

Статистическая механика двумерной черной дыры

1. Модель SYK

2. Двумерная гравитация и
гиперболическая геометрия

3. Новые результаты

} обзор

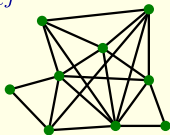
Модель SYK

N майорановских операторов χ_j

антисимметричный тензор

$$H = -\frac{1}{4!} \sum_{j,k,l,m} J_{jklm} \chi_j \chi_k \chi_l \chi_m$$

$$\overline{J_{jklm}} = 0, \quad \overline{J_{jklm}^2} = 3! \frac{J^2}{N^3}$$



$$\underline{T \ll J}$$

$$\chi_j \chi_k + \chi_k \chi_j = \delta_{jk}$$

$$a_n = \frac{\chi_{2n-1} + i \chi_{2n}}{\sqrt{2}}$$

$$N/2 \quad \left(2^{N/2} \right)$$

- Sachdev, Ye, 1993 – аналогичная модель с $SU(M)$ спинами с парным взаимодействием. (Спины сделаны из фермионов.)
- Kitaev, 2015 – данная модель.
- Подробные вычисления: Maldacena, Stanford, arxiv:1604.07818, Kitaev, Suh, arXiv:1711.08467

Чем интересна эта модель?

- Сильные корреляции при низких температурах ($\beta J \gg 1$);
не ферми-жидкость, не стекло.
- Точно решаемая:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ T^{-1} \end{array}$$

- Динамическое среднее поле при большом N
- Полное аналитическое решение при $N \gg \beta J \gg 1$

$$e^{-cN} \ll \frac{T}{J} = \frac{1}{\beta J}$$

квантовые флуктуации малы аналитическое решение интегральных уравнений

- Динамические симметрии при низких температурах $\beta J \gg 1$:
 - Мацубаровская функция Грина $G(\tau_1, \tau_2)$ инвариантна относительно группы преобразований $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.
 - Эффективное действие для среднего поля инвариантно относительно репараметризаций времени (группа $\text{Diff}(S^1)$).
- Мягкая мода, эквивалентная двумерной гравитации.

Диаграммы (высокотемпературное разложение)

Полная (мацубаровская) функция Грина:

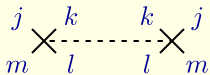
$$G(\tau_1, \tau_2) = -\langle \mathbf{T} \chi_j(\tau_1) \chi_j(\tau_2) \rangle \quad \underline{G}$$

Затравочная функция Грина: $\underline{G_b}$

$$\hat{G}_b = (-\partial_\tau)^{-1}, \quad G_b(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(\tau_1 - \tau_2)$$

Взаимодействие,

усредненное по беспорядку:



$$\underline{G} = \underline{G_b} + \text{diagram}$$

$$+ \text{diagram} + \text{diagram} + \dots$$

$\text{cross} \sim \frac{J_{ijklm}}{N^{3/2}}$
 $\text{cross} \dots \text{cross} \sim \frac{J^2}{N^3}$
 $\text{diagram} \sim \sum_{k,l,m} \frac{J^2}{N^3} \sim J^2$
 $\text{diagram} \sim N^{-2}$

Уравнения Дайсона

$$\underline{q=4}$$

$$\hat{G}^{-1} = -\partial_\tau - \hat{\Sigma},$$

$$\Sigma(\tau_1, \tau_2) = J^2 G(\tau_1, \tau_2)^{q-1}$$

$$\text{---} \textcircled{\text{wavy}} \text{---} = \text{---} \text{---}$$

$$(-\partial_\tau - \hat{\Sigma}) \hat{G} = 1,$$

$$(\Sigma G)(\tau_1, \tau_2) = \int d\tau \Sigma(\tau_1, \tau) G(\tau, \tau_2)$$

- Функционал действия $I = I[G, \Sigma]$:

$$I = N \left(-\ln \text{Pf}(-\partial_\tau - \hat{\Sigma}) + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \left(\Sigma(\tau_1, \tau_2) G(\tau_1, \tau_2) - \frac{J^2}{q} |G(\tau_1, \tau_2)|^q \right) \right)$$

Уравнения Дайсона отвечают седловой точке действия по G и Σ .

Решение на длинных временах ($|\tau_1 - \tau_2| \gg J^{-1}$)

можно пренебречь

$$(-\partial_\tau - \hat{\Sigma})\hat{G} = 1, \quad \Sigma(\tau_1, \tau_2) = J^2 G(\tau_1, \tau_2)^{q-1}$$



- Нулевая температура ($\beta = \infty$):

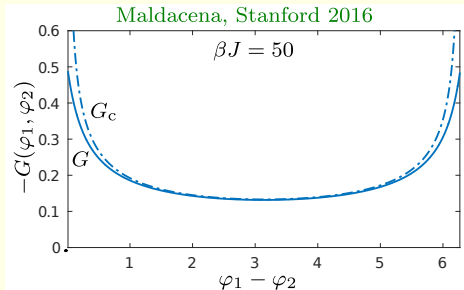
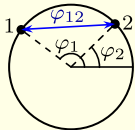
$$G_{\beta=\infty}(\tau_1, \tau_2) \approx -b^\Delta |J(\tau_1 - \tau_2)|^{-2\Delta} \text{sgn}(\tau_1 - \tau_2), \quad \Delta = 1/q$$

- Низкая, но конечная температура ($\beta J \gg 1$):

$$G(\tau_1, \tau_2) \approx \left(\frac{2\pi}{\beta J}\right)^{2\Delta} G_c\left(\frac{2\pi\tau_1}{\beta}, \frac{2\pi\tau_2}{\beta}\right)$$

$$G_c(\varphi_1, \varphi_2) = -b^\Delta |\varphi_{12}|^{-2\Delta} \text{sgn} \varphi_{12},$$

$$\varphi_{12} = 2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$



Мягкая (псевдо-голдстоуновская) мода

- В пределе низких температур ($\beta J \rightarrow \infty$) уравнения Дайсона и эффективное действие инвариантны относительно преобразования

$$\begin{aligned} \underline{G(\tau_1, \tau_2)} &\longrightarrow G(f(\tau_1), f(\tau_2)) f'(\tau_1)^\Delta f'(\tau_2)^\Delta \\ \Sigma(\tau_1, \tau_2) &\longrightarrow \Sigma(f(\tau_1), f(\tau_2)) f'(\tau_1)^{1-\Delta} f'(\tau_2)^{1-\Delta} \end{aligned} \quad \Delta = \frac{1}{q}$$

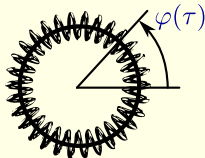
- Решения имеют следующий вид:

$$G(\tau_1, \tau_2) = G_{\beta=\infty}(f(\tau_1), f(\tau_2)) f'(\tau_1)^\Delta f'(\tau_2)^\Delta$$

где $G_{\beta=\infty}(\tau_1, \tau_2) = -b(\tau_1 - \tau_2)^{-2\Delta}$, $f(\tau) = e^{i\varphi(\tau)}$.

$$\varphi(\tau) = \frac{2\hat{\kappa}\tau}{\beta}$$

- При больших, но конечных значениях βJ действие зависит от отображения $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$. Наименьшее действие достигается при $\varphi(\tau) = \frac{2\pi}{\beta}\tau$.



Эффективное действие для мягкой моды

- Кинетическое слагаемое $-\partial_\tau$ в действии наиболее существенно на коротких временах, $|\tau_1 - \tau_2| \sim J^{-1}$.
- Давайте рассмотрим $G(\tau_1, \tau_2)$ на временах $J^{-1} \ll |\tau_1 - \tau_2| \ll \beta$:

$$G(\tau_1, \tau_2) \propto (f(\tau_1) - f(\tau_2))^{-2\Delta} f'(\tau_1)^\Delta f'(\tau_2)^\Delta \leftarrow f(\tau) = e^{i\varphi(\tau)}$$
$$\approx (\tau_1 - \tau_2)^{-2\Delta} \left(1 + \frac{\Delta}{6} \text{Sch}(f(\tau_+), \tau_+) (\tau_1 - \tau_2)^2 \right) \quad \tau_+ = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$$

$$\text{Sch}(f(\tau), \tau) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$$

$$\Delta = \frac{1}{q}$$

$$f(\tau) = f(\tau_+) + f'(\tau_+) (\tau - \tau_+) + \dots$$

до 3-его порядка

- Поправка со Шварцианом приводит к эффективному действию

$$I = -\alpha_S N J^{-1} \int_0^\beta \text{Sch}(e^{i\varphi(\tau)}, \tau) d\tau$$

где $\alpha_S \sim 10^{-2}$

Вклад мягкой моды в термодинамику

- Низкотемпературное разложение (при $J/N \ll T \ll J$):

$$F = -T \ln Z = E_0 - \underbrace{S_0}_{\text{энтропия при «нулевой» температуре}} T - 2\pi^2 \alpha_S N J^{-1} T^2 + \dots$$

энтропия при «нулевой» температуре

- Общий случай ($e^{-cN} J \ll T \ll J$):

$$\ln Z \approx -\beta E_0 + S_0 + \ln Z_{\text{Sch}}, \quad Z_{\text{Sch}} = \int D\varphi e^{-I_{\text{Sch}}[\varphi]}$$

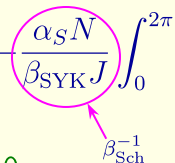
- При $T \gg J/N$ (т.е. $\beta J \ll N$) основной вклад дает конфигурация

$$\varphi(\tau) = \frac{2\pi}{\beta} \tau \quad \Rightarrow \quad \text{Sch}(e^{i\varphi(\tau)}, \tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2$$

$$I_{\text{Sch}} = -2\pi^2 \alpha_S \frac{N}{\beta J}, \quad Z_{\text{Sch}} = e^{-I_{\text{Sch}}}$$

Квантовая механика мягкой моды

- Статмеханическая задача:

$$Z_{\text{Sch}} = \int D\varphi e^{-I_{\text{Sch}}[\varphi]}, \quad I_{\text{Sch}}[\varphi] = -\frac{\alpha_S N}{\beta_{\text{SYK}} J} \int_0^{2\pi} \text{Sch}(e^{i\varphi(\theta)}, \theta) d\theta$$


- Ответ (Cotler *et al*, arXiv:1611.04650, Stanford, Witten, arXiv:1703.04612):

$$Z = \int_0^\infty e^{-\beta E} \rho(E) dE \propto \beta^{-3/2} e^{2\pi^2/\beta}, \quad \rho(E) \propto \sinh\left(2\pi\sqrt{2E}\right)$$

(при нормировке, соответствующей шварциану: $\beta = \beta_{\text{Sch}}$ и т.д.)

- Можно ли представить $\rho(E)$ как квантовую плотность состояний? Bagrets, Altland, Kamenev, arXiv:1607.00694, arXiv:1702.08902; Kitaev, Suh, arXiv:1808.07032

Гравитация (краткий обзор)

- Действие Эйнштейна-Гильберта:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int R \sqrt{-g} d^n x \quad \text{в сигнатуре } (- + \cdots +)$$

$$I = -\frac{1}{16\pi G_N} \int R \sqrt{g} d^n x \quad \text{в Евклидовой сигнатуре}$$

$n \geq 4$ — черные дыры и гравитационные волны

$n = 3$ — черные дыры (при $\Lambda < 0$); пространство-время жесткое

$n = 2$ — действие Эйнштейна-Гильберта вырождено так как $\frac{1}{2} \int_M R \sqrt{g} d^2 x = 2\pi - \int_{\partial M} K dl$ (теорема Гаусса-Бонне)

- Гравитация с дилатоном: $\Phi = \frac{1}{4G_N}$ — динамическая переменная
– Свойства при $n = 2$ аналогичны обычной гравитации с $n = 3$

Черные дыры

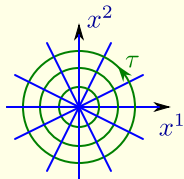
- Метрика Шварцшильда:

$$ds^2 = f(r) d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad \text{или} \quad ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2$$

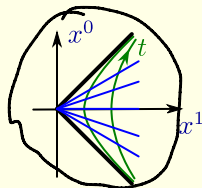
(мнимое время) (вещественное время)

в 4-х измерениях $f(r) = 1 - \frac{a}{r}$, $a = 2GM$, $r > a$

- Кажущуюся сингулярность при $r = a$ можно устранить заменой координат. Пусть $\tilde{r} = \sqrt{2(r - a)/\varkappa} \ll a$, где $\varkappa = \frac{1}{2}f'(a) = \frac{1}{2a}$.



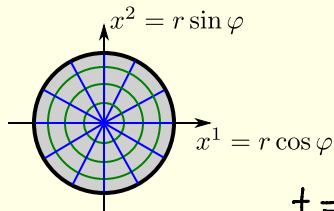
$$x^1 = \tilde{r} \cos(\varkappa\tau)$$
$$x^2 = \tilde{r} \sin(\varkappa\tau)$$



$$x^0 = \tilde{r} \sinh(\varkappa t)$$
$$x^1 = \tilde{r} \cosh(\varkappa t)$$

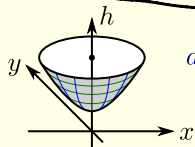
Двумерная гиперболическая геометрия

Плоскость Лобачевского



$$t = -i\varphi$$

$$ds^2 = 4 \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{(1 - r^2)^2}$$

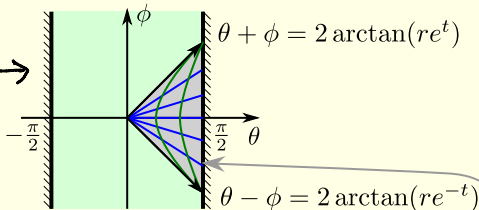


$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dh^2$$

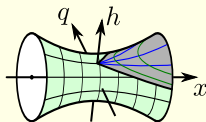
$$x^2 + y^2 - h^2 = -1$$

SO(2, 1)

Пространство $\widetilde{\text{AdS}}_2$



$$ds^2 = \frac{-d\phi^2 + d\theta^2}{\cos^2 \theta} = 4 \frac{-r^2 dt^2 + dr^2}{(1 - r^2)^2}$$



$$ds^2 = dx^2 - dq^2 - dh^2$$

$$x^2 - q^2 - h^2 = -1$$

SO(1, 2)

Двумерная гравитация

- Простейший вариант действия с дилатоном Φ (в евклидовом случае) имеет следующий вид:

$$I_{JT} = -\frac{1}{4\pi} \int_M (\Phi R + \underbrace{2\Phi}_{\text{дилатонный потенциал}}) \sqrt{g} d^2x - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} \underbrace{\Phi K}_{\text{внешняя кривизна}} dl$$

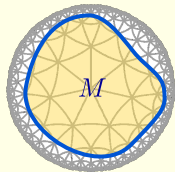
Jackiw (1985), Teitelboim (1983)

- $\frac{\delta I_{JT}}{\delta \Phi(x)} = 0 \Rightarrow R = -2$. Следовательно, метрика соответствует плоскости Лобачевского, а действие равно

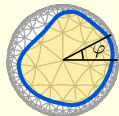
$$I_{JT} = -\underbrace{\gamma \int_{\partial M} K dl}_{2\pi + \text{area}(M)} = \underbrace{-\gamma \text{area}(M)}_{\text{«геометрическое действие» } I_g} - 2\pi\gamma, \quad \gamma = \frac{\Phi_*}{2\pi}$$

- Если граница области M близка к единичной окружности,

то $K \approx 1 + \text{Sch}(e^{i\varphi(\ell)}, \ell), \quad I_g \approx I_{\text{Sch}} + \gamma(2\pi - L)$

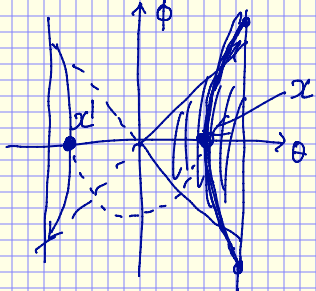
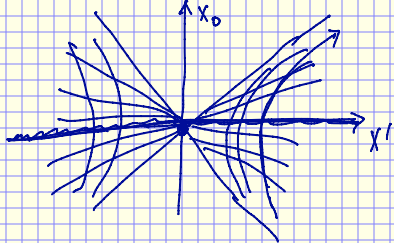


$$\Phi|_{\partial M} = \Phi_*, \quad \int dl = L$$



План остальной части доклада

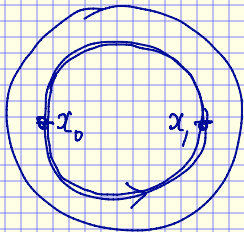
1. Подробнее о геометрическом действии.
2. Статсумма и плотность состояний.
3. Переход от мнимого времени к вещественному; гильбертово пространство и гамильтониан (с использованием представлений $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$).
4. Двусторонняя черная дыра и thermofield double; $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ -инвариантные волновые функции.
5. Интерпретации плотности состояний.



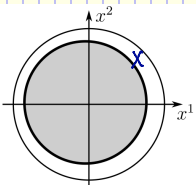
$$G_E(x, x_0)$$



$$\Psi_{IE}(x, x')$$



Подробнее о геометрическом действии

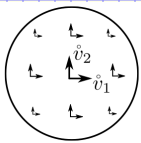


$$ds^2 = 4 \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{(1-r^2)^2}$$

$$I_g[X] = -\gamma \text{area}(X) = -\gamma \int \omega_\alpha dx^\alpha$$

~~заряд~~ $\nu = -i\gamma$
 конст

$$SO(2) \cong U(1)$$



$$\vec{v}_1 = \frac{1-r^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

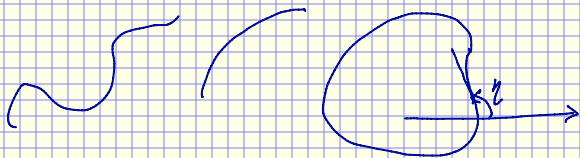
$$\vec{v}_2 = \frac{1-r^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_\alpha^a{}_b \quad \xi^\alpha = v_a^\alpha \xi^a$$

$$(\nabla_\alpha \xi)^a = \partial_\alpha \xi^a + \omega_\alpha^a{}_b \xi^b$$

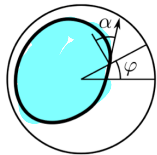
$$\nabla_\alpha \psi = (\partial_\alpha - i\gamma \omega_\alpha) \psi$$

$$\omega_\alpha^a{}_b = \omega_\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^a{}_b, \quad \omega_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$K = \frac{dn}{dl} + \omega_\alpha \frac{dx^\alpha}{dl}$$

$$\int K dl = 2\pi + \int \omega_\alpha dx^\alpha$$



$$r\varphi' = \frac{1-r}{2} \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$r' = \frac{1-r^2}{2} \sin \alpha,$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\ell}$$

$$K = \varphi' - \alpha' + \dot{\omega}_\mu (X^\mu)' = \underbrace{\frac{1+r^2}{2r} \cos \alpha}_{r, \varphi, \alpha} - \alpha'.$$

r, φ, α

$$\dot{\omega}_r = 0, \quad \dot{\omega}_\varphi = \frac{2r}{1-r^2}$$

$$\varphi' \approx 1-r$$

$$r' \approx \varphi' \alpha \Rightarrow \alpha \approx -\frac{\varphi''}{\varphi'}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \ll 1 \\ 1-r \ll 1 \end{array} \right\}$$

$\left. \begin{array}{l} L \gg 1 \\ \gamma \gg 1 \end{array} \right\}$ инвариантный предел

$$K - 1 \approx \underbrace{\frac{1}{2} \varphi'^2}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)'}_{\frac{1}{2}} = \underbrace{\text{Sch}(e^{i\varphi}, \varphi) \varphi'^2}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\text{Sch}(\varphi, \ell)}_{\frac{1}{2}} = \text{Sch}(e^{i\varphi}, \ell),$$

$$I_g = -\gamma \int \omega_\alpha \dot{X}^\alpha d\tau \quad l \rightarrow \tau$$

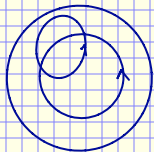
$$\int |\dot{x}| d\tau = \int dl = L$$

$$I_g + ML = \int \mathcal{L}_E d\tau$$

$$\mathcal{L}_E = -\gamma \omega_\alpha \dot{X}^\alpha + M|\dot{X}|$$

$$K = \frac{\gamma}{M}$$

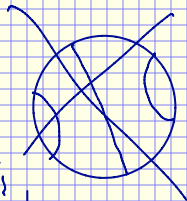
$$KM = \gamma$$



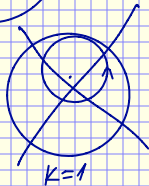
$K > 1$



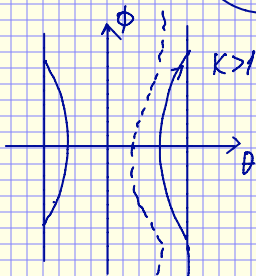
$0 < K < 1$



$K = 0$




$K = 1$



Статсумма и плотность состояний

$$Z(L) = \frac{1}{\text{vol}(\text{PSL}(2, \mathbb{R}))} \int G(x_0, x_0; L) dx_0$$


$$= \frac{1}{2\pi} G(0, 0; L)$$

$$G(x_1, x_0; L) = \int DX e^{-I_g[X]} \delta(\text{length}[X] - L)$$


$$I_g = -\gamma \int \omega_\alpha dx^\alpha$$

$$I[X] = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta - \gamma \omega_\alpha \dot{X}^\alpha \right),$$

$$G(x_1, x_0; \beta) = \int_{\substack{X(0)=x_0 \\ X(\beta)=x_1}} DX e^{-I[X]}.$$

$$\nabla^2 = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$$


$$\partial_\tau G(x_1, x_0; \tau) = \frac{1}{2} \nabla_{x_1}^2 G(x_1, x_0; \tau),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} G(x_1, x_0; \tau) = \frac{\delta(x_1 - x_0)}{\sqrt{g(x_1)}}$$

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha - i\gamma \omega_\alpha$$

$v = -i\gamma$

$$- \omega_\alpha \delta_\alpha (\nabla_\beta v)$$

$$-\nabla^2 = \square - \gamma$$

Группа $PSL(2, \mathbb{R})$ и ее универсальное накрытие

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

$$sl_2 \begin{pmatrix} \delta a & \delta b \\ \delta c & \delta d \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = iL_0$$



$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{L_{-1} - L_1}{2}$$



$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{iL_{-1} + iL_1}{2}$$



$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}$$

$$n, m = -1, 0, 1$$

$$Q = -L_0^2 + \frac{1}{2} (L_{-1}L_1 + L_1L_{-1})$$

Неприводимые унитарные представления

$$m \in \mu + \mathbb{Z}$$

$$Q = \lambda(1-\lambda)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + i\mu$$

$$e^{-2\pi i \Lambda_0} = e^{+2\pi i \mu}$$

$$\mu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$m = \lambda, \lambda+1, \lambda+2, \dots$$

$$L_{-1}|m\rangle = -\sqrt{(m-\lambda)(m-1+\lambda)}|m-1\rangle,$$

$$L_0|m\rangle = -m|m\rangle,$$

$$L_1|m\rangle = -\sqrt{(m+\lambda)(m+1-\lambda)}|m+1\rangle.$$

$$L_0 = \gamma - i\partial_\varphi$$

$$L_{\pm 1} = \dots$$

$$\psi(r, \varphi) = \psi(r)$$

$$u = r^2$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ m = \gamma \end{cases}$$

$$\hat{Q} = -(1-u)^2 (u\partial_u^2 + \partial_u) + \gamma^2(1-u)$$

$$G(x_1, x_0; \tau) = \int e^{-E\tau} G_E(x_1, x_0) dE,$$

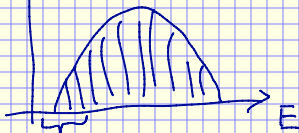
$$G_E(x, 0) = \psi_E(x) \psi_E(0)^*$$

$$E = \frac{1}{2}(\lambda(1-\lambda) - \gamma^2), \quad \lambda = \frac{1}{2} + iS, \quad -\nabla^2 = \underbrace{Q}_{\lambda(r^2)} - \gamma^2$$

$$\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle = \delta(E - E')$$

$$\rho(E) \sim |\psi_E(0)|^2 \sim \frac{\sinh(2\pi S)}{\cosh(2\pi S) + \cosh(2\pi\gamma)} \approx e^{-2\pi\gamma} \cdot 2 \sinh(2\pi S)$$

ρ_{SYK}



$\gamma \gg 1$

$S \ll \gamma$

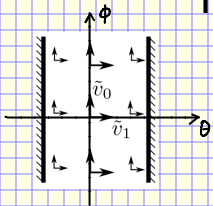


$\rho_{Sch}(E)$

$\gamma \gg 1$

$1-u \ll 1$

Переход от мнимого времени к вещественному



$$H^2 \rightarrow \widehat{AdS}_2$$

$$\tau \rightarrow T = -i\tau$$

$$\psi_{H^2} \rightarrow t_{AdS}$$

$$\varphi_1 = \phi - \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \phi + \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\psi(\theta, \phi) = e^{i\mu\phi} \psi(\theta)$$

$$E \sim \lambda(1-\lambda)$$

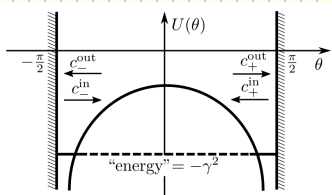
$$P(E) \approx \int P(E, \mu) d\mu$$

$$Q = \cos^2 \theta (-\partial_\theta^2 + (\gamma^2 - \mu^2) - 2\gamma\mu \tan \theta)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + iS$$

$$Q|\psi\rangle = \lambda(1-\lambda)|\psi\rangle$$

$$(-\partial_\theta^2 + U(\theta))\psi = -(\gamma^2 - \mu^2)\psi$$



$$\psi_{\lambda, m}^\nu(\phi, \theta) \approx \begin{cases} (c_+^{\text{in}}(\pi - 2\theta)^\lambda + c_+^{\text{out}}(\pi - 2\theta)^{1-\lambda}) e^{im\phi} & \text{for } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ (c_-^{\text{in}}(\pi + 2\theta)^\lambda + c_-^{\text{out}}(\pi + 2\theta)^{1-\lambda}) e^{im\phi} & \text{for } \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$L_{-1}|m\rangle = -\sqrt{(m-\lambda)(m-1+\lambda)}|m-1\rangle$$

$$L_0|m\rangle = -m|m\rangle,$$

$$L_1|m\rangle = -\sqrt{(m+\lambda)(m+1-\lambda)}|m+1\rangle$$

$$m \in \mu + \mathbb{Z}$$

$$\nu = -i\gamma$$

$$\psi_{\alpha, \lambda, m}^{\nu}(\phi, \theta)$$

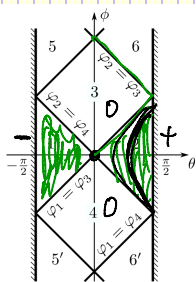
$$\alpha = +, -$$

$$L_{-1} \psi_{\lambda, \mu}^{\nu} = -\sqrt{(\mu-2)(\mu-1+2)} \psi_{\lambda, \mu-1}^{\nu}$$

Двусторонняя черная дыра и thermofield double

$$\Psi_{\lambda, \mu}^{\nu}[R](\phi, \theta; \phi', \theta') = \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha\beta} \sum_{m \in \mu + \mathbb{Z}} (\psi_{\alpha})_{\lambda, m}^{\nu}(\phi, \theta) \cdot (\psi_{\beta})_{\lambda, m}^{\nu}(\phi', \theta')^*$$

$$\Psi(\underbrace{\phi, \theta}_x; \underbrace{\phi', \theta'}_x)$$



$$1) \underline{\Psi}_E \leftrightarrow G_E$$

$$2) Q|\Psi_E\rangle = \lambda(1-\lambda)\Psi_E$$

$$Q'|\Psi_E\rangle = \lambda(1-\lambda)\Psi_E$$

$$3) \Psi_E = 0 \text{ в областях}$$

3, 4, 5, 6, 5', 6', \dots

$$P = \int P_{E, \mu} dE d\mu$$

$$Z = \text{tr} (e^{-\beta H} P) \quad \left("P_E = \rho(E) \Pi_E" \right)$$

$$\Psi = \int \Psi_E dE$$

$$\text{tr} = \frac{1}{\text{vol}(\text{SL}(2, \mathbb{R}))} \text{Tr}$$

$$P(x, x'') = \int_{\widehat{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \backslash \widehat{\text{AdS}}_2 \times \widehat{\text{AdS}}_2} \Psi(x, x') \Psi(x', x'')^* d^2 x' \sqrt{-g}$$

$$\left| \begin{array}{c} \bullet \\ x' \end{array} \leftarrow \dots \leftarrow \begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array} \right|$$

$$\frac{1-w}{1+w} \ll 1$$

$$e^{-\phi}$$

$$w = \tanh^2 \frac{z}{2}$$

рег. масс.
x, x'