диссипации. Таким образом, эффективная длина бассейна увеличивается до 30-40 метров. Тем не менее, ограничение на размер начального условия остаётся, поэтому амплитуда несущей волны a_0 выбирается

минимально возможной с тем, чтобы иметь возможность воспроизводить сложные начальные условия (т.е. иметь большую эффективную длину бассейна) и в тоже время быть уверенным что эксперимент проходит с гравитационными, а не капиллярными волнами. Т.е. требуется выполнение условия

$$gk > \frac{\sigma}{\rho} k^3 \quad (211)$$

Где σ и ρ есть поверхностное натяжение и плотность жидкости. Для воды условие (211) даёт для длины волны критерий $\lambda > 1.7$ см. В эксперименте параметры были следующими: амплитуда несущей волны $a_0 = 0.01$ м, длина волны $\lambda = 0.54$ м, что отвечает волновому числу $k_0 = 11.63$ м⁻¹ и угловой частоте $\omega_0 = 10.7$ сек⁻¹. В результате удалось воспроизвести суперрегулярное решение с малой величиной углового параметра. Как было отмечено в §3.1 чем меньше значение α , тем меньше осцилляций содержит решение и тем меньше его характерный размер. В тоже время, чем меньше расстояние от полюсов до разреза, тем характерный размер решения больше, но тем меньше амплитуда в начальный момент времени, т.е. тем больше решение годится на роль в описании развития неустойчивости из малого возмущения. В качестве некоторого компромисса нами были выбраны параметры $\alpha = 0.4$ и $R = 1.15$, которое представлено на Рис. 35. Заметим, что суперрегулярные решения не вполне

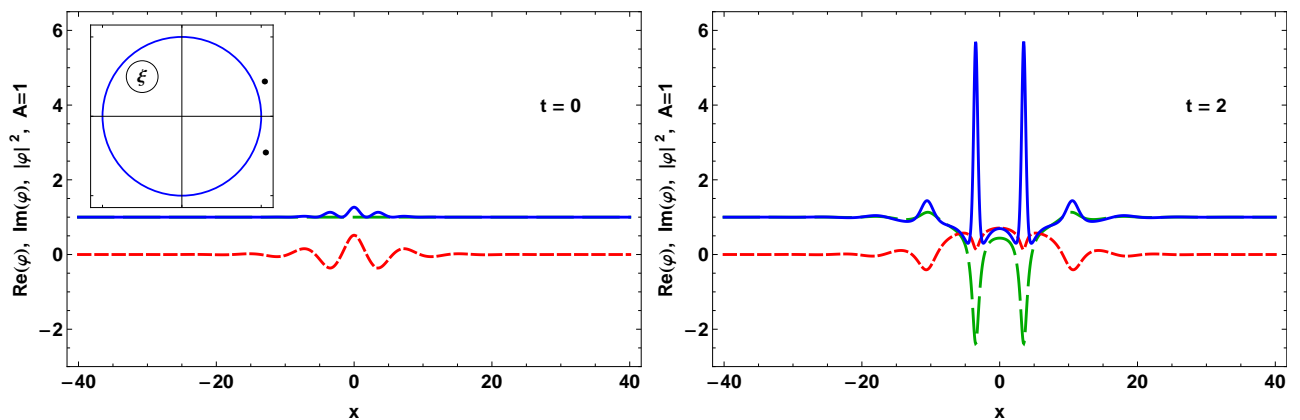


Рис. 35: Двухсолитонное суперрегулярное решение с параметрами, подобранными для эксперимента: $R_1 = 1.15$, $R_2 = 1.15$, $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = -0.4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$;

симметричны относительно замены $t \rightarrow -t$, хотя процесс и выглядит похожим

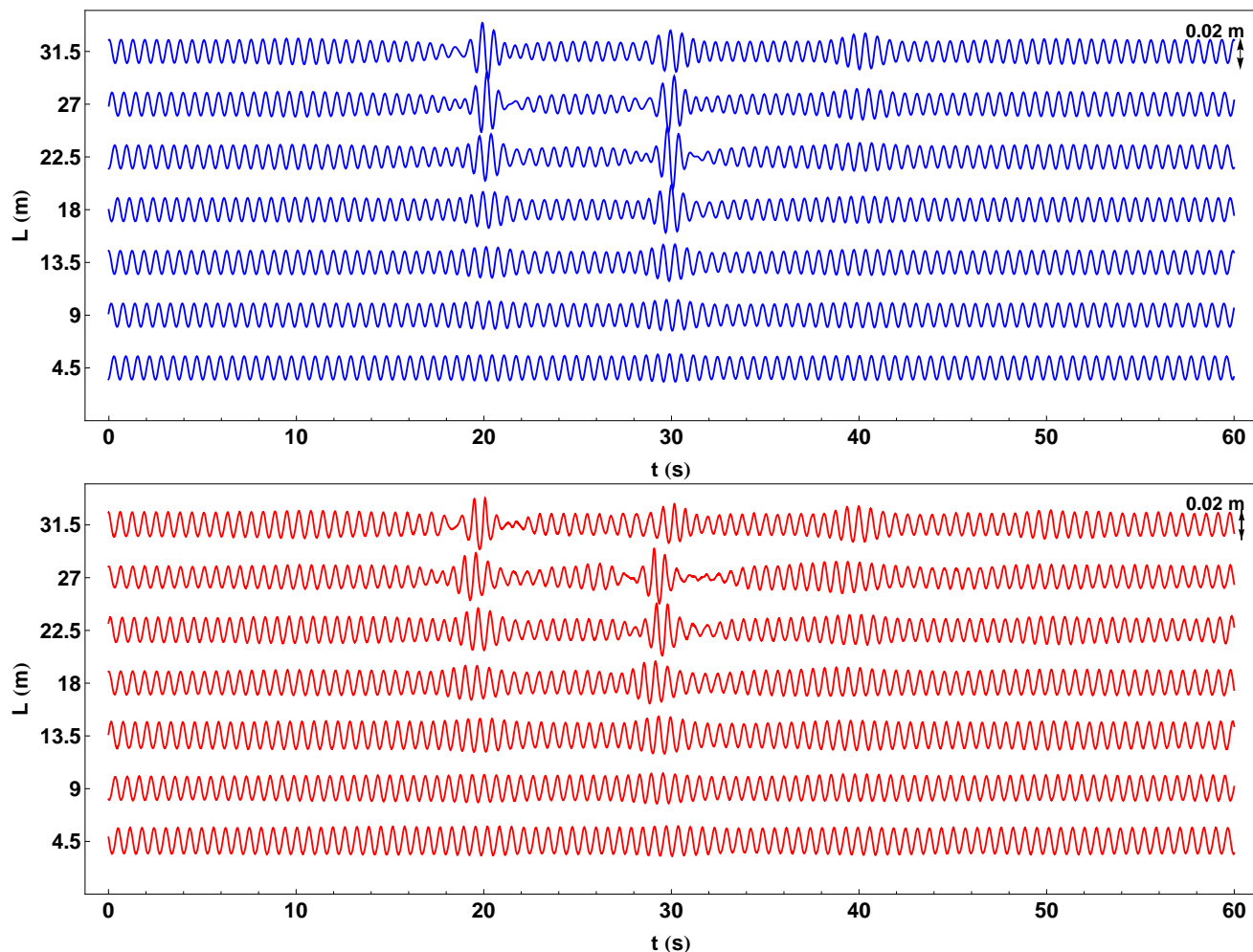


Рис. 36: Рост суперрегулярного возмущения. Высота поверхности жидкости. Сверху (синим) - теория, внизу (красным) - эксперимент. По оси абсцисс t - время в секундах, по оси ординат L - расстояние от генератора волн до соответствующего датчика в метрах. Датчики расположены каждые 4.5 метра вдоль бассейна.

образом. Особенно это важно для решений с малым угловым параметром. Так, например, в рассматриваемом нами случае, замена $t \rightarrow -t$ приводит к тому, что наблюдается вначале один максимум (который затем, разумеется, распадается на два солитона), вместо двух, как на Рис. 35. Последнее для эксперимента предпочтительнее, т.к. позволяет наблюдать формирование двух отдельных солитонов раньше. Также отметим, что при переходе к экспериментальным переменным (207) меняется фаза решения (см. 209 и 210), а также происходят масштабные преобразования координат, поэтому Рис. 35 служит лишь иллюстрацией.

В эксперименте отдельно изучался процесс роста малого возмущения и обратный процесс - аннигиляции квази-Ахмедиевских бризеров. Через каждые 4.5 метра устанавливались датчики, которые измеряли зависимость высоты поверхности воды от времени. На Рис. 36 и на Рис. 37 представлено сравнение наших теоретических предсказаний и результатов эксперимента. Каждый последующий график сдвинут на величину $4.5/c_{gr}$ (что соответствует времени которая волна бежит от одного датчика до следующего) так, что на рисунке все они начинаются в один момент времени. Как видно, эксперимент показал

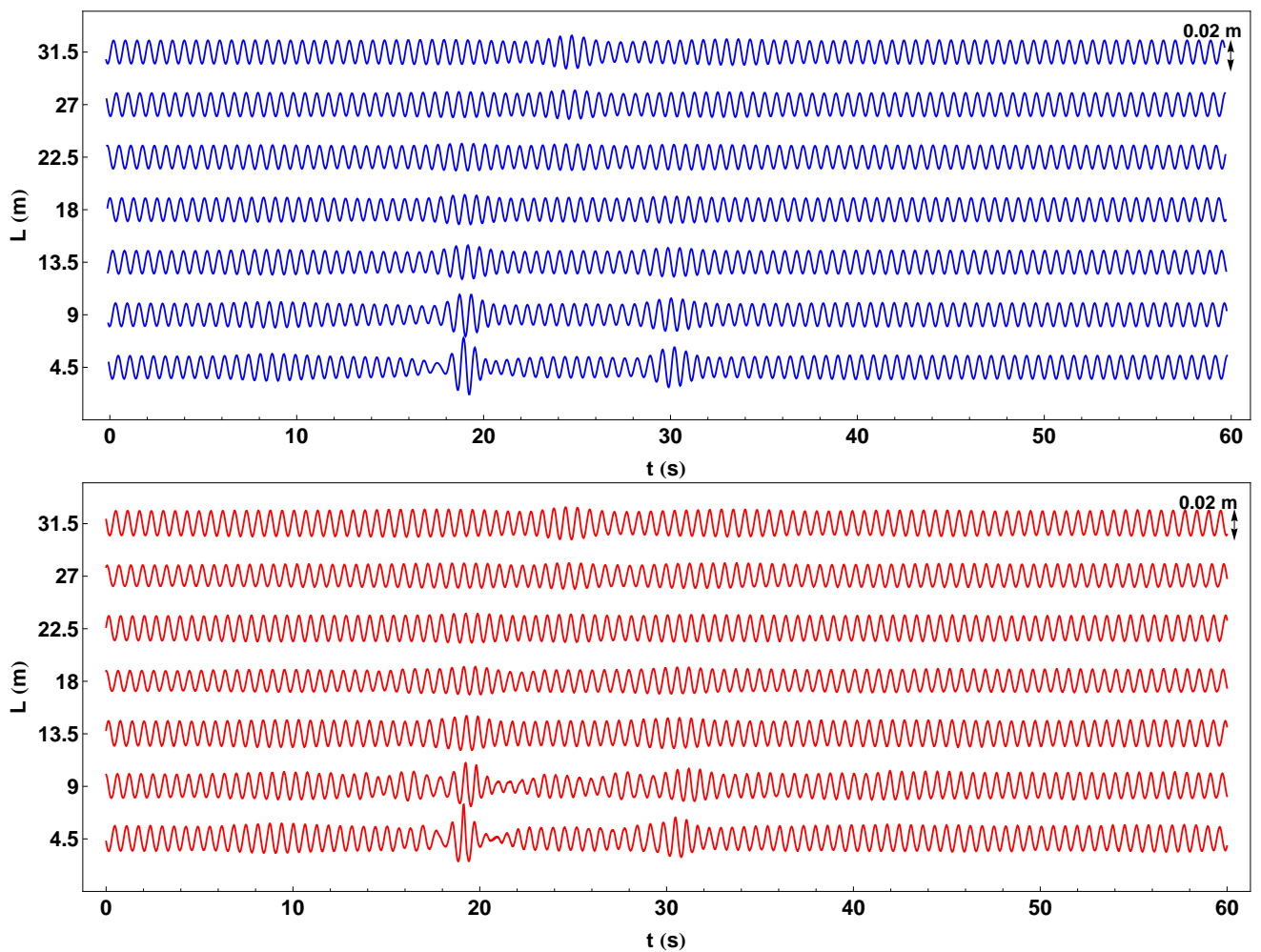


Рис. 37: Аннигиляция двух квази-Ахмедиевских бризеров. Высота поверхности жидкости. Сверху (синим) - теория, внизу (красным) - эксперимент. По оси абсцисс t - время в секундах, по оси ординат L - расстояние от генератора волн до соответствующего датчика в метрах.

Датчики расположены каждые 4.5 метра вдоль бассейна.

отличное согласие с теорией. Более детальное сравнение для результата роста

возмущения (последний датчик) представлено на Рис. 38. Накапливающееся отклонение фазы можно объяснить проявлением вклада высших нелинейностей в областях с высокой крутизной. Таким образом мы продемонстрирова-

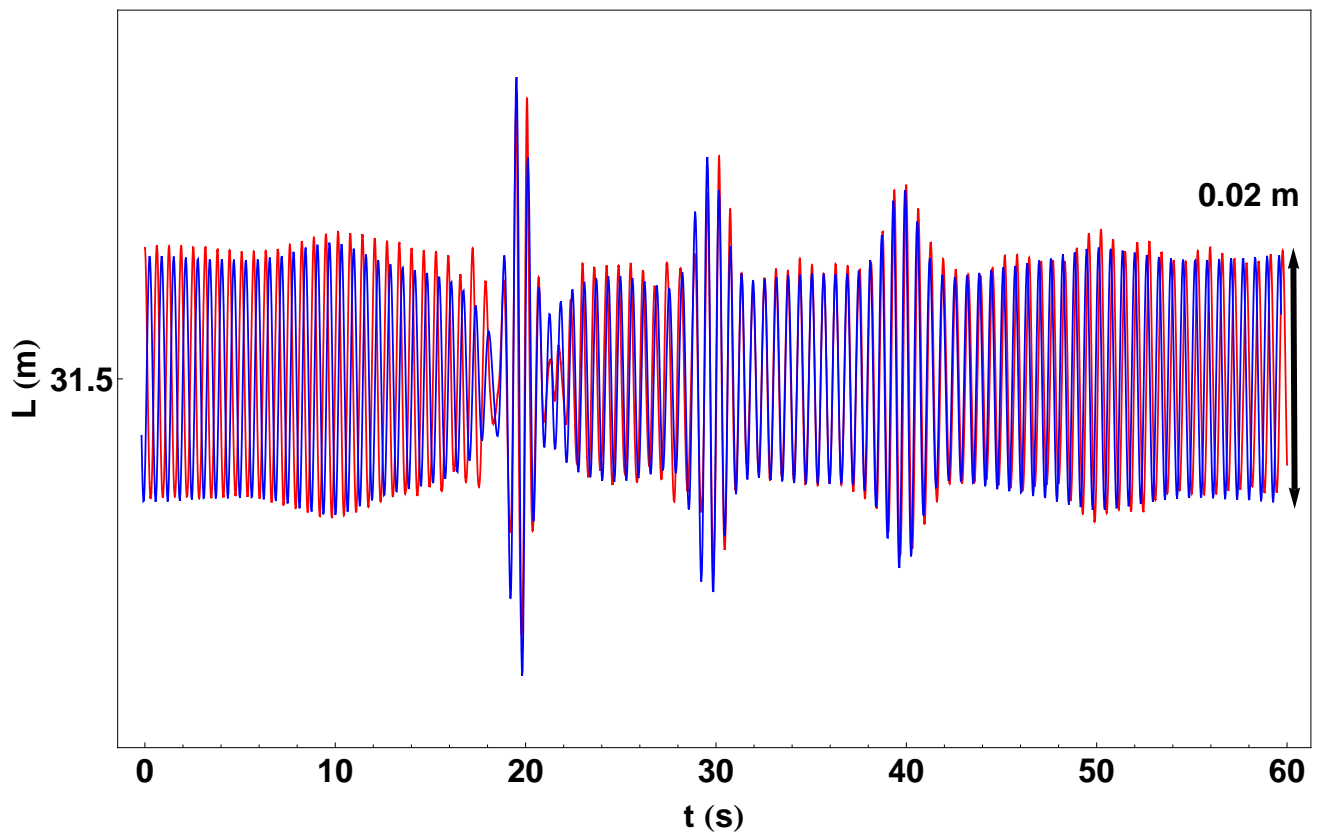


Рис. 38: Сравнение теории и эксперимента для конечной стадии роста суперрегулярных возмущений. (последний датчик, расположенный на расстоянии 31.5 метра от генератора волн). Высота поверхности жидкости.

ли возможность экспериментального наблюдения суперрегулярных решений в гидродинамике. Данная работа ещё не завершена, однако, предварительные результаты экспериментов убедительно подтверждают наши теоретические выводы. Мы надеемся, что в будущем удастся провести эксперименты в бассейнах большей длины, что позволит изучить более сложные решения с большей величиной параметра α . В заключении отметим, что подобные эксперименты, аналогично работам [18, 19], также можно произвести и в оптике.

Глава 4. Векторное нелинейное уравнение Шредингера на фоне конденсата

4.1 Метод одевания для векторного нелинейного уравнения Шредингера

Мы записываем ВНУШ в параметризации аналогичной той, что мы использовали для скалярного НУШ (16):

$$\begin{aligned} i\varphi_{1t} - \frac{1}{2}\varphi_{1xx} - (|\varphi_1|^2 - |a_1|^2 + |\varphi_2|^2 - |a_2|^2)\varphi_1 &= 0, \\ i\varphi_{2t} - \frac{1}{2}\varphi_{2xx} - (|\varphi_1|^2 - |a_1|^2 + |\varphi_2|^2 - |a_2|^2)\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (212)$$

И решаем задачу со следующими неубывающими граничными условиями $|\varphi_{1,2}| \rightarrow |a_{1,2}|$ при $|x| \rightarrow \infty$. Где a_1 и a_2 произвольные константы, которые мы вновь без потери общности полагаем действительными. В векторном случае наиболее отчётливо проявляется удобство нашей параметризации при вычислениях. Обозначим:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \quad (213)$$

Система уравнений (212) имеет Лаксову пару, впервые найденную С.В. Манаквым [51]. Мы же представим ВНУШ (212) как условие совместности для следующей переопределённой системы линейных уравнений на матричную функцию Ψ :

$$\Psi_x = \widehat{U}\Psi, \quad (214)$$

$$i\Psi_t = (\lambda\widehat{U} + \widehat{W})\Psi. \quad (215)$$

Где

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{I}\lambda + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ -\varphi_1^* & 0 & 0 \\ -\varphi_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 - a^2 & \varphi_{1x} & \varphi_{2x} \\ \varphi_{1x}^* & -|\varphi_1|^2 + a^2 & -\varphi_1^*\varphi_2 \\ \varphi_{2x}^* & -\varphi_1\varphi_2^* & -|\varphi_2|^2 + a^2 \end{pmatrix}, \quad (216)$$

и, в отличии от (19), теперь $\mathbf{I} = \text{diag}(1, -1, -1)$. Одевание уравнения (212) является непосредственным обобщением первой главы данной работы, поэтому опустим детали и сформулируем результат.

Обозначим известное начальное решение (212) как $\varphi_{01,2}$. Мы также полагаем, что знаем соответствующую матрицу $\Psi_0(x, t, \lambda)$ (теперь это матрица $3 \times 3!$). Выберем координаты N полюсов - λ_n ($n = 1, \dots, N.$) и N произвольных постоянных комплекснозначных векторов \mathbf{C}_n . Тогда вектора \mathbf{q}_n ($n = 1, 2, 3$), как и раньше (см. 44) определяются из соотношения

$$\mathbf{q}_n^* = \Psi_0(x, t, -\eta^*)\mathbf{C}_n \quad (217)$$

А новое решение уравнения (212) находится так:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{01} + 2\widetilde{M}_{12}/M. \\ \varphi_2 &= \varphi_{02} + 2\widetilde{M}_{13}/M. \end{aligned} \quad (218)$$

Где $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2$) являются следующими определителями

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & q_{1,\beta} & \cdots & q_{n,\beta} \\ q_{1,\alpha}^* & & & \\ \vdots & & M_{nm}^T & \\ q_{n,\alpha}^* & & & \end{vmatrix}. \quad (219)$$

Матрица M_{nm} как и раньше эрмитова:

$$M_{nm} = \frac{(\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_m^*)}{\lambda_n + \lambda_m^*}, \quad M = \det(M_{nm}). \quad (220)$$

Преобразование

$$\mathbf{q}_n \rightarrow a_n \mathbf{q}_n, \quad (221)$$

где \mathbf{a}_n - произвольные комплексные числа, не меняет результата одевания (218).

Поэтому, для векторов \mathbf{C}_n можно использовать следующую параметризацию:

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} C_{0n} \\ C_n^{-1/2} \\ C_n^{1/2} \end{pmatrix} \quad (222)$$

Где C_0 и C - произвольные комплексные константы. Таким образом, мы построили общее N -солитонное решение ВНУШ на произвольном фоне. Как мы увидим далее, в векторной модели на фоне конденсата N -солитонное решение может включать в себя более чем N локализованных объектов, тем не менее мы будем продолжать использовать термин N -солитонное решение, подразумевая под ним прежде всего число полюсов. Важно отметить, что когда одна из компонент вектора \mathbf{C}_n равна нулю: $\mathbf{C}_n = (0, C_n^{-1/2}, C_n^{1/2})$ или $\mathbf{C}_n = (C_{0n}, 0, C_n^{1/2})$, соответствующее n -е солитонное решение тем не менее нетривиально. В первом случае это решение есть векторный аналог решения φ скалярного НУШ (16) с такими же параметрами, которое может быть получено с помощью следующего преобразования:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &= a_1 \varphi(a^2 t, ax), \\ \varphi_2(x, t) &= a_2 \varphi(a^2 t, ax). \end{aligned} \quad (223)$$

Если мы положим две компоненты вектора \mathbf{C}_n равными нулю: $\mathbf{C}_n = (0, 0, C_n^{1/2})$, то в результате получим тривиальное решение - конденсат.

4.2 N -солитонное решение на фоне конденсата

Конденсатом теперь мы называем решение:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_1, \\ \varphi_2 &= a_2.\end{aligned}\tag{224}$$

Для (224) матрицу Ψ_0 можно найти в виде:

$$\Psi_0(x, t, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & e^\phi & se^{-\phi} \\ -\frac{a_2}{a}e^{-\phi_0} & \frac{a_1}{a}se^\phi & \frac{a_1}{a}e^{-\phi} \\ \frac{a_1}{a}e^{-\phi_0} & \frac{a_2}{a}se^\phi & \frac{a_2}{a}e^{-\phi} \end{pmatrix}\tag{225}$$

Где

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \lambda x - \frac{i}{2}(\lambda^2 + K^2)t, & \phi &= Kx + \Omega t, & K^2 &= \lambda^2 - a^2, \\ \Omega &= -i\lambda K, & s &= -\frac{a}{\lambda + k}\end{aligned}$$

Важные свойства:

$$\begin{aligned}K(\lambda) &= -K^*(-\lambda^*), & \phi_0(\lambda) &= -\phi_0^*(-\lambda^*), \\ \phi(\lambda) &= -\phi^*(-\lambda^*), & s(\lambda) &= -s^*(-\lambda^*).\end{aligned}\tag{226}$$

Тогда, искомые векторы \mathbf{q} такие:

$$\begin{aligned}q_{n0} &= e^{-\phi_n} - s_n C_n^* e^{\phi_n}, \\ q_{n1} &= \frac{1}{a}[-a_2 C_{0n}^* e^{\phi_{0n}} + a_1(-s_n e^{-\phi_n} + C_n^* e^{\phi_n})], \\ q_{n2} &= \frac{1}{a}[a_1 C_{0n}^* e^{\phi_{0n}} + a_2(-s_n e^{-\phi_n} + C_n^* e^{\phi_n})].\end{aligned}\tag{227}$$

Функция $K(\lambda)$ и, следовательно, $\Psi_0(x, t, \lambda)$ имеют разрез от $-a$ до a в λ -плоскости. Поэтому мы снова используем униформизацию:

$$\lambda = \frac{a}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right),\tag{228}$$

Матрица Ψ_0 как функция ξ записывается так:

$$\Psi_0(x, t, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & e^\phi & -\frac{1}{\xi}e^{-\phi} \\ -\frac{a_2}{a}e^{-\phi_0} & -\frac{a_1}{a\xi}e^\phi & \frac{a_1}{a}e^{-\phi} \\ \frac{a_1}{a}e^{-\phi_0} & -\frac{a_2}{a\xi}e^\phi & \frac{a_2}{a}e^{-\phi} \end{pmatrix}, \quad (229)$$

Где

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{a}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) x - \frac{ia^2}{4} \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) t, \\ \phi &= \frac{a}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) x - \frac{ia^2}{4} \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) t. \end{aligned} \quad (230)$$

Введем параметризацию для C_{0n} и C_n :

$$C_{0n} = e^{\mu_{0n} + i\theta_{0n}}, \quad C_{0n} = e^{\mu_n + i\theta_n}. \quad (231)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \phi_{0n} &= u_{0n} + iv_{0n}, \\ u_{0n} &= \varkappa_{0n}x - \gamma_{0n}t + \mu_{0n}/2, & v_{0n} &= k_{0n}x - \omega_{0n}t - \theta_{0n}/2, \\ \varkappa_{0n} &= a \cosh z_n \cos \alpha_n, & \gamma_{0n} &= -\frac{a^2}{2} \sinh 2z_n \sin 2\alpha_n, \\ k_{0n} &= a \sinh z_n \sin \alpha_n, & \omega_{0n} &= \frac{a^2}{2} \cosh 2z_n \cos 2\alpha_n, \end{aligned} \quad (232)$$

и

$$\begin{aligned} \phi_n &= u_n + iv_n, \\ u_n &= \varkappa_n x - \gamma_n t + \mu_n/2, & v_n &= k_n x - \omega_n t - \theta_n/2, \\ \varkappa_n &= a \sinh z_n \cos \alpha_n, & \gamma_n &= -\frac{a^2}{2} \cosh 2z_n \sin 2\alpha_n, \\ k_n &= a \cosh z_n \sin \alpha_n, & \omega_n &= \frac{a^2}{2} \sinh 2z_n \cos 2\alpha_n. \end{aligned} \quad (233)$$

Вектора \mathbf{q}_n такие:

$$\begin{aligned} q_{n0} &= e^{-\phi_n} + e^{-z_n - i\alpha_n} e^{\phi_n}, \\ q_{n1} &= \frac{1}{a} [-a_2 e^{\phi_{0n}} + a_1 (e^{-\phi_n} e^{-z_n - i\alpha_n} + e^{\phi_n})], \\ q_{n2} &= \frac{1}{a} [a_1 e^{\phi_{0n}} + a_2 (e^{-\phi_n} e^{-z_n - i\alpha_n} + e^{\phi_n})]. \end{aligned} \quad (234)$$

Это все что нам необходимо для построения N -солитонного решения ВНУШ (212) на фоне конденсата.

4.3 Односолитонное решение

Когда $N = 1$ и $\lambda = \eta$ мы получаем из общей формулы (218) следующее односолитонное решение:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_{10} - \frac{2(\eta + \eta^*)q_0^*q_1}{|q_0|^2 + |q_1|^2 + |q_2|^2}, \\ \varphi_2 &= \varphi_{20} - \frac{2(\eta + \eta^*)q_0^*q_2}{|q_0|^2 + |q_1|^2 + |q_2|^2}.\end{aligned}\quad (235)$$

Когда C_0 и C обе не равны нулю общее односолитонное решение (235) представляет наиболее разнообразное множество односолитонных решений. (235) может быть представлено в следующем явном виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_1 - 8 \cos \alpha \cosh z \frac{-a_2 N_1 + a_1 N_2}{\exp(2u_0 + z) + 4 \cosh 2u \cosh z + 4 \cos 2v \cos \alpha}, \\ \varphi_2 &= a_2 - 8 \cos \alpha \cosh z \frac{a_1 N_1 + a_2 N_2}{\exp(2u_0 + z) + 4 \cosh 2u \cosh z + 4 \cos 2v \cos \alpha}.\end{aligned}\quad (236)$$

Где

$$\begin{aligned}N_1 &= \exp(u_0 + z/2 + iv_0 + i\alpha/2)[\cos(v - \alpha/2) \cosh(u - z/2) - \\ &\quad i \sin(v - \alpha/2) \sinh(u - z/2)], \\ N_2 &= \cos \alpha \cosh 2u + i \sin \alpha \sinh 2u + \cos 2v \cosh z + i \sin 2v \sinh z,\end{aligned}\quad (237)$$

и

$$\begin{aligned}u_0 &= \varkappa_0 x - \gamma_0 t + \mu_0/2, & v_0 &= k_0 x - \omega_0 t - \theta_0/2, \\ \varkappa_0 &= a \cosh z \cos \alpha, & \gamma_0 &= -\frac{a^2}{2} \sinh 2z \sin 2\alpha, \\ k_{0n} &= a \sinh z \sin \alpha, & \omega_{0n} &= \frac{a^2}{2} \cosh 2z \cos 2\alpha, \\ u &= \varkappa x - \gamma t + \mu/2, & v &= kx - \omega t - \theta/2, \\ \varkappa &= a \sinh z \cos \alpha, & \gamma &= -\frac{a^2}{2} \cosh 2z \sin 2\alpha, \\ k &= a \cosh z \sin \alpha, & \omega &= \frac{a^2}{2} \sinh 2z \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (238)$$

В добавок к основным параметрам α и R , общее односолитонное решение (235) имеет дополнительные четыре параметра $\mu_0, \theta_0, \mu, \theta$. Они соответствуют сдвигам по времени и пространству, а также относительным сдвигам компонент решения. Для того, чтобы упростить дальнейший анализ мы полагаем

$$\mu_0 = 0, \quad \mu = 0. \quad (239)$$

При этом общее решение (236) можно восстановить с помощью сдвигов по x и t . Как и ранее мы полагаем $Re(\eta) > 0$.

Одно из важнейших отличий решения ВНУШ (236) от аналогично решения скалярного НУШ (105) заключается в том, что в знаменателе имеется член $\exp(2u_0 + z)$, а в числителе член N_1 . Т.к. мы рассматриваем только правую полуплоскость ξ , то $\exp(u_0) > \exp(u)$ при $x > 0$ и $\exp(u_0) < \exp(u)$ при $x < 0$, поэтому член $\exp(2u_0 + z)$ доминирует при $x \rightarrow +\infty$ и становится несущественным при $x \rightarrow -\infty$. Это означает, что на больших расстояниях при $x < 0$ решение (236) переходит в его скалярный аналог. В то время как при больших $x > 0$ поведение намного более любопытное. При $x \rightarrow \infty$ член $\exp(u_0)$ в знаменателе полностью уничтожает вторые слагаемые в решении (236) оставляя лишь невозмущённый конденсат. Легко видеть, что когда $R \neq 1$ (локализованное решение) асимптотики (236) следующие:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &\rightarrow a_{1,2} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty \\ \varphi_{1,2} &\rightarrow -a_{1,2} \exp(-2i\alpha) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (240)$$

В общем случае, решение (236) это солитон, движущийся из правого полупространства $x > 0$ и в точке $x = 0, t = 0$ разделяется на два солитона движущихся в противоположных направлениях.

Рассмотрим случай $R > 1, \alpha = 0$ - векторное обобщение солитона Кузнецова. Выражения (232) и (233) упрощаются до:

$$\begin{aligned} \varkappa_0 &= a \cosh z, & \gamma_0 &= 0, & k_0 &= 0, & \omega_0 &= \frac{a^2}{2} \cosh 2z. \\ \varkappa &= a \sinh z, & \gamma &= 0, & k &= 0, & \omega &= \frac{a^2}{2} \sinh 2z. \end{aligned} \quad (241)$$

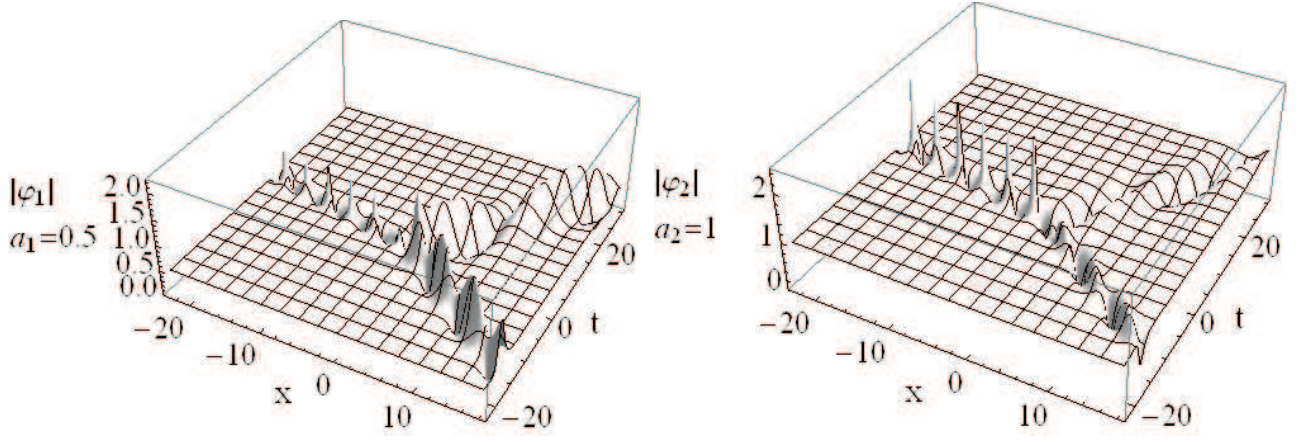


Рис. 39: Векторный аналог общего односолитонного решения. Квадрат модуля решения в зависимости от x и t . Параметры: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $R = 1$, $\alpha = \pi/4$, $\mu_0 = 0$, $\mu = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$.

и

$$u = \alpha x + \frac{\mu}{2}, \quad v = -\omega t - \frac{\theta}{2}, \quad u_0 = \alpha_0 x + \frac{\mu_0}{2}, \quad v_0 = -\omega_0 t - \frac{\theta}{2}, \quad (242)$$

В результате решение записывается в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 - 8 \cosh z \frac{-a_2 N_1 + a_1 N_2}{\exp(2\alpha_0 x + \frac{\mu}{2} + z) + 4 \cosh 2\alpha x \cosh z + 4 \cos 2\omega t}, \\ \varphi_2 &= a_2 - 8 \cosh z \frac{a_1 N_1 + a_2 N_2}{\exp(2\alpha_0 x + \frac{\mu}{2} + z) + 4 \cosh 2\alpha x \cosh z + 4 \cos 2\omega t}, \\ N_1 &= \exp(\alpha_0 x + z/2 - i\omega_0 t) [\cos \omega_0 t \cosh(\alpha x - z/2) + \\ &\quad i \sin \omega_0 t \sinh(\alpha x - z/2)], \\ N_2 &= \cosh 2\alpha x + \cos 2\omega t \cosh z - i \sin 2\omega t \sinh z. \end{aligned} \quad (243)$$

Поведение абсолютного значения решения (243) представлено на Рис. 41. Действительная и мнимые части решения на Рис. 42. Заметим, что асимптотики решения такие:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &\rightarrow a_{1,2} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty \\ \varphi_{1,2} &\rightarrow -a_{1,2} \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (244)$$

Т.е. в векторном случае солитон Кузнецова меняет фазу конденсата на π .

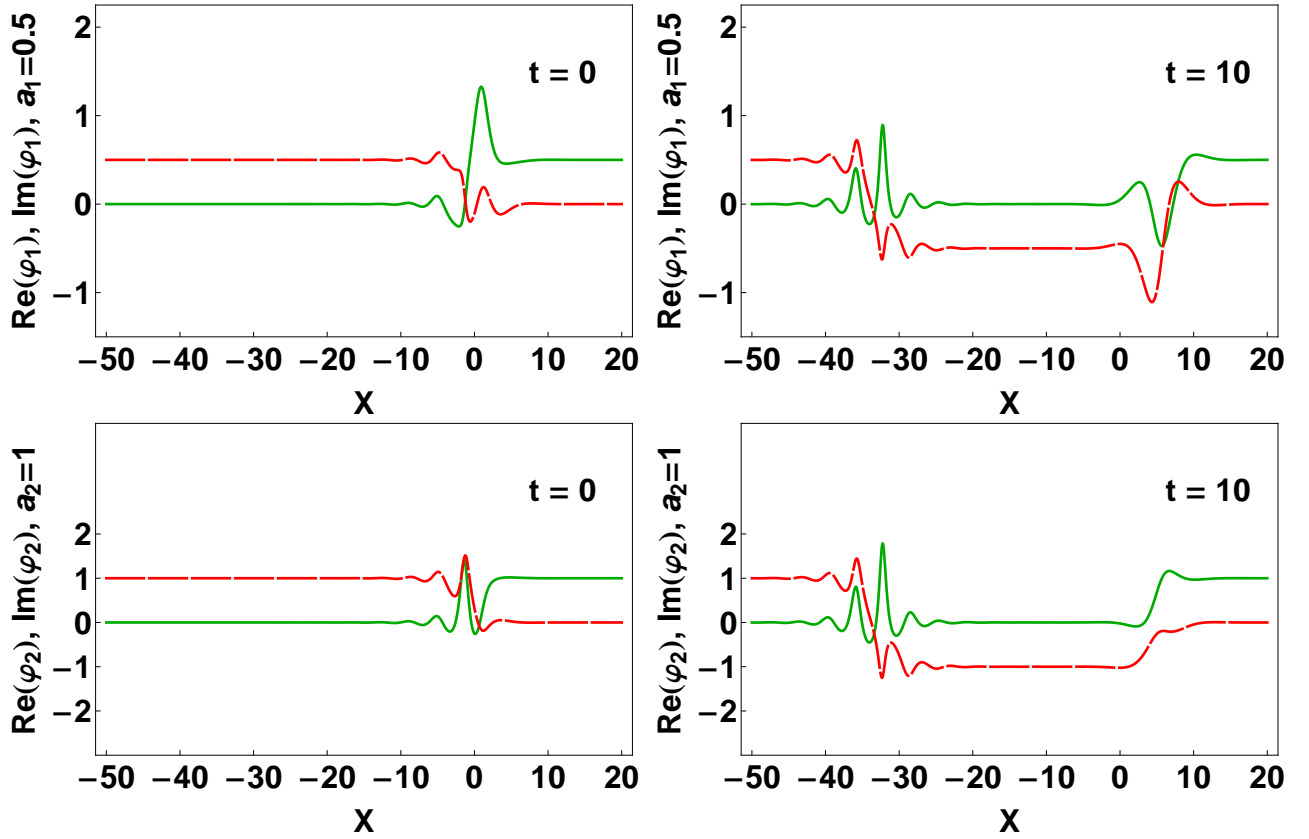


Рис. 40: Векторный аналог общего односолитонного решения. Действительная (зелёные непрерывные линии) и мнимая (красные штрихованные линии) части решения в разные моменты времени. Параметры: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $R = 1$, $\alpha = \pi/4$, $\mu_0 = 0$, $\mu = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$.

Когда $R = 1$ мы получим векторный аналог бризера Ахмедиева. По причинам, аналогичны тем, что описаны выше для общего случая решение периодически только при $x < 0$ и локализовано при $x > 0$. Мы опустим явное выражение в этом случае и приведем лишь рисунки, иллюстрирующие поведение решения - Рис. 43, Рис. 44

Общее односолитонное решение ВНУШ на фоне конденсата, которое мы получили в этом параграфе недавно было получено в работе [56]. Однако мы считаем, что использование униформизации и запись решения в виде (236) является наиболее удобной, что позволило нам качественно понять поведение решения.

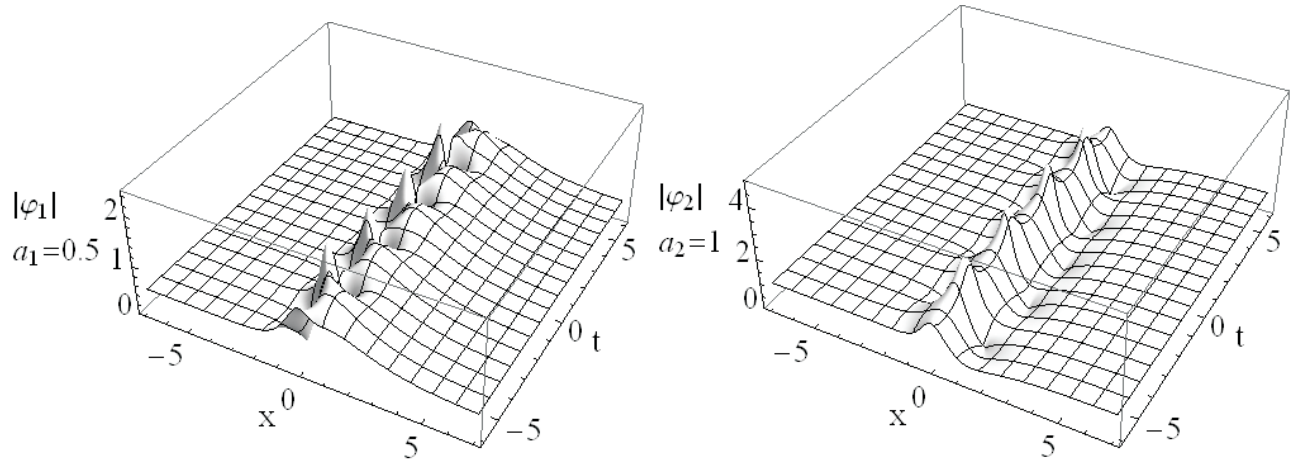


Рис. 41: Векторный аналог солитона Кузнецова. Квадрат модуля решения в зависимости от x и t . Параметры: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $R = 2$, $\alpha = 0$, $\mu_0 = 0$, $\mu = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$.

4.4 Возможность существования векторных аналогов суперрегулярных решений

Двухсолитонное решение (212) можно построить с помощью общей формулы (218). Отметим, что числитель этого выражения будет с точностью до индексов компонент векторов \mathbf{q} аналогичен числителю двухсолитонного решения в скалярном случае (125). Это широкий класс решений, изучение которого выходит за рамки данной работы. В самом деле, даже для случая нулевого фона существуют такие нетривиальные эффекты как неупругие столкновения солитонов [52]. Поэтому, мы остановимся лишь на вопросе о существовании векторных аналогов суперрегулярных решений. Как было установлено ранее, математическое объяснение возникновения двухсолитонных решений, которые являются малыми возмущениями в определённый момент времени, состоит в полной аннигиляции квази-Ахмедиевских бризеров. При этом числитель двухсолитонного решения тождественно обращается в ноль при $\xi_1 = e^{i\alpha}$, $\xi_2 = e^{-i\alpha}$, тогда как знаменатель остаётся конечным.

В векторном случае числитель двухсолитонного решения записывается так:

$$N = (q_{12}q_{21} - q_{22}q_{11})(q_{12}^*q_{20}^* - q_{22}^*q_{10}^*). \quad (245)$$

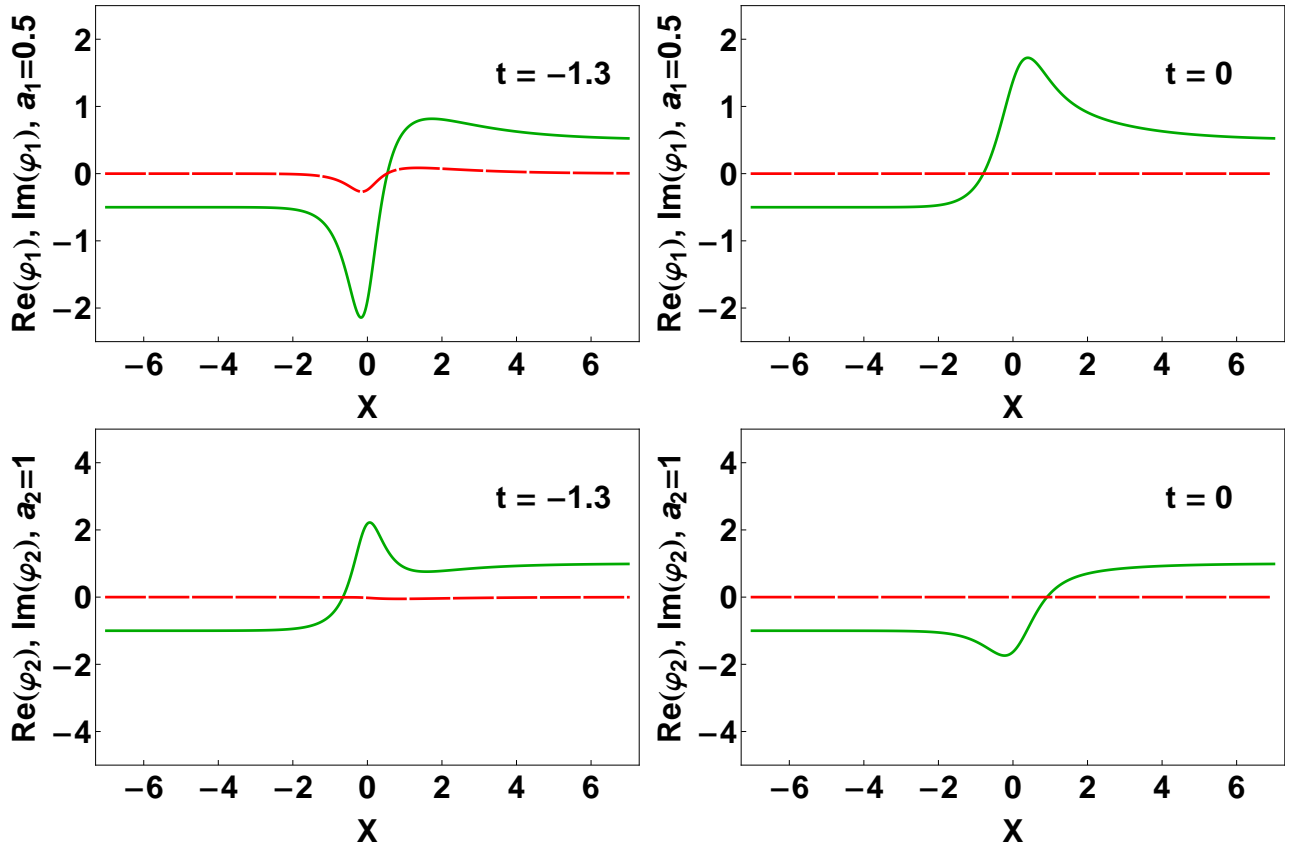


Рис. 42: Векторный аналог солитона Кузнецова. Действительная (зелёные непрерывные линии) и мнимая (красные штрихованные линии) части решения в разные моменты времени.

Параметры: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $R = 2$, $\alpha = 0$, $\mu_0 = 0$, $\mu = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$.

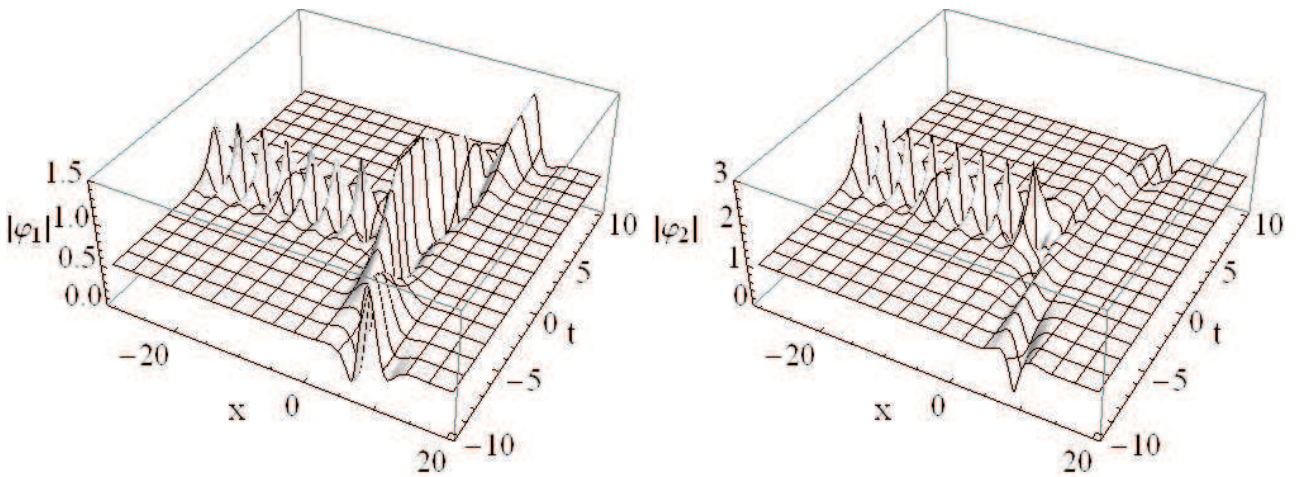


Рис. 43: Векторный аналог бризера Ахмедиева. Квадрат модуля решения в зависимости от x и t . Параметры: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $R = 1$, $\alpha = \pi/4$, $\mu_0 = 0$, $\mu = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$.

Это выражение тождественно равно нулю только если $q_{11} \equiv q_{12}$ и $q_{21} \equiv q_{22}$, что требует:

$$C_{10} = 0, \quad C_{20} = 0. \quad (246)$$

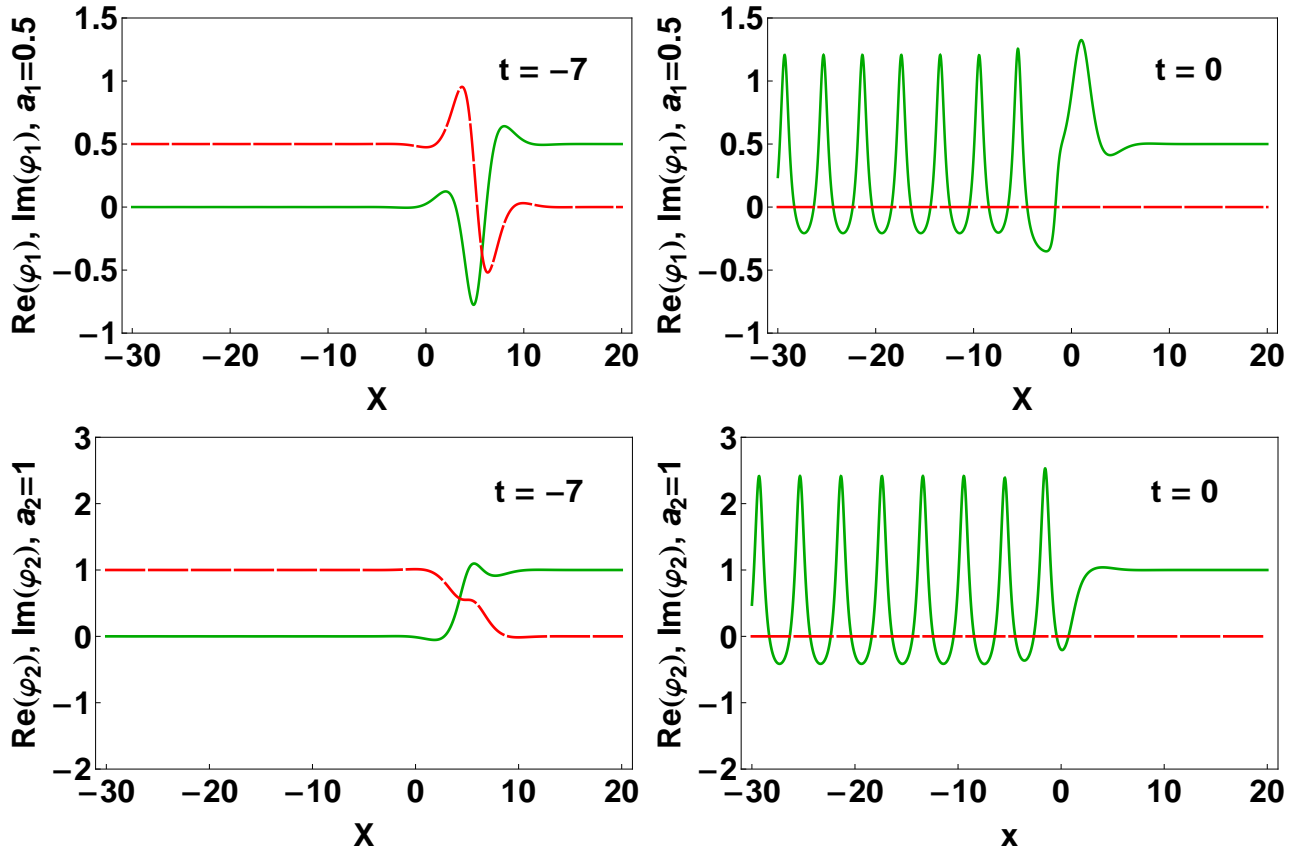


Рис. 44: Векторный аналог бризера Ахмедиева. Действительная (зелёные непрерывные линии) и мнимая (красные штрихованные линии) части решения в разные моменты времени.

Параметры: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $R = 1$, $\alpha = \pi/4$, $\mu_0 = 0$, $\mu = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$.

Однако, это и есть тривиальный векторный аналог скалярного решения (223). Таким образом, в векторном случае малое возмущение при выборе полюсов $\xi_1 = e^{i\alpha}$, $\xi_2 = e^{-i\alpha}$ появляется только в указанном случае и не приводит к качественно новым эффектам. Вопрос о нелинейной стадии модуляционной неустойчивости в рамках ВШУШ оказался существенно более запутанным и безусловно интересен для дальнейших исследований. На данный момент не ясно, существует ли иной солитонный механизм развития малых локализованных возмущений. Интересно рассмотреть обобщение на ВНУШ с тремя компонентами, которое также находит физические применения [57, 58].

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты работы.

1. С помощью метода одевания построено общее N - солитонное решение НУШ на фоне конденсата. Применение униформизации позволило получить явные выражения для солитонных решений в достаточно простом и ясном виде, удобном для анализа. Солитонные решения НУШ на фоне конденсата описаны с единой точки зрения. Введено понятие регулярного решения, т.е. решения которое не меняет фазу конденсата и тем самым может описывать модуляционную неустойчивость, развивающуюся из локализованных возмущений.
2. Обнаружен широкий класс $2N$ - солитонных (суперрегулярных) решений, которые описывают нелинейную стадию модуляционной неустойчивости, развивающуюся из малого локализованного возмущения. Эти решения формируют бесконечномерное функциональное пространство. Мы полагаем, что любое неустойчивое возмущение конденсата может быть в пределе аппроксимировано нелинейной комбинацией суперрегулярных решений.
3. Исследованы вырожденные солитонные решения НУШ на фоне конденсата, в частности, описаны вырожденные суперрегулярные решения.
4. Построено N -солитонное решение НУШ на фоне солитона Перегринна. Этот результат позволяет избежать вычисления предела всякий раз при исследовании новой нелинейной комбинации солитонов и тем самым демонстрирует преимущества метода одевания. В дальнейшем это позволит исследовать взаимодействие солитона Перегринна и суперрегулярных решений.

5. Показана возможность наблюдения суперрегулярных решений в экспериментах с гравитационными волнами на поверхности жидкости. Указаны параметры при которых целесообразно проводить данные эксперименты. Представлены результаты, демонстрирующие хорошее согласие теории и эксперимента.
6. Построено обобщение метода одевания для НУШ на фоне конденсата на векторный случай - систему Манакова. Описано общее односолитонное решение. Установлено, что выбор пары полюсов вблизи разреза с противоположными значениями параметра α не приводит к появлению суперрегулярных решений, за исключением тривиального обобщения решений скалярного случая.

Автор искренне благодарен профессору Владимиру Евгеньевичу Захарову за руководство работой, постоянное внимание, интересные задачи и моральную поддержку. Также автор благодарит профессора Евгения Александровича Кузнецова за предложенную задачу о нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, плодотворные обсуждения и ценные советы.

Работа над диссертацией проходила при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0035 от «25» ноября 2010 г.), гранта РФФИ № 12-01-00943-а, научного проекта РФФИ № 14-01-31378 мола, фонда Династия и программы поддержки лидирующих научных школ РФ № НШ-3753.2014.2.

Литература

- [1] **Zakharov, V. E.** Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid / V. E. Zakharov // J. Appl. Mech. and Tech. Phys. -1968.- Vol. 9, № 2. - P. 190–194.
- [2] **Akhmediev, N.** Dissipative Solitons / N. Akhmediev and A. Ankiewicz // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [3] **Sulem, C.** The nonlinear schrodinger equation. Self focusing and wave collapse / C. Sulem and P-L. Sulem // New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [4] **Kivshar, Y. S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y. S. Kivshar and G. Agrawal // Academic Press, 2003.
- [5] **Zakharov, V. E.** Kolmogorov Spectra of Turbulence / V. E. Zakharov, V. S. L'vov, G. Falkovich // Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [6] **Falkovich, G.** Fluid Mechanics. A Short Course for Physicists / Gregory Falkovich // Cambridge University Press, 2011.
- [7] **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика. Статистическая физика. Часть 2. том IX / Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, (Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский) // Физматлит, Москва, 2000.
- [8] **Zakharov, V. E.** Modulation instability: The beginning / V. E. Zakharov and L. A. Ostrovsky // Physica D, Vol. 238. P. 540-558.
- [9] **Zakharov, V. E.** Freak waves as nonlieral stage of Stokes wave modulation instability / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko and A. O. Prokofiev // Eur. J. Mech. B/Fluids. -2006.- Vol. 25, № 5. - P. 677–692.

- [10] **Zakharov, V. E.** New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko and O. A. Vasilyev // Eur. J. Mech. B/Fluids. -2006.- Vol. 23, № 1. P. 283–291.
- [11] **Pelinovsky, E.** Extreme Ocean Waves / E. Pelinovsky and C. Harif // Springer, 2008.
- [12] **Dyachenko, A. I.** On the formation of freak waves on the surface of deep water / A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov // JETP Lett. -2008.- Vol. 88, № 5. P. 307–311.
- [13] **Dysthe, K. B.** Note on breather type solutions of the NLS as a model for freak-waves / K. B. Dysthe and K. Trulsen // Physica Scripta -1999.- Vol. T82. P. 48–52.
- [14] **Zakharov, V. E.** About shape of giant breather / V. E. Zakharov and A. I. Dyachenko // Eur. J. Mech. B/Fluids. -2010.- Vol. 29 P. 127–131.
- [15] **Zakharov, V. E.** Optical solitons and quasisolitons / V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov // JETP. -1998.- Vol. 86, № 5. P. 1035–1046.
- [16] **Balakin, A. A.** Structural features of the self-action dynamics of ultrashort electromagnetic pulses / A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov and S. A. Skobelev // JETP. -2007.- Vol. 10, № 3. P. 363–378.
- [17] **Chalikov, D.** Modeling of extreme waves based on equations of potential flow with a free surface / D. Chalikov and D. Sheinin // J. Comp. Phys. -2005.- Vol. 210. P. 247–273.
- [18] **Kibler, B.** Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre / B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, G. Genty, B. Wetzels, N. Akhmediev, F. Dias and J. M. Dudley // Nature Sci. Reports -2012.- Vol. 2. P. 463.

- [19] **Kibler, B.** The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics / B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley // *Nature Phys. Lett.* -2010.- Vol. 6. P. 790–795.
- [20] **Chabchoub, A.** Rogue wave observations in wather wave tank / A. Chabchoub, N. P. Hoffman and N. Akhmediev // *Phys. Rev. Lett.* -2011.- Vol. 106, 204502.
- [21] **Zakharov, V. E.** Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media / V. E. Zakharov and A. B. Shabat // *Sov. Phys.-JETP.* -1972.- Vol. 34, № 1. P. 62–69.
- [22] **Faddeev, L. D.** Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons / L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan // Berlin: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [23] **Kharif, C.** Rogue Waves in the Ocean / C. Kharif, E. Pelinovsky and A. Slunyaev // Springer, 2009.
- [24] **Zakharov, V. E.** Theory of solitons. The inverse scattering method / V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov and L. P. Pitaevskii // New York, London: Plenum Press, 1984.
- [25] **Kuznetsov, E. A.** Solitons in a parametrically unstable plasma / E. A. Kuznetsov // *Sov. Phys.-Dokl. (Engl. Transl.)* -1977.- Vol. 22. P. 507–508.
- [26] **Ma, Y-C.** The Perturbed Plane-Wave Solutions of the Cubic Schrodinger Equations / Y-C. Ma // *Stud. Appl. Math.* -1979.-Vol. 60. P. 43–58.
- [27] **Chiao, R. Y.** Self-Trapping of Optical Beams / R. Y. Chiao, E. Garmire and C. H. Townes // *Phys. Rev. Lett.* -1964.- Vol. 13. P. 479–482.
- [28] **Agafontsev, D.** Rogue waves statistics in the framework of one-dimensional

- Generalized Nonlinear Schrodinger Equation / D. Agafontsev and V. Zakharov
// arXiv:1202.5763. -2012.
- [29] **Kawata, T.** Inverse Scattering Method for the Nonlinear Evolution Equations under Nonvanishing Conditions / T. Kawata and H. Inoue // Journ. Phys. Soc. Japan. -1978.- Vol. 44. P. 1722–1729.
- [30] **Peregrine, D. H.** Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions / D. H. Peregrine // J. Aust. Math. Soc. Ser. B -1983.- Vol. 25. P. 16–43.
- [31] **Shrira, V. I.** What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? / V. I. Shrira and V. V. Geogjaev // J. Eng. Math. -2010.- Vol. 67. P. 11–22.
- [32] **Akhmediev, N.** How to excite a rogue wave / N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo and A. Ankiewicz // Phys. Lett. A -2009.- Vol. 80, 043818.
- [33] **Its, A. R.** On exact integration of nonlinear schrodinger equation / A. R. Its, A. V. Rybin and M. A. Sall // Theor. Math. Phys. -1988.- Vol. 74, № 1. P. 20–32.
- [34] **Akhmediev, N. N.** Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: exact solutions / N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii and N. E. Kulagin // Sov. Phys.-JETP. -1985.- Vol. 89. P. 894-899.
- [35] **Akhmediev, N.** Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrodinger Equation / N. Akhmediev, A. Ankiewicz and J. M. Soto-Crespo // Phys. Rev. E -2009.- Vol. 80, 02660.
- [36] **Dubard, P.** Multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and the KP-I equation / P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein and V. .B. Matveev // Eur. Phys. J. Special Topics -2010.- Vol. 185. P. 247–258.

- [37] **Dubard, P.** On multi-rogue waves solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation / P. Dubard and V. B. Matveev // Nat. Hazards. Earth. Syst. Sci. -2011.- Vol. 11. P. 667–672.
- [38] **Dubard, P.** Multi-rogue waves solutions: from the NLS to the KP-I equation / P. Dubard and V. B. Matveev // Nonlinearity -2013.- Vol. 26. P. R93–R125.
- [39] **Slunyaev, A.** Nonlinear wave focusing on water of finite depth / A. Slunyaev, C. Kharif, E. Pelinovsky and T. Talipova // Physica D -2002.- Vol. 173, P. 77–96.
- [40] **Slunyaev, A.** Nonlinear analysis and simulations of measured freak wave time series / A. Slunyaev // Eur. J. Mech. B/Fluids -2006.- Vol. 25. P. 621–635.
- [41] **Akhmediev, N.** Extreme waves that appear from nowhere: On the nature of rogue waves / N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo and A. Ankiewicz // Phys. Lett. A -2009.- Vol. 373. P. 2137–2145.
- [42] **Zakharov, V. E.** Soliton on Unstable Condensate / V. E. Zakharov and A. A. Gelash // arXiv:1109.0620 -2011.
- [43] **Tajiri, M.** Breather solutions to the focusing nonlinear Schrodinger equation / M. Tajiri and Y. Watanabe // Phys. Rev. E -1998.- Vol. 57, № 3. P. 3510–3519.
- [44] **Matveev, V. B.** Darboux Transformations and Solitons / V. B. Matveev, M. Salle // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [45] **Kedziora, D. J.** Second-order nonlinear Schrodinger equation breather solutions in the degenerate and rogue wave limits / D. J. Kedziora, A. Ankiewicz and N. Akhmediev // Phys. Rev. E -2012.- Vol. 85, 066601.
- [46] **Zakharov, V. E.** Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering II // V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Functional Analysis and Its Applications -1980.- Vol. 13, № 3. P. 166–174.

- [47] **Zakharov, V. E.** Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method / V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov // Sov. Phys.-JETP. -1978.- Vol. 47, P. 1017–1027.
- [48] **Chabchoub, A.** Super RogueWaves: Observation of a Higher-Order Breather inWaterWaves / A. Chabchoub, N. Hoffman, M. Onorato and N. Akhmediev // Phys. Rev. X -2012.- Vol. 2, 011015.
- [49] **Baronio, F.** Solutions of the Vector Nonlinear Schroëdinger Equations: Evidence for Deterministic RogueWaves / Fabio Baronio Antonio Degasperis Matteo Conforti and Stefan Wabnitz // Phys. Rev. Lett. -2012.- Vol. 109, 044102.
- [50] **Priya, N. V.** Akhmediev breathers, Ma solitons, and general breathers from rogue waves: A case study in the Manakov system / N. Vishnu Priya, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan // Phys. Rev. E. -2013.- Vol. 88, 022918.
- [51] **Manakov, S. V.** On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves / S. V. Manakov // Sov. Phys.-JETP. -1974.- Vol. 38, № 2. P. 248–253.
- [52] **Radhakrishnan R.** Inelastic collision and switching of coupled bright solitons in optical fibers / R. Radhakrishnan, M. Lakshmanan, and J. Hietarinta // Phys. Rev. E. -1997.- Vol. 56, № 2. P. 2213.
- [53] **Busch, Th.** Dark-Bright Solitons in Inhomogeneous Bose-Einstein Condensates / Th. Busch and J. R. Anglin // Phys. Rev. Lett. -2001.- Vol. 87, 010401.
- [54] **Yan, Z.** Vector financial rogue waves / Z. Yan // Phys. Lett. A -2011.- Vol. 375, 4274.

- [55] **Dhar, A. K.** Fourthorder nonlinear evolution equation for two Stokes wave trains in deep water / A. K. Dhar and K. P. Dhas // Phys. Fluids A -1991.- Vol. 375, 3021.
- [56] **Zhao L-C.** Localized nonlinear waves in a two-mode nonlinear fiber / Li-Chen Zhao and Jie Liu // J. Opt. Soc. Am. B -2012.- Vol. 29, № 11, 3119.
- [57] **Yomba, E.** Modulational instability and exact solutions for a three-component system of vector nonlinear Schrodinger equations / Emmanuel Yomba and George R. Sell // J. Math. Phys. -2009.- Vol. 50, 053518.
- [58] **Zhao, Li-Chen** Rogue-wave solutions of a three-component coupled nonlinear Schrodinger equation / Li-Chen Zhao and Jie Liu // Phys. Rev. E -2013.- Vol. 87. P. 013201.

Публикации автора по теме диссертации

- [59] **Zakharov, V. E.** Nonlinear stage of Modulation Instability / V. E. Zakharov and A. A. Gelash // Physical Review Letters -2013.- Vol. 111, № 5. P. 054101-1 - 054101-5.
- [60] **Zakharov, V.** Freak waves as a result of modulation instability / Vladimir Zakharov and Andrey Gelash // Procedia IUTAM -2013.- Vol. 9C, № 5. P. 165-175.
- [61] **Gelash, A. A.** Superregular solitonic solutions: a novel scenario for the nonlinear stage of modulation instability / A. A. Gelash and V. E. Zakharov // Nonlinearity -2014.- Vol. 27, № 4. P. R1-R39.